

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

MOKRANI Wafa

THÈME

L'Analyse Multirésolution (AMR)

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	F. Bouhmila	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia	Président
Mme.	H. Béchir	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia	Promotrice
Mr.	B. Kerai	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia	Examineur

Juin 2014

Remerciements

Arrivée au terme de la rédaction de cet humble travail, il ne serait chose plus déplacée que d'omettre d'exprimer ma gratitude à celle qui en est la source.

C'est donc avec un plaisir tout particulier que j'adresse mes sincères remerciements à Mme H. Béchir, sans qui cette réalisation n'aurait été possible. Son exigence, sa persévérance et ses encouragements m'ont poussé à me surpasser en dépassant mes craintes et mes réticences. J'espère pouvoir lui rendre, à travers cet écrit, un peu de tout ce qu'elle m'a donné et me montrer à la hauteur de l'honneur qu'elle m'a fait.

Aussi ai-je eu la possibilité, à travers ce travail, de bénéficier d'une aide qui s'est montrée plus que précieuse et pour celà, je remercie Mr A. Ouahabi qui fut et est toujours disponible, à l'écoute et de très bon conseil.

Ce mémoire a été le fruit d'un travail de recherche tout au long de l'année. Son achèvement marque la fin d'un périple au sein de l'université Abderrahmane Mira, de Bejaïa. Une fin des plus significatives, puisqu'elle clôt un parcours semé d'embûches mais aussi plein de rebondissements et de souvenirs que je ne saurais effacer.

C'est ainsi, que je tiens à remercier le département des sciences exactes et l'ensemble de ses enseignants, qui ont été une seconde famille durant cette période.

Pour finir, nulle expression ne saurait décrire ma reconnaissance à ceux qui, agissant dans l'ombre, n'ont eu de cesse que de m'aider, me soutenir et me supporter jusqu'à la toute fin : à ma famille et mes amis, je réserve l'expression de ma plus tendre affection.

Dédicace

« Tout le monde veut vivre au sommet de la montagne, sans soupçonner que le vrai bonheur est dans la manière de gravir la pente. »

Gabriel Garcia Marquez

Table des matières

Introduction	1
1 Approches des traitements multirésolutions	4
1.1 Notion de signal	4
1.1.1 Qu'est ce qu'un signal	4
1.1.2 Signal électrique	5
1.2 Notion d'image	6
1.2.1 Qu'est ce qu'une image	6
1.2.2 Définition d'image	6
1.2.3 Pixel	6
1.2.4 Résolution	7
1.2.5 Analyse multirésolution	7
1.3 Analyse pyramidale	7
1.3.1 Pyramide de l'image	7
1.3.2 L'approche naïve	10
1.3.3 Représentation et discussion	11
1.4 Codage en sous-bandes	13
1.4.1 Qu'est ce qu'une bande	13
1.4.2 Notion de filtres	13
1.4.3 Filtres passe-bande	13
1.4.4 Codage en sous-bande de signaux $1D$	15
1.4.5 Passage à deux dimensions ($2D$)	16

1.5	Transformée de Haar	17
2	Vers les ondelettes	19
2.1	Leur histoire	19
2.2	La musique des mathématiques	20
2.3	De l'analyse de Fourier à l'analyse par ondelettes	21
2.3.1	De Fourier à Gabor	21
2.3.2	La transformée de Gabor	22
2.3.3	La reconstruction du signal	24
2.4	Localisation temps-fréquence : le dilemme	26
2.4.1	Principe d'incertitude temps-fréquence	27
2.5	La transformation par ondelettes	30
2.5.1	Qu'est ce qu'une ondelette	30
2.5.2	Condition d'admissibilité d'une ondelette	31
2.5.3	Exemples d'ondelettes	31
2.5.4	Transformation en ondelettes continues	32
2.5.5	Reconstruction du signal	33
2.5.6	Méthode générale du calcul d'un coefficient d'ondelette $C_{a,b}$	33
2.6	Comparaison entre la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes	34
2.7	Au delà des ondelettes	35
3	L'analyse multirésolution	37
3.1	Les bases orthonormées d'ondelettes	37
3.2	Principe de l'analyse multirésolution	39
3.2.1	Interprétation géométrique de la construction	41
3.2.2	Conséquences	42
3.3	Algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat	46
3.3.1	Cas d'une image	48
3.3.2	La reconstruction	48

4	Applications de l'analyse multirésolution	50
4.1	Analyse en vue d'extraire des informations pertinentes	50
4.2	La compression d'images	51
4.2.1	Qu'est ce que la compression	51
4.2.2	Le pourquoi	51
4.2.3	Taux de compression	52
4.2.4	Types de compression	52
4.2.5	Compression et artefacts : Standard JPEG	54
4.2.6	Evolution au format JPEG 2000	55
4.2.7	Ondelettes bi-orthogonales, fonctions d'échelle et filtres associés	57
4.2.8	Comparaison, conclusion et exemples	58
4.3	Débruitage ou réduction du bruit	60
4.3.1	Qu'est ce que le bruit	60
4.3.2	Qu'est ce que le débruitage	61
4.3.3	Méthodologie	61
4.3.4	Seuillage dans une base	62
4.3.5	Exemples	66
4.3.6	Résultats et discussion	71
4.4	Autres applications	72
4.4.1	Génie biomédical	73
4.4.2	Débruitage en imagerie médicale	73
5	L'analyse multirésolution en vision informatique	83
5.1	Description de la boîte à outils ondelettes	83
5.2	Prise en main de la boîte à outils	84
5.2.1	La commande << wavemenu >>	84
5.2.2	La commande << wavedemo >>	86
5.3	Langage de programmation	86
5.3.1	Analyse multirésolution <i>1D</i>	86
5.3.2	Analyse multirésolution <i>2D</i>	90

5.4 Conclusion	95
Conclusion	96
Bibliographie	97

Introduction

Durant les vingt dernières années, la notion de multirésolution initiée puis nourrie par le développement spectaculaire de la théorie des ondelettes, a trouvé sa place dans des domaines très variés des mathématiques appliquées : traitement du signal, équations aux dérivées partielles, statistiques, modélisation géométrique et infographie, pour ne citer que les principaux.

L'analyse multirésolution est l'un des exemples les plus flagrants de la possibilité d'interaction de différentes disciplines, du non cloisonnement (nécessaire) des sciences, et de la richesse d'innovations mathématiques et de leurs applications.

L'histoire même du développement de cette analyse est exemplaire : les balbutiements de cette analyse sont généralement attribués à un géophysicien, Jean Morlet, motivé par la détection de singularité dans des signaux sismiques, et aidé par le mathématicien Alex Grossman. Leur collaboration conduit à la transformée en ondelettes continues.

La formalisation de l'analyse a été faite, ensuite, par quelques mathématiciens jusqu'aux travaux en commun de Stéphane Mallat (motivé par des considérations pratiques en imagerie) et Yves Meyer, qui ont généralisé l'analyse en ondelettes à l'analyse multirésolution basée sur une hiérarchie d'espaces imbriqués. Ceci conduit à des algorithmes rapides réalisant la transformée discrète en ondelettes.

En proposant, en 1989, son modèle d'analyse multirésolution, Mallat apporte à la théorie des ondelettes, alors ancrée dans l'analyse fonctionnelle, un exposé clair de l'idée fondamentale de multirésolution contenue dans les bases d'ondelettes : la représentation d'une fonction sous la forme d'une approximation grossière et d'une suite de corrections

d'ampleur décroissante. Ce qui n'est autre qu'un changement de base judicieux, va ouvrir la porte à de nombreuses applications, dont les classiques sont la compression et le lissage.

Par la suite, Ingrid Daubechies généralise l'analyse multirésolution en proposant l'obtention de bancs de filtres (plus de deux filtres) de tailles finies, conduisant à des ondelettes à support compact performantes numériquement.

Le modèle d'analyse multirésolution apporte également un aspect algorithmique séduisant, qui va contribuer à faire entrer la théorie des ondelettes dans des disciplines de l'informatique et par là, naturellement, développer les applications en modélisation géométrique et plus généralement en infographie.

Les avancements des années 90 sont allés en direction de performances numériques, de l'étude et de la résolution à partir d'ondelettes des équations aux dérivées partielles.

Quelques détails, concernant l'histoire de cette épopée mathématique des années 1980–1990 se trouvent dans l'ouvrage de vulgarisation de [Bulke Hubbard 1995][4].

Cette interdisciplinarité fait que les motivations sont différentes : on exploitera telle propriété des ondelettes et des analyses multirésolutions en fonction de l'utilisation qu'on en fait. Certains utilisent les ondelettes pour leur régularité, d'autres pour leur simplicité et leur rapidité de calcul. Certains utilisent les ondelettes comme une nouvelle méthode spectrale pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) [Goedecker 1998] dans un but d'homogénéisation [Dumont 1996] [Brewster and Beyklin 1995] [Beyklin et al. 1998], d'analyse et de modélisation de phénomènes [Farge et al. 1999]. [13][11][3][2][12].

Au final, nous serions bien tentés de nous demander pourquoi cet engouement. Et bien, la réponse est que ces analyses prolongent l'analyse de Fourier dans une direction intéressante, qui est l'introduction de l'information sur la localisation spatiale des fluctuations d'un signal.

Notre travail s'articulera autour de cinq parties.

La première a essentiellement pour objectif d'introduire et de définir les locutions en relation avec l'analyse multirésolution ; ainsi le lecteur pourra se familiariser avec ce nouvel outil mathématique. Dans la deuxième partie nous évoquerons la transformée de

Fourier et illustrerons les limitations de celle-ci, ce qui justifiera l'introduction de certains nouveaux développements permettant d'y pallier.

Nous passerons, par la suite, à la pierre angulaire de notre travail, qui se trouve être l'analyse multirésolution. À cet effet, le troisième chapitre sera axé sur le principe de cette analyse. Cela nous amènera à la présentation des applications de celle-ci. Nous clôturerons cet écrit, en explorant l'analyse multirésolution, sous un angle de vision informatique.

Approches des traitements multirésolutions

" Dans ce chapitre, nous nous proposons de définir quelques locutions dont nous ferons un continuel usage."

1.1 Notion de signal

1.1.1 Qu'est ce qu'un signal

Un signal est un message codé de façon à pouvoir être communiqué à distance. Les signaux à traiter peuvent provenir de sources très diverses, mais la plupart sont des signaux électriques ou devenus électriques à l'aide de capteurs et transducteurs.

Remarque 1.1.1 *Un **transducteur** est un dispositif convertissant un signal physique en un autre ; par exemple un signal lumineux en signal nerveux (vision animale) ou signal électrique (photorécepteur).*

1.1.2 Signal électrique

Un signal électrique est une grandeur électrique, dont la variation dans le temps transporte une information, d'une source vers une destination.

La grandeur électrique, que l'on considère pour la transmission et le traitement du signal, peut être une modulation de l'amplitude, de la fréquence ou de la phase d'une variation périodique de ces grandeurs, qu'on appelle porteuse.

Remarque 1.1.2 *Une onde porteuse, ou, **porteuse**, est une forme d'onde (généralement sinusoïdale) qui est modulée par un signal d'entrée dans le but de transporter des informations. La porteuse a généralement une fréquence beaucoup plus élevée que le signal d'entrée.*

Amplitude

L'amplitude est la coordonnée d'un nombre positif caractérisant l'ampleur des variations d'une grandeur. Le plus souvent, il s'agit de l'écart maximal par rapport à la valeur médiane. Cette définition diffère du langage courant, dans lequel l'amplitude désigne l'écart entre les valeurs extrêmes d'une grandeur.

Fréquence

En physique, la fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de mesure du temps.

Lorsque le phénomène peut être décrit, mathématiquement, par une fonction périodique du temps (de période T , par exemple), la fréquence est l'inverse de la période.

$$f = \frac{1}{T}$$

Phase

La phase indique la situation instantanée dans le cycle, d'une grandeur qui varie cycliquement.

Elle peut aussi être vue comme un angle en radian, entre la partie imaginaire (Im) et la partie réelle (Re). C'est-à-dire le module de l'onde. Elle est donc calculée par :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

1.2 Notion d'image

1.2.1 Qu'est ce qu'une image

Une image est une représentation visuelle, voire mentale, de quelque chose (objet, être vivant et/ou concept). Elle peut être naturelle (ombre, reflet) ou artificielle (peinture, photographie), visuelle ou non, tangible ou conceptuelle (métaphore).

Elle est composée d'une matrice (tableau) de points à plusieurs dimensions, chacune représentant une dimension spatiale (hauteur, largeur, profondeur), temporelle (durée) ou autre (un niveau de résolution).

Remarque 1.2.1 *Dans le cas d'une image à deux dimensions (le plus courant), les points sont appelés **pixels**.*

D'un point de vue mathématique, l'image est considérée comme une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , où le couple d'entrée symbolise une position spatiale et le singleton de sortie, un codage.

1.2.2 Définition d'image

Une image est définie par le nombre de points la composant. En image numérique, cela correspond au nombre de pixels qui composent l'image en hauteur (axe vertical) et en largeur (axe horizontal) : 200 pixels par 450 pixels par exemple, sera abrégé en «200 × 450».

1.2.3 Pixel

Une image est constituée d'un ensemble de points appelés pixels. Le mot pixel provient d'une abréviation de l'expression britannique PICTure ELement. Le pixel représente ainsi

le plus petit élément constitutif d'une image numérique. L'ensemble de ces pixels est contenu dans un tableau à deux dimensions constituant l'image finalement obtenue.

