

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire :

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques.

Option : Statistique et Analyse Décisionnelle.

THÈME :

*Application de l'inférence bayésienne
en fiabilité.*

Présenté par :

M^{elle} BOUHDOU Samia & M^{elle} BRAHAM Hayette.

Devant le jury :

Président :	Mr A. AIT SAIDI	Professeur	U. A/MIRA, Béjaïa.
Rapporteur :	M ^{me} L. BOURAINE	M.C.B	U. A/MIRA, Béjaïa.
Examinatrice :	M ^{me} K. LAGHA	M.C.B	U. A/MIRA, Béjaïa.

Béjaïa, Dimanche 23 juin 2013

Remerciements

Louange à Allah, le tout puissant et miséricordieux qui nous a prodigué le courage et la force afin de mener à terme notre travail.

Nous souhaitons manifester notre reconnaissance particulièrement à M^{me} L.BOURAINE, pour nous avoir encadrés avec un suivi constant et pour sa disponibilité tout au long de notre travail.

Nous tenons également à remercier Mr M. BOURAINE pour son aide et sa générosité.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes chers parents symbole de sacrifice, de tendresse et d'amour, sont les moindres sentiments que je puisse leurs témoigner. Quoi que je fasse, je ne pourrais jamais les récompenser pour les grands sacrifices qu'ils ont faits et continuez de faire pour moi ;

A la mémoire de mes grands-parents ;

A mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours soutenue, surtout Mira et Kadi ;

A toute ma famille et à mes amis ;

A ma binôme Hayette.

Samia.

Je dédie ce travail :

A mes parents, que ce travail leur apporte joie et fierté et qu'il soit le fruit de leur éducation, conseils et encouragement ;

A mes sœurs et à mon petit frère ainsi qu'à toute ma famille ;

A mes très chers amis pour leurs aide et soutient.

A ma binôme Samia.

Hayette.

Table des matières

Liste des tableaux	2
Liste des figures	3
Introduction générale	4
1 Concepts généraux de la fiabilité	7
1.1 Introduction	7
1.2 Principales définitions	7
1.2.1 Fiabilité	7
1.2.2 Durée de vie	8
1.2.3 Défaillance	9
1.2.4 Disponibilité	10
1.2.5 La maintenance	10
1.2.6 Les temps moyens	11
1.3 Modèles usuels de fiabilité	12
1.3.1 Principales lois de probabilités	12
1.3.2 Lois non paramétriques de fiabilité (Distributions de vieillissement)	19
1.4 Fiabilité des systèmes	21
1.4.1 Système en série	21
1.4.2 Système en parallèle	23
1.4.3 Système k parmi n	25
1.5 Conclusion	27
2 L'inférence bayésienne	28
2.1 Introduction	28
2.2 Les principes de la démarche bayésienne	29
2.2.1 L'approche bayésienne usuelle	29
2.2.2 Le mécanisme de l'inférence bayésienne	30
2.2.3 Information a priori	32
2.2.4 Loi a priori	32
2.2.5 Loi a posteriori	33
2.2.6 Proportionnalité	34

2.3	Estimation bayésienne ponctuelle	34
2.3.1	Estimateur de Bayes	34
2.3.2	Estimateur du maximum a posteriori	35
2.4	Estimation bayésienne par intervalle de crédibilité	36
2.5	L'approche bayésienne des tests	38
2.6	Modélisation de l'information a priori	39
2.6.1	Lois a priori non informatives	40
2.6.2	Distributions a priori conjuguées	40
2.6.3	Le poids de l'a priori dans la réponse bayésienne	41
2.7	Les principes de construction de l'a priori	42
2.8	Modélisation des avis d'experts	44
2.9	Conclusion	44
3	Applications de l'inférence bayésienne dans l'évaluation des paramètres de fiabilité	45
3.1	Introduction	45
3.2	Estimation paramétrique des tests de durée de vie	46
3.2.1	Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV) des temps et des taux de défaillance	46
3.2.2	Distribution a posteriori du taux de défaillance en fonctionnement	47
3.2.3	Distribution a posteriori du temps moyen entre défaillances (MTTF)	48
3.2.4	Distribution a posteriori de la fiabilité d'un matériel	48
3.3	Choix d'une distribution a priori	49
3.3.1	Distribution a priori uniforme, et distributions a posteriori correspondantes	49
3.3.2	Distribution a priori gamma, et distributions a posteriori correspondantes	57
3.3.3	Autres distributions a priori, et a posteriori correspondantes	60
3.4	Application à un cas industriel : évaluation de la fiabilité de calculateurs	61
3.4.1	Application de l'approche fréquentielle	62
3.4.2	Application de l'approche bayésienne	63
3.5	Conclusion	65
	Conclusion	65
	Bibliographie	66

Liste des tableaux

2.1	Distributions de probabilité conjuguées	41
2.2	Le poids de l'a priori dans la réponse bayésienne.	42
3.1	Retour d'expérience sur les calculateurs.	62

Table des figures

1.1	Représentation graphique du taux de défaillance : courbe en baignoire.	10
1.2	Chronogramme liés à la fiabilité et à la disponibilité d'un composant.	11
1.3	Diagramme de fiabilité d'un système en série.	22
1.4	Exemple de système monté en série.	23
1.5	Diagramme de fiabilité d'un système en parallèle.	24
1.6	Exemple de système monté en parallèle.	25
1.7	Diagramme de fiabilité d'un système k parmi n.	25
1.8	Système 2 parmi 4.	26
2.1	Principe de la démarche bayésienne.	30
2.2	Différentes formes d'informations a priori.	32
3.1	Distributions a priori et a posteriori du taux de défaillance du fonctionne- ment des robinets.	55
3.2	Densités de probabilité a priori et a posteriori des temps entre défaillances.	55
3.3	Densité de probabilité a priori et a posteriori du taux de défaillance.	57

Introduction générale

L'homme est curieux et c'est sans doute ce qui explique le mieux son cheminement depuis le début de l'humanité. Le besoin de comprendre les phénomènes observés et le désir de les anticiper sont au cœur de ses préoccupations ; c'est ce qui explique le succès de la statistique, une discipline scientifique en plein essor, permettant de prendre de bonnes décisions en présence de l'incertain.

La statistique a toujours été un sujet qui a dérouté beaucoup de gens. Sa base remonte au milieu du 18^{ème} siècle et l'analyse des jeux de hasard. La statistique et la théorie des probabilités peuvent être attribuées à la Grèce antique, mais elles ont été plus particulièrement développées dans le milieu du 17^{ème} siècle par le mathématicien français Fermat, Laplace, et d'autres. Thomas Bayes (né à Londres 1701-1761) a eu ses œuvres, qui comprennent le théorème qui porte son nom lu dans la procédure de British Royal Society (à titre posthume) par un collègue en 1763.

Pendant des années, et même de nos jours la communauté des statistiques semble avoir un schisme entre les "objectivistes ou fréquentistes" et leur interprétation dite "classique" de la probabilité, et les "bayésiens" qui ont une interprétation plus large de la probabilité. D'un point de vue de la fiabilité, les calculs classiques peuvent être considérés comme un sous-ensemble de calculs bayésiens.

Cependant les observations des statisticiens indiquent que dans la bataille sur les techniques à appliquer aux problèmes, les bayésiens ont gagné, mais les techniques classiques sont encore largement utilisées, facile à mettre en œuvre et très utiles. Nous les utilisons à la fois, le but de ce mémoire est d'appliquer les techniques bayésiennes en fiabilité.

Plusieurs travaux de recherche sur la statistique bayésienne en fiabilité ont été réalisés à Los Alamos National Laboratory (LANL) (voir [11] [7] [12]).

Le premier point est de reconnaître que la fiabilité ne devrait pas être considérée comme une seule valeur fixe inconnue que nous essayons d'estimer. La fiabilité a une incertitude qui lui est associée, ce qui nous impose de la traiter comme une variable aléatoire en utilisant des distributions de probabilité et le langage des statistiques, c'est-à-dire, quelle est la probabilité que la fiabilité d'un système ou composante aura une valeur supérieure à un certain nombre donné (généralement une spécification de fiabilité) ? Nous verrons que, spécifier une valeur de fiabilité souhaitée n'est pas suffisant, mais il faut aussi spécifier un certain niveau de confiance pour que la fiabilité soit supérieure à la valeur désirée. Cela deviendra clair lorsque les distributions de fiabilité sont définies et calculés.

Il est également intéressant de noter que la fiabilité bayésienne a été activement poursuivie pendant au moins 30 à 40 ans, et le LANL a développé des techniques pour prédire la fiabilité des missiles ainsi que le dos de l'arsenal nucléaire des nations dans les années 1980 et avant ...

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier nous nous limitons à un rappel bref sur des notions et définitions de base de la théorie de la fiabilité, celles de l'inférence bayésienne font l'objet du deuxième chapitre, à savoir les lois a priori et a posteriori ainsi que l'estimation ponctuelle et par intervalle de crédibilité . . . , que nous voyons utiles pour la suite de notre travail. Dans le troisième chapitre et après avoir donné un aperçu théorique sur l'application de l'approche bayésienne dans l'estimation des paramètres de fiabilité, nous donnons deux exemples : dans le premier nous estimons le taux de défaillance, le temps moyen entre défaillance et la fiabilité, relatifs à un test de robinets d'isolement. Dans le deuxième nous traitons un cas industriel où nous évaluons la fiabilité de calculateurs par les deux démarches fréquentielle et bayésienne.

Chapitre 1

Concepts généraux de la fiabilité

1.1 Introduction

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel... Elle est liée à des notions de sécurité et de sûreté de fonctionnement, de qualité, d'efficacité et de performance. Cette théorie a comme objectif d'étudier l'aptitude de dispositifs techniques (machines, équipements, composants, éléments...) à accomplir une fonction requise, dans des conditions données et pendant une durée donnée.

Nous admettons qu'au départ chaque dispositif est en état de fonctionnement. Les défaillances se produisant de façon aléatoire, il est logique de faire appel au calcul des probabilités pour résoudre des problèmes de fiabilité.

1.2 Principales définitions

1.2.1 Fiabilité

Il y a plusieurs façons de définir la fiabilité. Familièrement, la fiabilité est la propriété qu'un matériel fonctionne quand on veut l'utiliser.

Nous définissons aussi la fiabilité d'un dispositif comme étant la probabilité qu'il fonctionne correctement pendant un intervalle de temps donné, c'est-à-dire qu'il n'a pas de défaillances pendant cet intervalle. La fiabilité d'un groupe d'éléments à un instant t est donc la probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant la période $[0, t]$, donc la probabilité que l'instant de la première défaillance X soit supérieur à t :

$$R(t) = \mathbb{P}(X > t). \quad (1.2.1)$$

1.2.2 Durée de vie

On appelle durée de vie (life time) de cet équipement, l'intervalle de temps entre sa mise en service jusqu'à la première défaillance.

Sa fonction de répartition est :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t). \quad (1.2.2)$$

ou bien, par complémentarité de (1.2.1), la fonction cumulée de défaillance $F(t)$,

$$F(t) = 1 - R(t). \quad (1.2.3)$$

Elle représente la probabilité de défaillance de l'équipement avant l'instant t ou la probabilité de défaillance dans l'intervalle $[0, t]$.

On définit ensuite $f(t)$, la probabilité de défaillance d'un élément à un instant t . C'est la dérivée de la fonction $F(t)$:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{-dR(t)}{dt}. \quad (1.2.4)$$

- **Durée de survie** (Durée de vie résiduelle)[5].

On considère un équipement ayant fonctionné sans défaillance jusqu'à l'instant t , on appelle durée de survie d'un équipement d'âge " t ", X_t , le temps d'attente de la panne. C'est une v.a définie par :

$$X_t = X - t. \quad (1.2.5)$$

de fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \mathbb{P}(X_t \leq x | X > t), \\ &= \mathbb{P}(X - t \leq x | X > t), \end{aligned}$$

$$F_t(x) = \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}. \quad (1.2.6)$$

et de fonction de fiabilité :

$$\begin{aligned} \bar{F}_t(x) &= 1 - F_t(x), \\ &= 1 - \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \end{aligned}$$

donc :

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}. \quad (1.2.7)$$

1.2.3 Défaillance

C'est la cessation d'une aptitude à accomplir une fonction requise, c'est aussi le passage de l'état de fonctionnement à l'état de panne. On distinguera sa cause (circonstances ayant entraîné la défaillance), son taux $\lambda(t)$ qui représente la probabilité qu'un élément tombe en panne au cours de l'intervalle $[t, t+x]$, sachant qu'il a fonctionné sans défaillance jusqu'à la date t . Il est donné par :([3], [5])

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)}.\end{aligned}$$

Si F est dérivable on aura :

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{-\overline{F}'(t)}{\overline{F}(t)}. \quad (1.2.8)$$

En intégrant (1.2.8), la fonction de fiabilité s'écrira :

$$\overline{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\mu) d\mu\right). \quad (1.2.9)$$

Interprétation : [5]

Le terme taux de défaillance sous-entend une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible d'interpréter $\lambda(t)$ comme le pourcentage moyen de pannes par unité de temps qui apparaissent à la date t .

En général, le taux de défaillance d'un élément mécanique a l'allure d'une courbe en "baignoire" modélisant les trois phases de la vie de cet élément (voir FIG.1.1).

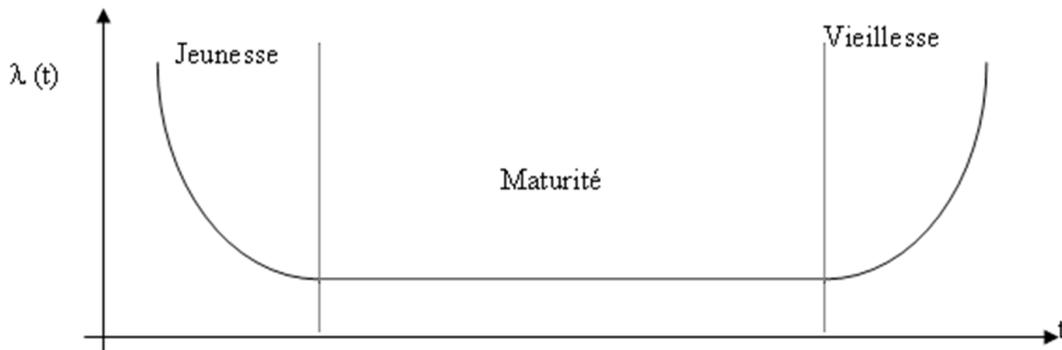


FIG. 1.1 – Représentation graphique du taux de défaillance : courbe en baignoire.

* **Phase I :**

Période de jeunesse où $\lambda(t)$ est décroissant qui est caractérisé par des pannes précoces dites de jeunesse (défauts de conception, défauts de fabrications,...).

* **Phase II :**

Période de maturité où $\lambda(t)$ est sensiblement constant $\lambda(t) = \lambda$ qui correspond à la vie utile de l'élément. Les défaillances survenant pendant cette période sont dites accidentelles.

* **Phase III :**

Période de vieillesse où $\lambda(t)$ est croissant, qui correspond à la période d'usure de l'élément.

