

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE BEJAIA  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

Brahimi Nassim

THEME

Le groupe de Poincaré, ses extensions  
et quelques applications

Soutenu devant le jury composé de :

Mme.	H. BECHIR	M. C. B	U. de Béjaia	Présidente
Mr.	A. BOUDA	P	U. de Béjaia	Rapporteur
Mr.	A. DAHMANI	P	U. de Béjaia	Examineur

Année 2012/2013

---

# Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur, Monsieur **A. BOUDA** pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité qui ont contribué à faire de ce mémoire ce qu'il est aujourd'hui.*

*Mes remerciements sont aussi adressés à Monsieur **A. DAHMANI** et Madame **H. BECHIR** qui nous font l'honneur de juger notre travail.*

*Je remercie aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui m'ont permis d'améliorer ma formation.*

---

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes parents.*

*Mon frère Réda et ma sœur Yasmine.*

*Mes grands parents et toute la famille.*

*Tous mes camarades de promo et tous mes amis..*

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur la théorie des groupes et algèbres de Lie</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Notions de base . . . . .	2
1.2.1 Action de groupes . . . . .	5
1.3 Représentation des groupes . . . . .	6
1.3.1 Définitions générales . . . . .	7
1.3.2 Représentations irréductibles . . . . .	8
1.4 Groupes et algèbres de Lie . . . . .	9
1.4.1 Groupes de Lie . . . . .	9
1.4.2 Algèbre et crochets de Lie . . . . .	10
1.4.3 Constantes de structure d'une algèbre de Lie . . . . .	11
1.4.4 Compléments sur l'exponentielle . . . . .	12
1.4.5 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . . .	13
1.5 Groupes de Lie des transformations de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
1.5.1 Groupes de Lie des transformations de $\mathbb{R}^n$ à plusieurs paramètres . . . . .	15
1.5.2 Groupes de transformation à un seul paramètre . . . . .	20
1.6 Exemple de groupes de Lie matriciels . . . . .	22
1.7 Éléments de géométrie . . . . .	25

---

<b>2</b>	<b>Groupes de Lorentz et de Poincaré</b>	<b>27</b>
2.1	Espace des états, définition d'une particule . . . . .	27
2.1.1	Espace des états . . . . .	27
2.1.2	Définition d'une particule . . . . .	28
2.2	Structure . . . . .	29
2.2.1	Groupe de Lorentz . . . . .	29
2.2.2	Groupe de Poincaré . . . . .	37
2.3	Relations de commutation . . . . .	38
2.3.1	Algèbre de Lie . . . . .	38
2.3.2	Relations de commutation . . . . .	42
2.4	Représentations irréductibles . . . . .	44
2.4.1	Représentations de $SU(2)$ . . . . .	44
2.4.2	Représentations d'un produit semi-direct fini . . . . .	45
2.4.3	Représentations du groupe de Poincaré . . . . .	48
2.5	Le groupe de Poincaré et les crochets de Poisson . . . . .	55
<b>3</b>	<b>La DSR (kappa-algèbre)</b>	<b>59</b>
3.1	La nouvelle déformation des crochets de Poisson (La $\kappa$ -déformation) . . . . .	60
3.1.1	Le $\kappa$ -espace de phase de Minkowski . . . . .	60
3.1.2	La $\kappa$ -algèbre de Lorentz . . . . .	61
3.2	la $\kappa$ -transformation des quadri-vecteurs fondamentaux . . . . .	63
3.2.1	La $\kappa$ -transformation infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux . . . . .	63
3.2.2	La $\kappa$ -transformation finie des quadri-vecteurs fondamentaux . . . . .	64
3.3	Le $\kappa$ -groupe des transformations de Lorentz . . . . .	68
3.4	Les variables canoniques . . . . .	70
<b>4</b>	<b>La transformation de Fock (<math>R</math>-algèbre)</b>	<b>73</b>
4.1	La nouvelle déformation des crochets de Poisson (La $R$ -déformation) . . . . .	74
4.1.1	Le $R$ -espace de phase de Minkowski . . . . .	74
4.1.2	La $R$ -algèbre de Lorentz . . . . .	75

4.2	les $R$ -transformations des quadri-vecteurs fondamentaux . . . . .	76
4.2.1	La $R$ -transformation infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux	76
4.2.2	La $R$ -transformation finie des quadri-vecteurs fondamentaux . . . . .	77
4.3	Le $R$ -groupe des transformations de Lorentz . . . . .	79
4.4	Les variables canoniques . . . . .	81
4.5	Conclusion . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>84</b>
5.1	Dilatation des temps . . . . .	84
5.1.1	Transformation de Lorentz . . . . .	85
5.1.2	$\kappa$ -transformation de Lorentz . . . . .	86
5.2	Contraction des longueurs . . . . .	86
5.2.1	Transformation de Lorentz . . . . .	87
5.2.2	$\kappa$ -transformation de Lorentz . . . . .	88
	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

# Introduction

Dans le vaste champ de la physique relativiste, le groupe de Poincaré qu'on présentera au chapitre 2 occupe une place considérable. Les premiers travaux sur ce groupe sont dus au mathématicien et physicien français, Henri Poincaré. Ce groupe a été introduit pour simplifier les études de l'un des piliers de la physique moderne. En effet dès qu'on parle du changement de référentiels et de la covariance des lois de la physique, toutes les considérations cèdent leurs places à la théorie de la relativité (restreinte ou générale). La théorie de la relativité restreinte d'Einstein est venue remplacer la relativité de Galilée-Newton, vu la remise en cause de cette dernière par les observations expérimentales telles que l'expérience de Morley-Michelson et aussi son incompatibilité mathématique avec les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes d'électromagnétisme. Mais ces dernières années, l'expérimentation semble être en désaccord avec les prédictions faites sous la base de la relativité restreinte pour des énergies très élevées. C'est le cas des rayons cosmiques. En plus de cette violation, les résultats de la théorie de la gravitation quantique encouragent la modification de la relativité restreinte de sorte à tenir compte du comportement de la nature à l'échelle de Planck.

Ainsi on a introduit la théorie qui veut régler ces problèmes, qui est la théorie de relativité doublement restreinte (appelée aussi la relativité restreinte déformée) qu'on désigne par DSR (de son appellation en anglais : Doubly ou Deformed Special Relativity) qui est basée sur le  $\kappa$ -groupe de Lorentz qui est une extension du groupe de Lorentz qu'on verra au chapitre 3. En réalité, il y a deux théories principales de ce genre : la DSR1 du physicien italien Giovanni Amelino-camelia et la DSR2 des physiciens Lee Smolin et Joao Magueijo.

Le résultat le plus remarquable des théories DSR est la modification des transformations de Lorentz et la relation de dispersion énergie-impulsion  $E = mc^2$ , cependant une autre approche a vu le jour celle-ci est basée sur une autre extension : le  $R$ -groupe de Lorentz qui est la transformation de Fock qu'on verra au chapitre 4.

Ce mémoire consistera à présenter en premier lieu le groupe de Lorentz et plus généralement le groupe de Poincaré, ensuite on présentera deux extensions de ce groupe. On commencera par rappeler quelques notions sur la théorie des groupes et on présentera le groupe de Poincaré au deuxième chapitre. Ensuite nous exposerons la DSR (kappa-algèbre). Le troisième chapitre y est dédié. Et nous présenterons la deuxième extension qui est la transformation de Fock ( $R$ -algèbre) au quatrième chapitre. Enfin, nous terminons par une application en deux parties et une conclusion.

---

# Généralités sur la théorie des groupes et algèbres de Lie

## 1.1 Introduction

La théorie des groupes et algèbres de Lie ont été développées à partir de la fin du 19ème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie. Elles ont connu de nombreuses ramifications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et restent encore l'objet de nombreux travaux de recherche. Par ailleurs ces objets interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des "formes automorphes" et du "programme de Langlands", et en physique théorique, notamment dans la physique des particules et la relativité générale.

## 1.2 Notions de base

Dans cette section, nous donnerons les notions de base sur les groupes

**Définition 1.2.1 (Groupe)** *Un groupe est un quadruplet  $(G, *, e, i)$  où :*

- a) *L'ensemble  $G$  est non vide muni d'une loi de composition interne associative  $(*)$  (i.e. une application de  $G \times G \mapsto G$  qui à  $(a, b) \in G \times G$  fait correspondre un élément  $a * b \in G$  et  $\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$  (associativité).*
- b) *L'élément  $e \in G$  est neutre pour la loi  $(*)$ , (i.e.  $\forall a \in G, e * a = a * e = a$ ) (élément neutre).*
- c) *L'application  $i$  est une bijection de  $G$  sur  $G$  telle que  $\forall a \in G, i(a) * a = a * i(a) = e$  (élément symétrique).*
- d) *Si de plus : La loi est commutative, (i.e.  $\forall a, b \in G, a * b = b * a$ ), alors on dit que le groupe est abélien, et sa loi de composition interne est dite commutative et notée souvent  $(+)$ .*

**Remarque 1.2.1** *Soit  $G$  un groupe.*

- 1) *L'élément neutre est unique.*
- 2) *L'équation  $ax = b$  (pour  $a, b \in G$ ) admet une et une seule solution dans  $G$ .*
- 3) *Soit  $a \in G$ . Les applications  $multa : G \mapsto G$  et  $Inta : G \mapsto G$  définies par :  $multa(x) = ax$  et  $Inta(x) = axa^{-1}$  sont des bijections.*
- 4) *Si les applications  $(x, y) \mapsto xy$  et l'application inverse  $x \mapsto x^{-1}$  sont continues alors on dit que  $G$  est un groupe topologique.*

**Définition 1.2.2 (Sous-groupe)** *Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-ensemble de  $G$ . Ce sous-ensemble  $H$  est un sous-groupe de  $G$  s'il a lui même  $(H)$  la structure d'un groupe une fois muni de la loi de composition interne de  $G$ .*

**Remarque 1.2.2** *La définition précédente est équivalente à dire que :*

$$\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$$

**Exemple 1.2.1** *Désignons par  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles  $n \times n$ . Alors l'ensemble des matrices régulières réelles est donné par :*

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

Cet ensemble muni de la multiplication des matrices, représente le groupe linéaire réel d'ordre  $n$ . En effet :

- 1)  $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{R}), \det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ . Alors  $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ . Donc il s'agit bien d'une loi interne.
- 2) La matrice identité  $I_{n \times n}$  est l'élément neutre de  $GL_n(\mathbb{R})$ , car son déterminant est non nul. Il est égal à un.
- 3) Si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , sa matrice inverse existe car  $\det(A) \neq 0$ . En plus, on a  $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} \neq 0$ . Donc  $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ .
- 4) L'associativité de la multiplication matricielle assure l'associativité dans  $GL_n(\mathbb{R})$ .

De plus le groupe  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe continu non abélien. La démonstration est similaire pour  $GL_n(\mathbb{C})$ , groupe des matrices régulières complexes  $n \times n$ .

**Définition 1.2.3 (Homomorphisme de groupes)** Un homomorphisme du groupe  $G$  dans le groupe  $G'$  est une application  $\varphi : G \mapsto G'$  qui respecte les lois de compositions internes des deux groupes. Autrement dit,  $\forall a, b \in G$  l'application  $\varphi$  vérifie :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

**Remarque 1.2.3** De cette définition, on peut tirer les résultats suivants :

- 1) Si  $e$  et  $e'$  sont respectivement les éléments neutres de  $G$  et  $G'$ , alors  $\varphi(e) = e'$ .
- 2) Si  $a^{-1}$  est l'élément inverse (symétrique) de  $a$ , alors  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ .
- 3) Dans le cas où l'application  $\varphi$  est bijective, on dit qu'on a un isomorphisme de groupes.
- 4) Si en plus,  $G = G'$ , alors on a un automorphisme de groupes.

**Exemple 1.2.2** En considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, +) &\mapsto (\mathbb{R}^{+*}, \cdot) \\ x &\mapsto \varphi(x) = e^x \end{aligned}$$

on a  $\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) \forall a, b \in \mathbb{R}$  d'où  $\varphi$  est un homomorphisme de groupes. De plus puisque l'application  $\varphi$  est bijective, alors il s'agit d'un isomorphisme de groupes.

**Définition 1.2.4 (Produit direct de groupes)** Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes dont les lois internes sont notées multiplicativement, et soit  $G_1 \times G_2$  leur produit cartésien. La

somme directe des deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  noté  $G_1 \oplus G_2$  est l'ensemble  $G_1 \times G_2$  muni de la loi interne suivante :

$$\forall (a, b), (a', b') \in G_1 \times G_2, (a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

**Proposition 1.2.1** *La somme directe de deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  à savoir  $G_1 \oplus G_2$  est un groupe.*

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer la définition. ■

**Définition 1.2.5 (Produit semi-direct de groupes)** *Le produit semi-direct des deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  noté  $G_1 \ltimes G_2$  est l'ensemble  $G_1 \times G_2$  muni d'une loi interne de la forme :*

$$\forall (a, b), (a', b') \in G_1 \times G_2, (a, b)(a', b') = (aa', bf_a(b'))$$

où  $f$  est un homomorphisme de  $G_1$  dans l'ensemble des automorphismes de  $G_2$ ,  $Aut(G_2)$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} f : G_1 &\longmapsto Aut(G_2) \quad \text{et} \quad f_a : G_2 \longmapsto G_2 \\ a &\longmapsto f_a & b' &\longmapsto f_a(b') \end{aligned}$$

**Exemple 1.2.3** *Un exemple de produit semi-direct est celui de  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  et  $(\mathbb{R}, +)$  défini par :*

$$\forall (a, x), (b, y) \in (\mathbb{R}^*, \cdot) \times (\mathbb{R}, +), (a, x)(b, y) = (ab, x + ay)$$

Dans cet exemple la fonction  $f_a$  est définie par :

$$f_a(y) = ay$$

## 1.2.1 Action de groupes

**Définition 1.2.6 (Action de groupes)** *L'action d'un groupe  $G$  (de loi noté multiplicativement) sur un ensemble non vide  $E$  est une application  $T$  définie par :*

$$\begin{aligned} T : G \times E &\longmapsto E \\ (a, x) &\longmapsto T(a, x) = a \cdot x \end{aligned}$$

telle que ces deux conditions sont respectées :

- a) Si  $e$  est l'élément neutre de  $G$ , alors  $\forall x \in E, ex = x$ .
- b)  $\forall a, b \in G$  et  $x \in E, (ab)x = a(bx)$ .

**Exemple 1.2.4** Le groupe linéaire général  $GL_n(\mathbb{K})$  par exemple, agit sur l'ensemble des vecteurs réels de  $\mathbb{R}^n$  à savoir le produit matricielle en considérant le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  comme une matrice colonne.

**Proposition 1.2.2** Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $E$ .

- a) Pour tout  $g \in G$ , l'application :

$$\begin{aligned} T_g : E &\longmapsto E \\ x &\longmapsto T_g(x) = g \cdot x \end{aligned}$$

est une permutation de  $E$ .

- b) L'application :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longmapsto \text{Aut}(E) \\ g &\longmapsto \rho(g) = T_g \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes et  $\ker \rho$  est appelé noyau de l'action de  $G$  sur  $E$ .

**Démonstration.**

i) Montrons que  $T_g \in \text{Aut}(E)$  c'est-à-dire que  $T_g$  est une bijection.  $T_g$  est surjective, car  $\forall x \in E, x = T_g(g^{-1} \cdot x)$ .  $T_g$  est injective. En effet, soient  $x_1$  et  $x_2$  dans  $E$  tels que  $T_g(x_1) = T_g(x_2)$ , c'est-à-dire  $g \cdot x_1 = g \cdot x_2$ , alors  $g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_2)$ , d'où  $x_1 = x_2$ .

ii) Soient  $g_1$  et  $g_2$  dans  $G$  ;  $\forall x \in E$  :

$$(T_{g_1} \circ T_{g_2})(x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 g_2 \cdot x = T_{g_1 g_2}(x)$$

donc  $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ , ce qui prouve que  $\rho$  est un homomorphisme de groupes. ■

## 1.3 Représentation des groupes

En mathématiques et en physique, la notion de représentation d'un groupe est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières de faire agir des groupes sur des espaces vectoriels par des transformations linéaires.

### 1.3.1 Définitions générales

Rappelons que si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $GL(V)$  désigne le groupe des isomorphismes linéaires de  $V$  dans lui-même. Si  $V$  est de plus muni d'un produit hermitien  $(\cdot, \cdot)_V$ ,  $U(V)$  désigne le sous-groupe de  $GL(V)$  des applications linéaires  $u$  préservant le produit hermitien, c'est-à-dire

$$(u(v), u(w))_V = (v, w)_V, \forall v, w \in V$$

**Définition 1.3.1 (Représentation)** Une représentation  $(\rho, V)$  du groupe  $G$  est la donnée d'un espace vectoriel  $V$ , appelé espace de la représentation, et d'un morphisme de groupes

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

**Définition 1.3.2 (Représentation unitaire)** La représentation  $(\rho, V)$  est dite unitaire si  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit hermitien  $(\cdot, \cdot)_V$  et si  $\rho$  est à valeurs dans  $U(V)$ , c'est-à-dire si pour tout  $g \in G$  et pour tous  $v, w \in V$ ,

$$(\rho(g)(v), \rho(g)(w))_V = (v, w)_V$$

**Remarques 1.3.1** On a :

- 1) La dimension de la représentation  $(\rho, V)$  est la dimension de  $V$ . On la note  $d$ .
- 2) On appelle représentation triviale toute représentation telle que  $\forall g \in G, \rho(g) = Id_V$
- 3) L'espace vectoriel  $\{0\}$  est aussi un espace de représentation pour tout groupe  $G$  (de manière unique, puisque  $GL(\{0\})$  est le groupe à un élément). Nous l'appellerons représentation nulle de  $G$ .

**Définition 1.3.3 (Représentation matricielle)** Une représentation  $(\rho, V)$  d'un groupe  $G$  est dite représentation matricielle de dimension  $n$ , si l'espace de représentation  $V = \mathbb{C}^n$ , on a donc l'homomorphisme :

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

**Remarque 1.3.2** Comme on peut le voir, une représentation matricielle n'est qu'une représentation de dimension finie, en effet,  $GL_n(\mathbb{C}) = GL(V = \mathbb{C}^n)$ .

**Exemple 1.3.1** Soit le groupe multiplicatif  $T_2$  donné par :

$$T_2 = \left\{ A_\theta \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : A_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

et soit l'application :

$$\begin{aligned} \rho : T_2 &\longmapsto GL_3(\mathbb{R}) \\ A_\theta &\longmapsto \rho(A_\theta) \end{aligned} \text{ avec } \rho(A_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que  $(\rho, \mathbb{R}^3)$  est une représentation du groupe  $T_2$ . En effet :

$$\rho(A_{\theta_1} A_{\theta_2}) = \rho(A_{\theta_1}) \rho(A_{\theta_2})$$

### 1.3.2 Représentations irréductibles

Soit  $(\rho, V)$  une représentation de  $G$ . Un sous-espace vectoriel,  $F \subset V$ , est dit invariant par  $\rho$  (ou par  $G$ , si le nom de la représentation est sous-entendu) si,  $\forall g \in G, \rho(g)F \subset F$ , ce qui entraîne  $\rho(g)F = F$ . On peut alors parler de la représentation  $\rho$  restreinte à  $F$  qui est une représentation de  $G$  dans  $F$ . On la note  $\rho|_F$ . Une telle représentation restreinte à un sous-espace invariant s'appelle aussi une sous-représentation.

**Définition 1.3.4 (Représentations irréductibles)** Une représentation  $(\rho, V)$  de  $G$  est dite irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de  $V$  invariants par  $\rho$  sont  $\{0\}$  et  $V$  tout entier.

**Exemple 1.3.2** Toute représentation  $(\rho, E)$  de dimension 1 est irréductible, car dans ce cas les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  sont précisément  $\{0\}$  et  $E$ .

**Définition 1.3.5 (Somme directe de représentations)** Soient  $(\rho_1, E_1)$  et  $(\rho_2, E_2)$  Deux représentations de  $G$ . Alors la **somme directe** de deux représentations  $(\rho_1, E_1)$  et  $(\rho_2, E_2)$  est une représentation  $(\rho = \rho_1 \oplus \rho_2, E = E_1 \oplus E_2)$  telle que  $\forall g \in G, \forall x_1, x_2 \in E_1 \times E_2$  on a :

$$\rho(g)(x_1 + x_2) = (\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x_1 + x_2) = \rho_1(g)(x_1) + \rho_2(g)(x_2)$$

**Remarque 1.3.3** Pour des représentations matricielles  $(\rho_1, E_1)$  et  $(\rho_2, E_2)$ , les matrices de la représentation somme directe de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des matrices diagonales par blocs :

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

**Théorème 1.3.1** Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

**Démonstration.** On procède par récurrence sur le degré de la représentation, plus de détaille voir [12]. ■

## 1.4 Groupes et algèbres de Lie

### 1.4.1 Groupes de Lie

Donnons d'abord une définition générale.

**Définition 1.4.1 (Groupe de Lie)** Un groupe  $G$  est un groupe de Lie sur  $\mathbb{k}$  si :

- a)  $G$  est une variété analytique si  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  (ou différentielle si  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ).
- b) L'application  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  est holomorphe (ou différentiable).

**Remarques 1.4.1** On a :

- 1) Un tel groupe possède une infinité continue d'éléments.
- 2) Tout groupe isomorphe à un groupe de Lie est un groupe de Lie.

**Exemple 1.4.1** L'ensemble des matrices inversibles de  $M_p(\mathbb{C})$  ou groupe linéaire, noté  $GL_p(\mathbb{C})$ , est un groupe de Lie en effet :

- 1)  $GL_p(\mathbb{C})$  est une variété analytique, car  $GL_p(\mathbb{C})$  est dense et ouvert dans  $M_p(\mathbb{C})$  comme image réciproque de  $\mathbb{C}^*$  par l'application continue  $(\det)$ .
- 2) De plus, si on prend  $A$  et  $B$  dans  $GL_p(\mathbb{C})$ , chaque coefficient de  $AB^{-1}$  est fonction polynômiale des coefficients de  $A$  et de  $B$ , donc l'application  $(A, B) \mapsto AB^{-1}$  est clairement holomorphe.

On a vu que le groupe général linéaire d'ordre  $n$  à éléments dans  $\mathbb{k}$  qu'on note  $GL_n(\mathbb{k})$ , est l'ensemble des matrices carrées non singulières (inversibles)  $n \times n$  à éléments dans le corps  $\mathbb{k}$  muni de la loi de la multiplication des matrices.  $\mathbb{k}$  désigne le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$  où celui des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

Donnons donc maintenant une définition indépendante de la géométrie.