1.2.4 Résolution

La résolution d'une image est définie par le nombre de pixels par unité de longueur. Elle définit le degré de détail de l'image. Ainsi, plus la résolution est élevée, meilleure est la restitution.

Cependant, pour une même dimension d'image, plus la résolution est élevée, plus le nombre de pixels composant l'image est grand. Le nombre de pixels est proportionnel au carré de la résolution, étant donné le caractère bidimensionnel de l'image : si la résolution est multipliée par deux, le nombre de pixels est multiplié par quatre.

1.2.5 Analyse multirésolution

L'analyse multirésolution permet d'avoir à la fois une bonne résolution temporelle en hautes fréquences et une bonne résolution fréquentielle en basses fréquences. Elle peut être interprétée comme la vision d'une même image successivement avec un microscope, une loupe ou un oeil humain qui s'éloigneraient de plus en plus.

1.3 Analyse pyramidale

1.3.1 Pyramide de l'image

Une structure puissante, pourtant conceptuellement simple, pour représenter des images à plus d'une résolution est la pyramide d'image [Burt et Adelson 1983][5]. Conçue, à l'origine, pour la vision de la machine et les applications de compression d'image, une pyramide d'images est un ensemble d'images de résolution décroissante disposées sous forme d'une pyramide.

La figure ci-dessous est une illustration d'une structure pyramidale. La base de la pyramide contient l'image pleine résolution et les niveaux successifs contiennent les images

des résolutions de plus en plus basses. L'image à chaque niveau est obtenue en calculant, pour chaque position de pixel, la somme pondérée des pixels situés juste en dessous.

Le niveau de la base J , de la pyramide, est de taille $2^J \times 2^J$ ou $N \times N$, où $J = \log_2 N$, le niveau du sommet 0 est de taille 1×1 , et le niveau général j et de taille $2^j \times 2^j$, où $0 \leq j \leq J$.

Bien que la pyramide illustrée ci-dessous ne soit composée que de $J + 1$ niveaux de $2^j \times 2^j$ à $2^0 \times 2^0$, la majeure partie des pyramides d'images sont tronquées en $P + 1$ niveaux, où $1 \leq P \leq J$ et $j = J - P, \dots, J - 2, J - 1, J$.

Cela dit, nous nous limitons, normalement, à P approximations de résolution réduite de l'image d'origine.

Le nombre total de pixel dans une pyramide à $P + 1$ niveaux pour $P > 0$ est de

$$N^2 \left(1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3} N^2$$

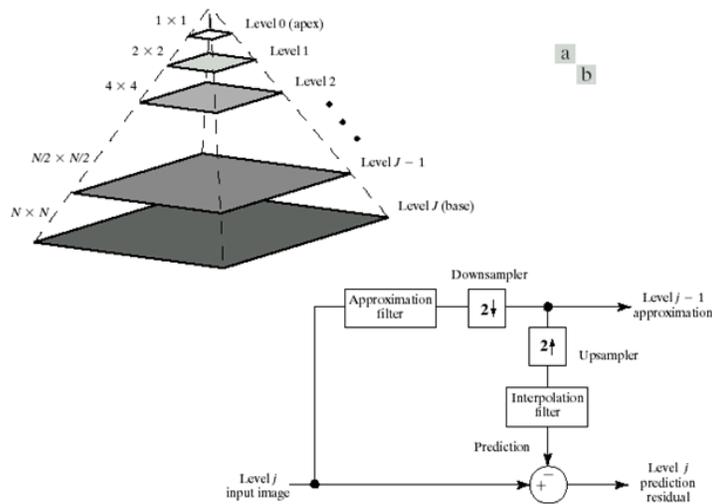


Figure 1 : (a) Pyramide d'image. (b) Diagramme pour en créer

La figure 1 (b) montre un système simple pour la construction de deux pyramides d'images, étroitement liées.

L'approximation de sortie, du niveau $j - 1$, fournit les images nécessaires à la construction d'une pyramide d'approximation. Le résidu de prédiction de sortie du niveau j , quant à lui, est utilisé afin de construire une pyramide résiduelle complémentaire.

Contrairement aux pyramides d'approximation, les pyramides résiduelles ne contiennent qu'une approximation, de résolution réduite, de l'image d'entrée (en haut de la pyramide, niveau $J - P$). Tous les autres niveaux contiennent des résidus de prédiction.

Au niveau j ($J - P + 1 \leq j \leq J$), le résidu de prédiction est défini comme étant la différence entre l'approximation ce niveau (l'entrée dans le diagramme de blocs) et son estimation basée sur l'approximation au niveau $j - 1$ (l'approximation de sortie dans le diagramme de blocs) (cf. Fig. 1 (b)).

Remarque 1.3.1 *La pyramide résiduelle est appelée **pyramide Laplacienne**. Celle d'approximation est appelée **Gaussienne**, car le filtre appliqué pour sa construction est Gaussien.*

Dans le cadre de notre étude, nous ne considérons que la pyramide d'approximation.

Blocs de downsampling et upsampling

Notons que ces blocs (représentés en figure 1 (b)) sont utilisés afin de, respectivement, doubler et diviser par 2 les dimensions des images d'approximation et de prédiction.

Étant donné un entier n et une séquence d'échantillons à une dimension $f(n)$, la séquence interpolée $f_{2\uparrow}(n)$ est définie de la manière suivante :

$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme nous pouvons le constater le upsampling est fait par un facteur 2. L'opération complémentaire consistant en la décimation par 2 (downsampling) est définie par :

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$

Le upsampling peut être décrit comme l'insertion d'un 0 après chaque échantillon d'une séquence ; le downsampling peut être vue comme le fait de rejeter chacun des autre échantillons.

Les blocs de downsampling et de upsampling en figure 1 (b), qui sont respectivement représentés par $2 \downarrow$ et $2 \uparrow$, indiquent que les lignes et les colonnes, de la variable d'entrée à 2-D, sur laquelle ils opèrent doivent être décimées et interpolées.

Algorithme de construction

La figure 1(b) suggère que la pyramide résiduelle ainsi que celle d'approximation sont calculées de façon itérative. Avant la première itération, l'image à représenter est placée au niveau J de la pyramide.

La procédure à trois étapes suivante est, ensuite, exécutée P fois, pour j allant de J à $J - P + 1$ (dans l'ordre).

1. **Étape 1.** Calculer une approximation, à résolution réduite, de l'image d'entrée du niveau j [l'entrée (input) à gauche du diagramme de blocs en figure 1(b)]. Ceci est fait en filtrant puis décimant le résultat par un facteur 2 (downsampling).

Placer l'approximation résultante au niveau $j - 1$ de la pyramide d'approximation.

2. **Étape 2.** Créer une estimation de l'image d'entrée du niveau j à partir de l'approximation à résolution réduite générée à l'étape 1. Cela est fait par filtrage et upsampling de l'approximation générée. L'image de prédiction résultante aura les mêmes dimensions que l'image d'entrée du niveau j .
3. **Étape 3.** Calculer la différence entre l'image de prédiction de l'étape 2 et celle d'entrée à l'étape 1. Placer ce résultat au niveau j de la pyramide résiduelle.

À la fin de ces P itérations, l'approximation de sortie, du niveau $J - P$, est placée dans la pyramide résiduelle, au niveau $J - P$.

Si une pyramide résiduelle n'est pas nécessaire, cette opération ainsi que les étapes 2 et 3 et le filtre d'interpolation de la figure 1 (b) peuvent être enlevés.

1.3.2 L'approche naïve

Pour constituer une pyramide de sous-échantillons à partir d'une image, l'idée la plus simple que nous puissions tester est de prendre pour chaque " pixel " du niveau $j - 1$ la moyenne des pixels du niveau j dans le voisinage couvert par notre pixel. Ainsi si au niveau $j - 1$, chaque pixel couvre un carré de taille $m \times m$ pixels de l'image au niveau j , alors les pixels du niveau $j - 1$ sont la moyenne de $m \times m$ pixels.

L'effet obtenu est un sous-échantillonnage de l'image initiale, en revanche, les effets d'aliasing (*effet de contraste*) sont présents et par conséquent pénalisant (cf. Fig. 2).

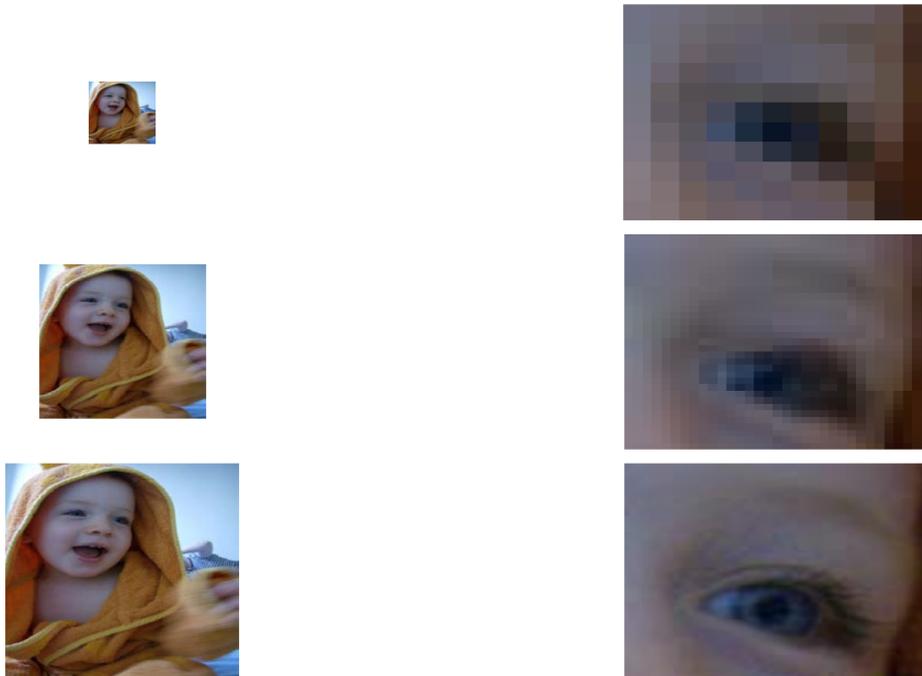


Figure 2 : Deux niveaux de sous-échantillonnage naïf 3x3 et zooms sur l'oeil gauche

1.3.3 Représentation et discussion

La figure suivante montre les pyramides résiduelle et d'approximation de l'image représentant un vase. Un filtre passe-bas (voir section 3) est utilisé pour produire une pyramide d'approximation à quatre niveaux (cf. Fig. 3(a)).

Comme nous pouvons le voir, la pyramide résultante contient l'image originale de résolution 512×512 (à sa base) ainsi que les trois approximations de basse résolution (256×256 , 128×128 et 64×64).

Notons la réduction de détails qui accompagne les basses résolutions de la pyramide.

Remarque 1.3.2 *Une telle stratégie d'analyse grossier à fin est particulièrement utile à la reconnaissance de formes.*

En l'absence d'erreurs de quantification, la pyramide résiduelle résultante peut être utilisée pour générer la pyramide d'approximation complémentaire (cf. Fig. 3 (a)), incluant l'image originale, sans erreurs.

Pour ce faire, nous commençons par l'image d'approximation du niveau 64×64 . Il faut ensuite prédire l'approximation du niveau de résolution 128×128 (en interpolant et filtrant), puis ajouter le résidu de prédiction de ce niveau.

Ce procédé est répété en utilisant des images d'approximation, successivement calculées, jusqu'à ce que l'image originale (de résolution 512×512) soit générée.

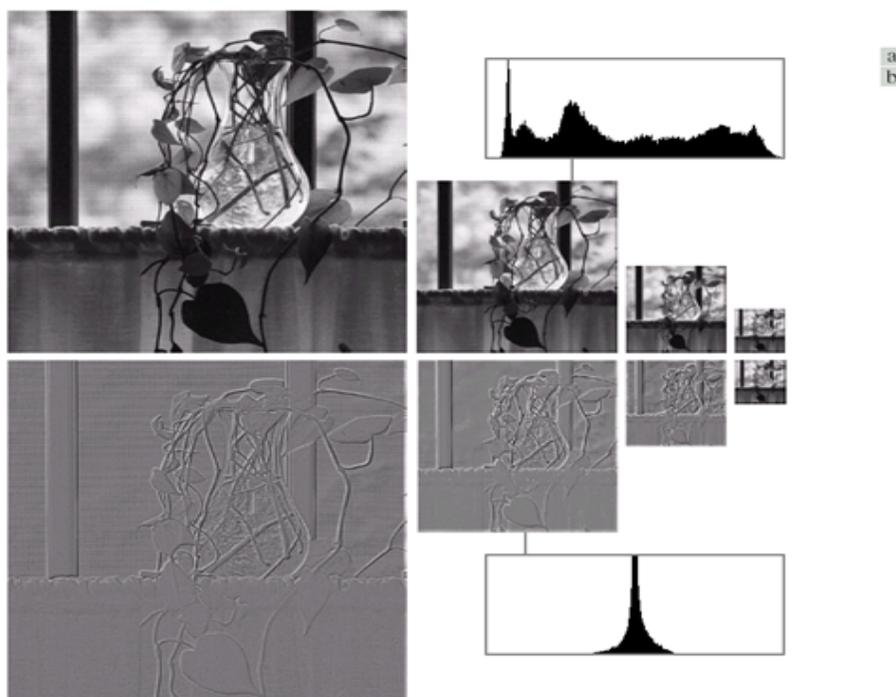


Figure 3 : Deux pyramides d'images et leurs histogrammes

(a) : Pyramide d'approximation. (b) : Pyramide résiduelle

Remarquons que l'histogramme résiduel (cf. Fig. 3(b)) est fortement concentré autour de zéro et atteint sa valeur maximale. Contrairement aux images d'approximation, les images résiduelles peuvent être hautement compressées. Finalement, notons que les résidus de prédiction sont échelonnés de façon à rendre plus visibles les petites erreurs de prédiction ; cependant, l'histogramme résiduel est basé sur les valeurs originales des résidus.