1.2.4 Disponibilité

La disponibilité caractérise la capacité d'un système à fonctionner lorsqu'on le demande. En particulier, la disponibilité d'un système est souvent caractérisée par sa capacité à rester dans un état de fonctionnement pendant les périodes de repos [15].

1.2.5 La maintenance

La maintenance désigne l'ensemble des opérations nécessaires pour maintenir un système à un niveau de fiabilité donné. Sa maintenabilité caractérise la facilité avec laquelle on le maintient en bon fonctionnement.

Selon le moment de son exécution, on distingue deux formes de maintenance : la maintenance corrective (MC), elle englobe toute action exécutée après défaillance dans le but de rétablir l'état de fonctionnement, et la maintenance préventive (MP) qui inclut toute action effectuée avant la défaillance, dans le but de réduire la probabilité de son occurrence [8].

1.2.6 Les temps moyens

La vie utile d'un équipement comporte des cycles de fonctionnement. Au cours d'un cycle, l'équipement passe de l'état de fonctionnement à l'état de panne "hors d'usage" et ce, pour un matériel réparable.

L'analyse de ce cycle, fait remarquer qu'il est composé du :

Temps moyen entre pannes (**MTBF** : Mean Time Between Failure) qui comporte :

1. Le temps moyen de bon fonctionnement (**MUT** : Mean Up Time)
2. Le temps moyen d'arrêt (**MDT** : Mean Down Time) qui contient :

Le temps moyen de réparation (**MTTR** : Mean Time To Repair) qui est le principal indicateur de la maintenabilité [5].

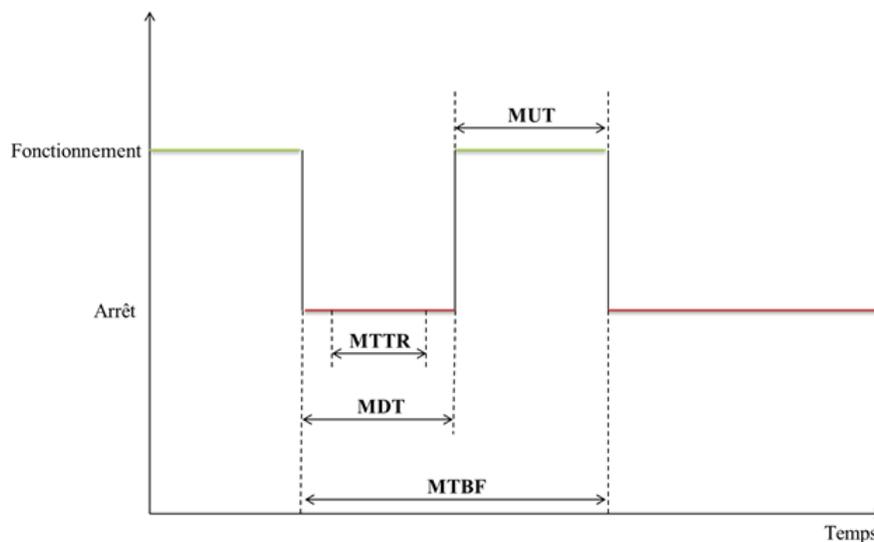


FIG. 1.2 – Chronogramme liés à la fiabilité et à la disponibilité d'un composant.

Le temps moyen de bon fonctionnement (MUT) appelé aussi MTTF (Mean Time To Faillure) qui correspond à l'espérance mathématique de la durée de vie X ou du temps à la défaillance qui est donné par :

$$\begin{aligned} MUT = MTTF &= \mathbb{E}(X), \\ &= \int_0^{+\infty} t f(t) dt, \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt, \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} R(t) dt. \quad (1.2.10)$$

1.3 Modèles usuels de fiabilité

1.3.1 Principales lois de probabilités

Loi exponentielle :

C'est une loi, qui dépend d'un seul paramètre. Elle s'applique généralement bien aux matériels électroniques, et d'une façon générale aux matériels qui subissent des défaillances brutales, ou à des systèmes complexes, composés de plusieurs composants dont les lois de fiabilité élémentaires sont différentes.

Elle décrit la période pendant laquelle les temps de bon fonctionnement des matériels sont constants, c'est-à-dire la période pendant laquelle la probabilité de défaillance est la même à tout instant, d'où l'inutilité d'effectuer toute action de maintenance préventive.

La distribution exponentielle est associée aux processus de Poisson que l'on définit comme un processus qui génère des événements, dont les temps inter-occurrences sont indépendants, et qui sont identiquement distribués selon une loi exponentielle.

La loi exponentielle est caractérisée par sa densité de probabilité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \text{ et } \lambda > 0. \quad (1.3.1)$$

Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - R(x), \quad x \geq 0. \quad (1.3.2)$$

$R(x)$ étant la fonction de fiabilité d'un équipement, elle représente la probabilité pour que cet équipement survive au moins jusqu'au temps x :

$$R(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (1.3.3)$$

L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.3.4)$$

appelé aussi le temps moyen de bon fonctionnement, alors que λ , le taux de défaillance est, comme on l'a vu, la probabilité conditionnelle d'apparition de défaillance.

Sa variance est définie par :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad x \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Propriété 1.1. "Absence de mémoire" [5]

Soit X une v.a de loi $\text{Exp}(\alpha)$, de fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, et soit $X_t = X - t$ la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t . Alors : $\bar{F}_t(x) = \bar{F}(x)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \bar{F}_t(x) &= 1 - F_t(x), \\ &= \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \\ &= \frac{e^{\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

alors :

$$\bar{F}_t(x) = \bar{F}(x). \quad (1.3.6)$$

On dit alors que la loi exponentielle a la propriété d'absence de mémoire. Ceci signifie que la probabilité de bon fonctionnement sur la période $[t, t+x]$ ne dépend pas de la durée de fonctionnement écoulée t , elle ne dépend que de la longueur de cet intervalle.

On dit aussi qu'un élément usagé de loi $\text{Exp}(\cdot)$ est aussi bon qu'un élément neuf : "As good as new".

Loi Gamma

La loi exponentielle représente un cas particulier de la famille des lois gamma. La loi gamma est généralement une loi à deux paramètres : $\alpha > 0$, le paramètre d'échelle et $\beta > 0$, le paramètre de forme et on la note $\gamma(\alpha, \beta)$. Elle représente la loi de probabilité d'occurrence de β évènements dans un processus poissonien. Par exemple si X_i est le temps entre les défaillances successives d'un système, et que X_i suive une distribution exponentielle, le temps cumulé d'apparition de β défaillances suit une distribution gamma de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad (1.3.7)$$

avec $x \geq 0$, et $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.3.8)$$

Cette loi est souvent utilisée pour modéliser les temps de défaillance d'un matériel, et peut, par conséquent, être employée comme distribution a priori dans l'analyse de fiabilité bayésienne. Elle est conjuguée avec la loi exponentielle, ce qui facilite singulièrement leurs intégrations.

La loi gamma est considérée comme une généralisation de la loi exponentielle. Elle peut représenter toutes les phases de vie d'un matériel :

- $\alpha < 1$, période de jeunesse,
- $\alpha = 1$, loi exponentielle (vie utile),
- $\alpha > 1$, période de vieillesse.

La moyenne et la variance de la loi gamma sont respectivement :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (1.3.9)$$

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (1.3.10)$$

Dans des cas particuliers, la loi gamma s'identifie à d'autres lois :

- Pour $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle.
- Pour $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$ la loi obtenue est celle de χ_n^2 .

– Lorsque α est un entier, on obtient la loi d'Erlang de fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0. \quad (1.3.11)$$

Remarque 1.1. La loi d'Erlang est utilisée dans les problèmes de redondance séquentielle, ainsi que pour représenter certains phénomènes de défaillances en chaîne.

Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

La loi normale est la loi la plus répandue parmi les lois de probabilité, car elle s'applique à de nombreux phénomènes, notamment en physique et en économie (erreurs de mesure), et qu'en outre, elle est la forme limite de nombreuses distributions discrètes (en particulier, celle de loi binômiale, représentative des résultats obtenus dans les jeux de hasard). Sa fonction de densité de probabilité a la forme d'une courbe en cloche.

C'est une loi absolument continue et symétrique, qui dépend de deux paramètres, l'espérance mathématique m qui correspond au paramètre de location, et la variance σ^2 , le paramètre d'échelle, qui mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne.

Elle est généralement notée : $\mathcal{N}(m, \sigma)$, et sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right), \quad (1.3.12)$$

avec : $-\infty < x < +\infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < m < +\infty$.

Dans le cas particulier où $m = 0$ et $\sigma = 1$, X sera dite de loi normale centrée et réduite (tabulée) notée $\mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème 1.1. [5] Si la durée de vie d'un élément suit une loi normale de paramètres m et σ^2 , alors le taux de défaillance est une fonction monotone croissante du temps.

Remarque 1.2. Cette loi s'utilise pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est croissant.

Loi log-normale

De nombreux phénomènes de mortalité ou de durée de réparation sont distribués selon des lois log-normales. Comme la loi normale, elle dépend de deux paramètres m et σ^2 . Le paramètre d'échelle de la loi est : e^m , alors que le paramètre de forme est σ .

Une variable aléatoire continue, positive X est distribuée suivant une loi log-normale si son logarithme est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est aussi utilisée

en fiabilité pour modéliser les défaillances par fatigue. Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x) - m}{\sigma}\right)^2\right), \quad x \geq 0. \quad (1.3.13)$$

Son espérance mathématique est :

$$\mathbb{E}(X) = e^{(m + \frac{\sigma^2}{2})}, \quad (1.3.14)$$

sa variance :

$$V(X) = e^{2(m + \sigma^2) - 1}. \quad (1.3.15)$$

La distribution log-normale est un modèle fréquemment utilisé en fiabilité, car elle est positive, et le paramètre de forme σ lui permet des représentations très variées : en particulier elle s'applique lorsque les observations faites sont les conséquences d'un effet multiplicatif de différentes causes indépendantes et aléatoires [14].

Loi de Weibull

La distribution de Weibull a été utilisée pour la première fois pour décrire la fatigue des équipements mécaniques (Weibull 1989). Sa popularité résulte du fait que non seulement elle généralise la loi exponentielle, mais aussi contient plusieurs paramètres qui la rendent représentative d'une très grande variété de phénomènes aléatoires. Elle a l'avantage de pouvoir représenter les différentes phases de la vie d'un matériel : jeunesse, vie utile et vieillesse.

Cependant, faute de statistiques réduites suffisantes, l'inférence basée sur un modèle général de Weibull implique toujours une perte d'informations, de plus que ses paramètres sont difficiles à estimer.

La loi de Weibull est une loi continue à trois paramètres :

1. γ , appelé le paramètre de position qui représente en fait le décalage qui existe entre le début de l'observation et le début du processus examiné ;
2. η , le paramètre d'échelle lié au temps moyen de bon fonctionnement ;
3. β , le paramètre de forme associé à la cinétique du processus observé.

En fonction de la valeur de ses paramètres, elle peut s'ajuster à de nombreux résultats expérimentaux, ainsi :

- Si $\beta < 1$, le taux de défaillance décroît avec le temps, ce qui est représentatif de la période de jeunesse des matériels dans la courbe en baignoire : cette période justifie l'intérêt du déverminage.
- Si $\beta = 1$, le taux de défaillance est constant avec le temps, ceci correspond à la période de vie utile, on retrouve la loi exponentielle.
- Si $\beta > 1$, le taux de défaillance croît avec le temps, on aborde alors la période de vieillesse ou d'usure ; c'est là qu'il faudra intervenir de façon préventive.

Une variable aléatoire continue X est distribuée selon une loi de Weibull, lorsque sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right), \quad x \geq \gamma. \quad (1.3.16)$$

Sa fonction de répartition a pour expression :

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right), \quad x \geq \gamma. \quad (1.3.17)$$

L'espérance mathématique est donnée par la relation :

$$\mathbb{E}(X) = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \quad (1.3.18)$$

où Γ est la fonction gamma qui est tabulée, et que l'on peut calculer avec : $\Gamma(\beta) = (\beta-1)!$, pour les valeurs entières de β .

Sa variance est donnée par :

$$V(X) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]. \quad (1.3.19)$$

son taux de défaillance est :

$$\lambda(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}. \quad (1.3.20)$$

Loi Bêta

C'est une loi très générale dont la distribution peut présenter des formes symétriques ou asymétriques très diverses. Cette loi est fréquemment utilisée dans la démarche bayésienne et en contrôle de qualité.

- **Loi Bêta de type I** : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi $\beta_I(a, b)$ si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.3.21)$$

avec $a, b > 0$, et $\beta(\cdot, \cdot)$ est la fonction bêta définie par :

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (1.3.22)$$

Cette loi représente en particulier, la probabilité pour qu'un matériel survive au moins jusqu'à un temps t , quand on essaie a matériels, d'où son intérêt dans l'évaluation de la durée des essais de fiabilité.

L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}, \quad (1.3.23)$$

et sa variance :

$$V(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}. \quad (1.3.24)$$

Cette loi est souvent utilisée en statistique bayésienne (survie d'un matériel) comme distribution a priori de la probabilité d'un événement qui suit une distribution binomiale. Les deux lois étant conjuguées naturelles, le calcul de la distribution a posteriori est alors simplifié.

Elle sert à exprimer en particulier la fiabilité $R(t)$ d'un système composé de a matériels tel que :

$$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t).$$

- **Loi Bêta de type II** : Si X suit une loi bêta de type I, alors par définition, $Y = \frac{X}{1-X}$ suit une loi bêta de type II, dont la densité est :

$$f(y) = \frac{1}{\beta(a, b)} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}, \quad y \geq 0. \quad (1.3.25)$$

L'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{a}{b-1}, \quad b > 1, \quad (1.3.26)$$

et la variance est :

$$V(Y) = \frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}, \quad b > 2. \quad (1.3.27)$$

Enfin, on calcule facilement la valeur de la fonction bêta : $\beta(a, b)$ grâce à sa relation avec la fonction gamma :

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}, \quad (1.3.28)$$

pour des valeurs entières positives de a et b .

Loi de Pareto[5]

Une v.a X suit une loi de Pareto si :

Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c_0}{x}\right)^a, \quad a > 1 \text{ et } x \geq c_0 > 0. \quad (1.3.29)$$

Sa fonction de densité de probabilité est alors :

$$f(x) = \frac{a}{c_0} \left(\frac{c_0}{x}\right)^{a+1}, \quad a > 1, \quad x \geq c_0. \quad (1.3.30)$$

Son espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a-1} c_0, \quad \text{si } a > 1, \quad (1.3.31)$$

et sa variance est :

$$V(X) = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)^2} c_0^2, \quad \text{si } a > 2. \quad (1.3.32)$$

Son taux de défaillance est :

$$\lambda(x) = \frac{a}{x}. \quad (1.3.33)$$

1.3.2 Lois non paramétriques de fiabilité (Distributions de vieillissement)

Lorsqu'il s'agit des applications de l'optimisation de la maintenance sur des systèmes réels (systèmes industriels), nous sommes souvent confrontés à un certain nombre de problèmes, tels que le manque de données (échantillon de petite taille) et les censures sur les données. On utilise les lois non paramétriques lorsqu'on s'intéresse à une propriété qualitative de l'équipement étudié (taux de défaillance \nearrow ou \searrow , ...) ou lorsqu'on n'arrive pas à choisir parmi plusieurs distributions paramétriques ajustant le même échantillon [5] et [8].