**Définition 1.4.2 (Groupe de Lie linéaire)** *On appelle groupe de Lie linéaire (Matricielle) tout sous-groupe fermé d'un groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{R})$ .*

**Remarques 1.4.2** *Donnons :*

- 1) *Comme  $GL_n(\mathbb{C})$  est un sous-groupe fermé de  $GL_{2n}(\mathbb{R})$ , on peut remplacer  $GL_n(\mathbb{R})$  par  $GL_n(\mathbb{C})$ , ou même par  $GL(V/\mathbb{k})$  pour  $V$  de dimension finie, dans la définition ci-dessus.*
- 2) *Par commodité, nous parlerons souvent simplement de "groupe de Lie".*
- 3) *La dimension d'un groupe de Lie est définie comme sa dimension en tant que variété, c'est à dire le nombre de paramètres indépendants avec lesquels on peut paramétrer la variété.*

## 1.4.2 Algèbre et crochets de Lie

**Définition 1.4.3 (Algèbre)** *Soit  $A$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k}$  dont la loi interne est notée  $(+)$  et la loi externe est notée multiplicativement. Supposons que  $A$  est muni d'une deuxième loi interne notée multiplicativement aussi, c'est à dire, une application de  $A \times A \mapsto A$  qui à  $(x, y) \mapsto xy$ , qui satisfait les deux lois de distributions suivantes :*

$$x(ay + bz) = a(xy) + b(xz)$$

$$(ax + by)z = a(xz) + b(yz)$$

*où  $a, b \in \mathbb{k}$  et  $x, y, z \in A$ . Dans ce cas, l'espace vectoriel  $A$  est une algèbre. Si en plus, la deuxième loi est associative,  $A$  est alors une algèbre associative.*

**Exemple 1.4.2** *L'espace vectoriel des matrices complexes carrés d'ordre  $n$  est un bon exemple d'algèbre associative une fois muni du produit matriciel, en plus de la sommation matricielle et de la multiplication par un scalaire réel.*

**Définition 1.4.4 (Algèbre de Lie)** Une algèbre de Lie est un espace vectoriel  $L$  sur le corps  $\mathbb{k}$  muni d'une deuxième loi interne notée  $[\cdot, \cdot] : L \times L \mapsto L$  et appelée crochet de Lie, qui satisfait les conditions ci-dessous,  $\forall x, y, z \in L$  et  $a, b \in \mathbb{k}$ .

- a)  $[x, y] = -[y, x]$  (Antisymétrie).
- b)  $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$  (Linéarité).
- c)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  (Identité de Jacobi).

**Remarque 1.4.3** On déduit de ces propriétés :

- 1) La première propriété implique que  $[x, x] = 0 \forall x \in L$ .
- 2) Les deux propriétés (a) et (b) impliquent que  $\forall x, y, z \in L, \forall a, b \in \mathbb{k}$  on a :

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

- 3) De plus si  $A$  est une algèbre associative dont la deuxième loi interne est notée multiplicativement, on peut définir un crochet de Lie sur  $A$  de la manière suivante :

$$\forall x, y \in A, [x, y] = xy - yx$$

Ce genre de crochets de Lie sont appelés des commutateurs.

**Exemple 1.4.3** L'espace vectoriel  $R^3$  muni du produit vectoriel habituel est une algèbre de Lie.

**Définition 1.4.5 (Sous-algèbre de Lie)** Soit  $L$  une algèbre de Lie et  $\mathcal{L}$  un sous-espace vectoriel de  $L$ . On dit que  $\mathcal{L}$  est une sous-algèbre de Lie de  $L$  s'il est stable par le crochet de Lie déjà défini sur  $L$ . Cela veut dire que ce crochet définit une loi interne dans  $\mathcal{L}$ . à savoir :

$$\forall x, y \in \mathcal{L}, [x, y] \in \mathcal{L}$$

### 1.4.3 Constantes de structure d'une algèbre de Lie

**Définition 1.4.6 (Relations de commutation)** Soit  $L$  une algèbre de Lie de dimension finie  $r$ , et soient les  $\{e_i\}, i = \overline{1, r}$  l'ensemble des vecteurs constituant une de ses bases. On appelle relations de commutation la donnée des  $r^2$  crochets de Lie  $[e_i, e_j], i, j \in$

$\{1, 2, 3, \dots, r\}$ . Puisque le crochet de Lie est une loi interne dans  $L$ , alors  $[e_i, e_j]$  se décompose comme suit :

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^r c_{ijk} e_k$$

Les  $c_{ijk}$  sont appelés les constantes de structure de l'algèbre de Lie  $L$ .

**Remarques 1.4.4** Les constantes de structure d'une algèbre de Lie dépendent du choix de la base. de plus on a :

- 1) L'antisymétrie du crochet de Lie implique que  $c_{ijk} = -c_{jik}$ , et en particulier  $c_{iik} = 0$ .
- 2) L'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie implique que

$$\forall i, j, h, k \in \{1, 2, 3, \dots, r\}, \sum_{l=1}^r c_{ijl} c_{lkh} + c_{jkl} c_{lih} + c_{kil} c_{ljh} = 0$$

#### 1.4.4 Compléments sur l'exponentielle

**Définition 1.4.7 (Sous-groupes à un paramètre)** Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique  $G$  est un morphisme de groupes topologiques  $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$ .

**Théorème 1.4.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -ev de dimension finie et soit  $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow GL(V/\mathbb{k})$  un sous-groupe à un paramètre. Alors il existe un unique endomorphisme  $x \in L(V/\mathbb{k})$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \exp(tx)$$

En particulier,  $\lambda$  est  $C^\infty$  et déterminé par sa dérivée  $x = \lambda'(0)$ .

**Démonstration.** Montrons d'abord que  $\lambda$  est dérivable. Par continuité de  $\lambda$ , on peut trouver une fonction  $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $C^\infty$ , à support compact et normalisée par  $\int_{\mathbb{R}} \theta(t) dt = 1$  vérifiant la condition

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(t) \|\lambda(-t) - Id_v\| dt < 1$$

Sous cette condition, l'endomorphisme  $y = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \lambda(-t) dt$  est inversible car il vérifie l'inégalité  $\|y - Id_v\| < 1$ . Posons alors

$$\kappa(t) = \int_{\mathbb{R}} \theta(t-s) \lambda(s) ds$$

La fonction  $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow L(V/K)$  est  $C^\infty$  (dérivation sous le signe somme...), et un changement de variable montre que

$$\kappa(t) = \int_{\mathbb{R}} \theta(u) \lambda(t-u) du$$

Donc  $\lambda$  est de classe  $C^\infty$ . Mais alors la différentielle  $\lambda'$  est donnée par  $\lambda'(t) = \lambda(t)\lambda'(0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $\frac{d}{dt}(\exp(-t\lambda'(0))\lambda(t)) = 0$ , puis par intégration  $\lambda(t) = \exp(tX)$  avec  $X = \lambda'(0)$ . ■

**Corollaire 1.4.1** *Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{k})$ . L'ensemble*

$$A_L = \{X \in M_n(\mathbb{k}) : \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$$

*est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{k})$ , stable par le crochet de Lie.*

**Démonstration.** La démonstration ce fait grâce au propriété de l'exponentielle qui est assez simple, voir [4]. ■

### 1.4.5 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

**Définition 1.4.8** *Soit  $G \subset GL_n(\mathbb{k})$  un sous-groupe fermé. L'ensemble,*

$$A_L = \{X \in M_n(\mathbb{k}) : \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\},$$

*est appelé algèbre de Lie de  $G$ , et est parfois aussi noté  $Lie(G)$ .*

**Remarque 1.4.5**  *$Lie(G)$  est canonique. Tel que nous l'avons défini,  $A_L$  semble dépendre non seulement de  $G$  mais aussi du  $GL_n(\mathbb{k})$  dans lequel on voit  $G$ . Or, en vertu du théorème précédent, l'ensemble  $A_L$  s'interprète comme l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de  $G$ , ce qui en donne une définition intrinsèque. De plus, la structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur  $A_L$  et le crochet sont donnés par les formules*

i)  $(r\lambda)(t) = \lambda(rt)$  pour  $r \in \mathbb{R}$ ,

ii)  $(\lambda + \mu)(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lambda\left(\frac{t}{k}\right) \mu\left(\frac{t}{k}\right) \right)^k$ ,

iii)  $[\lambda, \mu](t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lambda\left(\frac{1}{k}\right) \mu\left(\frac{t}{k}\right) \lambda\left(-\frac{1}{k}\right) \mu\left(-\frac{t}{k}\right) \right)^{k^2}$ .

Ces formules montrent que l'espace vectoriel  $A_L$  muni de son crochet est canoniquement attaché à  $G$ . En particulier, il ne dépend pas du plongement de  $G$  dans un  $GL_n(\mathbb{k})$ . Notons cependant que ces formules n'ont pas nécessairement de sens pour un groupe topologique quelconque.

Plus généralement on a la définition suivante :

**Définition 1.4.9 (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie)** *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est le plan tangent au groupe de Lie en son élément neutre.*

**Remarque 1.4.6** *Il est clair que pour déterminer l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie Matricielle  $G$  il suffit d'écrire un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de son élément neutre d'un élément de  $G$  paramétriser à savoir l'application  $g : \mathbb{R}^p \mapsto M_n(\mathbb{R})$ . En générale le nombre des paramètres n'est pas connue à l'avance. Quand c'est le cas, on utilise la méthode qui consiste à considérer un élément  $g$  appartenant à  $G$  très proche de la matrice unité et on peut donc considérer cet élément comme appartenant à  $Lie(G)$ , comme nous le verrons dans un exemple plus tard.*

Présentons maintenant quelques remarques sur le lien entre un groupe de Lie et l'algèbre de Lie associée.

**Proposition 1.4.1** *A tout groupe de Lie correspond une unique algèbre de Lie réelle.*

**Démonstration.** Puisque un groupe de Lie est l'ensemble de ses sous-groupes à un paramètre, donc l'algèbre de Lie de ce groupe de Lie est l'espace vectorielle générée d'une manière unique par leurs endomorphismes respectives. ■

**Remarque 1.4.7** *En revanche, une même algèbre de Lie réelle peut dériver de groupes de Lie non isomorphes.*

**Théorème 1.4.2** *Tout élément d'un sous-groupe connexe d'un groupe de Lie  $G$  peut s'exprimer comme produit fini d'exponentielles de son algèbre de Lie réelle  $Lie(G)$ .*

**Démonstration.** Pour la démonstration, voir [9]. ■

**Exemple 1.4.4** Soit  $x$  un élément de  $SL_2(\mathbb{R})$  s'écrivant  $x = \begin{pmatrix} -e^\theta & 0 \\ 0 & -e^{-\theta} \end{pmatrix}$  Alors  $x = \exp(\pi X_1)\exp(\theta X_2)$  où

$$\left( X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

## 1.5 Groupes de Lie des transformations de $\mathbb{R}^n$

La symétrie joue un rôle fondamental en physique. Elle signifie que certaines propriétés du système étudié restent invariantes où covariantes sous certaines transformations qui peuvent être continues où discrètes. On peut donner comme exemples, la covariance des lois physiques dans un changement de repère, la symétrie de jauge, la covariance sous un renversement du temps, la conservation de la parité.

L'étude des groupes de transformations continues se fait dans le cadre de la théorie des groupes de Lie auxquels on va consacrer cette section, afin de rappeler quelques notions de base concernant ces groupes qui nous seront très utiles dans le reste de ce mémoire.

### 1.5.1 Groupes de Lie des transformations de $\mathbb{R}^n$ à plusieurs paramètres

#### Transformations et groupe de transformations

**Définition 1.5.1 (Transformation)** On appelle transformation de l'ensemble  $E$  une application bijective de  $E$  dans  $E$ .

**Exemple 1.5.1** L'application identité de  $E$  ( $Id_E$ ) est une transformation de  $E$ .

**Définition 1.5.2 (Groupe de transformations)** soit  $T$  un ensemble de transformations d'un ensemble  $E$ . Si  $T$  muni de la loi de composition des fonctions possède la structure d'un groupe, alors il est appelé groupe de transformations de l'ensemble  $E$ .

**Remarque 1.5.1** *L'ensemble de toutes les transformations de l'ensemble  $E$ , noté  $\text{Transf}(E)$ , est un groupe de transformations de  $E$ . Les autres groupes de transformations de  $E$  sont des sous-groupes de ce dernier.*

### Groupes de transformations continues de $\mathbb{R}^n$

**Définition 1.5.3 (Groupe de transformations continues)** *Soit le domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Un groupe de transformations continues à  $r$  paramètres  $T$  de cet ensemble  $D$  est un groupe de transformations de  $D$  dépendant de  $r$  paramètres réels  $a \in \mathbb{R}^r$  qui peuvent varier d'une manière continue dans un sous ensemble connexe  $S \subset \mathbb{R}^r$  appelé espace des paramètres. Autrement dit, nos transformations sont de la forme :*

$$\begin{aligned} f_a : D &\longmapsto D \\ x &\longmapsto x' = f(x, a) = f_a(x) \end{aligned}$$

Afin d'étudier les propriétés des paramètre  $a \in S$  on donne la définition suivante :

**Définition 1.5.4 (Lois de composition des paramètres de transformation)** *Soit  $T$  un groupe de transformation continue à  $r$  paramètres dans  $S \subset \mathbb{R}^r$ , On définit la lois de composition de deux paramètres  $a, b \in S$  implicitement par l'application  $\phi : S \times S \longmapsto S$  comme suit :*

$$\forall a, b \in S, f_{\phi(a,b)} = f_b \circ f_a \in T \text{ avec } f_a, f_b \in T$$

**Remarque 1.5.2** *Cette définition découle directement du fait que  $T$  est un groupe. En effet,  $\forall f_a, f_b \in T, \exists c \in S$  tel que  $f_b \circ f_a = f_c$ , donc  $c$  est donné en fonction de  $a$  et  $b$ .*

Puisqu'il s'agit d'un groupe de transformations, les propriétés qui en découlent directement sont les suivantes.

**Proposition 1.5.1** *Soit  $T$  un groupe de transformation et  $\phi$  la lois de composition de ses paramètres, alors on a les assertions suivantes :*

- a)  $\exists a^0 \in S$  tel que  $\phi(a, a^0) = \phi(a^0, a) = a$  (Cette relation traduit l'existence de l'élément neutre).
- b)  $\exists \bar{a} \in S$  tel que  $\phi(a, \bar{a}) = \phi(\bar{a}, a) = a^0$  (Cette relation traduit l'existence de l'inverse).

Cela implique quels paramètres  $\bar{a}$  sont des fonctions de  $a$  qu'on va écrire implicitement  $\bar{a} = \chi(a)$ .

c)  $\forall a, b, c \in S \phi(\phi(a, b), c) = \phi(a, \phi(b, c))$  (Cette relation traduit l'associativité de la loi de composition des fonctions).

**Démonstration.** En utilisant le fait que  $T$  est un groupe on aura :

i) on obtient (a) en écrivant :

$$\exists a^0 \in S : f_{a^0} = Id_{\mathbb{R}^n} \iff f_{a^0} \circ f_a = f_a \circ f_{a^0} = f_a$$

ii) on obtient (b) en écrivant :

$$\forall f_a \in T, \exists \bar{a} \in S : f_a^{-1} = f_{\bar{a}} \in T \iff f_a \circ f_{\bar{a}} = f_{\bar{a}} \circ f_a = f_{a^0}$$

iii) on obtient (c) en écrivant :

$$\forall f_a, f_b, f_c \in T, f_c \circ (f_b \circ f_a) = (f_c \circ f_b) \circ f_a$$

■

**Remarque 1.5.3** Si en plus, les fonctions  $f_a, \phi$  et  $\chi$  définies auparavant, sont des fonctions analytiques admettant des dérivées à tout ordre par rapport à leurs arguments, alors  $T$  est un groupe de Lie de transformations à  $r$  paramètres.

### La transformation infinitésimale et les générateurs infinitésimaux

Soit  $T$  un groupe de Lie de transformations à  $r$  paramètres. Faisons l'hypothèse que la transformation identité correspond à  $a = a^0 = 0$ , ce qui veut dire que  $f(x, 0) = x$ . Si ce n'est pas le cas, il suffit de redéfinir la transformation en remplaçant  $f(x, a)$  par  $\tilde{f}(x, a) = f(x, a + a^0)$  pour avoir l'égalité :

$$\tilde{f}(x, 0) = f(x, 0 + a^0) = f(x, a^0) = x$$

A présent, supposons que le paramètre  $a$  est au voisinage de 0 ( $|a_\alpha| \ll 1, \alpha = \overline{1, r}$ ). Le développement de Taylor de la fonction  $f_a$  à l'ordre un au voisinage de 0 par rapport à

l'argument  $a$ , nous permet d'avoir la linéarisation (approximation) suivante  $\forall \beta = \overline{1, n}$  on a :

$$\begin{aligned} x'_\beta &= f_\beta(x, a) \\ &= f_\beta(x, 0) + \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial a_\alpha}(x, 0) \\ &= f_\beta(x, 0) + (a \cdot \nabla_a f_\beta)(x, 0) \end{aligned}$$

On pose :

$$\xi_\beta = \nabla_a f_\beta(x, 0) \implies \xi_{\beta\alpha} = \frac{\partial f_\beta}{\partial a_\alpha}(x, 0)$$

Et comme  $f(x, 0) = x$ , la transformation infinitésimale recherchée aura la forme,  $\forall \beta = \overline{1, n}$  on a :

$$x'_\beta = x_\beta + (a \cdot \xi_\beta)$$

Introduisons une fonction  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable, et examinons sa variation  $\delta F$  sous cette transformation infinitésimale :

$$\begin{aligned} F(x') &= F(\dots, x_\beta + \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha \xi_{\beta\alpha}, \dots) \\ &= F(x) + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha \xi_{\beta\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x, 0) \end{aligned}$$

A ce stade on peut introduire les  $r$  opérateurs différentiables  $X_\alpha, \alpha = \overline{1, r}$  définis par :

$$X_\alpha F(x) = \sum_{\beta=1}^n \xi_{\beta\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\beta}(x, 0) \iff X_\alpha = \sum_{\beta=1}^n \xi_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

Donc on peut écrire :

$$F(x') = F(x) + \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha X_\alpha F(x)$$

**Définition 1.5.5 (Générateurs infinitésimaux)** Soit  $T$  un groupe de Lie de transformations continues à  $r$  paramètres. L'ensemble des  $r$  opérateurs

$$\left\{ X_\alpha \in L(C^1(\mathbb{R}^n), C(\mathbb{R}^n)) : X_\alpha = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial a_\alpha}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x_\beta}, (a, f) \in \mathbb{R}^r \times T \right\}$$

sont appelés les *générateurs infinitésimaux* de notre groupe de Lie de transformations continues.

**Remarque 1.5.4** Dans le cas où  $F(x) = x_\beta, \beta = \overline{1, n}$ , la relation précédente va se simplifier à la forme :

$$\delta x_\beta = \sum_{\alpha=1}^r \xi_{\beta\alpha} \delta a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r (\xi_\beta \cdot \delta a)$$

ou on a utilisé à la place  $a_\alpha$  les paramètres infinitésimaux  $\delta a_\alpha$ .

### Propriétés des générateurs infinitésimaux et algèbre de Lie d'un groupe de transformations

**Définition 1.5.6 (Produit de générateurs infinitésimaux)** Soit  $T$  un groupe de Lie de transformations continues à  $r$  paramètres, alors le produit noté  $X_\alpha X_\beta$  de deux générateurs infinitésimaux  $X_\alpha, X_\beta$  de  $T$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, r\}$  est définie par son action sur une fonction différentiable  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  comme suit :

$$(X_\alpha X_\beta)F = X_\alpha(X_\beta F)$$

Maintenant on peut parler du commutateur (crochet) de deux générateurs infinitésimaux qu'on définit comme suit.

**Définition 1.5.7 (Commutateur)** Soit  $T$  un groupe de Lie de transformations continues à  $r$  paramètres, alors le crochet noté  $[X_\alpha, X_\beta]$  de deux générateurs infinitésimaux  $X_\alpha, X_\beta$  de  $T$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, r\}$  est définie par :

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha$$

**Remarque 1.5.5** Un simple calcul après avoir posé  $\xi_{i\lambda} = \frac{\partial f_\beta}{\partial a_\lambda}(x, 0)$  montre que :

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\rho, \sigma=1}^n \left( \xi_{\rho\alpha} \frac{\partial \xi_{\sigma\beta}}{\partial x_\rho} - \xi_{\rho\beta} \frac{\partial \xi_{\sigma\alpha}}{\partial x_\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_\sigma}$$

**Proposition 1.5.2** Le commutateur (crochet)  $[\cdot, \cdot]$  définie précédemment est un crochet de Lie.

**Démonstration.** Découle directement de la définition. ■

Enfin, ce crochet de Lie nous permet de définir l'algèbre de Lie du groupe de Lie de transformations continues.

**Définition 1.5.8 (L'algèbre de lie d'un groupe de Lie de transformation continues)**

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie de transformations continues à  $r$  paramètres, noté  $Lie(T)$ , est l'ensemble de tous les opérateurs qui sont des combinaisons linéaires des générateurs infinitésimaux  $(X_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$  c'est à dire :

$$Lie(T) = \left\{ X \in L(C^1(\mathbb{R}^n), C(\mathbb{R}^n)) : X = \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha X_\alpha, a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r \right\}$$

muni de la loi d'addition des opérateurs et celle de la multiplication d'un nombre réel par un opérateur, ainsi que le commutateur des opérateurs.

**Invariants d'un groupe de Lie de transformations**

**Définition 1.5.9 (Fonction invariante)** Une fonction  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  est un invariant d'un groupe de Lie de transformations  $T$  si :

$$\forall (f_a, x, a) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, F(x) = F(f(x, a))$$

**Remarque 1.5.6** Pour trouver les invariants d'un groupe de Lie, il suffit de résoudre le système d'équation aux dérivées partielles suivants :

$$X_\alpha F(x) = 0, 1 \leq \alpha \leq r$$

où les  $(X_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$  sont les générateurs infinitésimaux du groupe en considération, et l'inconnue est bien sûr la fonction  $F$ .