1.4 Codage en sous-bandes

Une autre technique d'imagerie importantes ayant des liens avec l'analyse multirésolution est le codage en sous-bandes. Dans le codage en sous-bandes, une image est décomposée en un ensemble d'éléments à bande limitée appelés sous-bandes. la décomposition est effectuée de sorte que les sous-bandes puissent être réassemblées pour reconstruire l'image originale sans erreurs.

La décomposition et la reconstruction sont effectuées au moyen de filtres numériques.

1.4.1 Qu'est ce qu'une bande

La bande passante (angl. bandwidth) est un intervalle de fréquences pour lesquelles l'amplitude de la réponse d'un système correspond à un niveau de référence.

1.4.2 Notion de filtres

Le terme *filtre* désigne à la fois un système physique ayant des propriétés particulières, et sa modélisation mathématique définie par la donnée suivante :

- Deux espaces vectoriels X et Y de signaux d'entrée et de sortie, munis chacun d'une notion de convergence ;
- Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ qui soit continu et invariant par translation.

En d'autres termes, un filtre est un système linéaire, continu et invariant.

Définition 1.4.1 *La fréquence de coupure est la fréquence limite du fonctionnement.*

1.4.3 Filtres passe-bande

Il est courant de définir un filtre par la façon dont il modifie les fréquences du signal d'entrée, c'est à dire par sa fonction de transfert $H(\lambda)$ puisque les fréquences de l'entrée f et de la sortie g sont liées par :

$$\hat{g}(\lambda) = H(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Ces filtres sont alors, regroupés en deux types : les passe-bas et passe-haut.

Filtres passe-bas

Le filtre passe-bas est celui qui ne modifie pas les fréquences λ telles que $|\lambda| < \lambda_c$ (λ_c est la fréquence de coupure) et supprime les autres, d'où :

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| < \lambda_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Figure 4 : Image sur laquelle a été appliquée un filtre passe-bas, résultat à droite.

Filtres passe-haut

Un filtre passe-haut est un filtre qui ne laisse passer que les fréquences supérieures à la fréquence de coupure. Il pourrait également être appelé filtre coupe-bas. Il est l'inverse du filtre passe-bas, aussi appelé filtre complémentaire. On le définit ainsi :

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| > \lambda_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Figure 5 : Image sur laquelle a été appliquée un filtre passe-haut, résultat à droite.

1.4.4 Codage en sous-bande de signaux 1D

Considérons le schéma du codage-décodage en deux sous-bandes, illustré dans la figure suivante.

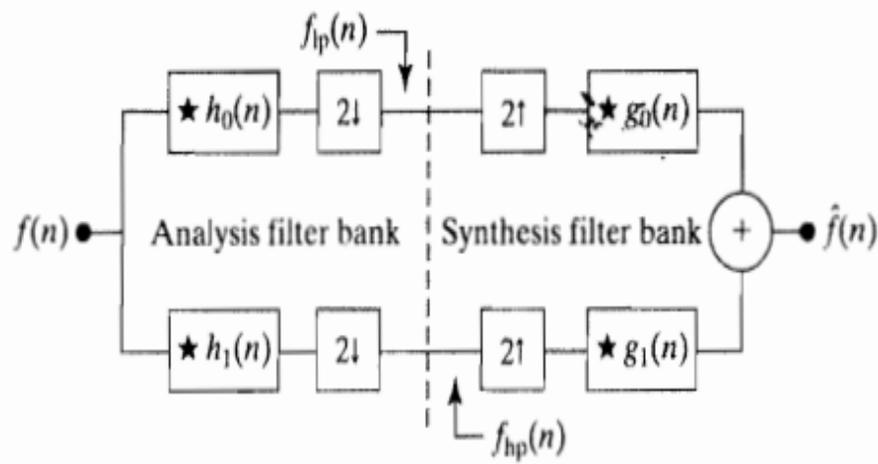


Figure 6 : Système de codage-décodage en deux sous-bandes

Comme indiqué sur ci-dessus, le système se compose de deux bancs de filtres (*plus de deux filtres*), chacun contenant deux filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF). Notons

que chacun des quatre filtres RIF y est représenté comme un seul bloc, avec la réponse impulsionnelle de chaque filtre (et le symbole de convolution) écrits à l'intérieur. Le banc de filtres d'analyse, qui comprend les filtres $h_0(n)$ et $h_1(n)$, est utilisé pour rompre la séquence d'entrée (signal) $f(n)$ en deux séquences de demi-longueur $f_{lp}(n)$ and $f_{hp}(n)$, qui représentent les sous-bandes de l'entrée. Les filtres $f_{lp}(n)$ et $f_{hp}(n)$, dont les caractéristique de transfert sont H_0 et H_1 , sont respectivement, un filtre passe-bas dont la sous-bande de sortie est $f_{lp}(n)$ et un filtre passe-haut dont la sous-bande de sortie est $f_{hp}(n)$.

Les bancs de filtres de synthèse $g_0(n)$ et $g_1(n)$ combinent $f_{lp}(n)$ et $f_{hp}(n)$ afin de produire $\hat{f}(n)$.

La transformée en n du signal reconstruit \hat{f} s'écrit :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2} [h_0(n)g_0(n) + h_1(n)g_1(n)] f(n) + \frac{1}{2} [h_0(-n)g_0(n) + h_1(-n)g_1(n)] f(-n)$$

Lorsque les quatre filtres sont choisis tels que l'on ait

$$\begin{aligned} g_0(n) &= h_1(-n) \\ g_1(n) &= -h_0(-n) \end{aligned}$$

le signal de sortie \hat{f} est égal au signal d'entrée f , nous disons alors que c'est un banc de filtres à reconstruction parfaite.

1.4.5 Passage à deux dimensions (2D)

Avant de conclure cette section avec l'exemple de codage en sous-bandes à deux dimension, remarquons que les filtres à une dimension peuvent être utilisés comme filtres 2D séparables, pour les besoins du traitement d'images.

Les filtres sont appliqués, dans un premier temps, en une dimension (par exemple, verticalement), puis en une autre (horizontalement).

De plus, la décimation est exécutée à deux niveaux – une fois, avant la seconde opération de filtrage, pour réduire the nombre total de calculs. Les sorties filtrées résultantes, notées $a(m, n)$, $d^V(m, n)$, $d^H(m, n)$ et $d^D(m, n)$ (cf. Fig. 7) sont respectivement appelées sous-bande d'*approximation*, de *détail vertical*, *horizontal* et *diagonal* de l'image d'entrée.

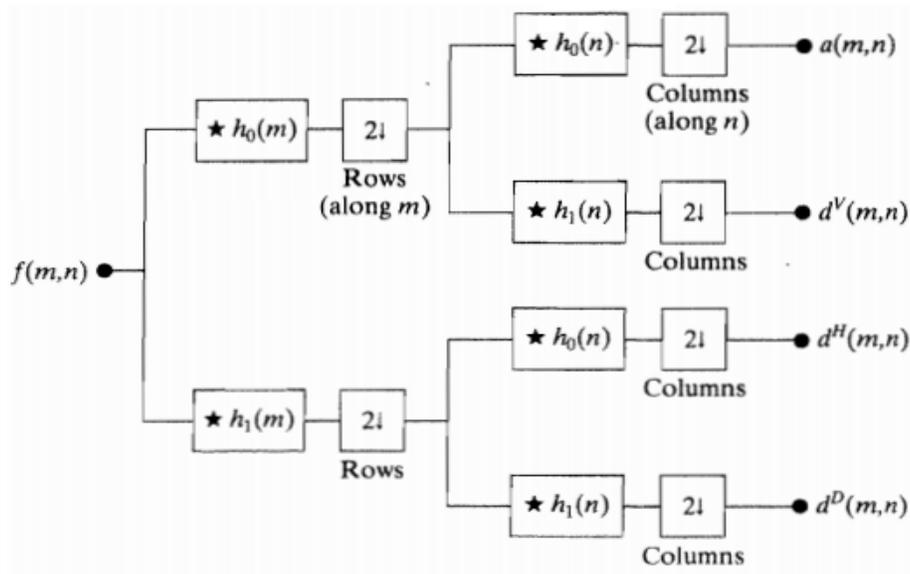


Figure 7 : Codage en sous-bandes à 2 dimensions

1.5 Transformée de Haar

La troisième et dernière opération liée à l'imagerie, ayant des liens avec l'analyse multi-résolution, que nous allons examiner est la transformée de Haar. Son importance réside dans le fait que ses fonctions de base (définies ci-dessous) sont les plus anciens et les plus simples ondelettes orthonormales connues.

La transformée de Haar peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$T = HFH^t$$

où F est une matrice d'image ($N \times N$), H est la matrice de transformation de Haar ($N \times N$), et T est la transformée résultante ($N \times N$). La transposée est requise car la matrice H n'est pas symétrique.

Pour la transformée de Haar, H contient les fonctions de base de Haar, h_k , qui sont définies sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, où $N = 2^n$.

Afin de générer H , nous définissons l'entier k de sorte que :

$$k = 2^p + q - 1$$

où $0 \leq p \leq n - 1$.

$$\text{avec } \begin{cases} q = 0 \text{ ou } 1 & \text{pour } p = 0 \\ 1 \leq q \leq 2^p & \text{pour } p \neq 0 \end{cases}$$

et les fonctions de base de Haar sont

$$h_0(x) = h_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad x \in [0, 1] \quad (1.5.1)$$

et

$$h_k(x) = h_{pq}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{\frac{p}{2}} & \text{si } (q - 1)/2^p \leq x < (q - 0.5)/2^p \\ -2^{\frac{p}{2}} & \text{si } (q - 0.5)/2^p \leq x < q/2^p \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} \quad (1.5.2)$$

La i^{eme} ligne d'une matrice de la transformée de Haar ($N \times N$) contient les éléments de $h_i(x)$ pour $x = \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$.

Exemple 1.5.1 Si $N = 2$, la première ligne de la matrice de Haar, notée H_2 , est calculée en utilisant : $h_0(x)$ avec $x = \frac{0}{2}, \frac{1}{2}$.

De l'équation (1.3.1), $h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, indépendamment de x (i.e : $\forall x \in [0, 1]$), et donc, la première ligne de H_2 a deux éléments identiques égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La deuxième ligne, est obtenue en calculant $h_1(x)$ pour $x = \frac{0}{2}, \frac{1}{2}$.

Puisque $k = 2^p + q - 1$, lorsque $k = 1$, nous avons $p = 0$ et $q = 1$. Ainsi, de l'équation (1.3.2), $h_0(0) = \frac{2^0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $h_0(\frac{1}{2}) = -\frac{2^0}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, et la matrice de Haar est :

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'intérêt principal de cette transformée de Haar est que les lignes de la matrice H_2 puissent être utilisées afin de définir les filtres $h_0(n)$ et $h_1(n)$ d'un banc de filtres à reconstruction parfaite.

"Dans cette partie , nous introduisons la théorie des ondelettes afin de donner une vision nette et concise de cette dernière avant de passer à l'essentiel de ce travail."

2.1 Leur histoire

En 1909, Alfréd Haar définit une fonction composée d'une courte impulsion négative, suivie d'une courte impulsion positive reconnue plus tard, comme étant la première ondelette (Ondelette de Haar). Cependant n'étant pas continûment dérivables, leur champ d'applications s'en trouva très limité. En 1946, Denis Gabor, mathématicien hongrois, invente une transformation de fonction analogue à celle de Joseph Fourier, appliquée à une fenêtre temporelle exprimée par une fonction gaussienne.

L'histoire des ondelettes commence à la fin des années 1970. Leur découverte est due à un ingénieur d'Elf-Aquitaine, Jean Morlet, alors à la recherche de nouvelles manières d'analyser des signaux issus de relevés sismiques en prospection pétrolière. D'une efficacité redoutable mais extrêmement complexe, l'analyse par ondelettes effraie les dirigeants d'Elf-Aquitaine qui craignent, alors, une escroquerie semblable à celle des « avions renifleurs » sensés détecter le pétrole fossile. Invité à prendre une retraite anticipée, Jean Morlet retourne à son laboratoire d'origine de l'Ecole polytechnique de Palaiseau. Là, il s'allie à Alex Grossmann, physicien théoricien de Marseille. Les deux chercheurs se lancent alors dans l'étude de ces étranges objets mathématiques.

Ils introduisent, finalement, le terme d'ondelette dans le langage mathématique en 1984.

Yves Meyer, reconnu comme un des fondateurs de la théorie des ondelettes, rassemble, en 1986, toutes les découvertes précédentes (il en dénombra 16) puis définit les ondelettes orthogonales. La même année, Stéphane Mallat fait le lien entre les ondelettes et l'analyse multirésolution. Enfin, Ingrid Daubechies met au point, en 1987, des ondelettes orthogonales appelées ondelettes de Daubechies.