Distribution IFR (DFR)

On dit qu'une distribution F est à taux de défaillance croissant (décroissant), en anglais Increasing (Decreasing) Failure Rate, notée IFR (DFR) si :

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)},$$

est décroissante (resp. croissante) en t , $\forall t \geq 0$ et $x \geq 0$.

- F est IFR (DFR) si $\log(R(t))$ est une fonction concave (convexe) en t , pour $t \geq 0$ telle que $F(t) < 1$.
- F est IFR (DFR) si le taux de défaillance est croissant (resp. décroissant) en t , $\forall t \geq 0$.

Distribution IFRA (DFRA)

On entend par distribution IFRA (DFRA), une distribution F à taux de défaillance croissant (décroissant) en moyenne, en anglais Increasing (Decreasing) Failure Rate in Average.

- F est IFRA (DFRA) si $(\frac{-1}{t}) \log(R(t))$ est croissant (décroissant) en $t \geq 0$.
- F est IFRA (DFRA) si

$$\wedge(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(\mu) d\mu, \quad (1.3.34)$$

est croissant (resp. \searrow) en t , $\forall t \geq 0$.

Remarque 1.3. Si F est IFR (DFR) $\Rightarrow F$ est IFRA (DFRA).

Distribution NBU (NWU)[8]

Une distribution NBU sous-entend qu'un élément neuf est meilleur (resp. pire) qu'un élément usagé. En anglais New Better (resp. worse) than Used.

Une distribution F est NBU (NWU) si :

$$R(x + y) \leq (\geq) R(x) R(y), \quad (1.3.35)$$

pour $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Cette expression s'écrit aussi :

$$R(x) = \frac{R(x + y)}{R(y)} \leq (\text{resp. } \geq) R(x) \quad \forall x \geq 0 \text{ et } y \geq 0. \quad (1.3.36)$$

En d'autres termes, la fiabilité d'un élément d'âge y est inférieure (resp. supérieure) à celle d'un élément neuf.

Remarque 1.4. si F est IFRA (DFRA) $\Rightarrow F$ est NBU (NWU).

Distribution NBUE :(NWUE)[8]

Soit F une distribution de moyenne $\mu = \int_0^{+\infty} R(x) dx$. NBUE (NWUE) signifie qu'un élément neuf est meilleur (pire) qu'un élément usagé en moyenne, en anglais New is Better (Worse) than Used in Expectation.

Une distribution F est NBUE (NWUE) si :

$$\int_t^{+\infty} R(x) dx \leq (\geq) \mu R(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (1.3.37)$$

cette expression est équivalente à :

$$\mathbb{E}(X_t) \leq (\geq) \mathbb{E}(X), \quad (1.3.38)$$

cela veut dire que la moyenne de la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t est inférieure à celle d'un élément neuf.

Remarque 1.5. Si F est NBU (NWU) $\Rightarrow F$ est NBUE (NWUE).

1.4 Fiabilité des systèmes

Lorsque nous travaillons avec des systèmes réels non réparables (mécaniques, électroniques ou autres), nous sommes confrontés à des contraintes différentes suivant le type de montage que nous avons. La méthode de fiabilité des systèmes permet de modéliser simplement la logique de fonctionnement d'un système. C'est notamment une présentation proche du schéma fonctionnel.

1.4.1 Système en série

On dit qu'un système est en série si la panne de n'importe quel élément du système engendre la panne de tout le système, ou encore le système fonctionne si tous ses éléments fonctionnent [5].



FIG. 1.3 – Diagramme de fiabilité d'un système en série.

Si on note T_i la durée de vie d'un élément "i", alors la durée de vie du système correspond à :

$$T = \min_{i=1,n} T_i. \quad (1.4.1)$$

Ainsi la fiabilité du système, notée $R(t)$ est le produit des fiabilités des éléments qui le composent :

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t). \quad (1.4.2)$$

Ce qui nous amène bien à une valeur nulle pour la fiabilité si au minimum un composant a une fiabilité nulle.

Le taux de défaillance du système, noté $\lambda(t)$ est la somme des taux de défaillance des éléments qui le composent :

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (1.4.3)$$

Remarque 1.6. Dans le cas des composants électroniques, le taux de défaillance est souvent considéré comme constant par souci de simplification et la fonction de densité est alors celle de la loi exponentielle.

Le temps moyen de bon fonctionnement du système est inférieur à chacun des temps moyens de fonctionnement de ses composants.

$$\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}(T_i), \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (1.4.4)$$

Exemple 1.1. Soit trois composants montés en série (voir FIG.1.4), dont la durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre α , de fiabilités respectives : $R_1(t), R_2(t)$ et $R_3(t)$.

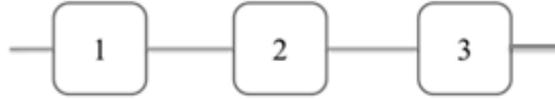


FIG. 1.4 – Exemple de système monté en série.

1. La fiabilité :

$$\text{On a : } R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = e^{-\alpha t}.$$

$$R(t) = \prod_{i=1}^3 R_i(t) = e^{-3\alpha t}.$$

2. La durée de vie moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} R(t) dt,$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = \frac{1}{3\alpha}.$$

3. Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

$$\lambda(t) = \alpha e^{-\alpha t} / e^{-3\alpha t} = \alpha e^{2\alpha t}.$$

1.4.2 Système en parallèle

Contrairement au système précédent, ce système continue à fonctionner si au moins un composant fonctionne (typiquement les systèmes de redondance dans les avions, les fusées ou les centrales nucléaires).

En d'autres termes, il est en panne lorsque tous ses éléments sont en pannes.

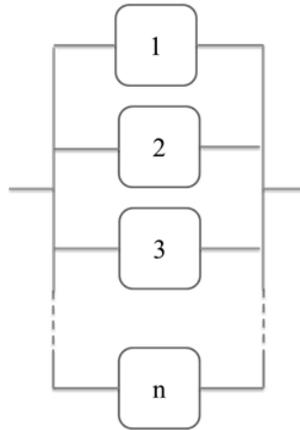


FIG. 1.5 – Diagramme de fiabilité d'un système en parallèle.

La durée de vie d'un système en parallèle est le max des durées de vie des éléments qui le composent, ie :

$$T = \max_{i=1,n} T_i. \quad (1.4.5)$$

– La fiabilité du système est alors :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)). \quad (1.4.6)$$

– Le temps moyen de bon fonctionnement du système est supérieur au temps de bon fonctionnement de chacun de ses composants. En effet :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) &= 1 - R(t), \\ \Rightarrow 1 - R(t) &\leq 1 - R_i(t), \\ \Rightarrow -R(t) &\leq -R_i(t), \\ \Rightarrow R(t) &\geq R_i(t). \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(T_i) \leq \mathbb{E}(T), \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (1.4.7)$$

Exemple 1.2. Soit trois composants montés en parallèle (Voir FIG.1.6), dont la durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre α , de fiabilités respectives : $R_1(t)$, $R_2(t)$ et $R_3(t)$.

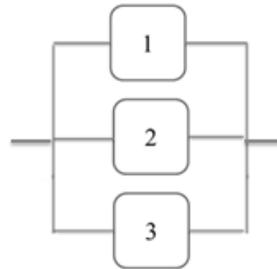


FIG. 1.6 – Exemple de système monté en parallèle.

1. La fiabilité :

$$\text{On a : } R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = e^{-\alpha t},$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - R_i(t)) = 3e^{-\alpha t} - 3e^{-2\alpha t} + e^{-3\alpha t}.$$

2. La durée de vie moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} R(t) dt,$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} 3e^{-\alpha t} - 3e^{-2\alpha t} + e^{-3\alpha t} dt = \frac{11}{6\alpha}.$$

3. Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

$$\lambda(t) = \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{3e^{-\alpha t} - 3e^{-2\alpha t} + e^{-3\alpha t}} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3}e^{\alpha t} + \alpha e^{2\alpha t}.$$

1.4.3 Système k parmi n

Ce système fonctionne lorsque k au moins des n composants fonctionnent. Il tombe en panne lorsque moins de k éléments parmi les n fonctionnent.

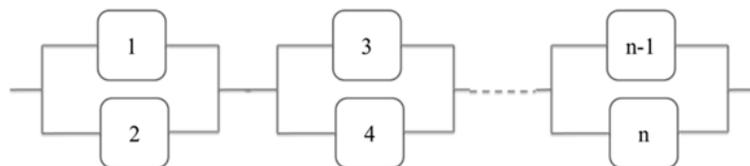


FIG. 1.7 – Diagramme de fiabilité d'un système k parmi n.

Remarque 1.7. – Le cas où $k = n$ correspond au système en série ;
 – Le cas où $k = 1$ correspond au système en parallèle.

Si $R_1(t)=R_2(t)= \dots =R_n(t)=p$, alors :

$$R(t) = \sum_{i=1}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i}. \tag{1.4.8}$$

Exemple 1.3. On dispose d'un système de 4 éléments (Voir FIG.1.8) de fiabilités respectives : $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ et $R_4(t)$. On désire calculer sa fiabilité, sa durée de vie ainsi que son taux de défaillance.

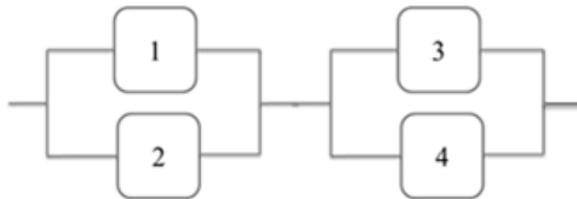


FIG. 1.8 – Système 2 parmi 4.

1. La fiabilité :

On a : $R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = R_4(t) = e^{-\alpha t}$.

$$R(t) = [1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))][1 - (1 - R_3(t))(1 - R_4(t))],$$

$$R(t) = (2 e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t})^2.$$

2. La durée de vie moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} R(t)dt,$$

$$\mathbb{E}(X) = 4 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt - 4 \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-4\alpha t} dt = \frac{11}{12\alpha}.$$

3. Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)},$$

On a : $R(t) = 4 e^{-2\alpha t} - 4 e^{-3\alpha t} + e^{-4\alpha t}$,

Donc :

$$\lambda(t) = \frac{4 \alpha (2 e^{-2\alpha t} - 3 e^{-3\alpha t} + e^{-4\alpha t})}{4 e^{-2\alpha t} - 4 e^{-3\alpha t} + e^{-4\alpha t}}.$$

1.5 Conclusion

La construction des modèles de fiabilité, nécessite la connaissance de la loi de survie du système (composants). Elle peut être obtenue par l'ajustement de la loi de probabilité sur un échantillon de données de défaillances issues du retour d'expérience. Ce dernier est caractérisé par un manque de données et des censures, par conséquent il doit faire l'objet d'un traitement adapté. En particulier, la démarche bayésienne permet de garantir une bonne qualité d'estimation et réduire ainsi l'effet des incertitudes pouvant découler de la faible taille des échantillons, ainsi que la présence des censures. Les notions de base de cette approche, font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

L'inférence bayésienne

2.1 Introduction

L'application des méthodes bayésiennes ont augmenté au cours de ces dernières années. Aujourd'hui, avec les progrès des calculs et de la méthodologie, les chercheurs utilisent les méthodes bayésiennes pour résoudre une variété croissante de problèmes complexes. En de nombreuses applications, ces méthodes donnent d'importants avantages par rapport aux techniques méthodologiques classiques.

L'inférence bayésienne est le seul cadre d'inférence statistique qui obéit toujours au principe de vraisemblance. Simplement dit, le principe de vraisemblance indique que toutes les informations contenues dans les données expérimentales sont contenues dans la densité de l'échantillonnage des données observées [7].

L'application de la théorie de Bayes en fiabilité utilise la notion de loi de probabilité a priori et de loi de probabilité a posteriori, dont les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Or, souvent, les données disponibles ne concernent que les deux premiers moments, parfois même un seul chiffre de fiabilité. Le problème est d'extraire, le maximum d'informations de ces données sans créer artificiellement de l'information. La méthode bayésienne nous permet d'intégrer et d'utiliser l'information au-delà de celles contenues dans les données expérimentales. Que ce soit il avait ou pas un tel test de données disponibles, un analyste de la fiabilité saura souvent d'autres informations pertinentes sur la valeur des paramètres de fiabilité inconnus. Cette approche ne répond pas seulement à la demande de prédiction de paramètres de fiabilité dans le futur à partir de la connaissance présente et passée, mais aussi à la nécessité de définir les paramètres d'un système dès sa conception.

Avant de passer à l'application de cette démarche, il est bon de revenir sur l'essentiel de ses notions et de les préciser sous leur aspect pratique.

2.2 Les principes de la démarche bayésienne

2.2.1 L'approche bayésienne usuelle

L'approche bayésienne est, comme on l'a dit, basée sur des probabilités a priori et a posteriori.

Rappelons que, contrairement à l'approche fréquentielle qui attend des données pour construire des statistiques et les traiter, cette approche part d'hypothèses a priori basées sur des avis d'experts en l'absence d'observations disponibles.

D'autre part, cette approche modélise l'information sous la forme de lois de probabilité paramétriques et c'est la valeur du (ou des) paramètre(s) qui est (sont) à déterminer. On utilise pour cela la méthode du maximum de vraisemblance a posteriori quand les premières données sont disponibles.

Puis, quand celles-ci sont en nombre suffisant, on peut construire la loi de probabilité a posteriori. On dispose donc au cours du temps, dans leur ordre de détermination, de :

- La loi de probabilité a priori ;
- La loi conditionnelle des observations recueillies ou la fonction de vraisemblance ;
- La loi de probabilité a posteriori ;

Le schéma suivant représente bien le principe de cette approche (Fig.2.1) :

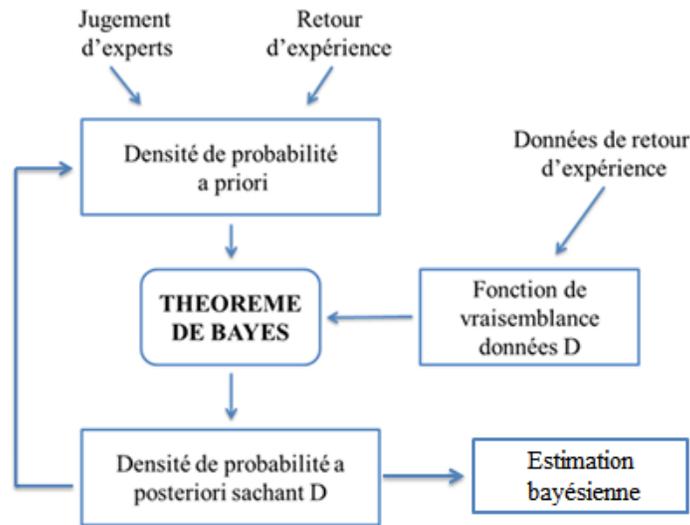


FIG. 2.1 – Principe de la démarche bayésienne.