**1.5.2 Groupes de transformation à un seul paramètre**

**Théorème 1.5.1 (Le premier théorème fondamental de Lie)** Soit  $T$  un groupe de transformation à un seul paramètre et  $\phi$  la lois de composition de ses paramètres. Pour une transformation  $f_a \in T$ , il existe une paramétrisation

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial b}(\epsilon^{-1}, \epsilon) d\epsilon$$

telle que les transformations précédentes de ce groupe peuvent être obtenues comme solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx'}{d\tau} = \frac{df}{d\varepsilon}(x, 0) \\ x'(0) = x(0) \end{cases}$$

**Démonstration.** Admise. ■

**Remarque 1.5.7** *Le premier théorème fondamental de Lie montre que la transformation infinitésimale contient l'information essentielle qui détermine le groupe de Lie de transformations à un paramètre. Puisque le système différentiel précédent est invariant sous une translation en  $\tau$ , il est possible de reparamétriser un groupe donné en terme de paramètre  $\tau$  de telle sorte que pour les valeurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  du paramètre, la loi de composition devient  $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$ .*

La conséquence de ce théorème est qu'il existe une paramétrisation spéciale avec le paramètre  $\tau(\varepsilon)$  de telle sorte que le groupe de transformations  $x' = f(x, \varepsilon)$  va s'écrire sous la forme

$$x' = f(x, \varepsilon) = f(x, \varepsilon(\tau)) = f^*(x, \tau)$$

où la loi de composition prend l'expression suivante :

$$f^*(f^*(x, \tau_1), \tau_2) = f^*(x, \tau_1 + \tau_2)$$

**Corollaire 1.5.1 (Forme canonique)** *Soit  $T$  un groupe de Lie de transformations continues à 1 paramètre et  $X$  est le générateur infinitésimal de  $T$ . Alors on peut écrire une transformation  $f^*$  de  $T$  sous la forme canonique suivante :*

$$f^*(x, \tau) = e^{\tau X} x$$

**Démonstration.** Admise. ■

**Remarque 1.5.8** *même propriété que pour les groupes de Lie matriciels qu'on a vus dans la section précédente.*

## 1.6 Exemple de groupes de Lie matriciels

Donnons maintenant quelques ensembles de matrices qui sont des groupes de Lie matriciels.

1.  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie par définition car il est un sous-groupe de lui-même.
2.  $GL_n(\mathbb{C})$  est aussi un groupe de Lie matriciel (réel), car il est un sous-groupe fermé de  $GL_{2n}(\mathbb{R})$ .
3. Les ensembles

$$SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$$

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

sont appelés groupe spécial Linéaire.

4. L'ensemble

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : AA^t = A^tA = I_{n \times n}\}$$

où  $A^t$  est la matrice transposée de la matrice  $A$  et  $I_{n \times n}$  la matrice identité, est un groupe de Lie réel de matrices orthogonales appelé souvent le groupe orthogonal.

5. L'ensemble

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$$

est le groupe spécial orthogonal. c'est un sous-groupe de  $O(n)$  et un groupe de Lie matriciel réel.

6. Si on désigne par  $J^{pq}$  la matrice diagonale comportant  $p$  fois 1 suivis de  $q$  fois  $-1$  dans sa diagonale où  $p + q = n$ , les deux ensembles suivants sont des groupes de Lie matriciels réels :

$$O(p, q) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AJ^{pq}A^t = J^{pq}\}$$

$$SO(p, q) = \{A \in O(p, q) : \det(A) = 1\}$$

7. Le groupe unitaire

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : AA^* = A^*A = I_{n \times n}\}$$

où  $A^*$  est la matrice adjointe de  $A$ , est un groupe de Lie matriciel complexe. Son sous-groupe

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$$

est un groupe de Lie matriciel complexe appelé le groupe spécial unitaire.

8. Soit  $n \in \mathbb{N}$  qui s'écrit  $n = 2k$  (pair), et soit  $J$  la matrice  $n \times n$  définie comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{k \times k} \\ -I_{k \times k} & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble

$$Sp(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^t J A = J\}$$

est le groupe symplectique réel. C'est un groupe de Lie matriciel réel.

### Générateurs et algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel

A tout groupe de Lie matriciel correspond un certain nombre de générateurs qu'on peut déterminer.

**Exemple 1.6.1** Prenons par exemple le groupe matriciel  $SU(2)$  et essayons de trouver ses générateurs. Pour cela, soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$  appartenant à ce groupe de Lie matriciel très proche de la matrice unité qu'on peut écrire

$$A = I_{2 \times 2} + \epsilon J$$

où  $\epsilon$  est un nombre réel infinitésimal et  $J$  une matrice  $2 \times 2$  qui est en fait la différentielle de  $\Lambda : \mathbb{R}^n \mapsto M_2(\mathbb{R}) \supset SU(2)$  dont le nombre des paramètres  $n$  sont inconnus. La matrice  $A$  doit vérifier les deux propriétés qui résultent de la définition du groupe  $SU(2)$ . En Remplaçant maintenant la matrice  $A$  par son expression  $(I_{2 \times 2} + \epsilon J)$  dans la définition

du groupe  $SU(2)$ , on trouve :

$$I_{2 \times 2} + \epsilon(J + J^*) = I_{2 \times 2} \implies J^* = -J$$

$$\det(I_{2 \times 2} + \epsilon J) = 1 \implies \text{tr}(J) = 0$$

On en déduit que la matrice  $J$  a la forme

$$J = \begin{pmatrix} ic & b + ia \\ -b + ia & -ic \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ . Il est clair qu'on peut réécrire  $J$  sous la forme

$$J = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3$$

où les matrices  $J_1, J_2$  et  $J_3$  sont les générateurs du groupe  $SU(2)$  définis comme suit :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ces trois matrices vérifient les relations suivantes :

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = \sum_{k=1}^3 -2\epsilon_{ijk} J_k$$

avec

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{pour une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 1 & \text{pour une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on définit les quantités infinitésimales  $\delta a = \epsilon a, \delta b = \epsilon b$  et  $\delta c = \epsilon c$ , notre matrice de départ  $A$  proche de l'unité, va s'écrire sous la forme

$$A = I_{2 \times 2} + \delta a J_1 + \delta b J_2 + \delta c J_3$$

On en déduit que le groupe de Lie matriciel  $SU(2)$  possède trois paramètres réels, puisque à chacun de ses générateurs correspond un seul paramètre. Autrement dit, si la matrice  $M \in SU(2)$ , alors elle peut être paramétrée par trois paramètres réels indépendants.

**Remarque 1.6.1** Les autres groupes de Lie matricielle donnée précédemment se font de la même façon.

## 1.7 Éléments de géométrie

**Définition 1.7.1 (Revêtement)** Soit  $\mathcal{B}$  un espace topologique. Un revêtement de  $\mathcal{B}$  par un espace topologique  $E$  est la donnée de l'espace topologique  $E$  et d'une application continue et surjective  $p : E \rightarrow \mathcal{B}$  telle que pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , il existe un voisinage  $U$  de  $b$  dans  $\mathcal{B}$  et un espace discret  $F$  tels que :

- 1)  $p^{-1}(U)$  est réunion disjointe d'ouverts  $V_i \subset E$  pour  $i$  dans  $F$ .
- 2) pour chaque  $i \in F$ , la restriction  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme.

**Remarques 1.7.1** On a :

- 1) Si la base  $\mathcal{B}$  est connexe, les fibres  $p^{-1}(b)$ ,  $b \in \mathcal{B}$ , ont toutes le même cardinal (éventuellement infini). Lorsque ce cardinal est fini, on l'appelle le degré du revêtement.
- 2) Si  $p : E \rightarrow \mathcal{B}$  est un revêtement et  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ , alors  $p|_{p^{-1}(\mathcal{B}')} : p^{-1}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{B}'$  est un revêtement.

**Exemple 1.7.1** On a :

- 1) L'espace  $\mathbb{R}$  muni de l'application  $t \mapsto e^{it}$  est un revêtement de  $S^1$ . De même  $\mathbb{C}$  muni de  $z \mapsto e^z$  est un revêtement de  $\mathbb{C}^*$ .
- 2) L'espace  $S^1$  muni de l'application  $z \mapsto z^d$ , avec  $d \in \mathbb{N}^*$ , est un revêtement de degré  $d$  de  $S^1$ .

**Définition 1.7.2** On dit qu'un revêtement  $p : E \rightarrow \mathcal{B}$  est un revêtement à  $n$  feuilletés si au dessus de tout  $b \in \mathcal{B}$ , on a  $n$  éléments dans  $E$ , qu'on note  $[b_k]_{1 \leq k \leq n}$  tels que  $\forall i, j \in \overline{1, n}, p([b_i]) = p([b_j]) = b$ .

**Remarque 1.7.2** Cela signifie qu'on peut décomposer notre ensemble  $E$  en  $n$  composantes qu'on appellera des feuilletés.

**Définition 1.7.3 (Fibré vectoriel)** Soit  $\mathcal{B}$  un espace topologique. Un fibré vectoriel (vector bundle) réel de rang  $n$  sur  $\mathcal{B}$  est la donnée d'un espace vectoriel réel  $\xi_b$  de dimension  $n$  dépendant continûment de  $b \in \mathcal{B}$ . Autrement dit, on se donne un espace topologique  $E$  appelé espace total (total space) du fibré, une application continue  $\pi : E \rightarrow \mathcal{B}$  et une

structure d'espace vectoriel réel sur chaque fibre  $\xi_b = \pi^{-1}(b)$  qui est localement constante au sens suivant (trivialité locale) :

pour chaque  $b \in \mathcal{B}$ , il existe un voisinage  $U$  de  $b$  et un homéomorphisme

$$h : U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U) = E(\xi|_U)$$

tel que chaque  $h_b : v \mapsto h_b(v) = h(b, v)$  soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Remarque 1.7.3** On constate qu'un revêtement est un cas particulier d'un fibré.

**Définition 1.7.4 (Section d'un fibré vectoriel)** Une section (cross section) d'un fibré vectoriel  $\xi$  est une application  $s : \mathcal{B} \rightarrow E$  telle que  $s(b) \in \xi_b$  pour tout  $b$ .

**Exemple 1.7.2** Le fibré trivial (trivial bundle) de rang  $n$  sur  $\mathcal{B}$  est  $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$  avec la structure d'espace vectoriel constante sur  $\mathbb{R}^n$ . Les sections du fibré trivial s'identifient aux applications  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

---

# Groupes de Lorentz et de Poincaré

Nous allons définir de manière rigoureuse les groupes qui nous intéressent ici : le groupe de Lorentz et le groupe de Poincaré. Nous donnerons ensuite les éléments d'étude de ces groupes.

- **Pour le groupe de Lorentz** : sa structure, son revêtement universel.
- **Pour le groupe de Poincaré** : sa structure, ses représentations irréductibles.

Notre objectif est le suivant : les particules vont être définies comme des représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré (où d'un groupe approchant). On veut déterminer les grandeurs qui caractérisent une particule et l'espace des états d'une particule, c'est à dire quel objet permet de décrire les différents états de la particule.

## 2.1 Espace des états, définition d'une particule

### 2.1.1 Espace des états

Comment définir un système physique ? Dans le cadre de la mécanique quantique, que nous utiliserons largement par la suite, un système physique est donné par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , l'espace des états du système.

Dans ce cadre, un état du système est défini comme un vecteur de son espace des états  $\psi \in \mathcal{H}$ . On ajoute comme condition que le vecteur soit normé :  $\|\psi\|^2 = 1$ .

### 2.1.2 Définition d'une particule

Nous allons maintenant essayer de donner un embryon de réponse à la question "qu'est-ce qu'une particule ?". Que peut-on attendre d'une particule ? Il paraît raisonnable de demander à une particule de posséder certaines grandeurs caractéristiques intrinsèques comme la masse, le spin, ... Ces grandeurs intrinsèques peuvent justement être obtenues à partir des opérateurs d'entrelacement, ou, plus précisément, des opérateurs de Casimir. Ceux-ci ne peuvent fournir de grandeur intrinsèque que si la représentation du groupe de symétries  $G$  dans l'espace des états  $\mathcal{H}$  est irréductible. Etant donné un groupe  $G$ , ce qui précède nous amène à donner la définition d'une particule élémentaire :

**Définition 2.1.1 (Particule élémentaire)** *Soit  $G$  un groupe. Une particule élémentaire est une représentation irréductible unitaire du groupe  $G$ , qui est alors par définition le groupe de symétries de la particule.*

Un état d'une particule est simplement un vecteur de l'espace de représentation choisi.

**Remarque 2.1.1** *Remarquons que cette définition d'une particule élémentaire dépend du groupe de symétries fixé. Les conséquences sont les suivantes : avec un groupe de symétries plus grand, les particules ont plus de grandeurs caractéristiques. De même, les représentations irréductibles d'un groupe plus grand sont susceptibles d'être plus grandes, plus d'informations sont donc nécessaires pour décrire l'état d'une particule.*

## 2.2 Structure

### 2.2.1 Groupe de Lorentz

#### Espace-temps de Minkowski

L'espace naturel pour étudier l'évolution de particules libres est l'espace-temps de Minkowski. Un point  $x$  de cet espace-temps est repéré par quatre coordonnées réelles :  $x = (x^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  ; cet espace peut donc être identifié à  $\mathbb{R}^4$ .

Cet espace est de plus muni d'une métrique particulière, la métrique de Minkowski (c'est à dire d'un pseudo-produit scalaire) :

**Définition 2.2.1 (Espace-temps de Minkowski)** *L'espace-temps de Minkowski, que nous noterons  $V$ , est  $\mathbb{R}^4$  muni du pseudo-produit scalaire définie par :*

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i$$

*Les points de cet espace sont les évènements.*

La métrique de Minkowski est habituellement notée matriciellement  $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Avec les conventions habituelles pour les sommations (convention d'Einstein <sup>(1)</sup>), on notera

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

Ici, nous utiliserons plutôt la notation matricielle, en considérant les points de l'espace de Minkowski comme des vecteurs colonnes :

$$x \cdot y = x^T \eta y$$

Pour un rayon lumineux, un élément d'une trajectoire paramétrée par  $\lambda$ ,  $ds = x(\lambda + d\lambda) - x(\lambda)$ , et par définition de pseudo-norme nulle :

$$\|ds_{lum}\| = 0$$

---

<sup>(1)</sup>La convention, dite d'Einstein, de sommation sur les indices répétés figurant une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, étant entendu que l'indice de sommation varie de 0 à 3.

On peut aussi définir le cône de lumière comme étant l'ensemble des vecteurs de norme nulle : c'est l'ensemble des évènements pouvant être reliés par un rayon lumineux à l'origine du référentiel.

### Définition du groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est défini comme un groupe de transformations des coordonnées qui laisse invariante les lois de la physique, et notamment la loi de propagation de la lumière dans le vide, donc sa vitesse. Le groupe de Lorentz doit donc laisser invariant le cône de lumière. Nous admettons que ceci implique que le groupe de Lorentz doit laisser la métrique invariante. Notons  $\mathcal{L}$  le groupe de Lorentz, ce qui se traduit par :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{L}, \forall (x, y) \in V^2, (\Lambda x)^T \eta (\Lambda y) = \eta$$

Cette propriété caractérise le groupe de Lorentz :

**Définition 2.2.2 (Groupe de Lorentz)** *Le groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$  est constitué des matrices réelles  $4 \times 4$  définie par :*

$$\mathcal{L} = \{ \Lambda \in GL_4(\mathbb{R}) : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \}$$

avec  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

**Remarque 2.2.1** *Comme la métrique préservée est  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , le groupe de Lorentz est aussi noté  $SO(1, 3)$ .*

**Proposition 2.2.1** *Le groupe de Lorentz est un groupe de Lie.*

**Démonstration.** Ceci découle du fait que  $\mathcal{L} = SO(1, 3)$ . ■

### Structure du groupe de Lorentz

Nous allons montrer que le groupe de Lorentz est composé de quatre composantes connexes.

Prenons le déterminant dans la définition de  $L$  : on obtient  $(\det \Lambda)^2 = 1$ , donc  $\det \Lambda = \pm 1$ . Le signe de  $\det \Lambda$  indique si la transformation des coordonnées "retourne" l'espace-temps.

Dans cette même équation, considérons l'élément de matrice  $(0, 0)$  : dans le membre de droite,

$$\eta_{00} = 1$$

et dans le membre de gauche

$$(\Lambda^T \eta \Lambda)_{00} = \sum_{\mu, \nu} \Lambda_{\mu 0} \Lambda_{\nu 0} \eta_{\mu \nu} = \Lambda_{00}^2 - \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2$$

Finalement

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 : |\Lambda_{00}| \geq 1$$

Le signe de  $\Lambda_{00}$  indique si la transformation des coordonnées inverse le sens du temps. Ceci nous conduit à introduire la définition suivante :

**Définition 2.2.3 (Groupe de Lorentz propre)** *Le groupe de Lorentz propre noté  $\mathcal{L}_0$  est le sous-groupe du groupe de Lorentz définie par :*

$$\mathcal{L}_0 = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1 \text{ et } \Lambda_{00} \geq 1\}$$

Le lemme suivant est fondamental :

**Lemme 2.2.1** *Tout élément  $\Lambda \in \mathcal{L}_0$  du groupe de Lorentz propre peut s'écrire sous la forme*

$$\Lambda = RLR'$$

*$R$  et  $R'$  sont des rotations de  $\mathbb{R}^3$ ,  $L$  est une transformation spéciale de Lorentz.*

**Démonstration.** écrivons :

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

et intéressons-nous à la projection de ce vecteur sur les coordonnées d'espace.

On note  $r$  sa norme euclidienne  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  avec  $(x^0)^2 - r^2 = 1$ . Il existe une rotation de  $\mathbb{R}^3$  qui envoie  $(x^1, x^2, x^3)$  sur  $(0, 0, r)$  On a alors :

$$S\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Posons maintenant

$$L = \begin{pmatrix} x^0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 0 & -r \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$L \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul utilisant l'identité  $(x^0)^2 - r^2 = 1$  et le fait que  $x^0$  est strictement positif montre que  $L$  est la transformation spéciale de Lorentz dans la direction  $z$  de paramètre

$$\alpha = \operatorname{argth} \frac{r}{x^0}$$

On a donc

$$LS\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$LS\Lambda$  est donc une rotation de  $\mathbb{R}^3$ , soit alors  $LS\Lambda = S''$ , ce qui termine la démonstration.

■

Le groupe de Lorentz propre possède la propriété suivante :

**Proposition 2.2.2 (Connexité de  $\mathcal{L}_0$ )** *Le groupe de Lorentz propre est connexe.*

**Démonstration.** ceci vient directement du lemme précédent, on peut aisément relier les rotations et les transformations spéciales de Lorentz à l'identité par un chemin continu, il suffit de faire varier leur paramètre. ■

A partir du groupe de Lorentz propre, on peut retrouver tout le groupe de Lorentz en définissant les symétries.

**Définition 2.2.4 (Parité, renversement du temps)** *Les transformations parité et renversement du temps sont définies respectivement par les matrices  $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  et  $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .*

**Remarque 2.2.2**  *$P$  et  $T$  commutent, le groupe engendré par ces deux matrices est donc  $\{I, P\} \times \{I, T\}$ . Ce groupe agit sur le groupe de Lorentz propre et on a la proposition suivante :*

**Proposition 2.2.3** *Le groupe de Lorentz s'obtient à partir du groupe de Lorentz propre, de la parité et du renversement du temps par produit semi-direct :*

$$\mathcal{L} = (\{I, P\} \times \{I, T\}) \ltimes \mathcal{L}_0$$

**Démonstration.** Il est clair que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup P\mathcal{L}_0 \cup T\mathcal{L}_0 \cup PT\mathcal{L}_0$  en effet si  $\Lambda \in \mathcal{L}$ . Alors on a :

$$\det \Lambda = +1, \Lambda_{00} \geq 1 \implies \Lambda \in \mathcal{L}_0$$

$$\det \Lambda = +1, \Lambda_{00} \leq 1 \implies \Lambda \in T\mathcal{L}_0$$

$$\det \Lambda = -1, \Lambda_{00} \geq 1 \implies \Lambda \in P\mathcal{L}_0$$

$$\det \Lambda = -1, \Lambda_{00} \leq 1 \implies \Lambda \in \mathcal{L}_0$$

donc  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0 \cup P\mathcal{L}_0 \cup T\mathcal{L}_0 \cup PT\mathcal{L}_0$  pour l'autre inclusion on utilise le fait que  $P, T, PT$  commutent avec  $\Lambda$  et leurs produits  $DD^T = I$  qu'on utilise dans la définition. ■

On aboutit enfin à la proposition voulue :

**Proposition 2.2.4 (Structure du groupe de Lorentz)** *Le groupe de Lorentz est composé des quatre composantes connexes  $\mathcal{L}_0$ ,  $P\mathcal{L}_0$ ,  $T\mathcal{L}_0$  et  $PT\mathcal{L}_0$ .*

**Démonstration.** La proposition précédente montre que  $L$  est bien constitué de la réunion de ces classes. La continuité de  $\det \Lambda$  et de  $\Lambda_{00}$  montrent que deux de ces classes ne peuvent pas appartenir à la même composante connexe. En effet on ne peut pas passer par continuité de  $\det \Lambda = +1$  à  $\det \Lambda = -1$  et de  $\Lambda_{00} \geq 1$  à  $\Lambda_{00} \leq -1$ . Il y a donc au moins quatre composantes. Ces quatre classes sont isomorphes à  $\mathcal{L}_0$  et comme  $\mathcal{L}_0$  est connexe, d'où la propriété. ■

**Remarque 2.2.3** *Le groupe de Lorentz propre possède une importance fondamentale : si on ne sait pas si les lois de la physique sont invariantes par parité et/ou renversement du temps, le groupe de symétries à utiliser est le groupe de Lorentz propre. Nous travaillerons donc en premier lieu sur le groupe de Lorentz propre, qui est plus facile à manipuler que le groupe de Lorentz complet.*

**Remarque 2.2.4** *Le groupe des rotations  $SO(3)$  est un sous-groupe du groupe de Lorentz restreint à  $\mathcal{L}_0$ .*

Il reste une dernière propriété fondamentale du groupe de Lorentz à mettre en évidence : la non-compacité.

**Proposition 2.2.5 (Non-compacité)** *Le groupe de Lorentz (propre) n'est pas compact.*

**Démonstration.** Il suffit pour cela d'exhiber un sous-groupe du groupe de Lorentz qui n'est pas compact. C'est le cas du sous-groupe à un paramètre :

$$G = \left\{ \Lambda \in GL_4(\mathbb{R}) : \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

On montre facilement que c'est un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lorentz (propre) en utilisant la définition. Il est clair qu'il n'est pas compact, en effet il n'est pas borné. ■

Le fait que le groupe de Lorentz ne soit pas compact a une conséquence importante pour l'utilisation que nous allons en faire, donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1 (Représentation des groupes non compacts)** *Soit  $G$  un groupe non compact. La seule représentation irréductible unitaire de dimension finie de  $G$  est la représentation triviale.*

**Démonstration.** admis. ■

### Revêtement du groupe de Lorentz propre par $SL_2(\mathbb{C})$

Nous allons ici exhiber un revêtement universel du groupe de Lorentz propre, ce qui nous sera utile dans la suite pour construire des représentations irréductibles.