A la croisée de différents domaines des sciences, l'ondelette a accompagné et particulièrement bien symbolisé la profonde évolution des sciences mathématiques induite par l'introduction de l'outil informatique. Tout un éventail d'informations peut être transposé en ce nouveau langage (une voix, des empreintes digitales, des radiographies médicales, des ondes sismiques, des émissions provenant de l'espace). Souvent, cette transformation en ondelettes réduit le temps de calcul, facilite l'analyse, la transmission et la compression de l'information, ou son extraction du « bruit » environnant.

2.2 La musique des mathématiques

Qu'est ce qu'une ondelette ? En schématisant à l'extrême, nous dirions qu'une ondelette est l'idéalisation mathématique d'une note de musique.

De même que nous représentons une oeuvre musicale sous forme de séries de notes portées sur une partition, nous pouvons songer à utiliser des notes mathématiques pour représenter certains objets mathématiques, tels que des fonctions ou des signaux.

Tout comme une note de musique est un morceau de son, apparaissant à un instant donné, d'une durée et d'une hauteur données, une note mathématique est un objet auquel nous associons des caractéristiques physiques telles que leur localisation dans le temps, leur durée et leur hauteur.

Ces notes mathématiques sont à comparer aux sinusoides sur lesquelles repose l'analyse de Fourier usuelle (ou analyse spectrale). Dans un certain sens, une sinusoides est une note totalement idéalisée, associée à une fréquence, mais à laquelle, nous ne saurions affecter

de notion temporelle précise (instant de départ, durée). Une sinusoïde n'a ni début, ni fin.

Certains chercheurs ont pensé que les ondelettes pourraient supplanter l'analyse de Fourier, un important outil mathématique, vieux de presque deux siècles. Maintenant, nous constatons que les deux langages se complètent.

2.3 De l'analyse de Fourier à l'analyse par ondelettes

2.3.1 De Fourier à Gabor

Un outils indispensable : La transformée de Fourier

Définition 2.3.1 *L'analyse harmonique étudie la représentation des fonctions ou des signaux comme superposition d'ondes de base. Elle approfondit et généralise les notions de série de Fourier et de transformée de Fourier. Les ondes de base s'appellent les harmoniques, d'où le nom de la discipline.*

Supposons que l'on souhaite analyser le contenu fréquentiel d'un morceau de musique. Il peut être modélisé par une fonction f telle que $f(t)$ représente la pression de l'air sur notre tympan au temps t .

- Si la mélodie n'est composée que d'une seule note, la fonction f sera périodique et les séries de Fourier constituent l'outil idéal pour l'analyser. Soit f périodique de période T , de carré intégrable sur sa période, les coefficients de Fourier se calculent comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \int_0^T f(t) \exp\left(\frac{-2\pi i n t}{T}\right) dt \quad (2.3.1)$$

et nous aurons, au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$f = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(\frac{-2\pi i n \cdot}{T}\right) \quad (2.3.2)$$

La formule (2.3.1) est appelée analyse du signal f car ses coefficients permettent d'analyser le contenu « harmonique » de f .

La formule (2.3.2) donne une décomposition de f comme série de modes harmoniques $\exp\left(\frac{-2\pi in \cdot}{T}\right)$ de fréquence $\omega_n = \frac{n}{T}$. Elle est appelée *synthèse* du signal car elle permet de reconstituer le signal f à partir de ses modes harmoniques.

- Si la mélodie n'est pas périodique, une approche possible consiste à calculer la *transformée de Fourier continue* \hat{f} de f

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi i \omega t) dt \quad (2.3.3)$$

À nouveau, le signal peut être reconstitué à partir de sa transformation de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(2\pi i \omega t) d\omega \quad (2.3.4)$$

Or, cette méthode n'est pas naturelle et est loin d'être pratique : pour calculer \hat{f} , nous devons intégrer f sur « tout le temps » et donc $\hat{f}(\omega)$ contient l'amplitude totale de la fréquence ω dans le morceau complet plutôt que la distribution des harmoniques dans chacune des notes individuelles. Nous devons, donc, attendre la fin de la chanson pour calculer \hat{f} et le résultat n'est plus intéressant du point de vue musical!

Une méthode plus naturelle s'inspirerait de notre expérience auditive. En effet, notre oreille perçoit des changements de tonalités continus ou abruptes et cela sans aucune partition du signal, et donc, notre modèle doit donner des informations sur la fonction f *simultanément* en temps et en fréquence.

2.3.2 La transformée de Gabor

Nous débutons cette analyse par une description de la transformée de Gabor (aussi appelée transformation de Fourier à court terme ou à fenêtre glissante) et de sa transformation inverse.

L'idée de base est donc d'introduire, dans l'analyse de Fourier usuelle, une notion de localité spatiale (ou temporelle), en remplaçant la fonction analysée par un produit de celle-ci par une fenêtre convenablement choisie au préalable, possédant de bonnes

propriétés de localisation, puis en calculant la transformée de Fourier du produit ainsi formé. Nous renouvelons alors l'opération avec des copies translatées de la fenêtre, ce qui conduit à une analyse locale en tous points.

Le pourquoi et le comment

Nous allons, de ce fait, modéliser la situation par une fonction \tilde{f} de deux variables : pour chaque valeur fixée t_0 , $\tilde{f}(\omega, t_0)$ représentera la distribution de la fréquence ω au temps $t = t_0$. Puisque l'oreille ne peut analyser ce qu'elle n'a pas encore entendu, seules les valeurs $f(t)$ pour $t \leq t_0$ peuvent entrer en ligne de compte dans le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$.

Il est aussi raisonnable de supposer que notre oreille possède une mémoire limitée dans le temps, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle de temps de longueur T tel que seules les valeurs $f(t)$ pour $t \geq t_0 - T$ influencent le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$. Enfin, nous pouvons nous attendre à ce que les valeurs $f(t)$ pour t proche des extrémités de l'intervalle $[t_0 - T, t_0]$ influencent moins le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$ que celles pour t contenu « au centre » de cet intervalle.

Mathématiquement, nous allons considérer une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dépendant du temps, telle que $g(t) = 0$ si $t \notin [-T, 0]$, c'est-à-dire : $\text{supp } g \subset [-T, 0]$. Cette fonction g sera appelée la fenêtre de l'analyse : nous allons « regarder le signal f à travers cette fenêtre g ». On définit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_t(u) = \bar{g}(u - t)f(u)$$

où $\bar{g}(u - t)$ représente le conjugué du nombre complexe $g(u - t)$. On peut voir f_t comme une version locale de f , qui dépend uniquement des valeurs $f(t)$ pour $t \in [t_0 - T, t_0]$. Si la fonction g est supposée continue, alors les valeurs $f_t(u)$ seront petites pour u proche de $t_0 - T$ et de t_0 (cf. Fig. 8, 9, 10).

La transformée de Fourier à fenêtre de f est alors définie comme la transformée de Fourier de f_t :

$$\tilde{f}(\omega, t) = \tilde{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\bar{g}(u - t) \exp(-2\pi i \omega u) du \quad (2.3.5)$$

Si nous définissons les fonctions $g_{\omega t}$ par : $g_{\omega t}(u) = g(u - t) \exp(2\pi i \omega u)$, (2.3.5) donne alors :

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle g_{\omega t} | f \rangle \quad (2.3.6)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Les fonctions $g_{\omega t}$ peuvent être considérées comme des « notes » qui oscillent à la fréquence ω dans une enveloppe définie par $|g(\cdot - t)|$. Elles sont aussi appelées ondelettes de Gabor ou gaborettes.

2.3.3 La reconstruction du signal

La finalité de cette étape est d'établir le substitut de la transformation de Fourier inverse afin de reconstruire le signal f à partir de sa transformation de Fourier à fenêtre \tilde{f} .

En appliquant la transformation de Fourier inverse à (2.3.5) par rapport à la variable ω , nous obtenons :

$$f_t(u) = \bar{g}(u - t)f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega, t) \exp(-2\pi i \omega u) d\omega \quad (2.3.7)$$

Puisque la fonction g peut s'annuler, on ne peut pas diviser par $\bar{g}(u - t)$ afin d'obtenir $f(u)$. Multiplions plutôt les deux membres de l'égalité (2.3.7) par $g(u - t)$ et intégrons par rapport à la variable t :

$$f(u) \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u - t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega, t) g_{\omega t}(u) d\omega dt \quad (2.3.8)$$

Cependant, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u - t)|^2 dt = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ et cette valeur est non nulle (Autrement, la fonction g serait identiquement nulle, et nous ne verrions dès lors plus rien à travers la fenêtre !). Nous obtenons donc la formule de reconstruction suivante :

$$f(u) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\omega t}(u) \tilde{f}(\omega, t) d\omega dt \quad (2.3.9)$$

C'est-à-dire que le signal est reconstruit par superposition des « notes » $g_{\omega t}$ avec la transformation de Fourier à fenêtre pour fonction donnant les coefficients.

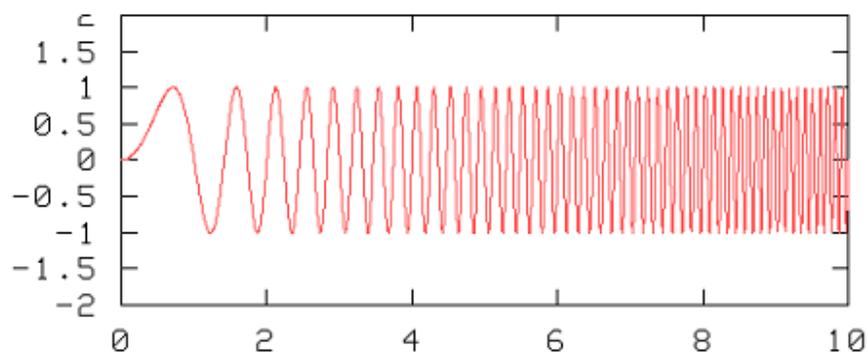


Figure 8 : Le signal $f(t) = \sin \pi t^2$

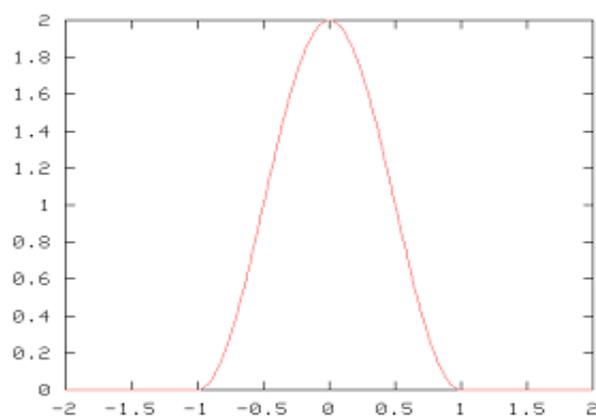


Figure 9 : La fenêtre $g(t) \begin{cases} 1 + \cos \pi t & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

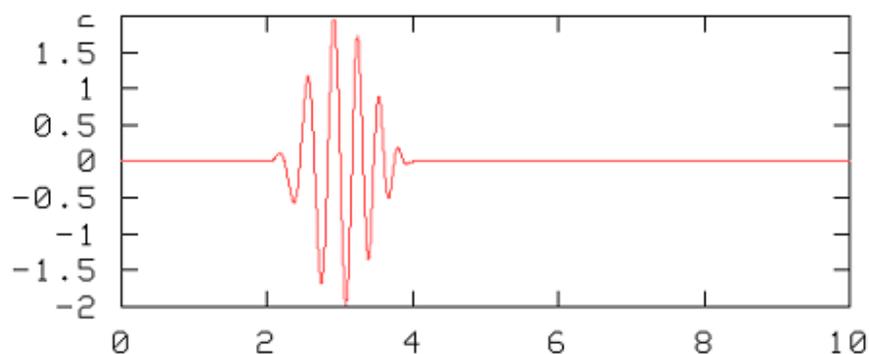


Figure 10 : La version « locale » f_3 de f

2.4 Localisation temps-fréquence : le dilemme

Un aspect remarquable de la transformation de Fourier ordinaire (continue) est la symétrie qu'elle exprime entre le domaine du temps t et le domaine des fréquences ω : les formules (2.3.3) et (2.3.4) sont complètement symétriques en temps et en fréquences, mis à part le signe de l'exposant de l'exponentielle imaginaire.

À première vue, cette symétrie est perdue lorsqu'on considère la transformation de Fourier à fenêtre puisque temps et fréquence sont traités de façon différente lors du calcul de $\tilde{f}(\omega, t)$. Néanmoins, la transformation de Fourier à fenêtre est elle aussi symétrique par rapport à ces deux domaines : au vu de la formule (2.3.6) et grâce à l'identité de Parseval, nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega, t) &= \langle g_{\omega t} | f \rangle = \langle \hat{g}_{\omega t} | \hat{f} \rangle = \exp(-2\pi i \omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2\pi i t \xi) \hat{g}(\xi - \omega) d\xi \\ &= \exp(-2\pi i \omega t) \left(\hat{f} \hat{g}(\cdot - \omega) \right) (t) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Ainsi, si la fenêtre g est raisonnablement bien localisée en temps et en fréquence, les formules (2.3.5) et (2.4.1) montrent que la transformation de Fourier à fenêtre donne une analyse temps-fréquence locale du signal f car elle fournit des informations précises sur f simultanément en temps et en fréquence.