2.2.2 Le mécanisme de l'inférence bayésienne

Le processus d'inférence comporte les étapes suivantes :

- Choix d'un modèle relatif aux données : distribution conditionnelle. La distribution conditionnelle appartient à une famille de lois de probabilités ;
- Détermination d'une distribution a priori du paramètre de la loi conditionnelle, pour intégrer des informations subjectives. Elle est établie à partir des connaissances que l'on a sur le matériel étudié : essais antérieurs sur le matériel similaire, avis d'experts, retour d'expérience, enquêtes, etc ;
- Obtention de la distribution a posteriori par application du théorème de Bayes qui permet de combiner l'information subjective et l'information objective contenue dans l'échantillon ;
- Estimation du paramètre de fiabilité étudiée (taux de défaillance, par exemple) déduite de la distribution a posteriori.

Le théorème de Bayes

Théorème 2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A, B \in \mathcal{A}$.

Supposons que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et considérons une partition A_1, A_2, \dots, A_n de Ω .

Pour un A_i particulier, la formule de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} ,$$

permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

L'addition des probabilités d'événements disjoints et la règle des probabilités composées permettent d'écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

D'où la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \quad (2.2.1)$$

Exemple 2.1. (Fiabilité d'ampoules électriques) [2]

Une entreprise utilise trois types d'ampoules électriques notées T_1, T_2 et T_3 , de proportions respectives 60%, 30%, 10%. La probabilité de bon fonctionnement de ces trois types pour un temps donné s'élèvent à 0,9, 0,8 et 0,5 respectivement.

On cherche la probabilité qu'une ampoule tombée en panne soit de type T_1 ?

Si l'on introduit les événements

$B =$ " Une ampoule choisie au hasard tombe en panne "

$A_i =$ " Une ampoule est de type T_i ", $i = 1, 2, 3$

Il s'agit de calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)} , \\ &= \frac{(0,1) \cdot (0,6)}{(0,1) \cdot (0,6) + (0,2) \cdot (0,3) + (0,5) \cdot (0,1)} , \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{6}{17}.$$

2.2.3 Information a priori

On appelle information a priori sur le paramètre θ toute information disponible sur θ en dehors de celles apportées par les observations, elle est entachée d'incertitude (si ce n'était pas le cas, θ serait connu avec certitude et on n'aurait pas à l'estimer!). Il est naturel de modéliser cette information a priori à travers d'une loi de probabilité, appelée loi a priori.

Les différents types d'informations a priori

Les sources d'informations a priori peuvent être objectives ou subjectives. Elles sont illustrées sur la figure suivante [15] :

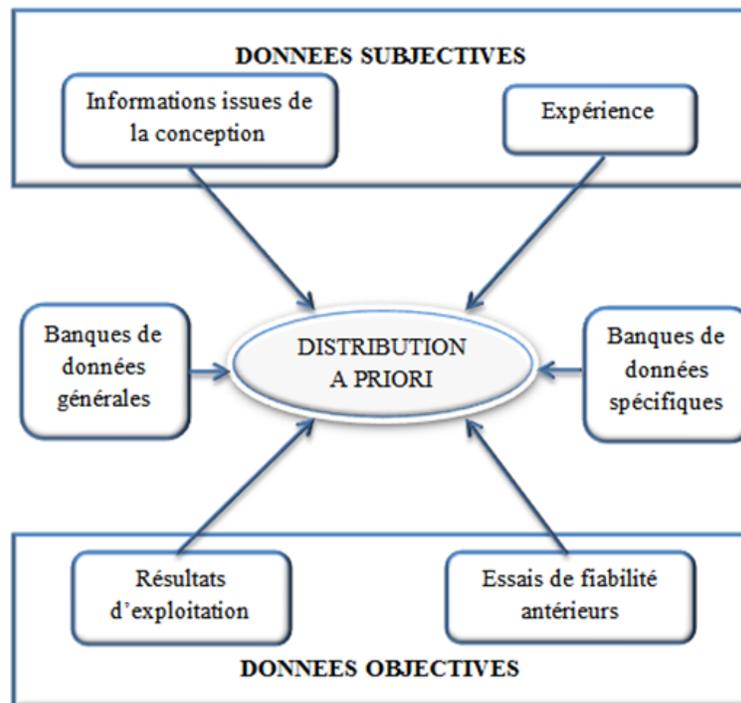


FIG. 2.2 – Différentes formes d'informations a priori.

2.2.4 Loi a priori

L'incertitude sur θ d'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilité π sur Θ , appelée distribution a priori. C'est une probabilité marginale sur les paramètres notée $\pi(\theta)$, elle représente l'état d'information avant de prendre connaissance de l'observation x , sa détermination est l'essence de la statistique bayésienne [1].

2.2.5 Loi a posteriori

En utilisant le théorème de Bayes qui permet la fusion des données issues de l'expertise et du retour d'expérience, on détermine la distribution a posteriori d'un paramètre θ sachant x par [1] :

- **La loi du couple** (θ, X) : Sa densité est notée $f(\theta, x)$:

$$f(\theta, x) = f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- **La loi marginale de X** : Sa densité notée $m(x)$ et on a :

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_{\Theta} f(\theta, x) \, d\theta, \\ &= \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

D'où :

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta) \pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta) \pi(\theta) \, d\theta} = \frac{f(\theta, x)}{m(x)} \quad (2.2.2)$$

Remarque 2.1. La loi a posteriori peut-être asymptotiquement approchée par une loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}(\theta|x), V(\theta|x))$, utile pour la construction des intervalles de confiance.

Exemple 2.2. Soit $X|\theta \rightsquigarrow \mathcal{P}(\theta)$ et $\theta \rightsquigarrow \gamma(2, 1)$.

Donnons la loi de probabilité a posteriori du paramètres θ ainsi que la loi marginale de X .

On a :

$$f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

$$\pi(\theta) = \theta e^{-\theta}, \quad \theta > 0.$$

$$f(\theta, x) = \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1}}{x!}, \text{ et}$$

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_0^{+\infty} f(x|\theta) \cdot \pi(\theta) \, d\theta, \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1}}{x!} \, d\theta, \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+2)} \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1}}{x!} \frac{2^{x+2}}{2^{x+2}} \, d\theta, \\ &= \frac{\Gamma(x+2)}{x! 2^{x+2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1}}{\Gamma(x+2)} \, d\theta, \\ &= \frac{\Gamma(x+2)}{x! 2^{x+2}}, \\ &= \frac{(x+1)!}{x! 2^{x+2}} \quad (\text{avec } \Gamma(x+2) = (x+1)!), \end{aligned}$$

d'où la loi marginale de X :

$$m(x) = \frac{x+1}{2^{x+2}} ; \quad x \in \mathbb{N}.$$

et la loi a posteriori de θ :

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &= \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1}}{(x+1)x!} 2^{x+2} , \\ &= \frac{e^{-2\theta} \theta^{x+1} 2^{x+2}}{(x+1)!} \quad \theta > 0, \end{aligned}$$

donc

$$\theta|x \rightsquigarrow \gamma(x+2, 2).$$

2.2.6 Proportionnalité

Il est parfois possible d'éviter le calcul de l'intégral $(\int_{\Theta} f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta)$ en raisonnant proportionnellement. Dans un contexte bayésien, on a : $f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$. En tant que fonction de θ , les deux expressions $f(\theta|x)$ et $f(x|\theta)$ sont effectivement proportionnelles, à noter que $1/m(x)$ est bien une constante, au sens où elle ne dépend pas de θ [1].

On écrit souvent :

$$f(\theta|x) \propto L(x;\theta)\pi(\theta).$$

où $L(x;\theta) = f(x|\theta)$ désigne la vraisemblance.

Remarque 2.2. Dans le cas d'un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) issu d'une v.a X , $L(\underline{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ où $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Problèmes rencontrés dans la démarche bayésienne

La détermination de la loi a priori n'est pas toujours aisée. Le processus d'intégration peut, par ailleurs, s'avérer difficile. C'est la raison pour laquelle on choisit généralement et, quand cela est possible, des distributions conjuguées entre a priori et vraisemblance, ce qui facilite le calcul [15].

2.3 Estimation bayésienne ponctuelle

2.3.1 Estimateur de Bayes

On se place dans le cas où $\Theta = \mathbb{R}$, mais cela ne réduit en rien la généralisation du problème.

En minimisant l'espérance a posteriori $\int_{\Theta} l(\delta(\cdot); \theta) f(\theta|x) d\theta$ de la fonction de perte $l(d, \theta) = (d - \theta)^2$.

Le min est atteint en $\delta_{\pi}^B = \int_{\Theta} \theta f(\theta|x) d\theta$ (voir [1]).

L'estimateur de Bayes est donc défini par :

$$\hat{\theta} = \delta_{\pi}^B = \mathbb{E}(\theta|x)$$

Propriétés de l'estimateur de Bayes :

- L'estimateur de Bayes est biaisé ;
- L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité pour la taille de l'échantillon $n \rightarrow \infty$;
- La loi a posteriori peut être asymptotiquement (pour les grands échantillons) approximée par $\mathcal{N}(\mathbb{E}(\theta|x), V(\theta|x))$ (utile pour la construction des intervalles de confiance a posteriori).

2.3.2 Estimateur du maximum a posteriori

On appelle estimateur du maximum a posteriori (MAP) tout estimateur :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_B^{\pi}(X) &= \text{Arg max}_{\theta} f(\theta|x), \\ &= \text{Arg max}_{\theta} L(x, \theta)\pi(\theta). \quad \text{car } f(\theta|x) \propto L(x, \theta)\pi(\theta). \end{aligned}$$

(Dans le cas classique, on retrouve l'EMV)

Cette notion est le pendant bayésien du maximum de vraisemblance fréquentiste, il a le grand avantage de ne pas dépendre d'une fonction de perte, et est utile pour les approches théoriques. Les inconvénients sont les mêmes que ceux de l'EMV, comme la non unicité.

La version bayésienne du principe de vraisemblance implique par conséquent que l'inférence sur θ dépend entièrement de la loi a posteriori $f(\theta|x)$.

Un estimateur de θ fondé sur $f(\theta|x)$ est l'estimateur du maximum a postérieur.

Exemple 2.3. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon d'une v.a. X de loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Déterminons l'estimateur de Bayes T de θ relatif à la loi a priori $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et à la perte quadratique $l(a, \theta) = (a - \theta)^2$.

* *La loi a posteriori :*

$$\begin{aligned}
 f(\theta|\underline{x}) &\propto L(\underline{x}, \theta) \pi(\theta), \\
 &\propto \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \pi(\theta), \\
 &\propto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right), \\
 &\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right)\right), \\
 &\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left((n + \frac{1}{\sigma^2})\theta^2 - 2n\bar{x}\theta\right)\right), \\
 &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{1+n\sigma^2}\right)} \left(\theta - \frac{n\bar{x}}{n + 1/\sigma^2}\right)^2\right),
 \end{aligned}$$

donc :

$$\theta|\underline{x} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\frac{n\bar{x}}{n + 1/\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{1 + n\sigma^2}\right).$$

* *L'estimateur de Bayes :*

$$T = \mathbb{E}(\theta|\underline{X}),$$

D'où :

$$T = \frac{n\bar{x}}{n + 1/\sigma^2}.$$

2.4 Estimation bayésienne par intervalle de crédibilité

On appelle $I = [a, b]$ intervalle de crédibilité de niveau $(1 - \alpha)$, l'intervalle établi sur la distribution a posteriori $F(\theta)$ déterminée à partir de la densité de probabilité de $\theta|\underline{x}$ (voir [14]).

$$\mathbb{P}(a \leq \theta \leq b) = F(b) - F(a) = 1 - \alpha.$$

Exemple 2.4. [1] Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon d'une v.a. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$ avec $\theta \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Déterminons l'intervalle de crédibilité a posteriori de θ :

On a :

$$\begin{aligned}
 f(x_i|\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}, \\
 L(\underline{x}, \theta) = f(\underline{x}|\theta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} f(\theta|\underline{x}) &\propto f(\underline{x}|\theta) \pi(\theta), \\ &\propto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}, \\ &\propto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2 + \theta^2\right]}, \\ &\propto \exp\left(-\frac{n+1}{2}\left(\theta^2 - \frac{2\theta}{n+1}\sum_{i=1}^n x_i\right)\right), \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}\right)^2\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\theta|\underline{x} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right).$$

$$\mathbb{P}(\theta \in I|\underline{x}) = 1 - \alpha = 0.95$$

$$\text{sachant } \underline{x} : \theta \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{sachant } \underline{x} : \frac{\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

sachant \underline{x} :

$$\mathbb{P}\left(-\mu \leq \frac{\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \leq \mu\right) = 1 - \alpha,$$

on trouve :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \theta \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

d'où l'intervalle de confiance a posteriori de θ est :

$$I = \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1.96}{\sqrt{n+1}}, \quad \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1.96}{\sqrt{n+1}} \right].$$

2.5 L'approche bayésienne des tests

Le domaine des tests d'hypothèses offre un contraste marquant, entre optique classique (selon Neyman-Pearson) et approche bayésienne, ce qui est dû au fait que les significations associées aux notions d'hypothèses et de décision diffèrent [1].

Supposons que l'on veuille tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$, contre l'hypothèse $H_1 : \theta \neq \theta_0$, pour θ_0 connu. Dans la démarche classique, on utilise une statistique $T = T(x_1, \dots, x_n)$ de n observations. θ étant inconnu, on a rarement l'égalité $\theta_0 = \theta$, même si ces valeurs peuvent être proches. Ainsi si on a une différence : $\varepsilon > 0$, très petite entre la vraie valeur du paramètre et son estimation, alors par consistance de la procédure de test, si le nombre de résultats N est suffisamment grand, on rejettera l'hypothèse H_0 avec une probabilité 1.

L'alternative est le test d'hypothèse bayésien. De la même façon, on veut tester l'hypothèse simple $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$, θ_0 étant une constante préétablie. $(\chi, \mathbb{P}_\theta (\theta \in \Theta))$ étant le modèle statistique du test, toute inférence se fait après avoir observé x dans χ , à travers la loi a posteriori $f(\theta|x)$ [14] et [1].

On suppose que :

- L'espace des paramètres Θ est partitionné en Θ_0 et Θ_1 ($\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$).
- $\mathbb{P}(H_0)$ et $\mathbb{P}(H_1)$ sont les probabilités a priori des hypothèses.
- Les probabilités a posteriori des hypothèses H_0 et H_1 sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_0|x) &= P(\theta \in \Theta_0|x) = \int_{\Theta_0} f(\theta|x) d\theta. \\ \mathbb{P}(H_1|x) &= P(\theta \in \Theta_1|x) = \int_{\Theta_1} f(\theta|x) d\theta. \end{aligned}$$

On note que :

$$\mathbb{P}(H_1|x) = 1 - \mathbb{P}(H_0|x)$$

Les hypothèses H_0 et H_1 sont exclusives et exhaustives. $T = T(x_1, \dots, x_n)$ est une statistique de test basée sur n observations. Le théorème de Bayes permet d'évaluer la probabilité a posteriori de l'hypothèse H_0 sachant les données T :

$$\mathbb{P}(H_0|T) = \frac{\mathbb{P}(T|H_0) \cdot \mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(T|H_0) \cdot \mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(T|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}.$$

De même pour l'hypothèse H_1 , on a :

$$\mathbb{P}(H_1|T) = \frac{\mathbb{P}(T|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(T|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(T|H_0) \cdot \mathbb{P}(H_0)},$$

avec : $\mathbb{P}(H_1|T) = 1 - \mathbb{P}(H_0|T)$

On a, en divisant les relations précédentes :

$$\frac{\mathbb{P}(H_0|T)}{\mathbb{P}(H_1|T)} = \left[\frac{\mathbb{P}(H_0)}{\mathbb{P}(H_1)} \right] \cdot \left[\frac{\mathbb{P}(T|H_0)}{\mathbb{P}(T|H_1)} \right],$$

qui représente l'**équivalent de la cote** relative a posteriori en faveur de H_0 . Celle-ci est égale à la cote a priori multipliée par le rapport des vraisemblances.