Notons  $H_2$  l'espace des matrices  $2 \times 2$  hermitiennes. A un vecteur  $x = (x^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  de l'espace-temps  $V$ , on associe une matrice  $X \in H_2$  par l'application bijective suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad V &\longmapsto H_2 \\ x &\longmapsto X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice correspond au carré de la norme de  $x$  :

$$\det X = \|x\|^2$$

On en profite pour dire que  $X = x^\mu \sigma_\mu$  avec  $\sigma_0 = I$  et  $(\sigma_\mu)_{1 \leq \mu \leq 3}$  sont appelés matrices de Pauli, c'est une base de  $SL_2(\mathbb{C})$ .  $SL_2(\mathbb{C})$  agit linéairement sur les matrices hermitiennes. En effet pour  $A \in SL_2(\mathbb{C})$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_A : H_2 &\longmapsto H_2 \\ X &\longmapsto X' = \Lambda_A X = AXA^* \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $\|x'\|^2 = \det(X') = \det(AXA^*) = \det X = \|x\|^2$  avec  $x, x' \in V$  sont les vecteurs correspondants à  $X$  et  $X'$ , on a donc  $\|x\|^2 = \|x'\|^2$ . L'action linéaire de  $SL_2(\mathbb{C})$  sur  $V$  conserve la norme, donc c'est une transformation de Lorentz. On a donc déterminé un morphisme de groupes clairement continue.

$$\begin{aligned}\Phi : SL_2(\mathbb{C}) &\longmapsto \mathcal{L} \\ A &\longmapsto \Phi(A) = \Lambda_A\end{aligned}$$

Donnons maintenant les principales propriétés de  $SL_2(\mathbb{C})$  et de ce morphisme, tirées de [13] :

**Proposition 2.2.6 (Connexité de  $SL_2(\mathbb{C})$ )**  $SL_2(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Démonstration.** Soit  $A \in SL_2(\mathbb{C})$ , alors  $A$  est trigonalisable en tant que matrice complexe  $2 \times 2$ . En intégrant la condition sur  $\det A$ , on peut écrire

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$

En remplaçant  $a$  et  $b$  par les chemins  $\alpha : t \longmapsto 1 - t + ta$  et  $\beta : t \longmapsto tb$ , on obtient un chemin continu de  $I$  à  $A$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  à savoir :

$$\begin{aligned}f : [0, 1] &\longmapsto SL_2(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto f(t)\end{aligned} \text{ avec } f(t) = B \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & \alpha(t)^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$

Il est clair que  $f$  est continue avec  $f(0) = I$  et  $f(1) = A$  d'où la conclusion. ■

**Remarque 2.2.5** On déduit de cette propriété et de la continuité de  $\Phi$  ainsi que de la proposition 2.2.4 que  $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{L}_0$ .

**Proposition 2.2.7 (Revêtement du groupe de Lorentz propre)** Le morphisme  $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \longmapsto \mathcal{L}_0$  est un revêtement à deux feuillets avec  $\ker \Phi = \{I, -I\}$ .

**Démonstration.** Cette proposition est admise. Nous pouvons néanmoins donner quelques éléments de démonstration. Il suffit de déterminer l'image et le noyau de  $\Phi$ . Pour le noyau, on considère les matrices  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  telles que  $\Phi(A) = I$  d'où  $\forall X \in H_2, \Lambda_A X = AXA^* = X$  et on prend pour  $X$  l'identité puis les matrices de Pauli, d'où on déduit le noyau de  $\Phi$ . Comme  $\Phi$  est un morphisme, ceci montre l'injectivité locale, nécessaire pour avoir un revêtement.

La surjectivité se montre en décomposant un élément de  $\mathcal{L}_0$  avec le lemme 2.2.1. On montre que les rotations et transformations spéciales de Lorentz sont dans l'image de  $\Phi$  en exhibant des antécédents. ■

**Remarque 2.2.6** *On remarque que*

$$\Phi|_{SU(2)} : SU(2) \longmapsto SO(3)$$

*est un revêtement. Il hérite des propriétés de  $\Phi$  : les antécédents de l'identité sont les mêmes, il a donc aussi deux feuilletés. Le diagramme suivant représente ces revêtements et inclusions :*

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{C}) & \longleftarrow & SU(2) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi|_{SU(2)} \\ \mathcal{L}_0 & \longleftarrow & SO(3) \end{array}$$

## 2.2.2 Groupe de Poincaré

Le groupe de Lorentz est défini comme le groupe des transformations linéaires de l'espace-temps qui laisse la métrique invariante. Le groupe de Poincaré étend cette définition à partir du postulat suivant : les lois de la physique doivent être invariantes par translation dans l'espace-temps. Le groupe de Poincaré est donc le groupe des transformations affines de l'espace-temps qui laisse la métrique invariante.

Le groupe de Lorentz agit naturellement sur  $V$ , le groupe de Poincaré apparaît alors comme produit semi-direct :

**Définition 2.2.5 (Groupe de Poincaré (propre))** *Le groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$  est le produit semi-direct du groupe de Lorentz et des vecteurs de l'espace-temps :*

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \ltimes V$$

*On définit aussi le groupe de Poincaré propre en se restreignant aux transformations de Lorentz propres :*

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{L}_0 \ltimes V$$

**Remarque 2.2.7** *Un élément du groupe de Poincaré est noté  $(\Lambda, a)$ , avec  $\Lambda \in \mathcal{L}$  et  $a \in V$ . Par définition du produit semi-direct, la multiplication des deux éléments  $(\Lambda, a)$  et  $(\Lambda', a')$  de  $\mathcal{P}$  est donnée par :*

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a')$$

**Remarque 2.2.8** *Pour former des opérateurs de Casimir, le groupe de Poincaré doit être un groupe de Lie. C'est bien le cas.*

**Proposition 2.2.8** *Le groupe de Poincaré est un groupe de Lie.*

**Démonstration.** Il suffit de remarquer qu'on a un morphisme de groupes injectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \longmapsto GL_5(\mathbb{R}) \\ (\Lambda, a) \longmapsto \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

L'image de ce morphisme est un sous-groupe fermé du groupe générale linéaire, c'est donc un groupe de Lie. Donc le groupe de Poincaré, isomorphe à l'image du morphisme, est un groupe de Lie. ■

En ce qui concerne la compacité du groupe de Poincaré, nous avons logiquement le résultat suivant :

**Proposition 2.2.9 (Non-compacité)** *Le groupe de Poincaré n'est pas compact.*

**Démonstration.** ceci découle directement de la non-compacité du groupe de Lorentz. En effet ce dernier peut être identifié au sous groupe d'éléments  $(\Lambda, 0)$ . ■

## 2.3 Relations de commutation

C'est le groupe de Poincaré qui nous servira à définir les particules. Nous allons donc directement étudier l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Nous allons commencer par définir les éléments de cette algèbre de Lie, puis nous calculerons leurs relations de commutation avant de pouvoir donner les opérateurs de Casimir qu'il est possible de construire, ainsi que leur interprétation physique.

### 2.3.1 Algèbre de Lie

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est par définition le plan tangent au groupe de Lie en son élément neutre. Nous allons donc devoir considérer des petites "transformations",

où "transformations infinitésimales qui revienne à utiliser des développement de Taylor" cela à fin de simplifier les calcule.

Nous allons user massivement de la multiplication des tenseurs avec les conventions de sommation d'Einstein, les notations et règles de calcul sont brièvement rappelées ci-dessous.

### Notations

Nous allons souvent travailler en composantes, covariantes (notées en indice) où contravariantes (notées en exposant) en utilisant la métrique pour passer des unes aux autres. Par exemple, pour un vecteur  $x$  :

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

On s'aperçoit vite que la métrique, doit vérifier la relation :

$$\eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Il est important de remarquer que, si les indices peuvent être "montés" où "descendus", l'ordre des indices est important, il ne peut être échangé que par transposition.

La relation matricielle définissant le groupe de Lorentz s'écrit en composantes :

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma}$$

Enfin, on a facilement l'expression des composantes de  $\Lambda^{-1}$  pour  $\Lambda \in \mathcal{L}$  en multipliant la relation matricielle par  $\Lambda^{-1}$  a droite :  $\eta \Lambda^{-1} = \Lambda^T \eta$  et donc :

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$$

### Éléments de l'algèbre de Lie

Nous allons introduire les éléments de l'algèbre de Lie de manière implicite. Considérons pour cela une transformation de Poincaré infinitésimale :

$$(\Lambda, a) = (I + \omega, \varepsilon)$$

avec, par définition,  $\|\omega\|, \|\varepsilon\| \ll 1$ .

La matrice infinitésimale  $\omega$  n'est pas tout à fait quelconque : en utilisant

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}$$

dans la définition du groupe de Lorentz, on obtient que  $\omega$  est antisymétrique :

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$$

On définit alors implicitement les éléments de l'algèbre de Lie :

**Définition 2.3.1 (Algèbre de Lie du groupe de Poincaré)** *Les éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré,  $(J^{\mu\nu})_{0 \leq \mu, \nu \leq 3}$  et  $(P^{\mu})_{0 \leq \mu \leq 3}$  sont tels que pour toute transformation infinitésimale  $(I + \omega, \varepsilon)$ ,*

$$(I + \omega, \varepsilon) = I + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \varepsilon_{\mu} P^{\mu}$$

*Ces éléments sont parfois appelés générateurs.*

Les opérateurs  $P$  et  $J$  ne sont pas explicitement définis, mais cela n'est pas nécessaire : notre objectif est de les faire agir sur des espaces vectoriels, et dans ce cas la définition par la relation ci-dessus est suffisante. Notamment, on a une certaine liberté dans le choix de la matrice  $(J^{\mu\nu})$

**Proposition 2.3.1** *La "matrice d'opérateurs"  $(J^{\mu\nu})$  est antisymétrique.*

**Démonstration.** Cela vient du fait qu'elle est contractée avec un tenseur antisymétrique. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}) J^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \omega_{\nu\mu} J^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu}) \\ &= \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \end{aligned}$$

où on a posé  $J'^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu})$ ,  $J'^{\mu\nu}$  correspond aussi bien que  $J^{\mu\nu}$  à la définition, et est clairement antisymétrique. On a bien montré que l'on possède une liberté sur  $(J^{\mu\nu})$ , qui permet de la choisir antisymétrique. ■

Dans la suite, nous considérerons toujours cette matrice antisymétrique. Considérons maintenant les éléments du groupe de Poincaré comme des opérateurs unitaires (ce qui se produit quand on considère une représentation unitaire du groupe), l'unitarité s'écrit alors :

$$(\Lambda, a)^*(\Lambda, a) = I$$

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2** *Les opérateurs  $(J^{\mu\nu})$  et  $(P^\mu)$ , agissant sur un espace vectoriel via une représentation unitaire du groupe de Poincaré, sont hermitiens.*

**Démonstration.** Expliciteons cette relation au premier ordre pour une transformation infinitésimale, avec les éléments de l'algèbre de Lie :

$$\begin{aligned} I &= (I + \omega, \varepsilon)^*(I + \omega, \varepsilon) \\ &= \left( I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \right)^* \left( I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \right) \\ &= \left( I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu \right) \left( I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \right) \\ &= I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu} - J^{\mu\nu*}) - i\varepsilon_\mu(P^\mu - P^{\mu*}) + O(2) \end{aligned}$$

où  $O(2)$  représente un terme infinitésimal d'ordre 2. Cette relation étant vérifiée pour toute transformation infinitésimale, on voit bien que ces opérateurs sont hermitiens. ■

**Remarque 2.3.1** *La démonstration est en fait plus générale, ceci est vrai pour tous les éléments de l'algèbre de Lie dès que l'on a une représentation unitaire. Ceci justifie à posteriori le coefficient  $i$  devant les générateurs. Ce coefficient est toujours présent en physique : grâce à lui, les générateurs sont hermitiens, ce sont donc des observables. Les coefficients  $\frac{1}{2}$  et  $-1$  permettent de faire en sorte que les générateurs correspondent à des grandeurs déjà connues.*

Profitons-en pour dire à quelles grandeurs physiques ces générateurs correspondent.  $P^\mu$ , générateur de la translation selon  $x^\mu$ , correspond à l'impulsion. Les opérateurs  $J^{\mu\nu}$  correspondent au moment cinétique défini dans l'espace-temps à quatre dimensions.

Enfin, on connaît la dimension de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré :

**Proposition 2.3.3** *L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est de dimension 10.*

**Démonstration.**  $\omega$  est une matrice antisymétrique quelconque, elle a donc 6 coefficients indépendants.  $\varepsilon$  est un vecteur de  $V$  et a donc 4 composantes indépendantes. Finalement, l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est de dimension  $6 + 4 = 10$ . ■

### 2.3.2 Relations de commutation

Pour connaître une algèbre de Lie, il faut connaître les relations de commutation entre ses éléments. Ces relations de commutations sont aussi indispensables pour chercher des opérateurs de Casimir. Nous allons ici suivre la méthode décrite dans [14]. La recherche des relations de commutation est inévitablement calculatoire, tous les calculs ne seront pas exposés ici.

Considérons deux éléments du groupe de Poincaré :  $(\Lambda, a)$  et  $(I + \omega, \varepsilon)$ , infinitésimal. Nous allons exprimer le produit  $(\Lambda, a)(I + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1}$  en terme d'opérateurs  $J$  et  $P$ , avec deux méthodes différentes :

- En écrivant  $(I + \omega, \varepsilon)$  avec les opérateurs  $J$  et  $P$ , puis en effectuant le produit.
- En calculant le produit avec les règles usuelles avant de développer avec les opérateurs.

En écrivant l'égalité des deux membres quelque soit la transformation infinitésimale, puis en rendant la transformation  $(\Lambda, a)$  infinitésimale, nous obtiendrons les relations de commutation.

On a donc, d'une part :

$$(\Lambda, a)(I + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1} = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}(\Lambda, a)^{-1} - i\varepsilon(\Lambda, a)P^\mu(\Lambda, a)^{-1}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (\Lambda, a)(I + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1} &= I + \frac{i}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i (\Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\rho} P^{\rho} \\ &= I + \frac{i}{2} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \omega_{\mu\nu} J^{\rho\sigma} - i (\Lambda_{\rho}^{\mu} \varepsilon_{\mu} - \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \omega_{\mu\nu} a^{\sigma}) P^{\rho} \end{aligned}$$

où les coefficients des produits ont été calculés. En écrivant l'égalité des deux termes calculés quelle que soit la transformation  $(I + \omega, \varepsilon)$  et en "antisymétrisant" à  $a^{\sigma} P^{\rho}$  en  $\frac{1}{2} (a^{\sigma} P^{\rho} - a^{\rho} P^{\sigma})$  avec la même méthode que pour  $(J^{\mu\nu})$ , on obtient :

$$\begin{cases} (\Lambda, a) J^{\mu\nu} (\Lambda, a)^{-1} = \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} (J^{\rho\sigma} - a^{\sigma} P^{\rho} + a^{\rho} P^{\sigma}) \\ (\Lambda, a) P^{\mu} (\Lambda, a)^{-1} = \Lambda_{\nu}^{\mu} P^{\nu} \end{cases}$$

La relation obtenue ne dépend plus de  $(I + \omega, \varepsilon)$ . Il faut maintenant prendre dans cette relation  $(\Lambda, a) = (I + \omega, \varepsilon)$  et effectuer les développements à l'ordre 1. On écrit ensuite l'égalité quelle que soit la transformation  $(I + \omega, \varepsilon)$ . On obtient ainsi les relations de commutation suivantes :

**Proposition 2.3.4 (Relations de commutation)** *Les relations de commutation des éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré sont :*

$$\begin{aligned} i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \\ i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} \\ [P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0 \end{aligned}$$

**Démonstration.** Découle directement de ce qui précède, moyennant quelques antisymétrisations et changements d'indices. ■

**Remarque 2.3.2** *Ces relations de commutation n'ont rien d'exceptionnel, elle correspondent aux relations de commutation des translations, rotations, et transformations spéciales de Lorentz.*

Nous pourrions maintenant déterminer les opérateurs de Casimir, c'est à dire des polynômes des opérateurs  $(J^{\mu\nu})$  et  $(P^{\mu})$  qui commutent avec tous ces opérateurs mais nous le ferons pas dans ce mémoire. La construction de tels opérateurs est décrite dans [14].

## 2.4 Représentations irréductibles

Notre objectif ici est de déterminer les représentations qui représenteront des particules élémentaires, c'est à dire les représentations irréductibles du groupe de Poincaré. Les représentations de  $SU(2)$  seront étudiées en guise de préliminaire. Nous verrons ensuite comment sont construites les représentations d'un produit semi-direct fini, puis nous étendrons cette étude au groupe de Poincaré.

Rappelons que les représentations que nous cherchons sont unitaires, elles seront donc de dimension infinie.

### 2.4.1 Représentations de $SU(2)$

Nous cherchons ici les représentations de dimension finie de  $SU(2)$ . L'étude des représentations de  $SU(2)$  est un grand classique de la théorie des groupes, aussi nous ne démontrerons que peu de résultats et admettrons ceux donnés dans [8].

Concernant la topologie de  $SU(2)$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 2.4.1 (Topologie de  $SU(2)$ )**  *$SU(2)$  est compact et simplement connexe.*

**Démonstration.** Un élément de  $SU(2)$  est déterminé par  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . On en déduit que  $SU(2)$  est difféomorphe à la sphère  $S^3$ , qui est compacte et simplement connexe, d'où la propriété. ■

Comme  $SU(2)$  est compact, ses représentations irréductibles sont de dimension finie.

$SU(2)$  agit naturellement sur  $\mathbb{C}^2$ , donc sur les fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ . Si  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , l'action de  $A \in SU(2)$  sur  $f$  est donnée par :

$$A \cdot f = f \circ A^{-1}$$

Soit  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , on note  $V^j$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients complexes en deux variables  $(z_1, z_2)$  de degré  $2j$ . On a  $\dim V^j = 2j + 1$ . On remarque que  $V^j$  est stable par l'action que l'on vient de donner, et fournit donc une représentation de  $SU(2)$ .

**Définition 2.4.1 (Représentations  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$ )** On note  $\mathcal{D}^j$  la représentation de  $SU(2)$  de dimension  $2j + 1$  dans  $V^j$ . Elle est donnée par l'action naturelle de  $SU(2)$  sur les fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ .

Ces représentations sont unitarisables car  $SU(2)$  est compact, et il est facile de montrer qu'elles sont irréductibles. On a alors le théorème suivant, fondamental pour la suite :

**Théorème 2.4.1 (Représentations irréductibles de  $SU(2)$ )** Pour toute représentation irréductible de  $SU(2)$ , il existe  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , donné par  $\dim \rho$ , tel que  $\rho$  soit isomorphe à  $\mathcal{D}^j$ .

**Démonstration.** admis. ■

## 2.4.2 Représentations d'un produit semi-direct fini

Nous suivons ici la démarche de [13] pour étudier puis construire les représentations d'un produit semi-direct fini.

On considère donc un produit semi-direct

$$G = H \ltimes N$$

De plus nous supposons que  $N$  est abélien.

Considérant  $H$  et  $N$  comme des sous-groupes de  $G$ , le groupe  $H$  agit sur  $N$  par conjugaison dans  $G$  :  $h \cdot n = hnh^{-1}$ .  $H$  agit donc également sur les fonctions sur  $N$ , pour  $f : N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h \cdot f(n) = f(h^{-1} \cdot n) = f(h^{-1}nh)$ .

Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1 (ceci découle immédiatement du Lemme de Schur), elles sont simplement données par un morphisme de groupes  $\chi : (N, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ , est aussi un caractère, ce qui permet de définir :

**Définition 2.4.2 (Ensemble des caractères)** Soit  $G = H \ltimes N$  un produit semi-direct avec  $N$  abélien. On définit l'ensemble des morphismes de groupes

$$N^* = \{\chi : (N, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)\}$$

$N^*$  est l'ensemble des caractères sur  $N$ , c'est aussi l'ensemble des représentations irréductibles de  $N$ .

**Remarque 2.4.1**  $H$  agit sur ces caractères par :

$$(h \cdot \chi)(n) = \chi(h^{-1} \cdot n)$$

### Démontage d'une représentation

Soit  $(\rho, V)$  une représentation irréductible du produit semi-direct  $G$ . La restriction de cette représentation à  $N$ ,  $(\rho|_N, V)$ , se décompose en somme de représentations irréductibles :  $V = \bigoplus_{i=1}^k m_i W_i$ , où  $W_i$  est l'espace de représentation irréductible de  $N$  associé au caractère  $\varkappa_i$ ,  $m_i$  est la multiplicité de cette représentation. On note  $V_{\varkappa_i} = m_i W_i$ , alors

$$V_{\varkappa_i} = \{x \in V : \rho(n)x = \varkappa_i(n)x\}$$

Regardons comment  $G$  agit sur  $x \in V_{\varkappa_i}$  : soit  $g \in G$ ,  $n \in N$ , calculons

$$\begin{aligned} \rho(n)\rho(g)x &= \rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(n)\rho(g)x \\ &= \rho(g)\rho(g^{-1}ng)x \\ &= \rho(g)\varkappa_i(g^{-1}ng)x \\ &= (g \cdot \varkappa_i)(n)\rho(g)x \end{aligned}$$

Par définition de  $V_{\varkappa_i}$ , ce calcul montre que

$$\rho(g)V_{\varkappa_i} = V_{g \cdot \varkappa_i}$$

Pour arriver à un sous-espace de  $V$  stable par  $\rho$ , il faut introduire l'orbite d'un caractère :

**Définition 2.4.3 (Orbite d'un caractère)** Soit  $\varkappa_i \in N^*$  un caractère de  $N$ . On note  $N_i^* \subset N^*$  l'orbite de ce caractère sous l'action de  $G$  :

$$N_i^* = G \cdot \varkappa_i = \{g \cdot \varkappa_i : g \in G\}$$

Remarquons que comme l'action de  $N$  sur  $N^*$  est triviale, il suffit de considérer l'action de  $H$  :

$$N_i^* = G \cdot \varkappa_i = H \cdot \varkappa_i$$

Il apparaît alors clairement que  $\bigoplus_{g \in G} V_{g \cdot \varkappa_i}$  est un sous-espace de  $V$  stable par  $\rho$ . Comme  $V$  est irréductible, ce sous-espace est soit vide, soit  $V$ , donc

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_{g \cdot \varkappa_i} = \bigoplus_{\varkappa \in N_i^*} V_\varkappa$$

pour un certain  $\varkappa_i \in N^*$ .

D'après cette dernière expression,  $V$  peut être vu comme l'ensemble  $\Gamma(E)$  des sections d'un fibré vectoriel  $E \mapsto N_i^*$ . La représentation  $(\rho, V)$  devient équivalent à l'action de  $G$  sur  $\Gamma(E)$  (cette action naturelle sera explicitée plus loin, lors de la construction des représentations).

Exprimons maintenant le fait que  $(\rho, V)$  est irréductible en étudiant l'action de  $G$  sur  $\Gamma(E)$ .

On a pour cela besoin d'introduire le groupe d'isotropie :

**Définition 2.4.4 (Groupe d'isotropie ou petit groupe)** Soit  $\varkappa \in N^*$  un caractère sur  $N$ . Le groupe d'isotropie de ce caractère est le sous-groupe  $G_\varkappa \subset G$  constitué des éléments qui le laissent invariant :

$$G_\varkappa = \{g \in G : g \cdot \varkappa = \varkappa\}$$

Ce sous-groupe est aussi appelé petit groupe du caractère.