Toutefois, toutes les fonctions obéissent au Principe d'incertitude de HEISENBERG, qui affirme que des localisations précises en temps et en fréquence sont mutuellement exclusives. En d'autres termes, si les valeurs $g(t)$ sont petites en dehors d'un intervalle de temps de longueur T et si les valeurs $\hat{g}(\omega)$ sont petites en dehors d'une bande de fréquence de largeur Ω , alors on a une égalité du type

$$\Omega T \geq c$$

où c est une constante proche de 1.

Si nous voulons savoir si un signal "possède" la fréquence ω_0 , nous devons "observer" ce signal sur au moins une période, c'est-à-dire sur un intervalle de temps plus long que $\frac{1}{\omega_0}$. Nous ne pouvons donc pas dire avec exactitude à quel instant le signal a cette fréquence.

2.4.1 Principe d'incertitude temps-fréquence

Les relations d'Heisenberg-Gabor interdisent à un signal d'avoir une localisation arbitrairement précise en temps et en fréquence. Les diracs temporels sont infiniment bien localisés en temps et complètement délocalisés en fréquence.

À l'opposé, les exponentielles complexes infinies sont délocalisées en temps, mais extrêmement bien définies en fréquence.

Pour un signal $x(t)$ donné, de norme dans $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1 et assez bien localisé (à support compact ou à décroissance rapide), nous cherchons à chaque instant les fréquences contenant l'énergie du signal. Pour ce faire, nous pouvons définir la position moyenne et l'épanouissement (variance) en temps et en fréquence de ce signal, de la façon suivante :

- l'instant moyen défini par : $\bar{t} = \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt =$ moyenne temporelle ;
- la fréquence moyenne par : $\bar{f} = \int_{\mathbb{R}} f |X(f)|^2 df =$ moyenne fréquentielle ;
- l'épanouissement en temps par : $(\Delta t)^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})^2 |x(t)|^2 dt$;
- l'épanouissement en fréquence par : $(\Delta f)^2 = \int_{\mathbb{R}} (f - \bar{f})^2 |X(f)|^2 df$.

Le principe d'incertitude d'Heisenber-Gabor s'écrit :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

où X est la transformée de Fourier du signal x et $\Delta t \cdot \Delta f$ est considéré comme un épanouissement en temps et en fréquence égale au produit BT (bande-durée).

Avant de démontrer cette inégalité, énonçons le théorème dit de Weyl, qui nous sera utile à la démonstration.

Théorème 2.4.1 *Soit x signal.*

Si x, tx, \acute{x} sont d'énergie finie ($x, tx, \acute{x} \in L^2(\mathbb{R})$), alors

$$\|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2 \|tx(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\acute{x}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Nous avons, par intégration par parties, avec $u(t) = x^2(t)$ et $v(t) = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = [tx^2(t)]_{-\infty}^{+\infty} - 2 \int_{\mathbb{R}} tx(t)\dot{x}(t)dt = -2 \int_{\mathbb{R}} tx(t)\dot{x}(t)dt$$

car $x, tx \in L^2(\mathbb{R})$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}} tx(t)\dot{x}(t)dt \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |tx(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\dot{x}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

■

d'où

$$\|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2 \|tx(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\dot{x}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

L'inégalité de Weyl est célèbre pour son application à la mécanique quantique.

Démonstration de l'inégalité

Démonstration. $x \in L^2(\mathbb{R})$.

Par l'identité de Parseval, nous avons

$$\|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|X(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

et par la formule de dérivation

$$\|\dot{x}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = |2j\pi|^2 \|fX(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

D'où l'inégalité de Weyl s'écrit

$$\|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 4\pi \|tx(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|fX(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 4\pi \|x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \Delta t \Delta f.$$

■

Ce résultat nous indique qu'il est impossible de localiser avec précision et simultanément un signal en temps et en fréquence. Un signal bref proche d'un Dirac ($\Delta t \simeq 0$) occupe une bande de fréquence B infinie ($\Delta f \rightarrow \infty$). De même, un signal bien localisé en fréquence occupe une durée grande. Un certain nombre de fonctions usuelles ont un

étalement $\Delta t \cdot \Delta f$ très largement supérieur à la borne d'Heisenberg-Gabor ($\frac{1}{4\pi}$), éventuellement infini. Dans ce cadre, Gabor a montré que seules les fonctions dont l'enveloppe est gaussienne (les gaborettes) atteignent la borne inférieure de l'inégalité. Ces fonctions permettent, en les translattant en temps et en fréquence, de partager le plan temps-fréquence en localisant au mieux l'énergie dans ce plan (cf. Fig. 11). Ce partage découpe le plan temps-fréquence en rectangle dont l'aire est fixée ($\Delta t \cdot \Delta f$), mais dont on peut faire varier la forme en fixant l'un des cotés (Δt ou Δf).

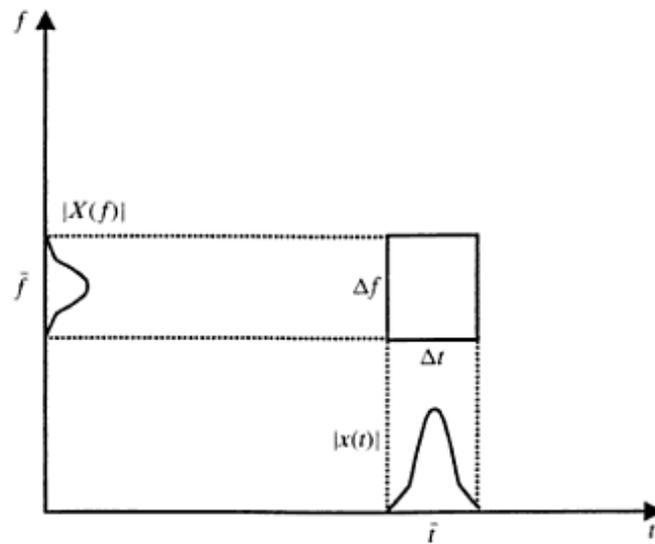


Figure 11 : Localisation temps-fréquence

L'observation de cette figure exprime l'incompatibilité entre résolution fréquentielle et résolution temporelle.

Exemple 2.4.1 *Deux notes de musique jouées l'une après l'autre : L'analyse temps-fréquence permet de retrouver à la fois les fréquences (les notes) et l'information temporelle*

(l'ordre dans lequel elles sont jouées).

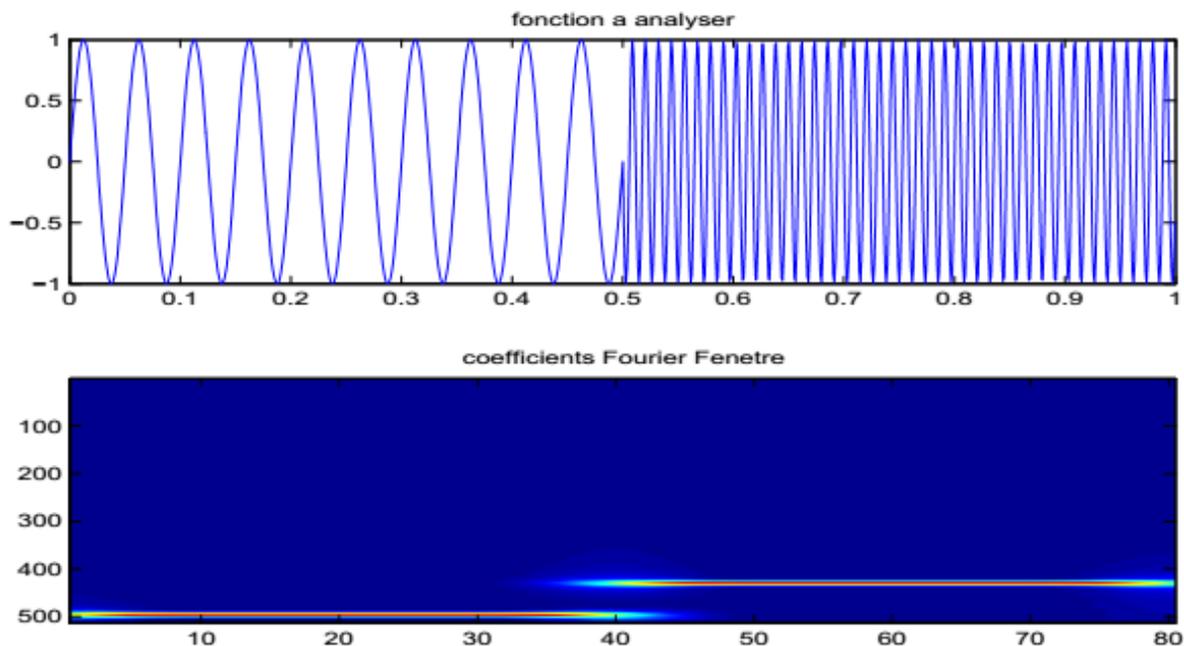


Figure 12 : Transformée de Fourier à fenêtre

2.5 La transformation par ondelettes

2.5.1 Qu'est ce qu'une ondelette

Une ondelette $\psi_{a,b}$ est une fonction générée par la translation et la dilatation d'une fonction génératrice, appelée *ondelette mère* ψ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_{a,b}(x) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont, respectivement, les coefficients de dilatation (échelle) et de translation dans le temps.

Ondelette mère

Une ondelette mère est une fonction de base que l'on peut traduire et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de

moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde ! Ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.5.1)$$

Cette condition est dite de régularité ou de moment d'ordre nul.

2.5.2 Condition d'admissibilité d'une ondelette

Une fonction $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est appelée ondelette mère analysante si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\nu)|^2}{|\nu|} d\nu < \infty \quad (2.5.2)$$

Cette condition étant relativement souple, un grand nombre de fonctions ψ peut servir d'ondelette mère. Nous imposons, généralement, d'autres conditions telles que la régularité, la décroissance rapide ou la compacité du support de ψ .

Remarque 2.5.1 *Si la fonction ψ vérifie la condition d'admissibilité (2.5.2), alors elle vérifie celle dite de régularité (2.5.1). (Nous avons équivalence si ψ est intégrable).*

2.5.3 Exemples d'ondelettes

1. L'ondelette de Morlet (complexe) : $\psi(x) = \exp(-\pi x^2) \exp(10i\pi x)$

On a $\hat{\psi}(\nu) = \exp(-\pi(\nu - 5)^2)$.

2. Les dérivées de la Gaussienne : $\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \exp(-\pi x^2)$, $n \geq 1$.

(Pour $n = 2$, l'ondelette est appelée "chapeau mexicain").

On a $\hat{\psi}_n(\nu) = (2i\pi\nu) \exp(-\pi\nu^2)$.

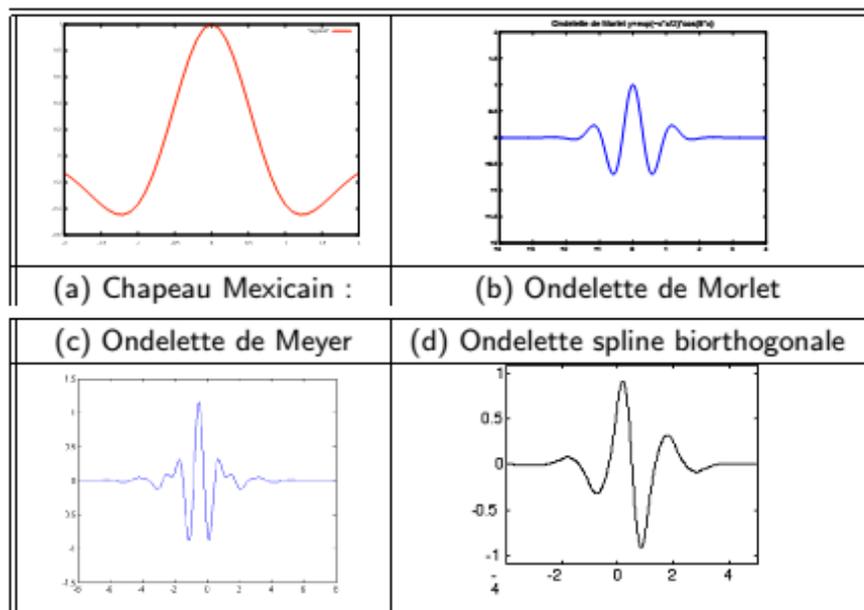


Figure 13 : Exemple d'ondelettes mères couramment utilisées

2.5.4 Transformation en ondelettes continues

La transformation de Fourier à fenêtre localise un signal simultanément en temps et en fréquence, en l'observant à travers une fenêtre, qui est translatée en temps et par conséquent en fréquence (nous disons que la fenêtre est modulée dans le temps). Ces deux opérations donnent naissance aux "notes" $g_{\omega t}$. Le signal est ensuite reconstruit par superposition de ces notes avec la transformée \tilde{f} pour fonction donnant les coefficients.

La pluralité des comportement du signal dans le temps rend la transformation de Fourier à fenêtre inefficace pour l'analyse de signaux réguliers dans le temps. Puisque l'obtention d'une réponse localisée dans le temps implique l'introduction d'une échelle de grandeur dans l'analyse (la taille de la fenêtre). Une méthode de reconstitution indépendante de cette échelle porte le nom de *transformation par ondelettes*.