Si cette cote est > 1 , on accepte H_0 .

Remarque 2.3. Le rapport de la cote a posteriori à la cote a priori est appelé le facteur de Bayes.

2.6 Modélisation de l'information a priori

De nombreux travaux, initiés par Bayes (1763), Laplace (1825), puis Jeffreys (1946), ont été des tentatives pour construire des a prioris avec lesquels la subjectivité du statisticien n'interfère pas. Laplace a proposé par exemple d'utiliser un a priori uniforme, ce qui, sur l'ensemble des réels, introduisait l'usage des a prioris impropres. Un tel a priori uniforme semble objectif en ce sens qu'il attribue la même probabilité à toutes les valeurs possibles du paramètre, mais cette propriété est vaine car elle ne subsiste pas, en général, par reparamétrisation. Laplace résumait cette difficulté ainsi : *"également probables est l'un des problèmes les plus délicats de la théorie des probabilités"*.

Palliant cette difficulté, Jeffreys propose un a priori invariant par reparamétrisation, valable dans les cas unidimensionnels réguliers. L'analyse de référence, développée par Bernardo (1979), fournit une réponse à ce problème dans le cas général.

Le plus souvent on ne dispose pas de suffisamment d'informations a priori sur le paramètre inconnu θ pour construire la loi a priori. Dans la pratique on a recours à des lois usuelles ou à des lois dites conjuguées (voir ci-dessous), l'information a priori est alors utilisée pour déterminer les paramètres de la loi a priori. En l'absence d'informations a priori on introduira la notion de loi a priori non informative qui permet de rester dans un cadre bayésien, même si on ne dispose pas d'information a priori [1].

2.6.1 Lois a priori non informatives

Il n'y a pas une unique loi a priori non informative pour le paramètre θ : On peut en fait proposer différentes lois a priori non informatives.

- En l'absence d'information a priori sur θ , il est naturel de proposer une loi uniforme sur θ car elle donne une probabilité égale aux intervalles de longueur l donnée.
- On peut également proposer la loi a priori impropre de Haldane :
 $\pi(\theta) = [\theta(1 - \theta)]^{-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(\theta)$, dans ce cas l'estimateur de Bayes $\mathbb{E}[\theta|\underline{x}]$ est égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance.
- Une alternative a été proposée par Jeffreys en 1960.

Soit θ un paramètre réel. On appelle loi a priori non informative de Jeffreys, la loi (éventuellement impropre) de densité :

$$\pi_J(\theta) \propto [I(\theta)]^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\Theta}(\theta), \quad (2.6.1)$$

où : $I(\theta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \right]$, s'interprète comme la quantité d'informations apportées par l'observation x sur θ , d'autre part choisir π_J ne fait pas intervenir d'autre informations que celles apportées par les observations (en fait, à travers $f(x|\theta)$). En ce sens, la loi a priori de Jeffreys est non informative [1].

2.6.2 Distributions a priori conjuguées

La loi des observations étant supposée connue, on se donne une famille F de lois de probabilités sur Θ . On suppose que la loi a priori appartient à F . Si dans ces conditions, la loi a posteriori appartient encore à F , on dit que la loi a priori est conjuguée [1].

Exemple 2.5. Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ le vecteur des observations. On suppose que : $X_i|\theta$ suit une loi de Bernoulli de paramètre θ et que la loi a priori est une loi Bêta. Comme $\theta|\underline{x}$ suit aussi une loi Bêta on en déduit que la loi Bêta est ici conjuguée.

Le tableau ci-dessous donne une liste des lois a priori conjuguées naturelles pour quelques familles exponentielles.

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$f(\theta x)$
$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$	$\mathcal{N}(\varphi(\sigma^2\mu + \tau^2x), \varphi\sigma^2\tau^2), \varphi^{-1} = \sigma^2 + \tau^2$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\gamma(a, b)$	$\gamma(a+x, b+1)$
$\gamma(\nu, \theta)$	$\gamma(\alpha, \beta)$	$\gamma(\alpha+\nu, \beta+x)$
$\beta(n, \theta)$	$B\hat{e}ta(\alpha, \beta)$	$B\hat{e}ta(\alpha+x, \beta+n-x)$

TAB. 2.1 – Distributions de probabilité conjuguées

2.6.3 Le poids de l'a priori dans la réponse bayésienne

Examinons cette question sur un exemple pour comprendre comment l'information a priori et l'information contenue dans les observations se combinent l'une à l'autre pour produire la réponse bayésienne. On se donne le modèle bayésien suivant :

$X_i|\theta \rightsquigarrow B(\theta), \forall i = \overline{1, n}$ et $\theta \rightsquigarrow B\hat{e}ta_I(a, b)$. Il est commode de reparamétriser la loi $B\hat{e}ta$ à l'aide de $\lambda = a + b$ et $\mu = \mathbb{E}(\theta)$ (comme ci-dessus) et on établit la formule suivante [1] :

$$\mathbb{E}(\theta|\underline{x}) = \frac{\lambda}{\lambda + n} \mathbb{E}(\theta) + \frac{n}{n + \lambda} \bar{x}.$$

En effet :

$$f(\theta|\underline{x}) \propto \frac{1}{\beta(a, b)} \theta^{a-1+\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{b+n-1-\sum_{i=1}^n x_i},$$

d'où

$$\theta|\underline{x} \rightsquigarrow B\hat{e}ta_I(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i).$$

$$\mathbb{E}(\theta|\underline{x}) = \frac{n\bar{x}+a}{a+b+n} = \frac{\lambda}{\lambda+n} \mathbb{E}(\theta) + \frac{n}{n+\lambda} \bar{x}.$$

L'estimation bayésienne de θ apparaît donc comme la moyenne pondérée de \bar{x} (cas de l'estimation de θ par MV), et de la moyenne a priori $\mathbb{E}(\theta)$; le poids de \bar{x} est la taille n de l'échantillon, et celui de $\mathbb{E}(\theta)$ est λ qui s'interprète comme la précision de l'a priori (le dénominateur commun $\lambda + n$ a été omis, car seul compte le numérateur).

Géométriquement, $\mathbb{E}(\theta|\underline{x})$ est le barycentre des points de coordonnées $\mathbb{E}(\theta)$ et \bar{x} , affectés respectivement aux coefficients $\frac{\lambda}{\lambda+n}$ et $\frac{n}{\lambda+n}$.

A noter que :

- Si $\lambda = n$, l'estimation bayésienne de θ se situe exactement au milieu de l'intervalle $[\mathbb{E}(\theta), \bar{x}]$.
- Si $\lambda > n$ cette estimation est plus proche de $\mathbb{E}(\theta)$ que de \bar{x} .
- Si $\lambda < n$ cette estimation est plus proche de \bar{x} que de $\mathbb{E}(\theta)$.

Pour examiner l'influence de l'a priori sur $\mathbb{E}(\theta|\underline{x})$ on s'intéresse aux cas limites :

$\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow \infty$ (la taille de l'échantillon étant fixé, ainsi que $\mu = \mathbb{E}(\theta)$).

- Dans le premier cas, le poids de l'a priori est nul, et $\mathbb{E}(\theta|x) \rightarrow \bar{x}$ qui est la réponse classique.
- Dans le second cas, le poids des données est nul, et $\mathbb{E}(\theta|\underline{x}) \rightarrow \mathbb{E}(\theta)$ qui ne dépend plus de x .

Le tableau ci-dessous résume la situation.

	$\lambda \rightarrow 0$	$\lambda \rightarrow +\infty$
$Var(\theta)$	$\mu(1 - \mu)$ maximale	0 minimale
Loi a priori	Loi de Haldane	Loi centrée en μ
Interprétation	Situation non informative	Situation entièrement informative
Estimation bayésienne	\bar{x}	$\mathbb{E}(\theta)$

TAB. 2.2 – Le poids de l'a priori dans la réponse bayésienne.

Il est également intéressant de regarder ce que devient $\mathbb{E}(\theta|\underline{x})$ quand $n \rightarrow +\infty$, λ et μ étant fixés ; dans ce cas, le poids de l'a priori devient négligeable, et la réponse bayésienne coïncide avec la réponse classique c'est à dire \bar{x} (estimateur de θ par EMV).

2.7 Les principes de construction de l'a priori

La construction directe de l'a priori se fait à partir des avis d'experts. L'interrogation des experts et la mise en forme de leur réponse fait l'objet de l'ouvrage [9].

Si l'on fait le choix d'une distribution a priori conjuguée, le problème se ramène à la détermination des hyperparamètres de la loi. Pour se faire, différentes méthodes peuvent être utilisées [15].

Soit α_0 et β_0 les hyperparamètres d'une loi a priori conjuguée choisie pour modéliser les connaissances sur un paramètre θ .

a) La méthode des quantiles et la méthode du Khi-Deux

Connaissant les valeurs des deux quantiles θ_γ et θ_δ (déterminés par jugement d'experts ou à partir de données de retour d'expérience passée), les valeurs des hyperparamètres α_0 et β_0 sont obtenues en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\theta \leq \theta_\gamma; \alpha_0, \beta_0) = \gamma, \\ \mathbb{P}(\theta \leq \theta_\delta; \alpha_0, \beta_0) = \delta. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Lorsque les quantiles sont obtenus à partir d'un intervalle de confiance bilatéral fréquentiel sur des données de retour d'expérience passé, on appelle cette méthode : la méthode de Khi-Deux.

b) Valeur moyenne et quantile

Connaissant la valeur moyenne θ_{moyen} et la valeur d'un quantile θ_γ , les valeurs des hyperparamètres α_0 et β_0 sont obtenues en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\theta; \alpha_0, \beta_0) = \theta_{moyen}, \\ \mathbb{P}(\theta \leq \theta_\gamma; \alpha_0, \beta_0) = \gamma. \end{cases} \quad (2.7.2)$$

c) La méthode des moments

La méthode des moments consiste à identifier les deux premiers moments de la loi a priori avec les deux premiers moments obtenus par expertise ou retour d'expérience passé. Les valeurs des hyperparamètres α_0 et β_0 sont alors obtenues en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\theta; \alpha_0, \beta_0) = \theta_{\text{moyen a priori}}, \\ V(\theta; \alpha_0, \beta_0) = \sigma_{\text{a priori}}^2. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Remarque 2.4. Parfois, on détermine la valeur $\sigma_{\text{a priori}}$ à partir d'un intervalle de confiance donné par les experts.

d) Méthode des échantillons fictifs

L'analyse des informations a priori permet de définir un échantillon fictif d'observations (nombre de défaillances k sur un temps t donné, par exemple). Les hyperparamètres α_0 et β_0 sont alors déduits directement de cet échantillon fictif ($\alpha_0 = k$ et $\beta_0 = t$, par exemple).

2.8 Modélisation des avis d'experts

Il s'agit de recueillir l'avis de n experts sur la réalisation d'un événement (défaillance d'un système au bout d'un temps donné). Les résultats des avis des n experts correspondent aux résultats d'un essai fictif (x réponses positives (nombre de défaillances) sur n réponses) avec une loi binomiale de paramètres n et $p = x/n$.

La procédure consiste à modéliser les avis des n experts en appliquant le théorème de Bayes par une loi pré-a priori uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

La distribution a posteriori obtenue est une loi $Bêta(x + 1, n - x + 1)$. On l'utilisera donc comme loi a priori pour l'étude des données de défaillance observées.

2.9 Conclusion

L'estimation de la fiabilité des composants fait souvent l'objet de développements théoriques et pratiques importants. Les méthodes bayésiennes sont les techniques les plus explorées à l'heure actuelle dans la mesure où elles permettent d'estimer la fiabilité d'un composant à partir d'un nombre très limité de données (c'est dans le cas d'absence de données de défaillances que ces techniques sont les plus performantes et intéressantes). On estime la fiabilité d'un composant à partir de connaissances a priori sur le composant (connaissances provenant de banques de données externes ou internes sur des matériels similaires, d'avis d'experts...) en les corrélant avec des données réelles et personnelles (vraisemblance).

Chapitre 3

Applications de l'inférence bayésienne dans l'évaluation des paramètres de fiabilité

3.1 Introduction

Les paramètres de fiabilité des matériels sont déterminés soit par des essais de fiabilité, soit grâce au retour d'expérience collecté sur des installations en service.

Dans la démarche classique fréquentielle, on procède à une estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance de ces paramètres : taux de défaillance, temps moyen entre défaillance, durée de vie, fiabilité,... en collectant suffisamment d'informations au cours des tests, ou en observant le retour d'expérience sur une durée importante. La difficulté, dans ces conditions, est d'évaluer la densité de probabilité de l'estimateur du maximum de vraisemblance de ces paramètres.

Dans la démarche bayésienne, on évalue la distribution de probabilité de ces paramètres, à partir de la connaissance a priori que l'on possède sur leur sujet (expérience, essais effectués dans le passé, comportement des matériels similaires...), connaissance qui est confortée, ou au contraire modifiée, grâce aux observations obtenues par les essais, ou par le retour d'expérience.

Le principal avantage de la démarche bayésienne est qu'elle est susceptible de prendre en compte tous les résultats ou toutes les observations que l'on a obtenus, et que, d'autre part, quelques observations complémentaires en provenance d'essais ou du retour d'expérience, suffisent pour valider la vraisemblance de la connaissance a priori.

Les analyses de sûreté, de fiabilité ou de disponibilité d'une installation, s'appuient en

général sur des données tirées du retour d'expérience qui est formalisé sous forme de banque de données élaborées dans différentes branches de l'industrie, afin de collecter l'historique du fonctionnement et des défaillances des installations.

- * **Les banques d'événements** : Qui collectent l'information au fur et à mesure qu'elle arrive.
- * **Les banques de données de paramètres de fiabilité** : Ces banques sont beaucoup plus coûteuses puisqu'elles nécessitent le suivi d'un matériel ou d'un système particulier, qui sera défini précisément dans un fichier d'identification caractérisant en particulier ses frontières, puis de collecter les informations propres au fonctionnement de ces matériels.

3.2 Estimation paramétrique des tests de durée de vie

3.2.1 Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV) des temps et des taux de défaillance

Considérons un test de durée de vie effectué sur n matériels.

Au temps t_k , on a observé k défaillances et il reste $n-k$ matériels survivants.