Soit alors  $G_i \subset G$  le groupe d'isotropie de  $\varkappa_i \in N_i^*$ . Alors  $G_i$  peut s'écrire comme le produit semi-direct  $G_i = H_i \ltimes N$ , où  $H_i = G_i \cap H \subset H$ . Par définition,  $G_i$  est représenté dans  $V_{\varkappa_i}$ , de même que  $H_i$ .

Il est important de noter que  $G/G_i \approx N_i^*$ , l'isomorphisme étant donné par  $gG_i \mapsto g \cdot \varkappa_i$ . La surjectivité vient de la définition de  $N_i^*$  et l'injectivité de celle de  $G_i$ .

Pour que la représentation de  $G$  dans  $\Gamma(E)$  soit irréductible, il faut et il suffit que la représentation de  $G_i$  dans  $V_i$  le soit, donc que la représentation de  $H_i$  dans  $V_i$  le soit.

Nous avons donc montré que toute représentation irréductible d'un produit semi-direct pouvait s'écrire comme l'action du groupe sur les sections d'un fibré vectoriel de base l'orbite d'un caractère et de fibre un espace de représentation irréductible du sous-groupe d'isotropie du caractère.

### Construction des représentations

Nous allons ici effectuer la démarche inverse de celle présentée dans le paragraphe précédent : nous allons voir comment construire une représentation d'un produit semi-direct à partir de "représentations élémentaires" de groupes d'isotropie. Cette démarche sera appliquée par la suite au groupe de Poincaré.

Voici la recette de construction d'une représentation irréductible d'un produit semi-direct :

**Proposition 2.4.2 (Construction des représentations irréductibles)** *Soit  $G = H \ltimes N$  avec  $N$  abélien. Voici comment construire une représentation irréductible de  $G$*

- a) *Déterminer les orbites de  $N^*$  sous l'action de  $H$  et en choisir une, qui sera notée  $N_i^*$ . Choisir un représentant  $\varkappa_i \in N_i^*$  de cette orbite.*
- b) *Déterminer le sous-groupe d'isotropie  $H_i$  de  $H$  du représentant  $\varkappa_i$  et choisir une représentation irréductible  $(\rho_i, V_i)$  de ce sous-groupe.  $(\rho_i, V_i)$  peut alors être considérée comme une représentation de  $G_i = H_i \ltimes N$  par :*

$$\rho_i(hn) = \varkappa_i(n)\rho_i(h), \forall hn \in G_i$$

- c) *Induire cette représentation de  $G_i$  à  $G$  en construisant le fibré vectoriel  $E \mapsto N_i$  de fibre  $V_i$ . Pour cette induction, la méthode à utiliser est celle donnée dans [5] (les actions à utiliser sont  $k \cdot (g, v) = (gk^{-1}, \rho_i(k)v)$  pour le quotient et  $k \cdot (g, v) = (kg, v)$  pour l'action sur le fibré). Soit  $\sigma \in \Gamma(E)$  une section de ce fibré donnée par  $\sigma(g \cdot \varkappa_i) = [(g, s(g))]$ , l'action de  $k \in G$  sur cette section est donnée par :*

$$(k \cdot \sigma)(g \cdot \varkappa_i) = [(g, s(k^{-1}g \cdot \varkappa_i))]$$

Si la représentation  $(\rho_i, V_i)$  est irréductible, la représentation construite sur  $\Gamma(E)$  est irréductible.

**Démonstration.** Pour la démonstration voir [5]. ■

### 2.4.3 Représentations du groupe de Poincaré

Nous allons utiliser la méthode que l'on vient de voir pour les groupes finis au groupe de Poincaré. Ce qui a été fait dans le cas discret se transpose au cas continu. La validité

de cette méthode a été prouvée par Wigner puis généralisée par Mackey. Nous nous contentons de l'utiliser selon [14].

Comme nous l'avons dit plus haut, nous allons chercher à représenter le groupe de Poincaré propre, groupe que nous considérons comme le groupe de symétries d'une particule libre. Nous serons amenés à modifier ce groupe pour inclure des représentations théoriquement non acceptables mais présentes dans la nature. Des représentations que nous construirons, nous déduirons les caractéristiques des particules et comment décrire leurs états.

Ecrivons le groupe de Poincaré propre comme le produit semi-direct :

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{L}_0 \ltimes V$$

### Caractères

Il faut commencer par déterminer les caractères de  $V$ .

Dans le cas d'un groupe  $N$  fini de cardinal  $p$ , on a, pour un caractère  $\varkappa \in N^*$  et pour  $n \in N$ ,  $\varkappa(n)^p = 1$ , d'où  $|\varkappa(n)| = 1$ .

Comme le groupe  $V$  est infini, cette condition ne découle plus de la définition : il faut l'imposer. On définit donc l'ensemble  $V$  des caractères comme l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de  $V$ .

**Proposition 2.4.3 (Description des caractères)** *Soit  $\varkappa \in V^*$  un caractère de  $V$ . Alors il existe un élément  $p$  du dual de  $V$  tel que  $\forall x \in V$  :*

$$\varkappa(x) = e^{ip \cdot x}$$

*L'ensemble des caractères  $V^*$  peut donc être identifié au dual de  $V$ .*

**Démonstration.** un caractère est une représentation irréductible unitaire de  $V$ . Une telle représentation est donnée par un morphisme de groupes  $V \longrightarrow S^1$  ( $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ).

Soit  $\varkappa : V \longrightarrow S^1$  un tel morphisme. Il doit être continu (c'est un morphisme de groupes topologiques), on peut donc le relever : il existe une fonction continue  $\theta : V \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que  $\forall x \in V ; \varkappa(x) = e^{i\theta(x)}$ . La condition  $\varkappa(x + x') = \varkappa(x)\varkappa(x')$  se traduit en  $\theta(x + x') = \theta(x) + \theta(x') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . La continuité de  $\theta$  implique que  $k$  doit être le même pour tous les  $x, x'$ , on peut donc prendre  $k = 0$ , donc simplement une forme linéaire sur  $V$  : il existe un élément  $p$  du dual de  $V$  tel que  $\theta(x) = p \cdot x \forall x \in V$ . ■

Ceci justifie à posteriori la notation  $V^*$ . Quand le caractère est donné par la forme linéaire  $p$ , il est noté  $\varkappa_p$ .

Voyons maintenant l'action d'un élément du groupe de Lorentz propre sur un caractère :

**Proposition 2.4.4 (Action de  $\mathcal{L}_0$  sur  $V^*$ )** *Soit  $\varkappa_p \in V^*$  un caractère de  $V$  et  $\Lambda \in \mathcal{L}_0$  une transformation de Lorentz propre. Alors*

$$\Lambda \cdot \varkappa_p = \varkappa_{\Lambda p}$$

**Démonstration.** il suffit de l'écrire :

$$(\Lambda \cdot \varkappa_p)(x) = \varkappa_p(\Lambda^{-1}x) = e^{ip \cdot (\Lambda^{-1}x)} = e^{i(\Lambda p) \cdot x} = \varkappa_{\Lambda p}(x)$$

par définition de l'action de  $\Lambda$  sur la "fonction"  $p$ . ■

**Remarque 2.4.2** *Comme  $V$  est de dimension finie, sa base canonique permet de l'identifier à son dual, ce qui permet d'écrire l'action d'une transformation de Lorentz sur les éléments du dual. De manière générale, quand  $p$  est considéré comme une fonction sur  $V$ , on a toujours  $p \cdot (\Lambda^{-1}x) = (\Lambda p) \cdot x$  par définition de l'action de  $\mathcal{L}_0$  sur les fonctions. Par l'isomorphisme  $V \approx V^*$ ,  $p \cdot x$  peut être vu comme un produit scalaire de vecteurs de  $V$ . Dans ce cas, l'égalité  $p \cdot (\Lambda^{-1}x) = (\Lambda p) \cdot x$  vient du fait que  $\Lambda$  conserve le produit scalaire.*

Dans la suite, nous travaillerons directement avec les éléments du dual, les  $p \in V^*$ . La proposition ci-dessus montre qu'ils se comportent exactement comme les caractères sous l'action de  $\varkappa$ .

### Orbites, représentants, groupes d'isotropie

Intéressons nous maintenant aux orbites des caractères. Les deux propositions ci-dessus fournissent immédiatement la réponse :

**Proposition 2.4.5 (Orbite des caractères)** *Par définition, l'orbite  $O_p$  du caractère  $p$  est  $O_p = \mathcal{L}_0 \cdot p$ . Ses caractéristiques sont données ci-dessous en fonction des caractéristiques de  $p$  :*

$p$		$O_p$
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 > 0$	$\{p' \in V^* : \ p'\ ^2 = \ p\ ^2, p'_0 > 0\}$
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 < 0$	$\{p' \in V^* : \ p'\ ^2 = \ p\ ^2, p'_0 < 0\}$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 > 0$	$\{p' \in V^* : \ p'\ ^2 = 0, p'_0 > 0\}$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 < 0$	$\{p' \in V^* : \ p'\ ^2 = 0, p'_0 < 0\}$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 = 0$	$\{0\}$
$\ p\ ^2 < 0$		$\{p' \in V^* : \ p'\ ^2 = \ p\ ^2\}$

**Démonstration.** évident d'après les définitions. ■

**Remarque 2.4.3** *Pour former une représentation irréductible du groupe de Poincaré, il faut choisir une orbite, donc une valeur de  $\|p\|^2$ . Il est clair que cela correspond à choisir la masse de la particule. Le cas  $\|p\|^2 < 0$  correspond à des particules de masse imaginaire, les tachyons, que nous ne considérerons pas ici. Nous n'étudierons donc pas les représentations correspondantes.*

**Définition 2.4.5 (Masse)** *Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite  $O_p$  avec  $\|p\|^2 \geq 0$ . On définit sa masse par*

$$m = \sqrt{\|p\|^2}$$

Les orbites sont des "nappes de masse", c'est à dire un sous-ensemble de  $V$  d'éléments de pseudo-norme au carré fixée. La nappe de masse  $m$  est notée  $M_m^+ \subset V^*$  où  $M_m^-$ , le signe étant celui de  $p_0$ . Pour les particules, on se placera sur une nappe "+". Le cas "-" correspondant a des particules remontant le temps, c'est à dire des antiparticules. Néanmoins, tout ce qui sera fait se généralise aisément.

Nous allons travailler non plus avec le groupe de Lorentz propre, mais avec son revêtement  $SL_2(\mathbb{C})$ , qui fera apparaître des sous-groupes d'isotropie dont les représentations

sont connues. Nous utiliserons l'identification  $V \approx H_2$  pour donner des représentants des orbites.

La proposition suivante donne pour chaque type d'orbite son représentant et le sous-groupe d'isotropie associé :

**Proposition 2.4.6 (Représentant et sous-groupe d'isotropie associé)** *Pour chaque type d'orbite  $O_p$ , on a le représentant et le sous-groupe d'isotropie suivants :*

$O_p$		représentant	sous-groupe d'isotropie
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 > 0$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$	$SU(2)$
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 < 0$	$\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$	$SU(2)$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 > 0$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$ISO(2)$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 < 0$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$ISO(2)$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 = 0$	0	$SL_2(\mathbb{C})$

ou  $ISO(2)$  est le groupe des isométries affines de  $\mathbb{C}$ .

**Démonstration.** il s'agit d'une simple vérification pour les représentants. Les sous-groupe d'isotropie se calculent à partir des représentants. Pour  $P = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = mI$  on cherche la condition sur  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  pour avoir  $APA^* = P$ , c'est à dire ici  $AA^* = I$ , donc  $A \in SU(2)$ . De même pour  $P = -mI$ . Pour  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , en prenant  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2|a|^2 & 2a\bar{c} \\ 2c\bar{a} & 2|c|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc  $|a| = 1$ ,  $c = 0$ . La condition  $\det A = 1$  donne  $d = a^{-1}$ . Donc  $A$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

regardant les règles de multiplication de telles matrices, on montre qu'il s'agit du produit semi-direct du cercle  $S^1 \approx SO(2)$  et du plan  $\mathbb{C}$ , c'est à dire des isométries  $ISO(2)$  du plan. L'action d'une rotation sur un vecteur par conjugaison donne :

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & be^{2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation de paramètre  $\theta$  fait tourner d'un angle  $2\theta$ .

De même pour  $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

C'est évident pour  $P = 0$ . ■

**Remarque 2.4.4** *Le dernier cas, correspondant à  $P = 0$ , correspond à une particule de masse nulle et d'énergie nulle. C'est simplement l'état vide, que nous n'étudierons pas en détail.*

### Représentation de masse $m > 0$

C'est presque terminé : il suffit de choisir une représentation irréductible du sous-groupe d'isotropie et de construire le fibré correspondant. Pour une particule de masse non nulle, le sous-groupe d'isotropie est  $SU(2)$ , dont les représentations ont été données plus haut. Ces représentations pouvant être choisies unitaires, la représentation obtenue sera unitaire.

Pour la représentation  $\mathcal{D}^j$ ,  $j$  correspond clairement au spin de la particule.

**Définition 2.4.6 (Spin d'une particule de masse  $m > 0$ )** *Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite de masse non-nulle et de la représentation  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$ . Alors  $j$  est le spin de la particule.*

Nous avons considéré au départ  $SL_2(\mathbb{C})$  à la place de  $\mathcal{L}_0$ . Si on avait considéré  $\mathcal{L}_0$ , on aurait obtenu  $SO(3)$  à la place de  $SU(2)$  comme sous-groupe d'isotropie. Or la représentation  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$  ne donne une représentation de  $SO(3)$  que si  $j \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, les représentations de spin demi-entier n'ont à priori aucun sens physique. Nous devons reconnaître que ce n'est pas le cas : des particules de spin demi-entier existent. Nous avons donc fait une erreur en prenant le groupe de Poincaré comme groupe de symétries, il fallait prendre son revêtement  $SL_2(\mathbb{C}) \ltimes H_2$ .

**Définition 2.4.7 (Groupe de symétries des particules libre)** *Le groupe de symétries des particules libres est :*

$$SL_2(\mathbb{C}) \ltimes H_2$$

Enfin, on peut dire quel est l'espace des états d'une particule massive :

**Proposition 2.4.7 (Espace des états d'une particule massive)** *Soit une particule de masse  $m > 0$  et de spin  $j$ . Considérons le fibré  $E_m^j \mapsto M_m^+$  de fibre  $V^j$ . Son espace d'états est l'espace des sections de ce fibré :*

$$\mathcal{H} = \Gamma(E_m^j)$$

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de ce qui précède. ■

### Représentation de masse $m = 0$

Dans ce cas, il faut déterminer les représentations irréductibles de  $ISO(2)$ , qui est lui-même un produit semi-direct. Par souci d'économie, nous allons éliminer directement les cas qui n'apparaissent pas dans la nature, en faisant confiance à [13].

Les caractères sont clairement identifiables aux vecteurs du plan. Pour les orbites et les sous-groupes d'isotropie, deux cas se présentent :

- Le caractère est non nul, son orbite est un cercle et son sous-groupe d'isotropie est réduit à l'identité. La représentation irréductible est la représentation triviale dans  $\mathbb{C}$ . L'espace de représentation associée est l'espace des fonctions sur le cercle. Nous admettons que ces représentations n'apparaissent pas dans la nature.

- Le caractère est nul, son orbite est le caractère nul et son sous-groupe d'isotropie est  $SO(2)$ .

Les représentations irréductibles de  $SO(2)$  sont de dimension un. Une telle représentation est caractérisée par  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{i\theta}$  étant représenté par une rotation d'angle  $n\theta : \theta \mapsto e^{in\theta}$ .

On a vu plus haut que le paramètre  $\theta = \frac{\phi}{2}$  correspondait à une rotation d'angle  $2\theta = \phi$  (alors  $0 \leq \phi \leq 4\pi$ ). On pose donc  $n = 2s$ ,  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , et on note cette représentation  $\mathcal{B}^s$ .  $s$  va clairement jouer le rôle de l'hélicité.

Pour avoir une représentation de  $ISO(2)$ , il faudrait prendre les sections du fibré de base le caractère nul et de fibre  $\mathbb{C}$ , mais cet espace est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

Ces représentations sont bien sûr unitaires.

**Définition 2.4.8 (Spin (ou hélicité) d'une particule de masse  $m = 0$ )** *Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite de masse nulle et de la représentation  $\mathcal{B}^s$  de  $ISO(2)$ . Alors  $s$  est le spin (ou l'hélicité) de la particule.*

Comme pour les particules massives, on a :

**Proposition 2.4.8 (Espace des états d'une particule de masse nulle)** *Soit une particule de masse  $m = 0$  et de spin  $s$ . Considérons le fibré  $E_0^s \mapsto M_0^+$  de fibre  $\mathbb{C}$ . Son espace d'états est l'espace des sections de ce fibré :*

$$\mathcal{H} = \Gamma(E_0^s)$$

**Démonstration.** c'est une conséquence immédiate de ce qui précède. ■

## 2.5 Le groupe de Poincaré et les crochets de Poisson

Dans ce qui suit, on envisage de montrer qu'on peut générer le groupe de Poincaré à l'aide du crochet de Poisson  $\{, \}$  et des quadri-vecteurs fondamentales  $x$  et  $p$  de l'espace de phase associées au mouvement d'une particule libre.

**Définition 2.5.1 (Crochet de Poisson)** *On définit le crochet de Poisson de deux fonctions  $f, g \in C^1(V \times V)$  suit :*

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \frac{\partial g}{\partial p^\lambda} + \frac{\partial f}{\partial p^\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_\lambda}$$

**Proposition 2.5.1** *Le crochet de Poisson est un crochet de Lie.*

**Démonstration.** clair. ■

Commençons par rappeler la transformation infinitésimale de Lorentz du quadri-vecteur spatio-temporelles et du quadri-vecteur moments conjugués qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

$$\delta p^\mu = \omega^{\mu\nu} p_\nu$$

Donnons maintenant ces transformation en utilisant le formalisme des crochets de Poisson.

**Remarque 2.5.1** *On définira à partir de maintenant le tenseur moment cinétique comme suit :*

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

*On remarque l'antisymétrie de  $J^{\mu\nu}$ ,  $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$  comme nous l'avions dit précédemment.*

**Proposition 2.5.2** *En utilisant le formalisme des crochets de Poisson, les transformations infinitésimales de Lorentz sont donnée comme suit :*

$$\begin{cases} \delta x^\rho = \{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, x^\rho\} \\ \delta p^\rho = \{-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, p^\rho\} \end{cases}$$

*avec  $x^\rho, p^\rho, \omega_{\mu\nu}, J^{\mu\nu}$  sont respectivement les quadri-vecteurs fondamentales de l'espace de phase, le générateur infinitésimal des translation et le tenseur moment cinétique.*

**Démonstration.** Par un simple calcul, on obtient les relations :

$$\begin{cases} \{J_{\mu\nu}, x^\rho\} = \eta^{\rho\gamma} \{J_{\mu\nu}, x_\gamma\} = \eta^{\rho\gamma} \frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial p^\gamma} = \delta^\rho_\nu x_\mu - \delta^\rho_\mu x_\nu \\ \{J_{\mu\nu}, p^\rho\} = -\frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} = -\delta^\rho_\mu p_\nu + \delta^\rho_\nu p_\mu \end{cases}$$

Revenons aux transformations infinitésimales précédentes. Vu l'antisymétrie des paramètres  $\omega^{\mu\nu}$  ( $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ ), ces dernières peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \frac{1}{2} (\omega^{\mu\nu} x_\nu - \omega^{\nu\mu} x_\nu) = \frac{1}{2} \omega^{\rho\nu} (\delta^\mu_\rho x_\nu - \delta^\mu_\nu x_\rho) \\ \delta p^\mu = \frac{1}{2} (\omega^{\mu\nu} p_\nu - \omega^{\nu\mu} p_\nu) = \frac{1}{2} \omega^{\rho\nu} (\delta^\mu_\rho p_\nu - \delta^\mu_\nu p_\rho) \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, nous pouvons écrire que

$$\begin{cases} \delta x^\mu = -\frac{1}{2} \omega^{\rho\nu} \{J_{\rho\nu}, x^\mu\} \\ \delta p^\mu = -\frac{1}{2} \omega^{\rho\nu} \{J_{\rho\nu}, p^\mu\} \end{cases}$$

après avoir inversé la position des indices et des exposants on obtient les résultats. ■

Dans le cas général on donne la définition suivante :

**Définition 2.5.2** Soit  $f \in C^1(V \times V)$  une fonction définie sur l'espace de phase, sa variation infinitésimale sous une transformation de Lorentz s'obtient à l'aide du crochet de Poisson comme suit :

$$\delta f = \left\{ -\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, f \right\}$$

où  $\omega_{\mu\nu}$  sont des paramètres antisymétriques des transformations infinitésimales et  $\delta f(x, p) = f(x', p') - f(x, p)$ .

Etudiant maintenant la translation spatio-temporelle.

**Proposition 2.5.3** En utilisant le formalisme des crochets de Poisson, la translation spatio-temporelle infinitésimale est donnée comme suit :

$$\delta x^\mu = a^\nu \{p_\nu, x^\mu\}$$

**Démonstration.** Le quadri-vecteur  $x$  se transforme comme suit :

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \iff \delta x^\mu = a^\mu$$

où le quadri-vecteur  $a$  est le paramètre de la translation. Cette transformation peut se mettre sous la forme

$$\delta x^\mu = a^\nu \delta^\mu_\nu \implies \delta x^\mu = a^\nu \{p_\nu, x^\mu\}$$

■

**Remarque 2.5.2** *On voit bien que même les translations spatio-temporelles s'expriment à l'aide du crochet de Poisson et du quadri-vecteur  $p$ .*

D'une manière générale, une fonction  $f(x, p)$  de l'espace de phase subit une variation infinitésimale  $\delta f$  dans une translation donnée par :

**Définition 2.5.3** *Soit  $f \in C^1(V \times V)$  une fonction définie sur l'espace de phase, sa variation infinitésimale sous une translation spatio-temporelle s'obtient à l'aide du crochet de Poisson comme suit :*

$$\delta f = a^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = a^\mu \{p_\mu, f\}$$

où les  $a^\mu$  sont les paramètres de la translation et  $\delta f(x, p) = f(x', p) - f(x, p)$ .

On conclut que le crochet de Poisson  $\{, \}$  permet de retrouver le groupe de Poincaré en utilisant le tenseur moment cinétique  $J$  comme générateur des rotations et le quadri-vecteur  $p$  comme générateur des translations spatio-temporelles.