Une transformée en ondelettes continues d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ est faite par le produit scalaire suivant :

$$\tilde{F}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx = \langle \psi_{a,b}, f \rangle \quad (2.5.3)$$

avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $b \in \mathbb{R}$ et C_ψ représente le coefficient de $f(x)$ à l'échelle a et à la translation b dans la base d'ondelettes. Cette transformation est continue par la variation continue de a et b .

2.5.5 Reconstruction du signal

Le signal f peut être reconstruit par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} \langle f(x), \psi_{a,b}(x) \rangle \psi_{a,b}(x) da db \quad (2.5.4)$$

L'expression (2.5.1) montre que $f(x)$ peut aussi s'écrire comme une superposition d'ondelettes pondérées par les différents coefficients de sa transformée.

Remarque 2.5.2 Une démonstration de la reconstitution de f à partir de ses coefficients d'ondelettes continues (2.5.1) est faite par la résolution de l'identité ([7] page 24).

2.5.6 Méthode générale du calcul d'un coefficient d'ondelette

$$C_{a,b}$$

Soit s un signal à analyser (1). Nous prenons une ondelette analysante (2) (dans ce cas, l'ondelette de Morlet) ψ caractérisée par une fréquence $\frac{1}{a}$.

Nous centrons, par la suite, l'ondelette sur une valeur b du temps et multiplions le signal $s(t)$ par les valeurs $\psi(t)$. L'aire du signal produit $P(t)$ (en bas) est obtenu de la manière suivante : l'aire est comptée positivement pour les parties de la courbe situées au dessus de l'axe des abscisses et négativement dans le cas inverse. Cette aire est égale au coefficient d'ondelette $C_{a,b}$ correspondant à chaque valeur de la fréquence $\frac{1}{a}$ et du temps b .

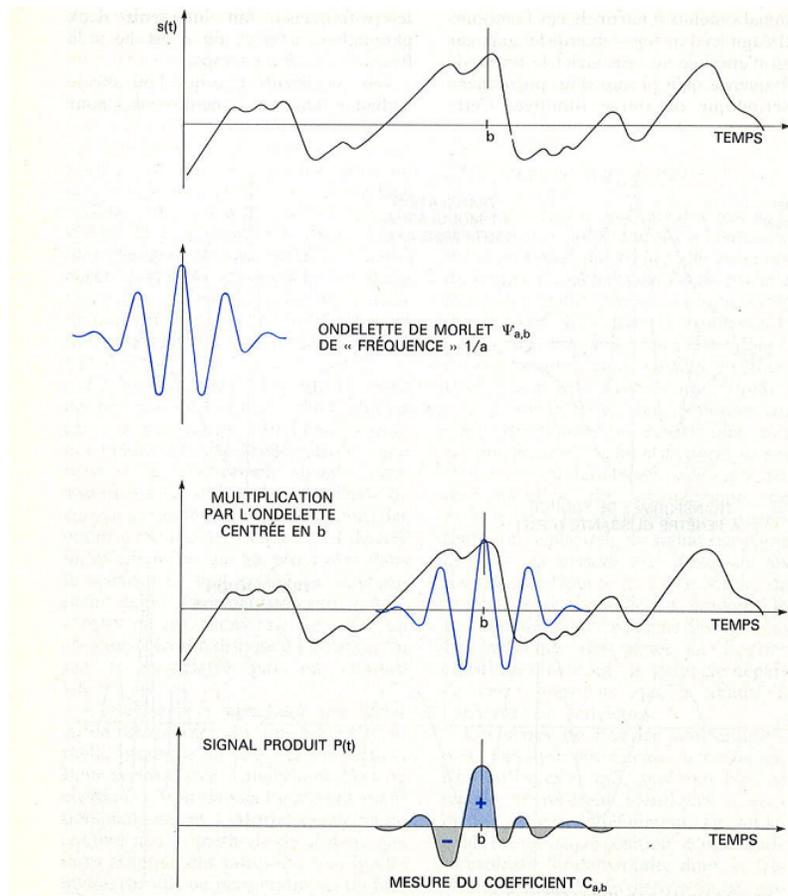


Figure 14 : Méthode générale du calcul d'un coefficient d'ondelette

2.6 Comparaison entre la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes

La transformation de Fourier à fenêtre glissante (T.F.G.) et la transformée en ondelette (T.O.) sont deux méthodes de représentation temps-fréquence d'un signal, qui consistent à le décomposer en somme de fonctions élémentaires ($g_{\omega t}$ pour la T.F.G. et $\psi_{a,b}$ pour la T.O.) qui dérivent toutes d'une même fonction "mère" (g pour la T.F.G. et ψ pour la T.O.), par translation dans les deux cas, par modulation dans le temps pour la première et par dilatation pour la seconde.

Nous représentons, dans la figure ci-dessous, une fonction mère (à gauche) et les diverses opérations que nous pouvons effectuer sur elle par TFG (en haut) et par TO (en bas).

La méthode de la transformée de Fourier présente l'inconvénient que la longueur de la plage temporelle sur laquelle nous analysons le signal est fixée une fois pour toutes, alors que la transformée en ondelettes s'adapte à toutes les échelles temporelles d'analyse.

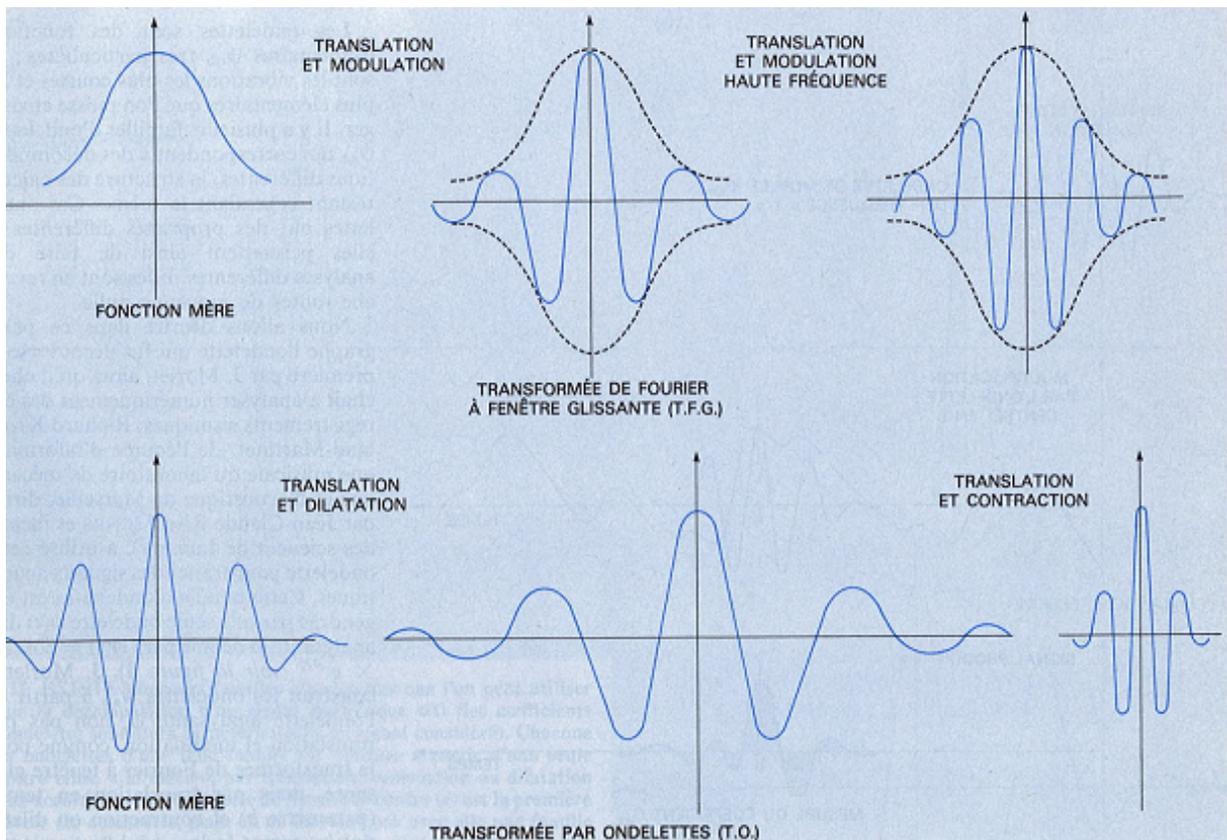


Figure 15 : Comparaison entre la T.F.G. et la T.O.

2.7 Au delà des ondelettes

En dépit du succès qu'elle a pu rencontrer et de la multitude des applications qu'elle a trouvées, l'analyse par ondelettes est loin de nous fournir une solution universelle et finale au problème de représentation et de codage des signaux. Néanmoins, elle donne souvent

une réponse qui n'est pas très éloignée de l'optimalité, ce qui, combiné à la simplicité de l'outil et son efficacité algorithmique, explique son succès grandissant. En revanche, dans certains cas bien précis, il est nécessaire de rechercher des techniques permettant de s'approcher plus encore de l'optimalité, tout en essayant de conserver les atouts des ondelettes.

"Cette présentation débute par l'introduction des bases orthonormées d'ondelettes qui, nous allons le voir, sont associées ou non à la notion d'analyse multirésolution. Cette notion implique l'imbrication d'espaces d'approximations, et elle permet de définir des algorithmes performants de transformée en ondelettes rapides. Sans ces performances numériques, les analyses multirésolutions seraient beaucoup moins prisées. Dans la suite, nous noterons en abrégé analyse multirésolution par AMR."

3.1 Les bases orthonormées d'ondelettes

Une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ est composée de fonctions $\psi_{j,k}$ données par :

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad \text{avec } j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.1.1)$$

où ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette mère, j l'indice d'échelle, k l'indice de position. $\psi_{j,k}$ est donc déduit de ψ par une transformation d'échelle et une translation. La présence de $2^{\frac{j}{2}}$ est normalisante.

Des propriétés de régularité, de localisation et d'oscillation sont souvent données pour les ondelettes. Ainsi, nous définissons des bases d'ondelettes de classe m si :

1. la collection des fonctions $\psi_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$;
2. $\psi^{(l)} \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour $l = 0, \dots, m$;

3. $\psi^{(l)}$ décroît rapidement quand $x \rightarrow \pm\infty$, pour $l = 0, \dots, m$;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^l \psi(x) dx = 0$, pour $l = 0, \dots, m$.

La traduction de ces propriétés est :

- la propriété 2 donne la régularité de ψ donc sa localisation fréquentielle ;

- la propriété 3 donne la localisation de ψ dans le domaine physique. On dira que l'ondelette $\psi_{j,k}$ est essentiellement concentrée sur l'intervalle dyadique $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, car cela va dépendre de la vitesse de décroissance de l'ondelette ;

- la propriété 4 indique que tous les moments de ψ d'ordre $k \leq m$ sont nuls, ce qui définit le caractère oscillant de ψ dans le domaine physique. Les polynômes de degré inférieur à m seront "invisibles" pour cette ondelette analysante, en particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0$: les ondelettes sont de moyennes nulles.

Ces nouveaux systèmes orthogonaux proposent des familles de fonctions localisées à la fois dans les espaces physique et spectral : la représentation des fonctions en ondelettes est intermédiaire entre une représentation purement spectrale, et une purement physique.

Ainsi d'après la propriété (1), une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ se décompose en série d'ondelettes $\psi_{j,k}$ et :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \text{ avec } \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}_{j,k}(x) dx \quad (3.1.2)$$

Les fluctuations d'un signal f se décomposent donc comme la somme de fluctuations de moyenne nulle, localisées dans des intervalles dyadiques de largeur et de position variables. Autrement dit, nous voyons le signal comme la somme de détails élémentaires $\psi_{j,k}$ de différentes dimensions $\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \right)$.

Remarque 3.1.1 Cette égalité fonctionne encore si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$, mais cesse de fonctionner si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

En effet, si $f(x) = 1$, l'égalité conduirait à $1 = 0$! Or, la majorité des signaux physique sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

La solution à ce problème consiste à se donner une seconde fonction φ , appelée "père des ondelettes" et qui est plus communément appelée **fonction d'échelle** dans le cadre de l'AMR.

Les propriétés (2) et (3) sont encore valables pour φ ; la propriété (4) est remplacée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$, et (1) par la condition que l'ensemble des fonctions $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}, \psi_{j,k}(x), j \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(x-k) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (3.1.3)$$

$$\text{avec } a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\varphi}(x-k) dx \text{ et } d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}_{j,k}(x) dx \quad (3.1.4)$$

Nous pouvons voir, à présent, le signal comme la somme d'une approximation grossière $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(x-k)$ et de détails (erreurs) de plus en plus petits $\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \right)$.

Cette décomposition définit l'esprit de l'AMR et les fonctions φ et ψ ne sont, évidemment pas, indépendantes. La donnée φ définit entièrement l'analyse multirésolution. Nous verrons, par la suite, que la fonction ψ se déduit de φ .

3.2 Principe de l'analyse multirésolution

L'analyse multirésolution, introduite par Meyer et Mallat, est un outil de traitement du signal qui permet de décomposer un signal à plusieurs échelles (résolutions) et de le reconstruire à partir des éléments de cette décomposition.