En généralisant la formalisation des essais de fiabilité, on pourra se trouver confronté à des temps de test différents pour chacun des matériels survivants : c'est le cas, par exemple, pour des matériels observés dans des installations différentes (retour d'expérience).

On observera des temps de défaillance égaux à : t_1, t_2, \dots, t_k , et des temps de durée de test pour les matériels survivants égaux à : $t_{k+1}^*, t_{k+2}^*, \dots, t_n^*$, l'ensemble de ces temps étant des variables aléatoires.

Les temps de défaillance étant indépendants, si leur densité de probabilité est $f(t)$, l'EMV est :

$$L(t) = \left[\prod_{i=1}^k f(t_i) \right] \left[\prod_{i=k+1}^n (1 - F(t_i^*)) \right], \quad (3.2.1)$$

où $1 - F(t_i^*)$ représente la probabilité de survie des matériels non défaillants.

Cette expression est valable pour tous types d'expériences statistiques et pour toutes distributions des temps de défaillance des matériels.

Pour simplifier la suite des calculs, on va admettre que la distribution des temps de défaillance observés ici est une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F(t; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

La densité de probabilité correspondante est :

$$f(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad (3.2.3)$$

On veut estimer λ , le taux de défaillance des matériels. Tenant compte de (3.2.2) et (3.2.3), la relation (3.2.1) permet d'évaluer l'EMV du taux de défaillance, à partir des observations qui ont été faites :

$$\begin{aligned} L(t, \lambda) &= \left[\prod_{i=1}^k f(t_i) \right] \left[\prod_{i=k+1}^n (1 - F(t_i^*)) \right], \\ &= \left[\prod_{i=1}^k \lambda e^{-\lambda t_i} \right] \left[\prod_{i=k+1}^n e^{-\lambda t_i^*} \right], \\ &= \lambda^k e^{-\lambda \sum_{i=1}^k t_i} e^{-\lambda \sum_{i=k+1}^n t_i^*}, \\ &= \lambda^k e^{-\lambda \left[\sum_{i=1}^k t_i + \sum_{i=k+1}^n t_i^* \right]}. \end{aligned}$$

En posant : $t = \sum_{i=1}^k t_i + \sum_{i=k+1}^n t_i^*$ le temps cumulé des observations, on aura :

$$L(t, \lambda) = \lambda^k e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0. \quad (3.2.4)$$

3.2.2 Distribution a posteriori du taux de défaillance en fonctionnement

Les temps t_i observés sont les réalisations des variables aléatoires (T_i). Le taux de défaillance est donc aussi une variable aléatoire Λ , dont la densité de probabilité est : $f(\lambda|t; k)$, où k = nombre de défaillance.

Si $f(\lambda)$ est la densité de probabilité a priori de Λ , obtenue par exemple à partir d'un jugement d'experts, l'évaluation a posteriori de la densité de probabilité de Λ est donnée par la relation :

$$f(\lambda|t; k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t} f(\lambda)}{\int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda}. \quad (3.2.5)$$

Pour la plupart des distributions a priori $f(\lambda)$, l'évaluation de la distribution a posteriori de Λ est complexe à cause de l'intégration du dénominateur, ce qui nécessite généralement une résolution numérique. Le choix de cette distribution a priori peut simplifier singulièrement ce problème, comme nous le verrons plus loin.

3.2.3 Distribution a posteriori du temps moyen entre défaillances (MTTF)

Si l'on exprime la relation du maximum de vraisemblance (3.2.4) en fonction du temps moyen entre défaillance : $\theta = 1/\lambda$, on obtient :

$$L(\theta|t) = \frac{1}{\theta^k} e^{-t/\theta}.$$

En appelant $f(\theta)$, la densité de probabilité a priori de la variable aléatoire θ , la distribution a posteriori de cette variable, compte tenu de l'observation faite, z , est :

$$f(\theta|t; k) = \frac{e^{-t/\theta} f(\theta)}{\theta^k \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} f(z) dz}. \quad (3.2.6)$$

3.2.4 Distribution a posteriori de la fiabilité d'un matériel

Si $r(t_0)$ est la probabilité pour qu'un matériel survive à un temps spécifié t_0 , on a, dans le cas d'une distribution exponentielle :

$$r = r(t_0) = 1 - F(t_0) = e^{-\lambda t_0}.$$

Le temps t_0 peut être le temps que l'on estime pour la durée de vie du matériel, ou un temps de mission préétablie.

$R(t_0)$ représente la variable aléatoire fiabilité du matériel, alors que $r(t_0)$ est une valeur particulière de cette variable.

On a $r = e^{-\lambda t_0}$, en passant au logarithme on trouve $\lambda = -\frac{1}{t_0} \ln r$, on remplace dans (3.2.4) on trouve que la fonction de vraisemblance de $r(t_0)$, sachant les temps de défaillance, t_i , observés sur k matériels parmi n en test, et les temps d'essais des matériels survivants, t_i^* , (observations synthétisées par z) est :

$$L(r|z) = \left(-\frac{1}{t_0} \ln r\right)^k r^{t/t_0}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Comme précédemment, si $f(r)$ représente la distribution a priori de $R = R(t_0)$, la distribution a posteriori de R sera :

$$f(r|t; k) = \frac{(-\ln r)^k r^{t/t_0} f(r)}{\int_0^1 (-\ln z)^k z^{t/t_0} f(z) dz}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (3.2.7)$$

Voyons maintenant la façon de déterminer ces distributions dans quelques cas de distribution a priori $f(\lambda)$, $f(\theta)$ et $f(r)$ simples.

3.3 Choix d'une distribution a priori

On a vu l'importance relative au choix de la distribution a priori dans l'inférence bayésienne : cette distribution sera plus ou moins informative selon le degré de connaissance de l'expert. D'autre part, pour des facilités d'intégration, elle devra être conjuguée à la loi modélisant le retour d'expérience, en l'occurrence la loi exponentielle selon l'hypothèse faite dans ce paragraphe pour les défaillances en fonctionnement. Les distributions se prêtant le mieux à ces conditions sont la distribution uniforme et la loi gamma.

3.3.1 Distribution a priori uniforme, et distributions a posteriori correspondantes

Distribution a posteriori du taux de défaillance

En l'absence de toute connaissance sur l'allure de la distribution a priori du taux de défaillance, mais en connaissant deux valeurs extrêmes fournies par les experts : λ_0 et λ_1 (avec $\lambda_1 > \lambda_0$), on choisira une distribution uniforme informative pour modéliser la loi a priori. On aura dans ces conditions :

$$f(\lambda; \lambda_0, \lambda_1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}, & \text{si } \lambda_0 < \lambda < \lambda_1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

En substituant (3.3.1) dans l'équation (3.2.5), il vient :

$$f(\lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k e^{-\lambda t} d\lambda}. \quad (3.3.2)$$

Pour calculer l'intégrale du dénominateur, on pose :

$$y = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{y}{t},$$

$$\text{d'où : } dy = t d\lambda \Rightarrow d\lambda = \frac{dy}{t},$$

l'intégration du dénominateur de (3.3.2) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k e^{-\lambda t} d\lambda &= \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} \left(\frac{y}{t}\right)^k e^{-y} \frac{dy}{t}, \\ &= \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} \frac{y^k e^{-y}}{t^{k+1}} dy, \\ &= \frac{1}{t^{k+1}} \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} y^k e^{-y} dy. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy, \\ &= \int_0^{\lambda_0 t} y^k e^{-y} dy + \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} y^k e^{-y} dy + \int_{\lambda_1 t}^{+\infty} y^k e^{-y} dy. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0 t}^{\lambda_1 t} y^k e^{-y} dy &= \Gamma(k+1) - \int_0^{\lambda_0 t} y^k e^{-y} dy - \int_{\lambda_1 t}^{+\infty} y^k e^{-y} dy, \\ &= \Gamma(k+1) - \Gamma(k+1) \int_0^{\lambda_0 t} \frac{1}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-y} dy - \Gamma(k+1) \int_{\lambda_1 t}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-y} dy, \\ &= \Gamma(k+1) - \Gamma(k+1) F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_0 t) - \Gamma(k+1) [1 - F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_1 t)], \\ &= \Gamma(k+1) \left[F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_1 t) - F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_0 t) \right]. \end{aligned}$$

Avec : $F_{\gamma(k+1,1)}(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi $\gamma(k+1, 1)$.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^k e^{-\lambda t} d\lambda &= \frac{\Gamma(k+1)}{t^{k+1}} [F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_1 t) - F_{\gamma(k+1,1)}(\lambda_0 t)], \\ &= \frac{1}{t^{k+1}} \left[\int_0^{\lambda_1 t} y^k e^{-y} dy - \int_0^{\lambda_0 t} y^k e^{-y} dy \right], \\ &= \frac{1}{t^{k+1}} [\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)], \end{aligned}$$

où : $\Gamma(a, b) = \int_0^b y^{a-1} e^{-y} dy$ est la fonction gamma standard incomplète de paramètre a et b .

Remarque 3.1. $\Gamma(a, b)$ peut être calculée manuellement (calcul pénible!).

En reportant dans (3.3.2), on trouve finalement la densité de probabilité a posteriori :

$$f(\lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{t^{k+1} \lambda^k e^{-\lambda t}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)}. \quad (3.3.3)$$

La distribution marginale des observations t_i et t_i^* est, dans ce cas [14] :

$$g(t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)}{\Gamma(k) (\lambda_1 - \lambda_0) t^2}, \quad (3.3.4)$$

avec $0 < t < \infty$

Estimation ponctuelle du taux de défaillance

Un estimateur du taux de défaillance peut être calculé en prenant l'espérance de la distribution a posteriori (3.3.3), soit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda f(\lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) d\lambda, \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{t^{k+1} \lambda^{k+1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)} d\lambda, \\ &= \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^{k+1} e^{-\lambda t} d\lambda, \end{aligned}$$

où : $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^{k+1} e^{-\lambda t} d\lambda = \frac{1}{t^{k+2}} [\Gamma(k+2, \lambda_1 t) - \Gamma(k+2, \lambda_0 t)]$.

D'où :

$$\mathbb{E}(\Lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\Gamma(k+2, \lambda_1 t) - \Gamma(k+2, \lambda_0 t)}{t [\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)]}. \quad (3.3.5)$$

Cet estimateur ne correspond toutefois pas à l'estimateur optimal bayésien puisqu'il faudrait minimiser la fonction de perte pour obtenir ce dernier.

D'autres estimateurs du taux de défaillance sont obtenus en calculant les moments de la distribution a posteriori :

* le moment d'ordre 2 de Λ est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda^2|t; k, \lambda_0, \lambda_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 f(\lambda/t; k, \lambda_0, \lambda_1) d\lambda, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{k+1} \lambda^{k+2} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)} d\lambda, \\ &= \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{k+2} e^{-\lambda t} d\lambda, \end{aligned}$$

où : $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{k+2} e^{-\lambda t} d\lambda = \frac{1}{t^{k+3}} [\Gamma(k+3, \lambda_1 t) - \Gamma(k+3, \lambda_0 t)]$.

D'où :

$$\mathbb{E}(\Lambda^2|t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\Gamma(k+3, \lambda_1 t) - \Gamma(k+3, \lambda_0 t)}{t^2 [\Gamma(k+1, \lambda_1 t) - \Gamma(k+1, \lambda_0 t)]}$$

* alors que la variance a posteriori est :

$$V(\Lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1) = \mathbb{E}(\Lambda^2|t; k, \lambda_0, \lambda_1) - \mathbb{E}^2(\Lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1),$$

* l'EMV de λ qui est le mode de la distribution (3.3.4), correspondant à $k|t$:

$$\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_{\lambda|t}(\Lambda|t; k, \lambda_0, \lambda_1)] = \mathbb{E}(\Lambda; \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}.$$

Distribution a posteriori des temps entre défaillances (MTTF)

Comme précédemment, on considère une loi de distribution a priori de θ uniforme telle que :

$$f(\theta; \theta_0, \theta_1) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \\ 0, & \text{Pour toutes autres valeurs.} \end{cases}$$

θ_0 et θ_1 sont des valeurs estimées extrêmes par l'expert pour la durée de vie du matériel.

En résolvant dans ces conditions l'équation (3.2.6), on trouve la distribution de θ a posteriori :

$$\begin{aligned}
f(\theta|t; k, \theta_0, \theta_1) &= \frac{e^{-t/\theta} f(\theta; \theta_0, \theta_1)}{\theta^k \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} f(z) dz} , \\
&= \frac{e^{-t/\theta} \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}}{\frac{\theta^k}{\theta_1 - \theta_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} dz} , \\
&= \frac{e^{-t/\theta}}{\theta^k \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} dz} .
\end{aligned}$$

Calculons : $\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} dz$.

On pose : $y = \frac{t}{z} \Rightarrow z = \frac{t}{y}$,

d'où : $dz = -\frac{t}{y^2} dy$.

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{z^k} e^{-t/z} dz &= - \int_{t/\theta_0}^{t/\theta_1} \left(\frac{y}{t}\right)^k e^{-y} \frac{t}{y^2} dy, \\
&= \frac{1}{t^{k-1}} \int_{t/\theta_0}^{t/\theta_1} y^{k-2} e^{-y} dy, \\
&= \frac{1}{t^{k-1}} [\Gamma(k-1, t/\theta_1) - \Gamma(k-1, t/\theta_0)] \text{ cdot}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans $f(\theta|t; k, \theta_0, \theta_1)$, on obtient :

$$f(\theta|t; k, \theta_0, \theta_1) = \frac{t^{k-1} e^{-t/\theta}}{\theta^k [\Gamma(k-1, t/\theta_0) - \Gamma(k-1, t/\theta_1)]} . \quad (3.3.6)$$

Distribution a posteriori de la fiabilité

Si l'on prend cette fois une distribution uniforme entre 0 et 1 (correspondant à l'ignorance totale de l'expert) pour la loi de la fiabilité a priori, la relation (3.2.7) permet de calculer la distribution de la loi de fiabilité a posteriori :

$$f(r|t; k, t_0) = \frac{(1 + t/t_0)^{k+1} - (-\ln r)^k r^{t/t_0}}{\Gamma(k+1)}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (3.3.7)$$

dont la valeur moyenne est :

$$\mathbb{E}(R|t; k, t_0) = \left(\frac{1 + t/t_0}{2 + t/t_0} \right)^{k+1} . \quad (3.3.8)$$

Exemple d'application [14]

Douze robinets sont testés jusqu'à ce que 5 d'entre eux soient défectueux.

Le temps cumulé d'observation pour obtenir $k = 5$ défectueux est $t = 160\,000$ heures, alors que le temps de mission spécifié aux robinets est de $4\,000$ heures.

a) Distributions a posteriori des paramètres de fiabilité**Le taux de défaillance :**

Le retour d'expérience observé sur des robinets équipant des installations en service, permet d'estimer que le taux de défaillance en fonctionnement de ces matériels devrait être compris entre $1.4 \cdot 10^{-5}/h$ et $5 \cdot 10^{-5}/h$, on se sert du retour d'expérience pour amorcer la loi initiale a priori.

Connaissant deux valeurs extrêmes du taux de défaillance, une distribution a priori uniforme entre ces deux valeurs est donc choisie.