**Remarque 2.5.3** *Il est très intéressant de remarquer que les générateurs  $J_{\mu\nu}$  et  $p^\mu$  laissent covariante l'algèbre de Poincaré en terme de crochet de Poisson  $\{, \}$ , au lieu des commutateurs  $[, ]$  et des opérateurs infinitésimaux  $L_{\mu\nu}$  et  $P^\mu$ . En effet on a les relations suivantes:*

**Proposition 2.5.4** *Les relations de commutation des opérateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré sont donnée avec le crochet de Poisson par :*

$$\begin{aligned} \{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\} &= \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\rho\mu} J_{\nu\sigma} + \eta_{\sigma\nu} J_{\rho\mu} - \eta_{\rho\nu} J_{\sigma\mu} \\ \{J_{\mu\nu}, p_\rho\} &= (\delta_\mu^\lambda p_\nu - \delta_\nu^\lambda p_\mu) \eta_{\lambda\rho} \end{aligned}$$

**Démonstration.** Simple utilisation de la définition et manipulation des tenseur. ■

**Conclusion 2.5.1** *La conclusion générale qu'on peut tirer de ce qui est dit dans cette dernière section qui va fortement nous servir dans la suite du mémoire est que le groupe de Poincaré, qui est un groupe de Lie, est étroitement lié aux crochets de Poisson covariants qui permettent d'exprimer les équations de la relativité restreinte.*

Dans ce chapitre, nos efforts seront orientés vers la reformulation de la relativité restreinte déformée dans le cadre de l'approche de Magueijo-Smolin à travers un groupe de Lie qui est une des généralisation du groupe de Lorentz. En fait cette nouvelle approche de la relativité consiste à introduire un nouveau postulat par rapport à la relativité restreinte d'Einstein, qui est l'existence d'une nouvelle constante appeler L'énergie de Planck  $E_p$  ou la longueur de Planck  $l_p$  qui doit avoir la même valeur dans tous les repères inertiels.

Dans la suite on va introduire la notion du  $\kappa$ -espace de phase de Minkowski à l'aide du crochet de poisson, ce qui va nous permettre de retrouver les  $\kappa$ -transformations de Lorentz. Ensuite, on va démontrer qu'il existe une transformation spéciale de variables qui relie le " $\kappa$ -groupe de Lorentz" à celui du "groupe de Lorentz" et donc le " $\kappa$ -espace de phase de Minkowski" à "l'espace de phase de Minkowski" ordinaire. Ces variables qualifiées de canoniques, jouent un rôle fondamental dans l'élaboration du reste de la théorie de la relativité spéciale déformée, à savoir la détermination d'un lagrangien d'une particule libre invariant sous les  $\kappa$ -transformations de Lorentz, et la démarche à suivre pour aboutir à la quantification des équations du mouvement.

## 3.1 La nouvelle déformation des crochets de Poisson (La $\kappa$ -déformation)

### 3.1.1 Le $\kappa$ -espace de phase de Minkowski

Supposons qu'une particule occupe le point  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  du  $\kappa$ -espace-temps de Minkowski et ayant l'énergie  $E$  et l'impulsion spatiale  $(p_x, p_y, p_z)$ , donc ayant les moments conjugués  $(p^0 = \frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3)$ . Cette particule est appelée une  $\kappa$ -particule et l'espace de phase qui lui est associé dans ce cas est le  $\kappa$ -espace de phase de Minkowski dont les crochets de poisson fondamentaux sont :

**Définition 3.1.1** *Les crochets de poisson fondamentaux du  $\kappa$ -espace de phase de Minkowski sont donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^i, x^j\} = 0 \\ \{x^i, x^0\} = \frac{x^i}{\kappa} \\ \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \\ \{x^i, p^j\} = \delta^{ij} = -\eta^{ij} \\ \{x^i, p^0\} = 0 \\ \{x^0, p^j\} = \frac{p^j}{\kappa} \\ \{x^0, p^0\} = -1 + \frac{p^0}{\kappa} \end{array} \right.$$

On peut les réécrire sous la forme condensée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^\mu, x^\nu\} = \frac{1}{\kappa} (x^\mu \delta^\nu_0 - x^\nu \delta^\mu_0) \\ \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \\ \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \delta^\mu_0 p^\nu \end{array} \right.$$

où  $\kappa$  est un paramètre qui sera identifié plus tard.

**Remarque 3.1.1** *Le secteur spatiale reste identique au cas classique, autrement dit : les crochets de poisson où interviennent seulement les coordonnées et impulsions spatiales ne sont pas déformés. Il n'y a que les relations où les composantes temporelles apparaissent qui sont déformées mais, elles retrouvent leurs formes classique de l'espace de Minkowski usuel si le paramètre  $\kappa \rightarrow +\infty$ .*

**Proposition 3.1.1 (L'identité de Jacobi)** *L'identité de Jacobi est satisfaite par le  $\kappa$ -espace de phase de Minkowski (3.2).*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que l'identité de Jacobi est satisfaite par l'ensemble des quadri-vecteurs fondamentaux, et cela en imposant les relations de la définition, Il y a en principe quatre identités à vérifier, les autres en découlent. Par un simple calcul on obtient les relations souhaitées :

$$\begin{aligned} \{p_\mu, \{p_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{p_\mu, p_\nu\}\} + \{p_\nu, \{p_\rho, p_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{p_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{x_\mu, p_\nu\}\} + \{p_\nu, \{p_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{x_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{x_\mu, x_\nu\}\} + \{x_\nu, \{p_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{x_\nu, x_\rho\}\} + \{x_\rho, \{x_\mu, x_\nu\}\} + \{x_\nu, \{x_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \end{aligned}$$

On conclue. ■

### 3.1.2 La $\kappa$ -algèbre de Lorentz

Le but de ce chapitre est de construire le  $\kappa$ -groupe de transformations de Lorentz, et cela après avoir déformé les relations de commutations fondamentales. Comme dans le cas classique, le moment cinétique est toujours considéré comme le générateur du  $\kappa$ -groupe de transformations de Lorentz, mais à condition d'utiliser les relations définie en haut, Mais avant de procéder à la recherche de ce groupe, en utilisant les propriétés habituelles de crochet de Poisson, on peut montrer que la transformation de  $x_\mu$  et  $p_\nu$  sont modifiés comme suit :

$$\begin{aligned} \{J_{\mu\nu}, x_\rho\} &= \eta_{\rho\nu}x_\mu - \eta_{\rho\mu}x_\nu + \frac{1}{\kappa} (\delta_{\nu 0}p_\mu - \delta_{\mu 0}p_\nu) x_\rho \\ \{J_{\mu\nu}, p_\rho\} &= -\eta_{i\rho}p_j + \eta_{j\rho}p_i - \frac{1}{\kappa} (\delta_{\nu 0}p_\mu - \delta_{\mu 0}p_\nu) p_\rho \end{aligned}$$

Mais on peut se demander quel est l'impact de cette déformation sur l'algèbre de Lorentz établie au chapitre précédent. il suffit donc de voir le crochet de poisson de  $J_{\mu\nu}$  pour connaître le sort de l'algèbre de Lorentz standard. On rappelle que le moment cinétique  $J$  d'une  $\kappa$ -particule occupant le point  $x$  et ayant le moment conjuguée  $p$  est défini comme dans le cas classique.

**Proposition 3.1.2** *Les relation de commutation du tenseur  $J$  sont définis comme dans le cas classique comme suit :*

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\} = -\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \eta_{\rho\mu}J_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu}J_{\rho\mu} + \eta_{\rho\nu}J_{\sigma\mu}$$

**Démonstration.** En utilisant les propriétés des crochets de Poisson et les expressions précédentes des crochets  $\{J_{\mu\nu}, x_\lambda\}$  et  $\{J_{\mu\nu}, p_\lambda\}$  on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\} &= \{J_{\mu\nu}, x_\rho p_\sigma - x_\sigma p_\rho\} \\ &= \{J_{\mu\nu}, x_\rho p_\sigma\} - \{J_{\mu\nu}, x_\sigma p_\rho\} \\ &= -\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \eta_{\rho\mu}J_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu}J_{\rho\mu} + \eta_{\rho\nu}J_{\sigma\mu} \end{aligned}$$

■

**Remarques 3.1.2** *On a :*

1) *Il est facile de voir en comparant cette relation avec la relation du chapitre précédent que l'algèbre de Lorentz est la même dans les deux cas classique et déformé, et cela malgré la déformation des relations de commutation (crotchets de poisson) des quadri-vecteurs fondamentales du  $\kappa$ -espace de phase.*

2) *Dans les équations précédente, si les indices  $\mu$  et  $\nu$  sont spatiaux, le terme de la déformation s'annule. Autrement dit : si  $\mu = i$  et  $\nu = j$  ces équations se réduisent à la forme :*

$$\begin{aligned} \{J_{ij}, x_\rho\} &= \eta_{\rho j}x_i - \eta_{\rho i}x_j \\ \{J_{ij}, p_\rho\} &= -\eta_{i\rho}p_j + \eta_{j\rho}p_i \end{aligned}$$

*Ces formules sont analogues aux formules du chapitre précédent établies pour le cas classique. Une fois de plus, ce sont les crochets où interviennent les composantes temporelles qui sont déformés, mais il suffit de faire tendre le paramètre de déformation  $\kappa$  vers l'infini pour retrouver les résultats classiques.*

## 3.2 la $\kappa$ -transformation des quadri-vecteurs fondamentaux

Pour construire le groupe de Lorentz déformé, où tout simplement le  $\kappa$ -groupe de Lorentz, on va commencer par les transformations infinitésimales des quadri-vecteurs fondamentaux.

### 3.2.1 La $\kappa$ -transformation infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux

Comme le moment cinétique  $J_{\mu\nu}$  est le générateur du  $\kappa$ -groupe de Lorentz, alors par définition on peut s'en servir pour exprimer la variation infinitésimale  $\delta f$  de n'importe quelle fonction dépendante des quadri-vecteurs fondamentaux avec une transformation appartenant à ce groupe de manière analogue à celle démontrée au chapitre précédent.

Donc nous sommes en présence de six paramètres réels indépendants puisque  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ .

Dans le reste de ce chapitre, on va se limiter au cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls. Le but de cette restriction est dans de construire un groupe de transformations à un seul paramètre, chose possible du point de vue calcul.

**Proposition 3.2.1** ( *$\kappa$ -transformation infinitésimale*) *La  $\kappa$ -transformation infinitésimale dans le cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, prend la forme suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(ct) = -(x + \frac{1}{\kappa}p_x ct)\delta u \\ \delta x = -(ct + \frac{1}{\kappa}p_x x)\delta u \\ \delta y = -\frac{1}{\kappa}p_x y\delta u \\ \delta z = -\frac{1}{\kappa}p_x z\delta u \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p_t = (-p_x + \frac{1}{\kappa}p_x p_t)\delta u \\ \delta p_x = (-p_t + \frac{1}{\kappa}p_x p_x)\delta u \\ \delta p_y = \frac{1}{\kappa}p_x p_y\delta u \\ \delta p_z = \frac{1}{\kappa}p_x p_z\delta u \end{array} \right.$$

*Nous indiquons ici que  $x_0 = ct$  et  $c$  est une constante avec une dimension d'une vitesse*

**Démonstration.** Donnons d'abord la variation (transformation) infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux dans le cadre du  $\kappa$ -groupe de Lorentz. On commence

d'abord par calculer la variation infinitésimale des quadri-vecteurs  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  et  $(p^0, p^1, p^2, p^3)$  du  $\kappa$ -espace de phase, A l'aide de la transformation infinitésimale d'une fonction  $f$  appliquée dans les cas  $f = x^\rho$  et  $f = p^\rho$  et en tenant compte de l'antisymétrie des paramètres  $\omega^{\mu\nu}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\delta x^\rho &= \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, x^\rho \right\} = -\omega^{\mu\rho} x_\mu - \frac{1}{\kappa}\omega^{\mu 0} p_\mu x^\rho \\ \delta p^\rho &= \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, p^\rho \right\} = -\omega^{\mu\rho} p_\mu + \frac{1}{\kappa}\omega^{\mu 0} p_\mu p^\rho\end{aligned}$$

si on explicite les équations précédente pour les différentes valeurs de l'indice  $\rho$  en prenant en considération la limitation au cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, on aura l'ensemble des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x^0 = -\omega^{10} x_1 - \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 x^0 \\ \delta x^1 = -\omega^{01} x_0 - \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 x^1 \\ \delta x^2 = -\frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 x^2 \\ \delta x^3 = -\frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 x^3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p^0 = -\omega^{10} p_1 + \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 p^0 \\ \delta p^1 = -\omega^{01} p_0 + \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 p^1 \\ \delta p^2 = \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 p^2 \\ \delta p^3 = \frac{1}{\kappa}\omega^{10} p_1 p^3 \end{array} \right.$$

Rappelons que  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  et que  $p^0 = p_t = \frac{E}{c}$ ,  $p^1 = p_x$ ,  $p^2 = p_y$ ,  $p^3 = p_z$ , Posons le paramètre infinitésimale  $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta u$ , vue l'antisymétrie de  $\omega^{\mu\nu}$ , pour que les  $\kappa$ -transformations infinitésimales prenne enfin leurs formes définitive chercher. ■

**Remarques 3.2.1** *On a :*

- 1) *Comme nous le verrons plus tard la constante  $c$  va représentée, dans la limite  $\kappa \rightarrow \infty$  la vitesse de la lumière en physique.*
- 2) *Toutes les variations infinitésimales dépendent du quadri-vecteur  $p$ , ce qui n'est pas le cas avant la déformation.*

### 3.2.2 La $\kappa$ -transformation finie des quadri-vecteurs fondamentaux

On a vu au premier chapitre que la propriété la plus remarquable d'un groupe de Lie de transformations est qu'on peut à l'aide d'une transformation infinitésimale appartenant

à ce groupe, avoir beaucoup d'informations et remonter aux transformations finies. c'est en principe le contenu du premier théorème fondamental de Lie (voir le chapitre 1). C'est à dire à partir de la transformation infinitésimale de la sous section précédente, on peut construire un groupe de transformations à un paramètre. Ce groupe est un sous groupe du groupe de Lorentz déformé générale dépendant de six paramètres réel qu'on note  $\mathcal{L}_0^\kappa$ .

**Proposition 3.2.2 (La  $\kappa$ -transformations)** *La  $\kappa$ -transformations des quadri-vecteurs  $x$  et  $p$  du  $\kappa$ -espace de phase limiter au cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, s'obtient après intégration des équations précédentes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \alpha_u^\kappa(p) (ct \cosh(u) - x \sinh(u)) \\ x' = \alpha_u^\kappa(p) (x \cosh(u) - ct \sinh(u)) \\ y' = \alpha_u^\kappa(p) y \\ z' = \alpha_u^\kappa(p) z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_t = \frac{1}{\alpha_u^\kappa(p)} (p_t \cosh(u) - p_x \sinh(u)) \\ p'_x = \frac{1}{\alpha_u^\kappa(p)} (p_x \cosh(u) - p_t \sinh(u)) \\ p'_y = \frac{1}{\alpha_u^\kappa(p)} p_y \\ p'_z = \frac{1}{\alpha_u^\kappa(p)} p_z \end{array} \right.$$

pour  $u \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_u^\kappa(p)$  est définie par :

$$\alpha_u^\kappa(p) = 1 + \frac{1}{\kappa} [p_t(\cosh(u) - 1) - p_x \sinh(u)]$$

**Démonstration.** Dans notre cas, pour trouver les transformations finie des quadri-vecteurs fondamentaux, il faut résoudre les systèmes différentiels ci-dessous qu'on déduit des  $\kappa$ - transformation infinitésimale de la sous section précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(ct')}{du} = -x' - \frac{1}{\kappa} p'_x ct' \\ \frac{dx'}{du} = -ct' - \frac{1}{\kappa} p'_x x' \\ \frac{dy'}{du} = -\frac{1}{\kappa} p'_x y' \\ \frac{dz'}{du} = -\frac{1}{\kappa} p'_x z' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp'_t}{du} = -p'_x + \frac{1}{\kappa} p'_x p'_t \\ \frac{dp'_x}{du} = -p'_t + \frac{1}{\kappa} p'_x p'_t \\ \frac{dp'_y}{du} = \frac{1}{\kappa} p'_x p'_y \\ \frac{dp'_z}{du} = \frac{1}{\kappa} p'_x p'_z \end{array} \right.$$

Où  $du = \omega^{01} = -\omega^{10}$  avec les inconnus de ce système d'équations sont les composantes  $ct', x', y', z', p'_t, p'_x, p'_y$ , et  $p'_z$  et la variable est  $u$  qui n'est rien d'autre que le paramètre réel du groupe de Lorentz déformé spécial ( car on s'est limité à un seul paramètre). Une fois qu'on a établi nos équations, passons à la résolution. A partir des équations précédente, on vois bien qu'on doit commencer par le deuxième système donc on obtient les relations qui suivent :

$$\frac{1}{p'_t + p'_x} \frac{d(p'_t + p'_x)}{du} - \frac{1}{p'_t - p'_x} \frac{d(p'_t - p'_x)}{du} = \frac{d}{du} \ln \left( \frac{p'_t + p'_x}{p'_t - p'_x} \right) = -2$$

Après une intégration directe de la seconde partie on obtient :

$$\frac{p'_t + p'_x}{p'_t - p'_x} = Ae^{-2u}$$

où  $A$  est une constante d'intégrations arbitraire. On peut utiliser cette relation pour exprimer  $p'_x$  en fonction de  $p'_t$ .

$$px' = \frac{-1 + Ae^{-2u}}{1 + Ae^{-2u}} p't'$$

Dans la première équation du système différentiel, remplaçons  $p'_x$  par sa valeur ci-dessus pour aboutir à la relation :

$$p'_t = \left( \frac{1 - Ae^{-2u}}{1 + Ae^{-2u}} \right) \left( p'_t - \frac{p_t'^2}{\kappa} \right)$$

Nous sommes en présence d'une équation différentielle à variables séparables qui se ramène à la solution suivante :

$$p'_t = \frac{-\kappa (Be^u - AB e^{-u})}{1 - (Be^u - AB e^{-u})}$$

où  $B$  est une constante réelle. Maintenant, en redéfinissant les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  tel que  $A = \frac{C-D}{C+D}$  et  $B = \frac{C+D}{-\kappa}$  où  $C$  et  $D$  sont des nouvelles constantes d'intégration, on obtient finalement, après une simple manipulation :

$$p'_t = \frac{C \cosh(u) + D \sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa} [C \cosh(u) + D \sinh(u)]}$$

L'étape suivante est la détermination de  $p'_x$  en manipulant quelque peu la première équation du système différentiel et en remplaçant  $p'_t$  par sa valeur ci-dessus :

$$p'_x = \frac{\kappa}{p'_t - \kappa} = -\frac{C \sinh(u) + D \cosh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa} [C \cosh(u) + D \sinh(u)]}$$

Les valeurs des constantes d'intégration  $C$  et  $D$  sont déterminées par la condition suivante : il faut que  $p'_t = p_t$  et  $p'_x = p_x$  si le paramètre  $u = 0$ . Avec cette condition dans les égalités précédentes on trouve que :

$$C = \frac{\kappa p_t}{\kappa - p_t} \quad \text{et} \quad D = -\frac{\kappa p_x}{\kappa - p_t}$$

Il ne reste qu'à remplacer  $C$  et  $D$  par leurs expressions ci-dessus dans les équations voulue :

$$p'_t = \frac{p_t \cosh(u) - p_x \sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa} [p_t (\cosh(u) - 1) - p_x \sinh(u)]}$$

$$p'_x = \frac{p_x \cosh(u) - p_t \sinh(u)}{1 + \frac{1}{\kappa} [p_t (\cosh(u) - 1) - p_x \sinh(u)]}$$

La dernière étape consiste à trouver  $p'_y$  et  $p'_z$ . Commençons par poser :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\kappa} [p_t (\cosh(u) - 1) - p_x \sinh(u)]$$

Remarquons que :

$$p'_x = -\frac{\kappa}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$$

Remplaçons  $p'_x$  par cette valeur dans la troisième et la quatrième équation du système différentiel et résolvons les deux équations différentielle à variables séparables en les soumettant au condition  $p'_y = p_y$  et  $p'_z = p_z$  :

$$p'_y = \frac{p_y}{\alpha}$$

$$p'_z = \frac{p_z}{\alpha}$$

Maintenant après remplacement de la valeur de  $p'_x$  trouvée précédemment dans le premier système, il suffira de le résoudre pour obtenir le résultat voulue. ■

**Remarque 3.2.2** *Ce qui saute directement aux yeux est la non linéarité de la nouvelle transformation, et le fait que les composantes  $y, z, p_y$  et  $p_z$  qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement relatif en physique, ne restent pas invariantes, ce qui n'est pas le cas en relativité restreinte (chapitre 2). En plus de ça, les équations de la proposition précédente possèdent un nouvel invariant en plus de la vitesse de la lumière, en effet, si on regarde bien ces équations, on constate que  $E_p = \kappa c$  doit avoir la dimension d'une énergie et qu'une particule ayant cette énergie dans le repère  $(R)$ , sera vue dans le repère  $(R')$  qui est en translation uniforme par rapport à  $(R)$  avec une vitesse  $v$ ) avec cette même énergie. Un petit calcul le montre facilement.*

### 3.3 Le $\kappa$ -groupe des transformations de Lorentz

Le but de cette section est d'étudier les propriétés du groupe des transformations de Lorentz déformées.

**Proposition 3.3.1** *Le  $\kappa$ -groupe de Lorentz spécial est un sous groupe du  $\kappa$ -groupe de Lorentz générale qu'on notera  $L^\kappa$ , il possède les propriétés suivantes :*

a) *La composition de deux éléments de  $L^\kappa$  est donnée par :*

$$\forall \Lambda_{u_1}, \Lambda_{u_2} \in L^\kappa, \Lambda_{u_1} \Lambda_{u_2} = \Lambda_{u_1+u_2} \in L^\kappa$$

b) *L'inverse d'un élément de  $L^\kappa$  est donnée par :*

$$\forall \Lambda_u \in L^\kappa, \Lambda_u^{-1} = \Lambda_{-u} \in L^\kappa$$

c) *L'identité de  $L^\kappa$  est donnée par :*

$$I = \Lambda_0 \in L^\kappa$$

**Démonstration.** Soient ces deux transformations successives des quadri-vecteurs fondamentaux exprimées en fonction du paramètre spécial  $u$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \alpha_{u_1}^\kappa(p) (ct \cosh(u_1) - x \sinh(u_1)) \\ x' = \alpha_{u_1}^\kappa(p) (x \cosh(u_1) - ct \sinh(u_1)) \\ y' = \alpha_{u_1}^\kappa(p) y \\ z' = \alpha_{u_1}^\kappa(p) z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct'' = \alpha_{u_2}^\kappa(p') (ct' \cosh(u_2) - x' \sinh(u_2)) \\ x'' = \alpha_{u_2}^\kappa(p') (x' \cosh(u_2) - ct' \sinh(u_2)) \\ y'' = \alpha_{u_2}^\kappa(p') y' \\ z'' = \alpha_{u_2}^\kappa(p') z' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_t = \frac{1}{\alpha_{u_1}^\kappa(p)} (p_t \cosh(u_1) - p_x \sinh(u_1)) \\ p'_x = \frac{1}{\alpha_{u_1}^\kappa(p)} (p_x \cosh(u_1) - p_t \sinh(u_1)) \\ p'_y = \frac{1}{\alpha_{u_1}^\kappa(p)} p_y \\ p'_z = \frac{1}{\alpha_{u_1}^\kappa(p)} p_z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p''_t = \frac{1}{\alpha_{u_2}^\kappa(p')} (p'_t \cosh(u_2) - p'_x \sinh(u_2)) \\ p''_x = \frac{1}{\alpha_{u_2}^\kappa(p')} (p'_x \cosh(u_2) - p'_t \sinh(u_2)) \\ p''_y = \frac{1}{\alpha_{u_2}^\kappa(p')} p'_y \\ p''_z = \frac{1}{\alpha_{u_2}^\kappa(p')} p'_z \end{array} \right.$$

Vérifions que la composition de ces deux  $\kappa$ -transformations conduit à une autre  $\kappa$ -transformation.