Une analyse multirésolution est un partitionnement de l'espace des fonctions d'énergie finie : $L^2(\mathbb{R})$ par une famille de sous-espaces vectoriels fermés V_j emboîtés les uns dans les autres tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle. Ces sous-espaces sont appelés des espaces d'approximation à l'échelle j ($j \in \mathbb{Z}$) et vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \iff f(t - 2^{-j}k) \in V_j$.
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} \subset V_j$ donc $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$.

3. $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$.
4. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ et $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$.
5. $\exists \varphi \in V_0$ telle que la suite $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de V_0 .

Définition 3.2.1 Une famille $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ si

- (i) $\forall h \in L^2(\mathbb{R}), \exists ! \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ tel que $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e_k$.
- (ii) $\exists 0 < A \leq B < +\infty$ tels que $\forall h \in L^2(\mathbb{R}), A \|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B \|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})}$
où $\|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 3.2.1 Faisons une remarque à propos de la définition d'une base de Riesz. Une base de Riesz est donc un système générateur, libre et, d'une certaine manière, la propriété (ii) généralise la notion d'orthogonalité. En particulier, dans le cas d'une base orthonormée (base hilbertienne), on a $A = B = 1$ et (ii) est alors, simplement, l'égalité de Parseval. La donnée de la base de Riesz de L^2 revient à la donnée d'un isomorphisme entre l'espace de fonctions $L^2(\mathbb{R})$ et l'espace des suites $l^2(\mathbb{Z})$.

Les espaces V_j sont appelés espace d'approximation. L'approximation multirésolution de f à la résolution 2^{-j} est définie comme sa projection orthogonale sur l'espace V_j .

Quelques éclaircissements à propos de ces propriétés s'imposent :

- La première propriété signifie que V_j est invariant par toute translation proportionnelle à l'échelle 2^{-j} .
- La seconde caractérise le changement d'échelle d'un sous-espace emboîté à un autre : l'espace V_{j+1} contient des signaux plus grossiers que l'espace V_j .
- La troisième propriété garantit que la dilatation par 2 d'une fonction f de V_j (donc le grossissement par deux des détails) définit une approximation de cette fonction à l'échelle plus grossière 2^{-j+1} .
- La quatrième propriété montre que si $j \rightarrow +\infty$ (de plus en plus grossier), alors nous perdons toutes les informations nécessaires à la reconstitution du signal f et inversement si $j \rightarrow -\infty$ alors la convergence vers f est assurée.

- La cinquième définit l'existence d'une fonction φ qui permet d'approximer toute fonction f de V_0 de manière discrète et unique : $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de V_0 .

Toutes les propriétés énoncées ci-dessus caractérisent l'analyse multirésolution *dyadique* (on utilise un facteur 2 lors d'un passage d'un sous-espace à un autre).

3.2.1 Interprétation géométrique de la construction

Afin de compléter cette analyse, nous définissons pour chaque espace d'approximation V_j son complément orthogonal W_j dans l'espace dans lequel il est directement emboîté V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \forall j \in \mathbb{R}$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{R}} V_j$$

$$\forall j \in \mathbb{R}, \text{ si } j \neq k \text{ alors } W_j \perp W_k$$

Contrairement aux sous-espaces d'approximation, les sous-espaces W_j ne forment pas une famille d'espaces emboîtés, mais les propriétés d'échelle et d'invariance par translation sont conservées. Il existe une fonction appelée fonction d'ondelettes qui, par dilatation et translation, engendre une base orthonormée de W_j .

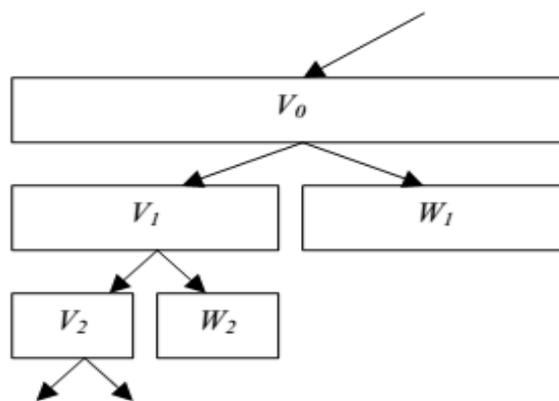


Figure 16 : Schéma d'analyse multirésolution

L'idée est donc de projeter un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ appartenant à un espace V_j sur un sous-espace V_{j+1} et un sous-espace W_{j+1} dans le but de réduire la résolution de moitié. Il existe alors, un opérateur de projection A_j et un opérateur de projection D_j qui projettent respectivement le signal f sur V_{j+1} et W_{j+1} . V_{j+1} est le sous-espace d'approximation et W_{j+1} celui de détails. Il est possible de démontrer qu'il existe une fonction d'échelle $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ qui engendre par dilatation et translation une base orthonormée de V_{j+1} et une fonction d'ondelettes $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ qui engendre par dilatation et translation une base orthonormée de W_{j+1} .

Par construction, les espaces d'approximation V_{j+1} et de détails W_{j+1} sont complémentaires : $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$. De plus, si les bases sont orthogonales, les espaces seront orthogonaux : $V_{j+1} \perp W_{j+1}$. D'après l'égalité (3.1.1), les fonctions de bases dilatées sont données par les relations suivantes :

$$\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k) \text{ et } \psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) \text{ avec } j, k \in \mathbb{Z}$$

3.2.2 Conséquences

- Soit $P_{V_j}f$ la projection de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur V_j , les propriétés (3) et (5) impliquent que :

$$P_{V_j}f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x)$$

La fonction d'échelle φ est appelée fonction d'échelle et vérifie $\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$. Elle possède les mêmes caractères de régularité et de localisation spatiale que l'ondelette qui lui sera associée. Elle est une partition de l'unité : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) = 1$.

Le produit scalaire $a_j[k] = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$ peut être réécrit comme un produit de convolution :

$$a_j[k] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \bar{\varphi}(2^j x - k) dx = f \star \bar{\varphi}_j(2^j x)$$

avec $\varphi_j = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x)$ et \star le produit de convolution, et vu comme une approximation discrète à l'échelle 2^{-j} . L'approximation $a_j[k]$ correspond au filtrage passe-bas de f échantillonné à des intervalles 2^{-j} .

- Ondelette mère

Les approximations de f aux échelles 2^{-j} et $2^{-(j+1)}$ sont égales aux projections orthogonales du signal sur les sous-espaces V_j et V_{j+1} . D'après la propriété 2, l'approximation $P_{V_j}f$ est plus grossière que $P_{V_{j+1}}f$: $P_{V_j}f \subset P_{V_{j+1}}f$. En passant de $P_{V_{j+1}}f$ à $P_{V_j}f$, nous perdons de l'information, des détails présents à l'échelle $2^{-(j+1)}$ qui disparaissent à l'échelle 2^{-j} .

L'espace W_j , complémentaire de V_j dans V_{j+1} vérifie :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Cette équation peut se lire ainsi :

$$\begin{array}{rcc} \text{approximation} & = & \text{approximation} + \text{détails} \\ \text{à l'échelle } 2^{-(j+1)} & & \text{à l'échelle } 2^{-j} \quad \text{d'échelle } 2^{-j} \end{array}$$

En écrivant $P_{V_j}f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$ comme la projection du signal dans l'espace des détails W_j , il vient :

$$P_{V_{j+1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f$$

Vu que :

$$\begin{aligned} P_{V_{j+1}}f &= P_{V_j}f + P_{W_j}f = P_{V_{j-1}}f + P_{W_{j-1}}f \\ &= P_{V_{j-2}}f + P_{W_{j-2}}f + P_{W_{j-1}}f + P_{W_j}f, \text{ etc. } , \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire par récurrence et en se fixant une échelle J d'approximation :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_j \oplus \left(\bigoplus_{j \geq J} W_j \right)$$

Remarque 3.2.2 Cette égalité indique que toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est une somme infinie de détails orthogonaux $\left(L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \right)$. En effet, en notant $A^j = P_{V_j}f$ et $D^j = P_{W_j}f$ les projections orthogonales de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur les espaces V_j et W_j , nous aurons $A^{j-1} = A^j + D^j$ et $A^j \perp D^j$. Aussi exprime-t-elle le fait qu'un élément de $L^2(\mathbb{R})$ puisse s'écrire sous la forme d'une somme orthogonale d'une approximation grossière et d'une infinité de détails plus fins $\left(L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \left(\bigoplus_{j \geq J} W_j \right) \right)$.

Remarque 3.2.3 Les espaces V_j sont des espaces d'approximation au sens suivant : A^j converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $j \rightarrow -\infty$. De même les espaces W_j sont les espaces de détails au sens où, dans $L^2(\mathbb{R})$, nous ayons d'une part $D^j \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow -\infty$ et d'autre part $f = A^j + \sum_{j=-\infty}^j D^j$. Autrement dit, pour un niveau d'approximation j fixé, les D^j sont les corrections à ajouter à l'approximation pour retrouver f .

- Pour des signaux $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous retrouvons donc l'égalité (3.1.2) :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

Quand nous traitons des signaux de valeur moyenne non nulle, nous écrivons :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

où $f(x) = \langle f \rangle_j(x) + \sum_{j \geq J} f_j(x)$

$$\text{avec } \begin{cases} \langle f \rangle_j \in V_j & \text{et } \langle f \rangle_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \\ f_j \in W_j & \text{et } f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \end{cases}$$

Les coefficients $a_{j,k}$ représentent les valeurs moyennes du signal à l'horizon 2^{-j} et localisées aux points $k2^{-j}$: Ils sont appelés **coefficients d'échelle**.

Les coefficients $d_{j,k}$ représentent les détails d'échelle 2^{-j} et localisées aux points $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$: Ils sont appelés **coefficients d'ondelette**.

- **Filtres miroirs conjugués et équation d'échelle**

La propriété 2 traduit l'emboîtement des espaces et l'amélioration de l'approximation lorsque j décroît. Puisque $V_0 \subset V_1$ et en écrivant que $\sqrt{2}\varphi(2x - k)$ est une base orthonormale de V_1 , nous pouvons caractériser l'AMR par la donnée de coefficients h_k tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \sqrt{2}\varphi(2x - n) \quad \text{avec} \quad h[n] = \langle \varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - n) \rangle$$

Cette équation est appelée **équation d'échelle** ou de dilatation. La séquence $h[n]$ sera interprétée comme un filtre discret passe-bas.

Nous pouvons écrire aussi $\hat{\varphi}(x) = \sqrt{2}\hat{h}(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, avec $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\exp(-in\omega)$, puis par récurrence $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}\hat{\varphi}(0)$.

Soit la condition suivante :

$$\begin{cases} \forall \omega \in \mathbb{R}, & \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega + \pi) \right|^2 = 2 \\ & \hat{h}(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

Les filtres discrets vérifiant la condition ci-dessus sont appelés **filtres miroirs conjugués**.

De même, puisque $W_0 \subset V_1$, il est permis d'écrire

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\sqrt{2}\varphi(2x-n) \quad \text{avec} \quad g[n] = \left\langle \psi(x), \sqrt{2}\varphi(2x-n) \right\rangle$$

La séquence $g[n]$ sera interprétée comme un filtre discret passe-haut, et nous pouvons démontrer que le filtre g se déduit du filtre h .

$$\hat{g}(\omega) = \exp(-i\omega)\hat{h}^*(\omega + \pi) \quad \text{et} \quad g[n] = (-1)^{1-n}h[1-n]$$

Alors, la donnée du filtre h définit complètement la multirésolution.

Nous pouvons ainsi, rassembler sous la forme d'un tableau les éléments clés de l'AMR.

	Fonctions	Espaces	Bases	$j \nearrow$	$j \searrow$
Approximation	Fonction d'échelle φ	V_j	$\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Plus grossier	Plus fins
Détails	Ondelette ψ	W_j	$\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Plus grossier	Plus fins

Tableau 1 : Elements clés de l'analyse multirésolution

Le résultat de l'analyse multirésolution d'une image est donné dans la figure ci-dessous. Nous y voyons la diminution de la résolution, l'image d'approximation et les images de

détails horizontaux, verticaux et diagonaux.



Figure 17 : Exemple de décomposition en ondelettes d'une image au premier niveau de résolution

3.3 Algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat

Peu de temps après la découverte des ondelettes, Stéphane Mallat propose une approche "filtrage", où le rôle principale est joué par une fonction d'échelle parfois appelée « ondelette père » : l'idée d'analyse multirésolution a été matérialisée par la décomposition d'un signal par une cascade de filtres.

Une paire de filtres miroirs pour chaque niveau de résolution, l'un passe-bas associé à la fonction d'échelle donne les approximations, et l'autre passe-haut associé à l'ondelette encode les détails.

Un algorithme rapide applicable aux signaux et images est né (cf. Fig. 18) :

- La première étape de cet algorithme rapide consiste à séparer le signal en deux composantes : une composante lisse (l'allure générale) obtenue par filtrage passe-bas (correspondant à la fonction d'échelle), et l'ensemble des petits détails (retouches) obtenus par filtrage passe-haut (correspondant aux "petites" ondelettes qui encodent les petits détails) ;
- La deuxième étape consiste à répéter la procédure à une résolution "moitié". Cette étape est donc deux fois plus rapide que la précédente puisque deux fois moins de coefficients sont déterminés à difficulté égale ;

- Nous réitérons ces étapes, jusqu'à la fin du processus où le signal est tellement lissé qu'il disparaît. Toute l'information se trouve dans les coefficients d'ondelettes d_j .