Il suffit d'appliquer la relation (3.3.3) pour déterminer la distribution a posteriori du taux de défaillance :

$$f(\lambda|t = 160\,000; 5, 1.4 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}) = \frac{(160\,000)^6 \lambda^5 e^{-160\,000\lambda}}{\Gamma(6, 8) - \Gamma(6, 2.24)},$$

pour : $1.4 \cdot 10^{-5} < \lambda < 5 \cdot 10^{-5}$.

L'estimateur bayésien correspondant à la moyenne de cette distribution est calculé par la relation (3.3.5). On trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda|t, k, \lambda_0, \lambda_1) &= \frac{\Gamma(7, 8) - \Gamma(7, 2.24)}{160\,000 [\Gamma(6, 8) - \Gamma(6, 2.24)]}, \\ &= 3,26 \cdot 10^{-5}/h. \end{aligned}$$

Cette valeur est à comparer avec l'estimation fréquentiste :

$$\lambda_f = \frac{5}{160\,000} = 3.1 \cdot 10^{-5}/h,$$

auquel correspond un intervalle de confiance au niveau 90% :

$$1.2 \cdot 10^{-5} \leq \lambda \leq 6.6 \cdot 10^{-5}/h.$$

La faible différence entre les deux évaluations de l'estimateur de λ est due à la consistance de l'échantillon statistique (grande taille).

La figure suivante donne la représentation graphique de cette distribution :

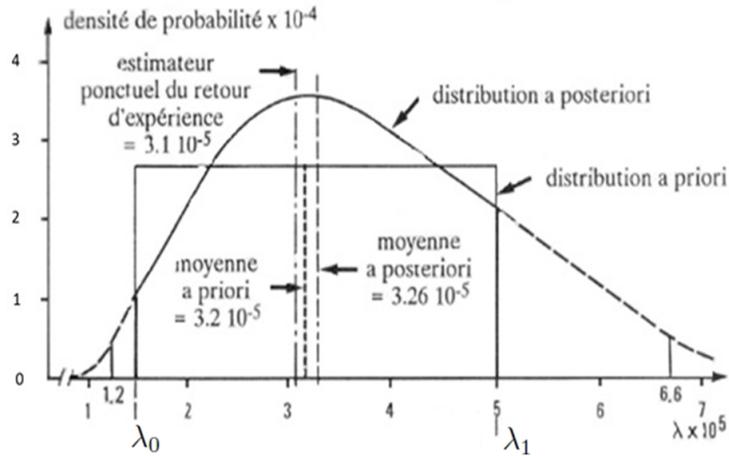


FIG. 3.1 – Distributions a priori et a posteriori du taux de défaillance du fonctionnement des robinets.

Les temps entre défaillances (MTTF)

Si l'on suppose maintenant comme précédemment une loi a priori uniforme entre les valeurs $\theta_0 = 2 \cdot 10^4$, et $\theta_1 = 7 \cdot 10^4$, pour être homogène avec les estimateurs précédents, alors :

$$f(\theta | 1.6 \cdot 10^5; 5, 2 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4) = \frac{(1.6 \cdot 10^5)^4 e^{-1.6 \cdot 10^5/\theta}}{\theta^5 [\Gamma(4, 8) - \Gamma(4, 2.29)]}$$

dont la représentation graphique est donnée dans la figure suivante.

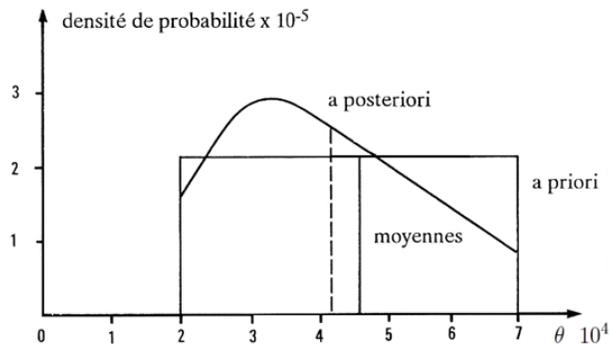


FIG. 3.2 – Densités de probabilité a priori et a posteriori des temps entre défaillances.

La fiabilité

On procède de même pour l'évaluation de la fiabilité, et l'on trouve une valeur moyenne de distribution de la fiabilité :

$$\mathbb{E}(R|160\ 000; 5, 4\ 000) = \left(\frac{41}{42}\right)^6 \simeq 0.865 \ ,$$

après 4 000 heures de test, alors que l'évaluation fréquentiste donne :

$$R = e^{-\lambda_f t_0} = 0.88.$$

Voyons maintenant des applications pratiques dans les cas suivants où les démarches fréquentiste et bayésienne peuvent conduire à des évaluations différentes.

b) Le retour d'expérience est beaucoup plus limité : application à une installation particulière

Si l'on observe maintenant le retour d'expérience concernant deux robinets, similaires aux précédents (donc échangeables), installés dans une installation particulière, où l'on a constaté une seule défaillance après 20 000 heures cumulées de fonctionnement. L'évaluation **fréquentielle** du taux de défaillance conduit à l'estimateur :

$$\hat{\lambda} = 5 \cdot 10^{-5}/h,$$

avec un intervalle de confiance au niveau de 90%, très large puisque l'échantillon est faible :

$$5.1 \cdot 10^{-6}/h \leq \hat{\lambda} \leq 4.75 \cdot 10^{-4}/h.$$

En appliquant, comme précédemment les relations (3.2.5) et (3.3.1) sachant que l'expert considère que les valeurs extrêmes λ_0 et λ_1 devraient être égales à $1.4 \cdot 10^{-5}$ et $5 \cdot 10^{-5}/h$ respectivement, on obtient successivement :

- La densité de probabilité a posteriori du taux de défaillance :

$$f(\lambda|t = 20\ 000; 1, 1.4 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}) = \frac{4 \cdot 10^8 \lambda e^{-20 \cdot 10^3 \lambda}}{\Gamma(2, 1) - \Gamma(2, 0.28)} \ ,$$

qui est représentée dans (FIG. 3.3) :

- La valeur moyenne a posteriori est :

$$\mathbb{E}(\Lambda|t = 20\ 000; 1, 1.4 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}) = \frac{\Gamma(3, 1) - \Gamma(3, 0.28)}{20\ 000[\Gamma(2, 1) - \Gamma(2, 0.28)]} \ ,$$

$$\mathbb{E}(\Lambda|t = 20\ 000; 1, 1.4 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}) = 3.4 \cdot 10^{-5}/h.$$

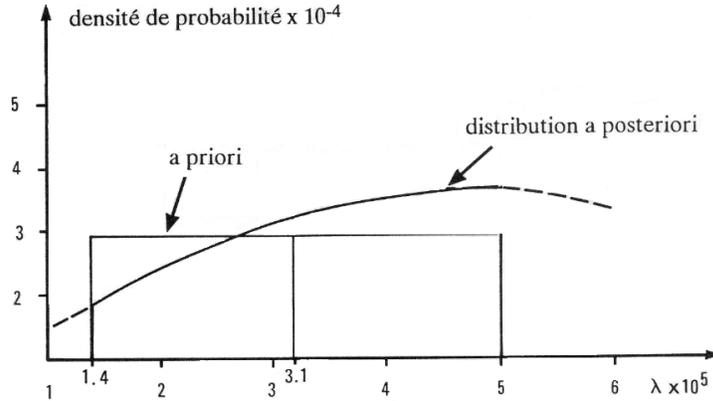


FIG. 3.3 – Densité de probabilité a priori et a posteriori du taux de défaillance.

Le jugement d'expert a permis ici de modifier sensiblement les résultats obtenus à partir de la simple observation qui a été faite au cours d'un retour d'expérience limité.

3.3.2 Distribution a priori gamma, et distributions a posteriori correspondantes

On a vu que cette distribution est souvent utilisée comme loi a priori dans le cas d'un échantillonnage de type poissonnien, ou, bien évidemment, de type gamma.

Pratiquement, c'est un type de distribution très utilisé dans les applications, compte tenu de la grande diversité de ses représentations, et par le fait qu'elle soit conjuguée avec la loi exponentielle.

Les paramètres définissant la loi sont respectivement : β_0 que l'on peut interpréter comme le pseudo-nombre de défaillances observées, par exemple, au cours de tests préalables, et θ_0 la pseudo-durée de ces tests.

La densité de probabilité correspondante lorsque l'on recherche le taux de défaillance λ du matériel est donc (voir la sous section 1.3.1) :

$$f(\lambda; \beta_0, \theta_0) = \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \lambda^{\beta_0-1} e^{-\lambda\theta_0}. \quad (3.3.9)$$

En se reportant à la relation (3.2.5), il résulte que, lorsque l'on observe k défaillances après un temps d'essai, t , on a une densité de probabilité a posteriori du taux de défaillance :

$$f(\lambda|k; \beta_0, \theta_0) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t} \lambda^{\beta_0-1} e^{-\lambda\theta_0}}{\int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda t} \lambda^{\beta_0-1} e^{-\lambda\theta_0} d\lambda} ,$$

qui donne en simplifiant :

$$f(\lambda|k; \beta_0, \theta_0) = \frac{\lambda^{(k+\beta_0-1)} e^{-(t+\theta_0)\lambda}}{\int_0^{+\infty} \lambda^{(k+\beta_0-1)} e^{-(t+\theta_0)\lambda} d\lambda}. \quad (3.3.10)$$

En faisant un changement de variable :

$$y = \lambda(t + \theta_0),$$

on trouve finalement au dénominateur D :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{+\infty} \lambda^{(k+\beta_0-1)} e^{-(t+\theta_0)\lambda} d\lambda, \\ &= \frac{1}{(t + \theta_0)^{k+\beta_0}} \int_0^{+\infty} y^{(k+\beta_0-1)} e^{-y} dy \end{aligned}$$

soit en integrant :

$$D = \frac{\Gamma(k + \beta_0)}{(t + \theta_0)^{k+\beta_0}}$$

d'où la densité de probabilité a posteriori de la variable aléatoire Λ :

$$f(\lambda|k; \beta_0, \theta_0) = \frac{(t + \theta_0)^{k+\beta_0}}{\Gamma(k + \beta_0)} \lambda^{(k+\beta_0-1)} e^{-(t+\theta_0)\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (3.3.11)$$

qui est une loi $\gamma(k + \beta_0, t + \theta_0)$.

Le paramètre $(k + \beta_0)$ représente le nombre total cumulé de défaillances, alors que le paramètre $(t + \theta_0)$ représente le temps total cumulé de tests.

L'estimateur ponctuel du taux de défaillance est donc :

$$\mathbb{E}(\Lambda|k; \beta_0, \theta_0) = \frac{k + \beta_0}{t + \theta_0}. \quad (3.3.12)$$

$$V(\Lambda|k; \beta_0, \theta_0) = \frac{k + \beta_0}{(t + \theta_0)^2}. \quad (3.3.13)$$

L'intervalle de crédibilité a posteriori au niveau de confiance $(1 - \alpha)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Lambda \leq \lambda_{\alpha/2} | k, t, \beta_0, \theta_0) = \frac{\alpha}{2}, \\ \mathbb{P}(\Lambda \leq \lambda_{1-\alpha/2} | k, t, \beta_0, \theta_0) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \quad (3.3.14)$$

est déterminé à partir de la fonction de répartition de la loi Gamma ou à partir de la loi de Khi-Deux par les expressions suivantes :

$$\lambda_{\alpha/2} = \frac{\chi_{2(\beta_0+k)}^2(\alpha/2)}{2(\theta_0 + t)}, \quad \lambda_{1-\alpha/2} = \frac{\chi_{2(\beta_0+k)}^2(1 - \alpha/2)}{2(\theta_0 + t)}, \quad (3.3.15)$$

avec χ_n^2 est la loi de Khi-Deux à n degrés de liberté.

Exemple d'application

On reprend l'exemple des douze robinets ayant subi cinq défaillances ou bout de 160 000 heures cumulées de fonctionnement.

Les paramètres de la distribution a priori gamma sont déterminés par la méthode des quantiles (voir [15]) à partir des avis d'experts ($0.0020 \leq \lambda \leq 0.0100$) et en fixant $\alpha = 0.01$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Lambda \leq \lambda_{0.05} = 0.0020 | \beta_0, \theta_0) = 0.05, \\ \mathbb{P}(\Lambda \leq \lambda_{0.95} = 0.0100 | \beta_0, \theta_0) = 0.95. \end{cases} \quad (3.3.16)$$

La distribution a priori obtenue après résolution du système d'équations (3.3.16) est une loi gamma $\gamma(\beta_0 = 4.6, \theta_0 = 858.5)$.

La distribution a posteriori est selon (3.3.11) une loi gamma

$\gamma(\beta_0 + k = 9.6, \theta_0 + t = 160\,858.5)$ d'espérance et de variance :

$$\mathbb{E}(\Lambda | k; \beta_0, \theta_0) = \frac{k + \beta_0}{t + \theta_0} = 5.97 \cdot 10^{-5} / h.$$

$$V(\Lambda | k; \beta_0, \theta_0) = \frac{k + \beta_0}{(t + \theta_0)^2} = 3.72 \cdot 10^{-10}.$$

Les bornes de l'intervalle de crédibilité à 90% sont déterminées en résolvant le système d'équation (3.3.15) :

$$\begin{cases} \lambda_{\alpha/2} = \frac{\chi_{2(\beta_0+k)}^2(\alpha/2)}{2(\theta_0+t)} = 0.0028/h, \\ \lambda_{1-\alpha/2} = \frac{\chi_{2(\beta_0+k)}^2(1-\alpha/2)}{2(\theta_0+t)} = 0.0082/h. \end{cases}$$

3.3.3 Autres distributions a priori, et a posteriori correspondantes

L'intégration de la relation (3.2.5) est plus ou moins complexe selon le type de distribution a priori que l'on choisit.

Cependant, les résolutions faites dans le paragraphe précédent permettent de recouvrir un grand nombre de cas rencontrés dans le retour d'expérience, pour ce qui concerne le taux de défaillance en fonctionnement.

Toutefois, on peut compléter ces distributions par :

* **Une distribution a priori uniforme** entre 0 et une borne supérieure du taux de défaillance λ_1 .

Ce cas répond à un état d'ignorance partielle sur le taux de défaillance d'un matériel : l'expert ne peut donner qu'une valeur maximale de λ ;

En procédant comme précédemment, on trouve une distribution a posteriori de Λ :

$$f(\lambda|k; \lambda_1) = \frac{t^{k+1} \lambda^k e^{-\lambda t}}{\Gamma(k+1, \lambda_1 t)} \quad 0 < \lambda < \lambda_1. \quad (3.3.17)$$

La valeur moyenne de cette distribution constitue un estimateur ponctuel de λ :

$$\mathbb{E}(\Lambda|k; \lambda_1) = \frac{\Gamma(k+2, \lambda_1 t)}{t \Gamma(k+1, \lambda_1 t)}. \quad (3.3.18)$$

* **Une distribution a priori de type Weibull.**

Ce cas correspond essentiellement aux matériels non réparables qui présentent des problèmes de vieillissement ou des maladies de jeunesse. Cette distribution n'est pas aussi pratique que la loi gamma, mais elle est souvent employée par les fiabilistes.