Autrement dit, les  $x_\mu$  et les  $p_\nu$  se transforment en  $x''_\mu$  et les  $p''_\nu$  par une transformation ayant

la même forme que les deux transformations ci-dessus mais avec un nouveau paramètre. Après calcul et en tenant compte de l'égalité suivante qui est facile à vérifier

$$\alpha_{u_1}^\kappa(p)\alpha_{u_2}^\kappa(p') = \alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct'' = \alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p) (ct \cosh(u_1 + u_2) - x \sinh(u_1 + u_2)) \\ x'' = \alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p) (x \cosh(u_1 + u_2) - ct \sinh(u_1 + u_2)) \\ y'' = \alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)y \\ z'' = \alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_t'' = \frac{1}{\alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)} (p_t \cosh(u_1 + u_2) - p_x \sinh(u_1 + u_2)) \\ p_x'' = \frac{1}{\alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)} (p_x \cosh(u_1 + u_2) - p_t \sinh(u_1 + u_2)) \\ p_y'' = \frac{1}{\alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)} p_y \\ p_z'' = \frac{1}{\alpha_{u_1+u_2}^\kappa(p)} p_z \end{array} \right.$$

On a donc :

i) Il est clair que la composition de deux  $\kappa$ -transformations de  $(x^\mu, p^\nu)$  avec les valeurs  $u_1$  et  $u_2$  du paramètre de la transformation, conduit à une  $\kappa$ -transformation de  $(x^\mu, p^\nu)$  mais avec la valeur  $u_1 + u_2$  du paramètre, c'est à dire que la  $\kappa$ -transformation est une loi de composition interne.

ii) Il est clair que si  $u_1 = u$  et  $u_2 = -u$ , on tombe sur la transformation identité, ce qui veut dire que l'inversion d'une  $\kappa$ -transformation revient à remplacer la valeur de son paramètre  $u$  par son opposé  $-u$ , c'est à dire que la  $\kappa$ -transformation est inversible.

iii) Il est clair que l'identité s'obtient en posant  $u = 0$  (L'identité est une  $\kappa$ -transformation).

■

**Remarque 3.3.1** *On peut passer aisément du paramètre mathématique  $u$  au paramètre de la physique  $v$  qui est la vitesse d'un repère ( $R'$ ) en translation uniforme suivant la direction  $x$  par rapport au repère ( $R$ ) en posant  $v = \arg \tan(u)$ . On obtient même les mêmes propriétés pour  $v$  que pour  $u$ .*

**Proposition 3.3.2 (Invariant relativiste)** *Les invariants relativistes associés au  $\kappa$ -espace de phase sont données par :*

$$\begin{array}{l} a) I_x = \left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right)^2 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \\ b) I_p = \left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right)^{-2} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \end{array}$$

**Démonstration.** Pour construire les invariants relativistes dans ce contexte, nous remarquons que la définition de  $\alpha_\kappa$  et la première relation dans la  $\kappa$ -transformation du quadri-vecteur  $x$  permet d'écrire :

$$\alpha_\kappa(p) = \left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right) \left(1 - \frac{p'^0}{\kappa}\right)^{-1}$$

et que toujours à partir de la  $\kappa$ -transformation du quadri-vecteur  $x$  nous pouvons montrer que

$$\eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \alpha_\kappa(p)\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

Par conséquent, en utilisant ses expressions, on déduit le premier invariant. De la même manière, avec l'utilisation de la  $\kappa$ -transformation du quadri-vecteur  $p$ , on obtient

$$\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu = \frac{1}{\alpha_\kappa(p)^2}\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$$

et en tenant compte de cette expression avec la valeur de  $\alpha_\kappa$ , il est facile de déduire le deuxième invariant. ■

**Remarque 3.3.2** *Nous observons que si nous prenons la limite  $\kappa \rightarrow \infty$ ,  $I_x$  et  $I_P$  ce réduisent aux invariants connus de la relativité restreinte.*

## 3.4 Les variables canoniques

On termine ce chapitre avec une remarque très importante. Il existe une transformation des variables de l'espace de phase déformé vers d'autres variables qui va nous permettre de faire le lien entre le groupe de Lorentz classique (La relativité restreinte) et le  $\kappa$ -groupe de Lorentz (La relativité spéciale déformée). Ces nouvelles variables qu'on va appeler canoniques, joue un rôle déterminant dans la quantification. Les variables canoniques seront notées  $X^\mu$  et  $P^\nu$ , et s'expriment en fonction des variables habituelles  $x_\mu$  et  $p_\nu$  comme suit :

**Définition 3.4.1 (Variables canoniques)** *Les variables canoniques associer au  $\kappa$ -espace de phase noté  $X^\mu$  et  $P^\nu$ , qui s'expriment en fonction des variables habituelles  $x_\mu$  et  $p_\nu$  de*

ce dernier, sont définies comme suit :

$$X^\mu = \left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right) x_\mu$$

$$P^\nu = \frac{p^\nu}{\left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right)}$$

**Remarque 3.4.1** *La première transformation est apparue dans un article de Jafari-Shariati [7], et complétée par la deuxième transformation dans l'article de Ghosh et Pal [6].*

**Proposition 3.4.1 (Crochets de Poisson des variables canoniques)** *les crochets de Poisson des variables canoniques associées au  $\kappa$ -espace de phase sont données par :*

$$\{X_\mu, X_\nu\} = 0$$

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0$$

$$\{X_\mu, P_\nu\} = -\eta_{\mu\nu}$$

**Démonstration.** Calculons les crochets de Poisson relatifs à ces variables canoniques, pour cela il faudra utiliser la relation suivante :

$$\{x_\mu, \chi\} = \frac{\partial \chi}{\partial p_0} \{x_\mu, p_0\} = \frac{\partial \left(1 - \frac{p_0}{\kappa}\right)}{\partial p_0} \left(-\eta_{\mu 0} + \frac{1}{\kappa} \delta_{\mu 0} p_0\right) = \frac{\delta_{\mu 0}}{\kappa} \chi$$

$$\left\{x_\mu, \frac{1}{\chi}\right\} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\chi}\right)}{\partial p_0} \{x_\mu, p_0\} = -\frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi}{\partial p_0} \{x_\mu, p_0\} = -\frac{\delta_{\mu 0}}{\kappa \chi}$$

avec  $\chi = \left(1 - \frac{p^0}{\kappa}\right)$ . Avec un simple calcul on obtient le résultat. ■

**Remarque 3.4.2** *On voit bien d'après cette proposition que les crochets de Poissons des variables canoniques  $X^\mu$  et  $P^\nu$  sont identiques au cas non déformé (chapitre 2), c'est à dire canoniques. On en déduit que l'algèbre de Lorentz va rester invariante si on travaille avec ces variables canoniques.*

Maintenant, regardons si les transformations canoniques sont inversible.

**Proposition 3.4.2** *Les variables canoniques associées au  $\kappa$ -espace de phase noté  $X^\mu$  et  $P^\nu$ , sont inversibles et leurs inverses sont :*

$$x^\mu = X^\mu \left( 1 + \frac{P^0}{\kappa} \right)$$

$$p^\nu = \frac{P^\nu}{1 + \frac{P^0}{\kappa}}$$

**Démonstration.** Par un simple calcul on vérifie que :

$$X_\mu \left( 1 + \frac{P_0}{\kappa} \right) = \chi x_\mu \left( 1 + \frac{p_0}{\kappa \chi} \right) = x_\mu \left( \chi + \frac{p_0}{\kappa} \right) = x_\mu$$

$$\frac{P_\nu}{1 + \frac{P_0}{\kappa}} = \frac{\frac{p_\nu}{\chi}}{1 + \frac{p_0}{\kappa \chi}} = \frac{p_\nu}{\chi + \frac{p_0}{\kappa}} = p_\nu$$

■

On a ainsi obtenu les expressions des variables habituelles  $x^\mu$  et  $p^\nu$  en fonction des variables canoniques  $X^\mu$  et  $P^\nu$ .

**Corollaire 3.4.1** *Les transformations relatives aux variables canoniques  $X^\mu$  et  $P^\nu$  sont données par :*

$$\begin{cases} cT' = cT \cosh(u) - X \sinh(u) \\ X' = X \cosh(u) - cT \sinh(u) \\ Y' = Y \\ Z' = Z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P'_T = P_T \cosh(u) - P_X \sinh(u) \\ P'_X = P_X \cosh(u) - P_T \sinh(u) \\ P'_Y = P_Y \\ P'_Z = P_Z \end{cases}$$

**Démonstration.** Après remplacement dans les  $\kappa$ -transformation on obtient le résultat. ■

**Remarque 3.4.3** *A partir des développements qu'on vient de faire, on constate qu'effectivement les variables  $(X^\mu, P^\nu)$  sont canoniques parce que leurs crochets de Poisson sont canoniques (non déformés), et obéissent à des transformations de Lorentz ordinaires. Les conséquences de ce fait sont très importantes car on peut transformer les formules et les relations de la relativité restreinte pour qu'elles soient valables en relativité spécial déformée en les écrivant en fonction des variables canoniques  $(X^\mu, P^\nu)$  ensuite passer aux variables habituelles  $(x^\mu, p^\nu)$ . Par exemple, L'énergie, l'impulsion, la relation de dispersion, et la longueur spatio-temporelle  $s$ , s'obtiennent facilement.*

---

# La transformation de Fock ( $R$ -algèbre)

Dans ce chapitre, nos efforts seront orientés encore une fois vers une autre extension de la relativité restreinte introduite par Fock et développée dans l'article [2] à travers un autre groupe de Lie qui est une autre généralisation du groupe de Lorentz. En fait cette nouvelle approche de la relativité consiste à introduire un nouveau postulat par rapport à la relativité restreinte d'Einstein, qui est la conservation d'une longueur  $R$  qui représente le rayon de l'univers, qui doit avoir la même valeur dans tous les repères inertiels.

Dans ce chapitre, nous exposerons une nouvelle déformation des crochets de Poisson qui conduira à la transformation de Fock des coordonnées en utilisant une procédure analogue à la DSR. Nous tirerons la transformation des moments conjugués qui se révèle être différente de la version antérieure de la relativité non linéaire de Fock pour lesquels des ondes planes ne peuvent pas être décrits. Notre algèbre résultante garde invariant sous toutes transformations de coordonnées, la contraction quadri-dimensionnelle  $p_\mu x^\mu$ , ce qui permet donc d'associer les ondes planes à des particules libres. Comme dans la DSR, nous établirons aussi une transformation canonique (variable canonique) avec laquelle les nouvelles coordonnées  $X^\mu$  et moments conjugués  $P^\mu$  satisfont les crochets de Poisson habituelles et donc se transforment comme d'habitude (selon la transformation de Lorentz)..

## 4.1 La nouvelle déformation des crochets de Poisson (La $R$ -déformation)

### 4.1.1 Le $R$ -espace de phase de Minkowski

Supposons qu'une particule occupe le point  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  du  $R$ -espace-temps de Minkowski et ayant l'énergie  $E$  et l'impulsion spatiale  $(p_x, p_y, p_z)$ , donc ayant les moments conjugués  $(p^0, p^1, p^2, p^3)$ . Cette particule est appelée une  $R$ -particule et l'espace de phase qui lui est associé dans ce cas est le  $R$ -espace de phase de Minkowski dont les crochets de Poisson fondamentaux sont :

**Définition 4.1.1** *Les crochets de poisson fondamentaux du  $R$ -espace de phase de Minkowski sont données par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^\mu, x^\nu\} = 0 \\ \{p^i, p^j\} = 0 \\ \{p^i, p^0\} = -\frac{p^i}{R} \\ \{x^i, p^j\} = 0 \\ \{x^i, p^0\} = \frac{x^i}{R} \\ \{x^0, p^j\} = 0 \\ \{x^0, p^0\} = -1 + \frac{x^0}{R} \end{array} \right.$$

On peut les réécrire sous la forme condensée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^\mu, x^\nu\} = 0 \\ \{p^\mu, p^\nu\} = -\frac{1}{R} (p^\mu \eta^{0\nu} - p^\nu \eta^{\mu 0}) \\ \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{R} \eta^{0\nu} x^\mu \end{array} \right.$$

où  $R$  est un paramètre qui sera identifié plus tard.

**Remarques 4.1.1** *On a :*

- 1) La première remarque à constater est que le secteur spatiale reste ici aussi identique au cas classique et on retrouvent totalement leurs formes classique si le paramètre  $R \rightarrow +\infty$ .
- 2) Contrairement à la DSR, la transformation de Fock du quadri-vecteur  $x$  ne dépend pas du quadri-vecteur  $p$ .

**Proposition 4.1.1 (L'identité de Jacobi)** *l'identité de Jacobi est satisfaite par le  $R$ -espace de phase de Minkowski.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que l'identité de Jacobi est satisfaite par l'ensemble des quadri-vecteurs fondamentaux, et cela en utilisant les propriétés des crochets de Poisson, Il y a en principe quatre identités à vérifier, les autres en découlent. Par un simple calcul, on obtient les relations souhaitées :

$$\begin{aligned} \{p_\mu, \{p_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{p_\mu, p_\nu\}\} + \{p_\nu, \{p_\rho, p_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{p_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{x_\mu, p_\nu\}\} + \{p_\nu, \{p_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{x_\nu, p_\rho\}\} + \{p_\rho, \{x_\mu, x_\nu\}\} + \{x_\nu, \{p_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \\ \{x_\mu, \{x_\nu, x_\rho\}\} + \{x_\rho, \{x_\mu, x_\nu\}\} + \{x_\nu, \{x_\rho, x_\mu\}\} &= 0 \end{aligned}$$

On conclue. ■

#### 4.1.2 La $R$ -algèbre de Lorentz

Le moment angulaire  $J$  (moment cinétique) est définie comme d'habitude.

Comme dans La DSR, en utilisant les propriétés habituelles des crochets de Poisson, on peut montrer que la transformation des quadri-vecteurs fondamentaux  $x$  et  $p$  sont modifiés comme suit :

$$\begin{aligned} \{J_{\mu\nu}, x_\rho\} &= \eta_{\nu\rho}x_\mu - \eta_{\mu\rho}x_\nu - \frac{1}{R}(\eta_{\nu 0}x_\mu - \eta_{\mu 0}x_\nu)x_\rho \\ \{J_{\mu\nu}, p_\rho\} &= \eta_{\nu\rho}p_\mu - \eta_{\mu\rho}p_\nu + \frac{1}{R}(\eta_{\nu 0}x_\mu - \eta_{\mu 0}x_\nu)p_\rho \end{aligned}$$

Mais l'algèbre de Lorentz reste inchangé :

**Proposition 4.1.2** *Les relations de commutation du tenseur  $J$  sont restées comme dans le cas classique :*

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\} = -\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \eta_{\rho\mu}J_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu}J_{\rho\mu} + \eta_{\rho\nu}J_{\sigma\mu}$$

**Démonstration.** En utilisant les équations de la définition précédente et les propriétés des crochets de poisson ainsi que les crochet  $\{J_{\mu\nu}, x_\lambda\}$  et  $\{J_{\mu\nu}, p_\lambda\}$  on obtient facilement le résultat. ■

## 4.2 les $R$ -transformations des quadri-vecteurs fondamentaux

Pour construire le  $R$ -groupe de Lorentz, on va commencer par les transformations infinitésimales des quadri-vecteurs fondamentaux.

### 4.2.1 La $R$ -transformation infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux

Comme dans le chapitre précédent, le moment cinétique  $J_{\mu\nu}$  est le générateur du  $\kappa$ -groupe de Lorentz, alors par définition on peut s'en servir pour exprimer la variation infinitésimale  $\delta f$  de n'importe quelle fonction dépendante des quadri-vecteurs fondamentaux avec une transformation appartenant à ce groupe de manière analogue à celle démontrée au chapitre précédent.

Donc nous sommes toujours en présence de six paramètres réels indépendants puisque  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ .

Dans le reste de ce chapitre aussi, on va se limiter au cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls. Cette restriction à toujours pour but de construire un groupe de transformations à un seul paramètre, chose possible du point de vue calcul.

Il est temps maintenant de passer à la recherche de la  $R$ -transformation des quadri-vecteurs fondamentaux.

**Proposition 4.2.1 ( $R$ -transformation infinitésimale)** *La  $R$ -transformation infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux dans le cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, prend la forme suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(ct) = (-x + \frac{1}{R}ctx)\delta u \\ \delta x = (-ct + \frac{1}{\kappa}x^2)\delta u \\ \delta y = \frac{1}{R}xy\delta u \\ \delta z = \frac{1}{R}xz\delta u \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p_t = -(p_x + \frac{1}{R}xp_t)\delta u \\ \delta p_x = -(p_t + \frac{1}{R}xp_x)\delta u \\ \delta p_y = -\frac{1}{R}xp_y\delta u \\ \delta p_z = -\frac{1}{R}xp_z\delta u \end{array} \right.$$

Où  $\delta u = \omega^{01} = -\omega^{10}$  Nous indiquons ici que  $x^0 = ct$  et  $c$  est une constante avec une dimension d'une vitesse.

**Démonstration.** Donnons d'abord la variation (transformation) infinitésimale des quadri-vecteurs fondamentaux dans le cadre du  $R$ -groupe de Lorentz. On commence d'abord par calculer la variation infinitésimale des quadri-vecteurs  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  et  $(p^0, p^1, p^2, p^3)$  du  $R$ -espace de phase, Ensuite à l'aide de la relation de transformation infinitésimale d'une fonction  $f$  en remplaçant  $f(x, p)$  par  $x^\rho$  et  $p^\rho$ , et après calcul et prise en considération de l'antisymétrie des paramètres du  $\kappa$ -groupe  $\omega^{\mu\nu}$ , et le fait que  $\mu$  et  $\nu$  sont des indices muets dans l'expression obtenue, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned}\delta x^\rho &= \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, x^\rho \right\} = -\omega^{\mu\rho} x_\mu + \frac{1}{R}\omega^{\mu 0} x_\mu x^\rho \\ \delta p^\rho &= \left\{ -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, p^\rho \right\} = -\omega^{\mu\rho} p_\mu - \frac{1}{R}\omega^{\mu 0} x_\mu p^\rho\end{aligned}$$

Si on explicite les équations précédentes pour les différentes valeurs de l'indice  $\rho$  en prenant en considération la limitation au cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, et en remplaçant  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  et  $p^0 = p_t = \frac{E}{c}$ ,  $p^1 = p_x$ ,  $p^2 = p_y$ ,  $p^3 = p_z$ ,  $\omega^{01} = -\omega^{10} = \delta u$ , nous aboutissons aux transformations ci dessus recherchées. ■

**Remarques 4.2.1** On a :

- 1) Comme nous le verrons plus tard, la constante  $c$  va représenter dans la limite  $R \rightarrow \infty$  la vitesse de la lumière en physique.
- 2) Toutes les variations infinitésimales dépendent du quadri-vecteur  $x$ , ce qui n'est pas le cas en relativité restreinte, ce qui est le contraire à la DSR dans laquelle les transformations dépendent du quadri-vecteur  $p$ .

## 4.2.2 La $R$ -transformation finie des quadri-vecteurs fondamentaux

A partir de ces transformations infinitésimales, on peut construire un groupe de transformations à un paramètre. Ce groupe est un sous groupe du  $R$ -groupe de Lorentz générale dépendant de six paramètres réels.

**Proposition 4.2.2** *La  $R$ -transformations des quadri-vecteurs fondamentaux  $x$  et  $p$  du  $R$ -espace de phase dans le cas où seul  $\omega^{01}$  et  $\omega^{10}$  sont non nuls, prend la forme suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \frac{1}{\alpha_u^R(x^\mu)} (ct \cosh(u) - x \sinh(u)) \\ x' = \frac{1}{\alpha_u^R(x^\mu)} (x \cosh(u) - ct \sinh(u)) \\ y' = \frac{1}{\alpha_u^R(x^\mu)} y \\ z' = \frac{1}{\alpha_u^R(x^\mu)} z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p'_t = \alpha_u^R(x^\mu) (p_t \cosh(u) - p_x \sinh(u)) \\ p'_x = \alpha_u^R(x^\mu) (p_x \cosh(u) - p_t \sinh(u)) \\ p'_y = \alpha_u^R(x^\mu) p_y \\ p'_z = \alpha_u^R(x^\mu) p_z \end{array} \right.$$

pour  $u \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_u^R$  est définie par :

$$\alpha_u^R(x^\mu) = 1 + \frac{1}{R} [ct(\cosh(u) - 1) - x \sinh(u)]$$

**Démonstration.** Donnons quelques éléments de démonstration. La procédure à suivre consiste en premier lieu à résoudre les systèmes différentiels suivants obtenu grâce aux transformations infinitésimales (proposition précédente) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(ct')}{du} = -x' + \frac{1}{R} ct' x' \\ \frac{dx'}{du} = -ct' + \frac{1}{R} x'^2 \\ \frac{dy'}{du} = \frac{1}{R} x' y' \\ \frac{dz'}{du} = \frac{1}{R} x' z' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp'_t}{du} = -p'_x - \frac{1}{R} x' p'_t \\ \frac{dp'_x}{du} = -p'_t - \frac{1}{R} x' p'_x \\ \frac{dp'_y}{du} = -\frac{1}{R} x' p'_y \\ \frac{dp'_z}{du} = -\frac{1}{R} x' p'_z \end{array} \right.$$

Les inconnues de ces systèmes d'équations sont les composantes  $ct', x', y', z', p_t, p_x, p_y$  et  $p_z$  et la variable est  $u$  qui n'est rien d'autre que le paramètre réel du  $R$ -groupe de Lorentz spécial ( car on s'est limité à un seul paramètre). Une fois qu'on a établi nos équations on résout d'abord le premier système ensuite on remplace les  $x'_\mu$  obtenue précédemment. Il suffira en suite de résoudre le deuxième système pour obtenir le résultat. ■

**Remarque 4.2.2** *Ce qui saute aussi directement ici aux yeux est la non linéarité de la nouvelle transformation, et le fait que les composantes  $y$  et  $z$  ainsi que  $p_y$  et  $p_z$  de la position et de l'impulsion qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement relatif, ne restent pas invariantes, ce qui n'est pas le cas en relativité restreinte (chapitre 2). Bien sûr, dans la limite  $R \rightarrow \infty$ , les transformations précédentes se réduisent à la transformation de Lorentz.*

**Remarque 4.2.3** *Les relations sur les coordonnées  $x$  sont les mêmes à celles obtenus par Fock et d'autres auteurs, avec d'autres méthodes, sauf que le paramètre  $R$  utilisé dans la littérature est différent de celui de la proposition précédente par un signe moins. Nous insistons pour indiquer que c'est celui de la proposition précédente qui est positif. En fait, si nous appliquons la première relation dans la transformation des coordonnées  $x$  et prenions  $t = \frac{R}{c}$ , nous verrons que  $tl = t$ , ce qui signifie que  $R$  est un invariant, interprété dans la littérature comme le rayon de la partie visible de l'univers. Toutefois, si nous utilisons la loi de transformation précédente établi dans la littérature, afin de montrer que  $R$  est un invariant, il est nécessaire de prendre  $t = -\frac{R}{c}$ .*

*Concernant la transformation de l'énergie-impulsion  $p$ , c'est la première fois que cette transformation est établie. Dans un article, l'auteur affirmait que cette transformation se transforme comme le vecteur de Lorentz habituelle. Cela signifie que la contraction quadri-dimensionnelle  $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$  n'est pas un invariant, comme indiqué dans un autre article. Cependant, si nous appliquons l'actuelle transformations des quadri-vecteurs fondamentaux données précédemment, il est facile de montrer que la contraction  $p_\mu x^\mu$  est un invariant. Cela fournit la possibilité de décrire correctement les ondes planes dans le cadre de la relativité non linéaire de Fock.*

### 4.3 Le $R$ -groupe des transformations de Lorentz

Le but de cette section est d'étudier les propriétés du groupe des  $R$ -transformations de Lorentz.