La densité de probabilité a priori pour une loi de Weibull de paramètre η et β est :

$$f(\lambda, \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^\beta}, \quad \lambda > 0. \quad (3.3.19)$$

La distribution a posteriori de Λ , si l'on observe k défaillances est :

$$f(\lambda|k; \eta, \beta) = \frac{\lambda^{k+\beta-1} \exp[-\lambda t - (\lambda/\eta)^\beta]}{\int_0^{+\infty} \lambda^{k+\beta-1} \exp[-\lambda t - (\lambda/\eta)^\beta] d\lambda} \quad (3.3.20)$$

On ne peut calculer cette relation que grâce à une résolution numérique [14].

La valeur moyenne a posteriori est donnée par la relation :

$$\mathbb{E}(\Lambda|k; \eta, \beta) = \frac{\int_0^{+\infty} \lambda^{k+\beta} \exp[-\lambda t - (\lambda/\eta)^\beta] d\lambda}{\int_0^{+\infty} \lambda^{k+\beta-1} \exp[-\lambda t - (\lambda/\eta)^\beta] d\lambda} \quad (3.3.21)$$

3.4 Application à un cas industriel : évaluation de la fiabilité de calculateurs

Cet exemple consiste à illustrer la différence entre les deux démarches, fréquentielle et bayésienne [15].

On observe les défaillances de calculateurs dues à des défauts de logiciels par un retour d'expérience (REX) sur six années allant de 1991 à 1996. Les défaillances peuvent théoriquement se manifester selon quatre modes :

1. **Mode 1** : la défaillance n'a pas d'effet sur les fonctions principales du calculateur, uniquement sur les fonctions secondaires (exemple : signalisation...). Ce mode n'est pas considéré comme une défaillance, mais plutôt comme un fonctionnement dégradé peu pénalisant ;
2. **Mode 2** : la défaillance conduit à l'arrêt du calculateur dans un mode parfaitement maîtrisé. Un second calculateur redondant au premier et parfaitement identique n'est pas affecté par le défaut logiciel ;
3. **Mode 3** : la défaillance conduit à l'arrêt du calculateur dans un mode parfaitement maîtrisé. Un autre calculateur, redondant au premier et parfaitement identique, est également affecté par le défaut logiciel ;
4. **Mode 4** : la défaillance conduit à l'arrêt du calculateur dans un mode non maîtrisé et peut conduire à un fonctionnement erratique. Ce mode n'est pas analysé ici.

Les défaillances ont été observées à deux moments de la vie du logiciel :

- lors des tests et essais réalisés en grandeur réelle (1^{er} semestre de 1991),
- au cours de l'exploitation normale de l'installation.

l'installation compte une soixantaine de calculateurs pour un temps global de fonctionnement annuel de 400 000 heures. Les différents logiciels implantés et comportant de nombreuses parties communes ont été jugés homogènes du point de vue de leur fiabilité.

Premièrement, on donne l'estimation du taux de défaillance qui, a priori est estimé constant.

Deuxièmement, il faut estimer la proportion relative des défaillances de mode 3 (mode commun) sur l'ensemble des défaillances considérées (mode 2 et mode 3).

Nous disposons des données historiques du tableau suivant :

Application REX	Mode 1	Mode 2	Mode 3
1991 : 1 ^{er} semestre	9	4	2
1991 : 2 ^{eme} semestre	1	0	0
1992	2	1	1
1993	1	2	0
1994	5	2	0
1995	2	1	1
1996	1	1	0

TAB. 3.1 – Retour d'expérience sur les calculateurs.

3.4.1 Application de l'approche fréquentielle

Pour $t = 2\ 200\ 000 = 400\ 000 \times 5.5$ heures cumulées de fonctionnement opérationnel des installations, 9 défaillances ont été observées, dont 2 sont de mode 3 ou de mode commun.

Estimation du taux de défaillance

Nous supposons que les durées de vie des calculateurs T_i suivent une loi exponentielle de paramètre λ (taux de défaillance constant).

La vraisemblance du taux de défaillance s'écrit :

$$L(t, \lambda, k) = \lambda^k e^{-\lambda \sum_{i=1}^k t_i} \tag{3.4.1}$$

L'estimation du maximum de vraisemblance du taux de défaillance est donc :

$$\hat{\lambda} = k/t \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{9}{2\ 200\ 000} = 4.1 \cdot 10^{-6}/h. \tag{3.4.2}$$

L'intervalle de confiance : On a : $T_i \rightsquigarrow \mathcal{Exp}(\lambda)$

$$2\lambda T_i \rightsquigarrow \mathcal{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \gamma\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi_2^2$$

donc :

$$2\lambda \sum_{i=1}^k T_i \rightsquigarrow \chi_{2k}^2$$

l'intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ est : $\mathbb{P}\left(k_1 \leq 2\lambda \sum_{i=1}^k T_i \leq k_2\right) = 1 - \alpha$,

d'où l'intervalle de confiance :

$$\left[k_1/2 \sum_{i=1}^k t_i, k_2/2 \sum_{i=1}^k t_i \right].$$

Avec : $k_1 = \Phi_{\chi_{2k}^2}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est le fractile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $k_2 = \Phi_{\chi_{2k}^2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, le fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Pour une valeur de confiance de 90%, l'intervalle de confiance est donc : $[2.1 \cdot 10^{-6}, 6.5 \cdot 10^{-6}]$.

Proportion de mode commun

Nous supposons que la proportion de défaillance se manifestant selon le mode 3 suit une loi binomiale de paramètre constant p exprimant cette proportion.

Une estimation moyenne de cette proportion est :

$$p_{moy} = k/N = 0.22 \tag{3.4.3}$$

Remarque 3.2. Pour l'estimation par intervalle de confiance d'une proportion, on utilise généralement des méthodes numériques [18].

3.4.2 Application de l'approche bayésienne

L'approche proposée ci-après reprend l'exemple des défauts logiciels de calculateurs, et reflète la manière dont va procéder un ingénieur fiabiliste.

Taux de défaillance

Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer la connaissance initiale a priori. Cette connaissance correspond aux résultats des tests et d'essais effectués en 1991 et à l'expertise.

En choisissant une loi conjuguée Gamma a priori pour le taux de défaillance et en appliquant la méthode des échantillons fictifs correspondant aux observations des tests du premier semestre de 1991 (nombre de défaillance $k = 6$ sur un temps $t = 200\ 000/h$), pour déterminer les hyperparamètres α_0 et β_0 , il ressort que la loi a priori du taux de défaillance λ est une $\gamma(6, 2 \cdot 10^5)$.

Compte tenu des observations faites pendant l'exploitation des calculateurs, on détermine la distribution du taux de défaillance a posteriori (principe de conjugaison) par le retour d'expérience, qui est une loi Gamma de paramètres :

$$\gamma(\alpha_0 + k, \beta_0 + t) = \gamma(15, 2.4 \cdot 10^6).$$

L'espérance mathématique a posteriori du taux de défaillance est donc :

$$\frac{\alpha_0 + k}{\beta_0 + t} = \frac{15}{2.4 \cdot 10^6} = 6.25 \cdot 10^{-6}/h$$

et l'écart type a posteriori est :

$$\sqrt{\frac{\alpha_0 + k}{(\beta_0 + t)^2}} = 1.6 \cdot 10^{-6}/h$$

Proportion de modes communs (mode 3)

Pour évaluer la proportion p de modes communs, nous choisissons avant les tests et essais, une loi a priori non informative, c'est-à-dire une loi uniforme sur $[0, 1]$. Les experts affirment que cette proportion est intrinsèque aux équipements et ne dépend pas du fait que l'on soit en essai ou en exploitation réelle.

Après les essais, il ressort que la proportion p de modes communs a posteriori suit une loi Bêta (qui est conjuguée avec la loi des essais : binomiale de paramètre $N = 6$ et p) :

$$B(k + 1; N - k + 1) = B(3, 5). \tag{3.4.4}$$

Cette loi sert maintenant d'a priori pour l'estimation de la proportion p après les cinq années et demie d'exploitation. La proportion p suit donc a posteriori une loi bêta :

$$B(k + 3, N - k + 5) = B(5, 12)$$

L'espérance mathématique a posteriori de p est :

$$\frac{k + 3}{N + 8} = \frac{5}{17} = 0.29.$$

L'écart type a posteriori est :

$$\sqrt{\frac{(k+3)(N-k+5)}{(N+9)(N+8)^2}} = 0.10.$$

3.5 Conclusion

Dans le cadre de l'estimation des paramètres de fiabilité, la détermination de la densité a priori à partir du jugement d'experts est assez compliquée si l'on ne dispose pas de logiciels (Bayes 2000 par exemple). Bien que dans les exemples examinés dans ce chapitre tous les calculs sont faits manuellement, il est important de bien faire attention à la manière dont est construite la densité a priori et d'éviter des erreurs de raisonnement. Les estimations obtenues semblent de meilleure qualité que celles obtenues par la démarche fréquentielle classique, car l'approche bayésienne est rigoureuse quel que soit le plan d'échantillonnage des observations, et parce qu'elle intègre une information globalement plus riche.

Conclusion générale

L'objet de ce travail est de prouver l'applicabilité de la statistique bayésienne en fiabilité.

Dans un premier lieu, nous avons rappelé les notions de base de la fiabilité ainsi que celles de la statistique bayésienne à savoir, l'estimation ponctuelle et par intervalle de crédibilité ainsi que les tests bayésiens suivi d'une modélisation de l'information a priori dans le cas non informatif.

Par la suite nous avons calculé les distributions a posteriori du taux de défaillance, temps moyen entre défaillance et de la fiabilité d'un matériel pour différentes lois a priori sous l'hypothèse de l'exponentialité des observations.

Enfin deux exemples d'application sont traités. Le premier est relatif à un test de robinets d'isolement, où nous avons montré comment les techniques bayésiennes pouvaient se révéler plus performantes que les techniques classiques qui répondaient assez mal dans le cas de données peu nombreuses. Dans le second, nous nous sommes intéressé à un cas industriel où nous avons comparé les deux démarches fréquentielle et bayésienne. Cette dernière est la plus explorée à l'heure actuelle dans la mesure où elle permet d'estimer la fiabilité d'un composant à partir d'un nombre très limité de données.

Les techniques bayésiennes sont de puissants outils au service du fiabiliste mais leur problème majeur est lié à la subjectivité des données « a priori » et aux calculs importants qu'elles demandent ainsi, leurs utilisations doivent être déterminées et faites avec beaucoup de précautions et de soins.

En perspectives, il est souhaitable qu'une étude de cas pratique avec des données réelles fera l'objet d'un travail au futur, tout en sachant que le problème réside dans l'information subjective. L'étude de disponibilité d'un matériel en attente à la sollicitation peut aussi être une bonne perspective de recherche.

Bibliographie

- [1] Addour M., Braham H., « *Statistique bayésienne.* » Mémoire de licence fondamentale. Université A. MIRA, 2011.
- [2] Aruegg A., « *Probabilités et statistique.* » 4^{ème} édition 1994.
- [3] Augé M. J. C., « *Utilisation d'un modèle a hazard proportionnel pour estimer la fiabilité de composants mecaniques.* » 19 juin 1998.
- [4] Badoux R., Sander P., « *Bayesian methods in reliability.* » Springer Science+Business Media, B.V, 1991.
- [5] Bouraine M., « *Tests et lois non paramétriques de fiabilité.* » Thèse de magister en mathématiques appliquées, Université A.MIRA, 2001.
- [6] Bousquet N., « *Modélisation bayésienne de la durée de vie de composants industriels.* » Collaboration avec EDF R et D, INRIA Futurs et Université Paris XI, équipe select, GT ABARI 12 mars, 2007.
- [7] Hamada M. S., Martz H. F., Shane Reese C., Wilson A. G., « *Bayesian reliability.* » Springer Science+Business Media, L.L.C, 2008.
- [8] Laggoune R., « *Optimisation de la maintenance par la fiabilité opérationnelle des systèmes mécaniques multi-composants. Applications industrielles.* »,Thèse de doctorat en mécanique, Université de Béjaia, 2009.
- [9] Lannoy A., Proccacia H., « *L'utilisation du jugement d'experts en sûreté de fonctionnement.* » Technique et Documentation, Paris 2001.
- [10] Marin J. M., Robert. C. P., « *Les bases de la statistique bayésienne.* » 2007.
- [11] Martz H., Waller R., « *Bayesian reliability analysis.* » Wiley Sevier in probability and mathematical statistics, 1982.
- [12] Meeker, Escobar, « *Statistical methods for reliability data.* » Chapitre 14, Wiley, 1998.

-
- [13] Mense A. T., « *Bayesian statistics applied to reliability analysis and prediction.* » PE, CRE, Principal Engineering Fellow, Raytheon Missile Systems, Tucson, AZ, 9/23/12.
- [14] Piepszownik L., Procaccia H., « *Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne.* » EYROLLES, 1992.
- [15] Procaccia H., Suhner M. C., « *Démarche bayésienne et applications à la sûreté de fonctionnement.* » Lavoisier Paris, 2003.
- [16] Ringler J., « *Une modélisation bayésienne du taux de défaillance en fiabilité.* » Revue de statistique appliquée, tome 29, n°1, p. 43-56, 1981.
- [17] Rousseau J., « *Statistique bayésienne (Note de cours).* » ENSAE ParisTech, 3^{ème} année 2009/2010.
- [18] Saporta G., « *Probabilité, analyse des données et statistique.* » Edition Technip, 1990.
- [19] Smith R. L., « *The bayesian Inference method and its application to reliability problems.* » NRL Memorandum Report 4903, 1982.
- [20] Tassi P., « *Méthodes statistiques.* » 3^{ème} édition Economica. 2004.
- [21] Tebbi W., « *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés.* » Thèse de doctorat, école doctorale d'ANGERS, 09 mars 2005.

Résumé :

Ce travail expose les notions générales de la théorie de fiabilité, ainsi que celles de la démarche bayésienne et ses applications concrètes dans l'estimation des paramètres de fiabilité.

Dans ce mémoire, deux exemples d'application sont traités. Le premier concerne un test relatif aux robinets d'isolement dans lequel on a estimé le taux de défaillance, le temps moyen entre défaillance et la fiabilité sous l'hypothèse de l'exponentialité des observations. L'objectif du deuxième exemple est la comparaison entre les démarches, fréquentielle et bayésienne dans un cas industriel. Cette dernière semble meilleure car elle intègre une information globalement plus riche.

Mots clés : Fiabilité, Inférence bayésienne, Taux de défaillance, Loi a priori, Loi a posteriori.

Abstract :

This work presents the general concepts of the theory of reliability, as well as the Bayesian approach and its practical applications in the estimation of the reliability parameters.

In this report, two application examples are discussed. The first tests on isolation valves in which we estimated the failure rate, the mean time between failure and the reliability under the assumption of exponentiality of the observations. The objective of the second example is the comparison between the frequency approach, and Bayesian methods in an industrial case. The latter seems better because it integrates a richer overall information.

Key words : Reliability, Bayesian inference, Rate of failure, Prior distribution, Posterior distribution.