**Proposition 4.3.1** *Le  $R$ -groupe de Lorentz spécial est un sous groupe du  $R$ -groupe de Lorentz générale qu'on notera  $L^R$ , il possède les propriétés suivantes :*

a) *La composition de deux éléments de  $L^R$  est donnée par :*

$$\forall \Lambda_{u_1}, \Lambda_{u_2} \in L^R, \Lambda_{u_1} \Lambda_{u_2} = \Lambda_{u_1+u_2} \in L^R$$

b) *L'inverse d'un élément de  $L^R$  est donnée par :*

$$\forall \Lambda_u \in L^R, \Lambda_u^{-1} = \Lambda_{-u} \in L^R$$

c) L'identité de  $L^R$  est donnée par :

$$I = \Lambda_0 \in L^R$$

**Démonstration.** La démonstration se fait en considérant la composition de deux  $R$ -transformations des quadri-vecteurs fondamentaux exprimées en fonction du paramètre spécial  $u$ , ensuite on vérifiant que la composition de ces deux  $R$ -transformations conduit à une autre  $R$ -transformation avec un nouveau paramètre. Après calcul, en prenant en compte l'égalité suivante qui est facile à vérifier

$$\alpha_{u_1}^R(x^\mu)\alpha_{u_2}^R(x'^\mu) = \alpha_{u_1+u_2}^R(x^\mu)$$

On aboutit à :

- i) Il est clair que la composition de deux  $R$ -transformations de  $(x^\mu, p^\nu)$  avec les valeurs  $u_1$  et  $u_2$  du paramètre de la transformation, conduit à une  $R$ -transformation de  $(x^\mu, p^\nu)$  mais avec la valeur  $u_1 + u_2$  du paramètre, c'est à dire que la  $R$ -transformation est une loi de composition interne.
- ii) Il est clair que si  $u_1 = u$  et  $u_2 = -u$ , on tombera sur la transformation identité, ce qui veut dire que l'inversion d'une  $R$ -transformation revient à remplacer la valeur de son paramètre  $u$  par son opposé  $-u$ , c'est à dire que la  $R$ -transformation est inversible.
- iii) Il est clair que l'identité s'obtient en posant  $u = 0$  (L'identité est une  $R$ -transformation).

■

**Remarque 4.3.1** On peut ici aussi passer aisément du paramètre mathématique  $u$  au paramètre de la physique  $v$  qui est la vitesse de translation du repère  $R'$  suivant l'axe  $x$  par rapport au repère  $R$ .

**Proposition 4.3.2 (Invariant relativiste)** Les invariants relativistes associées au  $R$ -espace de phase sont donnés par :

a)  $I_x = \left(1 - \frac{ct}{R}\right)^{-2} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$

b)  $I_p = \left(1 - \frac{ct}{R}\right)^2 \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu.$

**Démonstration.** Pour construire les invariants relativistes dans ce contexte, nous remarquons que la définition de  $\alpha_u^R$  et la première relation dans la  $R$ -transformation du quadri-vecteur  $x$  permet d'écrire :

$$\alpha_u^R(x^\mu) = \left(1 - \frac{ct}{R}\right) \left(1 - \frac{ct'}{R}\right)^{-1}$$

A partir de la  $R$ -transformation du quadri-vecteur  $x$  nous pouvons montrer que

$$\eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \frac{1}{\alpha_u^R(x^\mu)^2} \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

d'où l'on déduit le premier invariant. De la même manière, avec l'utilisation de la  $R$ -transformation du quadri-vecteur  $p$ , on obtient

$$\eta_{\mu\nu}p'^\mu p'^\nu = \alpha_u^R(x^\mu)^2 \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$$

et en tenant compte de cette expression avec la valeur de  $\alpha_u^R$ , il est facile de déduire le deuxième invariant. ■

**Remarque 4.3.2** *Nous observons que si nous prenons la limite  $R \rightarrow \infty$ ,  $I_x$  et  $I_p$  se réduisent aux invariants connus de la relativité restreinte.*

## 4.4 Les variables canoniques

Les relations de la section précédente de  $I_x$  et  $I_p$  suggèrent de définir des variables canoniques comme suit:

**Définition 4.4.1 (Variables canoniques)** *Les variables canoniques associées au  $R$ -espace de phase noté  $X^\mu$  et  $P^\nu$ , exprimées en fonction des variables habituelles  $x^\mu$  et  $p^\nu$  sont données comme suit :*

$$\begin{aligned} X^\mu &= \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)^{-1} x^\mu \\ P^\nu &= \left(1 - \frac{x^0}{R}\right) p^\nu \end{aligned}$$

**Remarque 4.4.1** *Les invariants  $I_X$  et  $I_p$  sont exprimés en fonction des variables canoniques comme suit:*

$$I_x = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad \text{et} \quad I_p = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$$

Contrairement à la deuxième relation, la première est déjà connue dans la littérature. Il est intéressant d'observer qu'avec l'utilisation des propriétés des crochets de Poisson habituelles, nous pouvons reproduire à partir des crochets de poisson du  $R$ -espace de phase les relations bien connues.

**Proposition 4.4.1 (Crochets de Poisson des variables canoniques)** *Les crochets de Poisson des variables canoniques associées au  $R$ -espace de phase sont données par :*

$$\begin{aligned} \{X_\mu, X_\nu\} &= 0 \\ \{P_\mu, P_\nu\} &= 0 \\ \{X_\mu, P_\nu\} &= -\eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

**Démonstration.** Un simple remplacement dans la  $R$ -transformation nous donne le résultat. ■

Ceci signifie que  $X^\mu$  et  $P^\nu$  se transforment comme les vecteurs de Lorentz habituels. Il est facile de montrer que les variables canoniques sont inversibles.

**Proposition 4.4.2** *Les variables canoniques associées au  $R$ -espace de phase noté  $X^\mu$  et  $P^\nu$ , sont inversibles et leurs inverses sont :*

$$\begin{aligned} x^\mu &= \left(1 + \frac{x^0}{R}\right)^{-1} X^\mu \\ p_\nu &= \left(1 + \frac{x^0}{R}\right) P_\nu \end{aligned}$$

**Démonstration.** Même procédure que dans le chapitre précédent. ■

Afin de rechercher les expressions de l'énergie et l'impulsion, dérivons l'expression de l'invariant infinitésimale  $ds$ . Comme les variables canoniques obéissent aux lois de la relativité restreinte, nous avons

$$ds^2 = c^2 dT^2 - d\vec{X}^2$$

où  $cT = X^0$  et  $\vec{X}$  est le vecteur position tridimensionnelle canonique dans l'espace de coordonnées. En utilisant les relation précédente, on peut montrer que

$$ds = \frac{c}{\left(1 + \frac{ct}{R}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{C^2} \left[ \left(1 + \frac{ct}{R}\right) \vec{v} + \frac{c\vec{x}}{R} \right]^2} dt$$

où  $\vec{x}$  est le vecteur de position tridimensionnelle et  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  la vitesse. De cette expression, nous pouvons en déduire la vitesse de la lumière en imposant la condition  $ds = 0$ . Il est clair qu'elle dépend de  $t$  et  $\vec{x}$ , mais elle tend vers  $c$  quand nous prenons la limite  $R \rightarrow \infty$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des nouveaux crochets de Poisson déformés qui ont permis de reproduire la transformation de Fock des coordonnées. Nous avons ensuite trouver une nouvelle transformation des impulsions avec laquelle la contraction  $p_\mu x^\mu$  est un invariant, et donc utile pour la description des ondes planes. Comme en DSR, nous avons également établi une transformation à laquelle les nouvelles coordonnées et impulsions, appelées variables canoniques, se transforment comme des vecteurs de Lorentz habituels.

Nous nous plaçons dans la situation particulière où les référentiels  $R$  et  $R'$  ont des axes parallèles et où le référentiel  $R'$  se déplace à la vitesse  $V$  le long de l'axe  $Ox$  dans le référentiel  $R$ .

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont simultanés dans le référentiel  $R$  si ils se produisent au même moment  $t_A = t_B$ , on notera que la simultanéité perd le caractère absolu qu'on lui attribue en relativité galiléenne, i.e. les deux événements  $A$  et  $B$  peuvent ne pas être simultanés dans le référentiel  $R'$ ,  $t'_A \neq t'_B$ .

Dans la suite on pose :

$$\cosh(u) = \gamma$$

$$\sinh(u) = \beta\gamma$$

avec  $\beta = \frac{V}{c}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

## 5.1 Dilatation des temps

Considérons dans le référentiel  $R$  deux horloges  $H_A$  et  $H_B$  synchronisées, au repos sur l'axe  $Ox$  et, dans le référentiel  $R'$ , une horloge  $H'$  au repos sur l'axe  $O'x'$ .

Désignons par  $A(B)$  l'événement qui correspond au passage de  $H'$  à l'endroit occupé par  $H_A$  ( $H_B$ ). Cette situation est illustrée sur la figure ci-dessous.

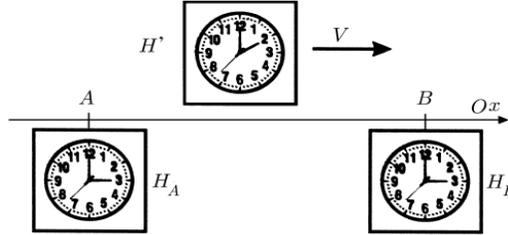


Illustration du phénomène de dilatation des temps par des horloges en mouvement relatif.

(5.1.1)

Ces événements  $A$  et  $B$  sont caractérisés par les coordonnées d'espace-temps respectives  $(t_A, x_A)$  et  $(t_B, x_B)$  dans le référentiel  $R$ , et par  $(t'_A, x'_A)$  et  $(t'_B, x'_B)$  dans le référentiel  $R'$ .

### 5.1.1 Transformation de Lorentz

Étant donné que  $H'$  est au repos dans le référentiel  $R'$ , nous avons  $x'_A = x'_B$ . En vertu des relations de la transformation inverse de Lorentz, on a alors

$$\begin{cases} ct_A = \gamma(ct'_A + \beta x'_A) \\ ct_B = \gamma(ct'_B + \beta x'_B) \end{cases}$$

En soustrayant ces relations membre à membre et en tenant compte de la condition  $x'_A = x'_B$ , on obtient

$$t_B - t_A = \gamma(t'_B - t'_A)$$

Un intervalle de temps  $T(0)$  mesuré par un observateur au repos par rapport à une horloge ( $T(0) = t'_B - t'_A$  pour l'horloge  $H'$ ) est donc lié à l'intervalle de temps correspondant  $T(V)$  mesuré dans un référentiel où cette horloge se déplace à la vitesse  $V$  constante ( $T(V) = t_B - t_A$ ) par la relation

$$T(V) = \frac{T(0)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq T(0)$$

Cette relation traduit le phénomène de dilatation des temps. On constate donc que la marche d'une horloge en mouvement est plus lente que celle d'une horloge au repos. Cependant, la modification de l'écoulement du temps est réciproque : si du point de vue du référentiel  $R$  l'horloge du référentiel  $R$  retarde, du point de vue du référentiel  $R$  c'est l'horloge du référentiel  $R$  qui retarde. C'est la preuve que le phénomène est uniquement d'origine cinématique et n'est pas lié aux propriétés des horloges qui changeraient lors de leur déplacement.

La mesure d'intervalles de temps est une procédure délicate (et source de faux paradoxes) en relativité restreinte.

### 5.1.2 $\kappa$ -transformation de Lorentz

En suivant les mêmes étapes que précédemment tout en utilisant la relation de la  $\kappa$ -transformation inverse de Lorentz, on obtient

$$t_B - t_A = \alpha'_\kappa \gamma (t'_B - t'_A)$$

Avec les mêmes définitions de  $T(0)$  et  $T(V)$  que précédemment et en tenant compte de la condition  $\vec{p}'_A = \vec{p}'_B = 0$ , on obtient

$$T(V) = \frac{T(0)}{\left(1 + \frac{1}{\kappa}(\gamma - 1)p_t\right) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq T(0)$$

On admettra que  $\left(1 + \frac{1}{\kappa}(\gamma - 1)p_t\right) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \leq 1$  (Etude de signe après avoir modifier l'expression en introduisant l'énergie). On a donc le même phénomène que précédemment. Pour retrouver la formule de la relativité restreinte, il suffit de faire tendre  $\kappa$  vers l'infini.

## 5.2 Contraction des longueurs

Soit dans le référentiel  $R$  une règle au repos dont les extrémités ont pour coordonnées  $x_A$  et  $x_B$ . Sa longueur est donc égale à  $x_B - x_A$  (on suppose  $x_B > x_A$ ). On rappelle que les graduations d'une règle peuvent être déterminées de façon non ambiguë et très précise grâce à l'utilisation de signaux lumineux (voir [11]). Pour les observateurs d'un

référentiel  $R'$ , uni au référentiel  $R$  par une transformation spéciale de Lorentz, la règle est en mouvement de translation uniforme.

Mesurer sa longueur exige donc une procédure bien définie : il faut déterminer les coordonnées des extrémités de la règle au même moment dans ce référentiel.

Soient  $A$  et  $B$  les événements correspondant à la mesure des extrémités de la règle, de coordonnées spatio-temporelles respectives  $(t'_A, x'_A)$  et  $(t'_B, x'_B)$  dans le référentiel  $R'$ . Dans ce référentiel, la longueur de la règle est égale à  $l' = x'_B - x'_A$ , si les coordonnées des extrémités sont mesurées au même moment dans le référentiel  $R'$ , ce qu'on exprime par la contrainte  $t'_A = t'_B$ .

### 5.2.1 Transformation de Lorentz

En utilisant la relation de la transformation de Lorentz inverse, on a

$$\begin{cases} x_A = \gamma(x'_A + \beta ct'_A) \\ x_B = \gamma(x'_B + \beta ct'_B) \end{cases}$$

En soustrayant ces relations membre à membre et, en tenant compte de la condition  $t'_A = t'_B$ , on obtient

$$l = x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma l'$$

La longueur  $l(V) = l'$  d'une règle mesurée par les observateurs du référentiel où cette règle est en mouvement avec une vitesse  $V$  et la longueur  $l(0) = l$  de la même règle mesurée dans le référentiel où elle est au repos sont donc unies par l'équation

$$l(V) = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} l(0) \leq l(0)$$

Cette relation traduit la contraction des longueurs. Comme dans le cas de la dilatation des temps, cet effet est réciproque : si nous considérons deux règles de même longueur propre en mouvement relatif, alors, pour chacune, l'autre sera plus courte.

Cette contraction est uniquement d'origine cinématique et ne signifie pas que les règles sont le siège de forces.

Si la règle est disposée parallèlement à l'axe  $Oy$ , par exemple, on mesure la même longueur dans les référentiels  $R$  et  $R'$ , en vertu des transformations de Lorentz. Ce

résultat est clairement différent du résultat précédent. Quand la règle est orientée perpendiculairement à la vitesse relative, les moments de mesure des positions des extrémités de la règle sont sans importance, les coordonnées  $y, z, y$  et  $z$  ne variant au cours du temps dans aucun des deux référentiels. Quand la règle est orientée parallèlement à la vitesse relative, la question de la simultanéité des mesures doit être examinée.

### 5.2.2 $\kappa$ -transformation de Lorentz

En suivant les mêmes étapes que précédemment avec les mêmes définitions de  $l$  et  $l'$ , tout en utilisant la relation de la  $\kappa$ -transformation inverse de Lorentz, on obtient

$$l = x_B - x_A = \alpha'_\kappa \gamma (x'_B - x'_A) = \alpha'_\kappa \gamma l'$$

Avec les mêmes définitions de  $l(0)$  et  $l(V)$  que précédemment et en tenant compte de la condition  $\vec{p}'_A = \vec{p}'_B = 0$ , on obtient

$$l(V) = \left( 1 + \frac{1}{\kappa} [(\gamma - 1)p'_t + \beta p'_x] \right) \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} l(0) \leq l(0)$$

En admettra que  $\left( 1 + \frac{1}{\kappa} [(\gamma - 1)p'_t + \beta p'_x] \right) \geq 1$  (Etude de signe après avoir modifier l'expression en introduisant l'énergie). On a donc le même phénomène que précédemment.

Cependant si la règle est disposée parallèlement à l'axe  $Oy$ , par exemple, on ne mesure pas la même longueur dans les référentiels  $R$  et  $R'$ . En effet en reprenant le raisonnement précédent tout en remplaçant  $x$  par  $y$ , on a

$$l = y_B - y_A = \alpha'_\kappa (x'_B - x'_A) = \alpha'_\kappa l'$$

Et donc

$$l(V) = \left( 1 + \frac{1}{\kappa} [(\gamma - 1)p'_t + \beta p'_x] \right) l(0) \geq l(0)$$

Ce résultat est clairement différent des résultats précédents. Quand la règle est orientée perpendiculairement à la vitesse relative, on se retrouve en présence d'une dilatation des longueurs. Mais, quand  $\kappa \rightarrow \infty$ , on retrouve les formules relativistes classiques.

Les moments de mesure des positions des extrémités de la règle sont sans importance, les coordonnées  $y$ ,  $z$ , et les impulsions  $p'_t$ ,  $p'_x$ , ne varient pas au cours du temps dans aucun des deux référentiels. Quand la règle est orientée parallèlement à la vitesse relative, la question de la simultanéité des mesures doit être examinée.

---

# Conclusion

Le groupe de Poincaré est omniprésent dans la relativité et la mécanique quantique, notamment dans la physique des particules, présentant un bon cadre pour leurs études. On tente donc de le généraliser pour aboutir à la grande unification qui est le défi principale des physiciens de ce siècle. Ce travail illustre quelques tentatives de sa généralisation. D'abord nous avons introduit le cadre Mathématique de notre étude, ensuite on a exposé le groupe de Poincaré principale et définie quelques notions de physique dans le cadre de notre Théorie. Par la suite on a construit des généralisations de notre groupe en donnant certaines de leurs caractéristiques. Enfin, nous avons terminé notre travail par quelques applications qui montrent la différence de nos groupes.

---

# Bibliographie

- [1] D. Bernard, Y. Laszlo, D. Renard, *Eléments de théorie des groupes et symétries quantiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2011.
- [2] A. Bouda, T. Foughali, *On the Fock Transformation in Nonlinear Relativity*, Mod. Phys. Lett. A, 27, 2012.
- [3] S. Cacciatori, V. Gorini, A. Kamenshchik, *Special Relativity in the 21<sup>st</sup> century*, Annalen der Physik, 2008.
- [4] J. Dat, *Groupes et Algèbres de Lie*, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [5] V. Démery, *Groupe de Poincaré et théorie relativiste des champs*, Université de Toulouse, 2008.
- [6] S. Ghosh, P. Pal, *Deformed special relativity and deformed symmetries in a canonical framework*, Phys.Rev.D75:105021, 2007.
- [7] N. Jafari, A. Shariati, *Doubly special relativity : a new relativity or not ?*, arXiv :gr-qc/0602075v1, 2006.
- [8] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries*, Springer, 2006.
- [9] M. Kray, *Algèbres de Lie Applications aux particules élémentaires*, Université paris-sud 11, 2008.
- [10] T. Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 2010.

- [11] C. Semay, Silvestre-Brac, *Relativité restreinte Bases et applications*, Dunod, 2005.
- [12] J. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1979.
- [13] S. Sternberg, *Group theory and physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [14] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. 1 : Foundations, Cambridge university press, Cambridge, 1995.

# Résumé

Dans le vaste champ de la physique relativiste, le groupe de Poincaré qu'on présentera au chapitre 2 occupe une place considérable. Les premiers travaux sur ce groupe sont dus au mathématicien et physicien français, Henri Poincaré. Ce groupe a été introduit pour simplifier les études de l'un des piliers de la physique moderne. En effet dès qu'on parle du changement de référentiels et de la covariance des lois de la physique, toutes les considérations cèdent leurs places à la théorie de la relativité (restreinte où générale). La théorie de la relativité restreinte d'Einstein est venue remplacer la relativité de Galilée-Newton, vu la remise en cause de cette dernière par les observations expérimentales telles que l'expérience de Morley-Michelson et aussi son incompatibilité mathématique avec les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes d'électromagnétisme.

Ainsi on a introduit la théorie qui veut régler ces problèmes, qui est la théorie de relativité doublement restreinte qu'on désigne par DSR qui est basée sur le  $\kappa$ -groupe de Lorentz qui est une extension du groupe de Lorentz qu'on verra au chapitre 3.

Le résultat le plus remarquable des théories DSR est la modification des transformations de Lorentz et la relation de dispersion énergie-impulsion  $E = mc^2$ , cependant une autre approche a vu le jour celle-ci est basée sur une autre extension : le  $R$ -groupe de Lorentz qui est la transformation de Fock qu'on verra au chapitre 4.

Ce mémoire consistera à présenter en premier lieu le groupe de Lorentz et plus généralement le groupe de Poincaré, ensuite on présentera deux extensions de ce groupe. On commencera par rappeler quelques notions sur la théorie des groupes et on présentera le groupe de Poincaré au deuxième chapitre. Ensuite nous exposerons la DSR ( $\kappa$ -algèbre). Le troisième chapitre y est dédié. Et nous présenterons la deuxième extension qui est la transformation de Fock ( $R$ -algèbre) au quatrième chapitre. Enfin, nous terminons par une application en deux parties et une conclusion.