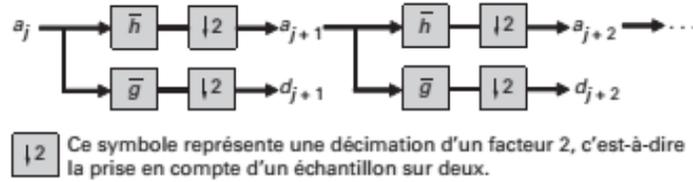


Figure 18 : Algorithme d'analyse de Mallat : décomposition d'un signal

En traitement du signal, nous ne connaissons pas en général l'expression du signal f , mais plutôt une approximation de celui-ci à une échelle donnée. Ainsi, l'objectif de l'algorithme est de calculer, à partir de cette approximation, les détails et les approximations aux résolutions inférieures. Cet algorithme travaille par filtrage de l'image suivant les lignes puis les colonnes par deux filtres, \bar{g} passe-haut et \bar{h} passe-bas. \bar{h} va permettre de repérer les basses fréquences dans l'image (l'approximation) et \bar{g} les hautes fréquences (les détails). Ces filtres sont construits à partir des fonctions ψ et φ .

Notons $a_{j,k}$ les coefficients de la projection de f sur les sous-espaces d'approximation et $d_{j,k}$ la projection de f sur les sous-espaces de détails. L'algorithme de Mallat démontre que :

$$a_{j,k} = \sum \bar{h}[2k-l] a_{j-1,l}$$

$$d_{j,k} = \sum \bar{g}[2k-l] a_{j-1,l}$$

où $\bar{h}[k] = h[-k]$ et $\bar{g}[k] = g[-k]$

avec $g(k) = (-1)^k h(1-k)$

Donc, pour déterminer les coefficients de détails et d'approximations aux échelles successives, il suffit de convoluer le signal par des filtres numériques et d'effectuer des sous-échantillonnages par 2 du signal.

En pratique, l'initialisation de l'algorithme (le choix de $a_0(k)$) est réalisé par les valeurs (échantillons) du signal analysé. La complexité de cet algorithme est de l'ordre de N lorsque le signal est de taille N .

Remarque 3.3.1 En toute rigueur les suites a_j et d_j s'écrivent respectivement $a_{j,k} = a_j(k)$ et $d_{j,k} = d_j(k)$; où k représente le temps.

3.3.1 Cas d'une image

En deux dimensions, la décomposition sur une base d'ondelettes séparables est réalisée par une extension de l'algorithme de Mallat. Ainsi, pour une image, l'algorithme 1D (une dimension) est appliqué d'abord sur chaque ligne, puis sur chaque colonne, comme le suggère la figure suivante.

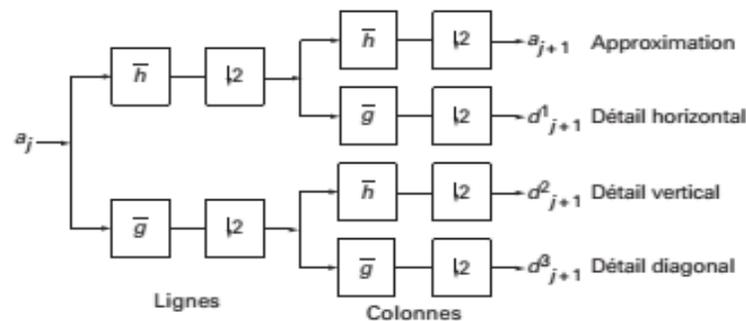


Figure 19 : Algorithme d'analyse de Mallat : décomposition d'une image

3.3.2 La reconstruction

À l'inverse, l'analyse multirésolution possède des propriétés de reconstruction : à partir de tous les coefficients de détails et de tous les coefficients d'approximation, nous pouvons reconstruire jusqu'à obtenir l'approximation originale.

La reconstruction des signaux analysés est effectuée à l'aide d'un banc de filtres h et g qui sont les filtres conjugués de \bar{h} et de \bar{g} . En fonction de l'ondelette et du type de base (orthogonale ou bi-orthogonale) choisis pour l'analyse, les filtres d'analyse et de synthèse peuvent être de même taille, symétriques ou bien de taille différente, non symétriques. La figure 20 donne le schéma de synthèse (de reconstruction) de Mallat.

Dans la reconstruction, nous travaillons alternativement sur les colonnes puis sur les lignes lorsque les ondelettes sont séparables.

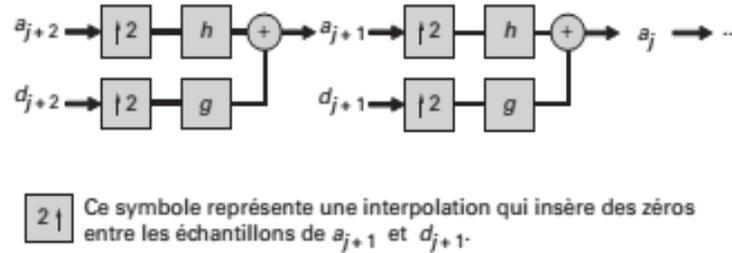


Figure 20 : Algorithme de synthèse d'un signal

Remarque 3.3.2 *Pour illustrer cette notion, prenons le cas d'une image qui se construit par une succession d'approximations : les détails viennent affiner cette image et la vision grossière se transforme progressivement en une vision fine et plus précise.*

Applications de l'analyse multirésolution

"Dans cette partie, nous nous proposons d'exhiber quelques unes des nombreuses applications de l'analyse multirésolution."

Les applications phares de l'analyse multirésolution se sont concentrées sur trois thèmes génériques majeurs : l'analyse, le débruitage et la compression.

4.1 Analyse en vue d'extraire des informations pertinentes

L'image est analysée par ondelettes, échelle par échelle, à la manière d'un microscope ou d'un zoom numérique. Il est alors ausculté à différentes résolutions et les coefficients (de la transformée d'ondelettes), qui en résultent, encodent l'information située dans le champ d'action de l'ondelette. Certains d'entre ces coefficients peuvent être déplacés, réarrangés ou même annulés de sorte que la transformée inverse (ou synthèse) ne garde qu'une zone d'intérêt (par exemple dans le cas des images). De plus, rappelons que l'analyse multirésolution consiste à décomposer un signal sur plusieurs niveaux, comme le montre la figure 17, ce qui implique que le signal analysé, par exemple au niveau 3, se décompose en l'approximation de niveau 3 et les trois détails de niveaux 1, 2 et 3.

Visuellement (tel que l'œil perçoit une image), une image originale s'exprime donc comme la somme d'une approximation (à un niveau donné) grossière, mais qui ressemble à l'image initiale, et d'une retouche globale ou détails qui encodent les contours (dans chaque direction). Ainsi, sans traitement spécifique, l'analyse en ondelettes permet d'extraire des informations pertinentes à une échelle d'intérêt ou détecter des contours.

4.2 La compression d'images

L'application la plus remarquable de l'analyse multirésolution est indéniablement celle de la compression d'images.

Ces dix dernières années, notre civilisation a connu une véritable révolution numérique qui a envahi notre environnement immédiat en nous inondant d'images.

Pour les archiver ou les transmettre, les premiers obstacles rencontrés ont été le volume important de données ou les débits limités des canaux de transmission .

Encore une fois, l'analyse multirésolution vient à notre secours, pour transformer ce flot d'informations en une représentation très creuse (c'est-à-dire comportant un nombre très important de termes négligeables), réduisant, ainsi, le nombre d'informations à coder.

4.2.1 Qu'est ce que la compression

La compression de données ou codage de source est l'opération informatique consistant à transformer une suite de bits A en une suite de bits B plus courte, pouvant restituer les mêmes informations, en utilisant un algorithme particulier.

L'opération de codage, quant à elle, raccourcit la taille (de transmission ou de stockage) des données au prix d'un effort de compression et de décompression. La décompression est l'opération inverse de la compression.

4.2.2 Le pourquoi

Essentiellement, nous compressons une image (ou tout autre type de données : texte, son, vidéo, etc.) afin de :

* réduire sa place sur disque.

* accélérer sa transmission sur un réseau.

L'efficacité d'une telle compression s'explique par le fait que :

- l'énergie de l'image soit bien concentrée par la décomposition en ondelettes, l'information utile étant localisée dans quelques coefficients d'amplitude significative ;

- le développement d'algorithmes de compression prenne en compte les dépendances hiérarchiques entre les coefficients d'ondelettes dans différentes sous-bandes ;

- l'utilisation d'une technique de compression avec perte s'accompagne d'une faible probabilité d'altération. Celle-ci n'est pas perceptible visuellement.

4.2.3 Taux de compression

Le taux de compression est défini par le rapport entre la taille originale et celle compressée. Autrement dit, si n_1 et n_2 sont, respectivement, le nombre d'unités porteuses d'informations (bits généralement), dans l'image original et celle compressée, alors la compression effectuée peut être quantifiée par le taux de compression suivant :

$$C_r = \frac{n_1}{n_2}$$

Exemple 4.2.1 *Soit une image de 100 Ko (Kilo octet), compressée à 20 Ko, le taux de compression est de 5 : 1.*

Ceci indique que l'image originale a 5 Ko pour chaque unité dans l'ensemble de données compressées.

Le taux de compression est variable, il dépend de la nature de l'image à compresser et de l'algorithme de compression utilisé.

4.2.4 Types de compression

Il existe deux types de compression :

- Réversible, sans perte.
- Non réversible, avec perte.

Compression sans perte

La compression est dite sans perte lorsqu'il n'y a aucune perte de données sur l'information d'origine. Il y a autant d'informations après la compression qu'avant, elles sont seulement réécrites d'une manière plus concise (c'est le cas des images synthétiques destinées au Web).

La compression sans perte est dite aussi **compactage**.

Le but est de réduire la taille moyenne des textes obtenus après la compression tout en ayant la possibilité de retrouver exactement le message d'origine.

Il n'existe pas de technique de compression de données sans perte universelle, qui pourrait compresser n'importe quel fichier : si une technique sans perte compresse au moins un fichier, alors elle en « grossit » également au moins un.

Les formats de fichier de compression sans perte sont connus grâce à l'extension ajoutée à la fin du nom de fichier (« nomdefichier.zip » par exemple), d'où leur dénomination très abrégée.

Compression avec perte

La compression avec pertes ne s'applique qu'aux données « perceptibles », qui peuvent subir une modification, sans que cela ne soit perceptible à l'œil nu. La perte d'informations est irréversible, il est impossible de retrouver les données d'origine après une telle compression. D'où l'appellation de compression irréversible ou non conservative.

Cette technique est fondée sur une idée simple : seul un sous-ensemble très faible, de toutes les images possibles, possède un caractère exploitable et informatif. Ce sont donc ces images-là que nous allons tenter de coder, de façon courte.

Puisque l'œil ne perçoit pas nécessairement tous les détails d'une image, il est possible de réduire la quantité de données de telle sorte que le résultat soit très ressemblant à l'original, voire identique.

L'enjeu de la compression avec pertes est de réduire la quantité de données d'un fichier tout en préservant la qualité perceptible et en évitant l'apparition d'artefacts.

Exemple 4.2.2 Nous allons voir dans la figure qui suit un exemple de compression JPEG de l'image de Léna.



Figure 21 : Compression JPEG de l'image de Léna

4.2.5 Compression et artefacts : Standard JPEG

Cette compression est entièrement basée sur la transformée en cosinus discrète ou TCD qui est une transformation proche de celle de Fourier.

Le noyau de projection est un cosinus et crée donc des coefficients réels, contrairement à la transformation de Fourier, dont le noyau est une exponentielle complexe et qui crée donc, des coefficients complexes.

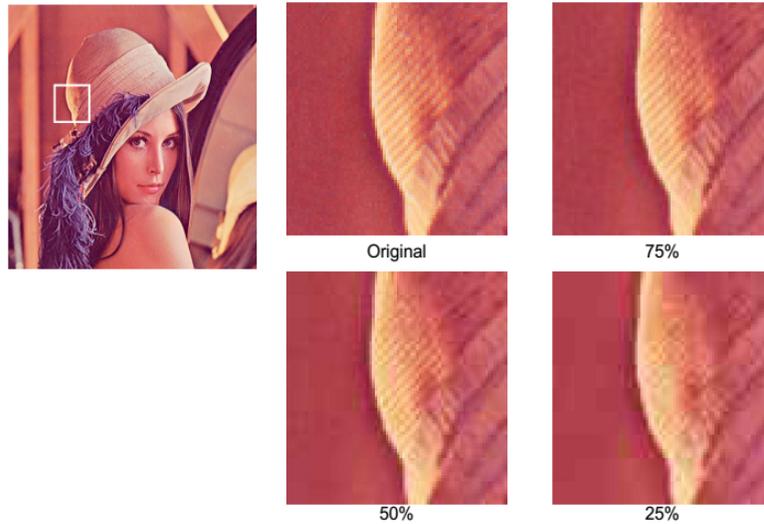


Figure 22 : Apparition d'effet de blocs dû à la compression

Une telle transformation entraîne une baisse de qualité de l'image, ainsi que l'apparition de blocs (car traités séparément), d'autant plus visibles à mesure que le taux de compression augmente.

4.2.6 Evolution au format JPEG 2000

Le standard actuel de compression d'images (fixes) baptisé JPEG2000 est entièrement fondé sur le codage des coefficients d'ondelettes.

Cette méthode permet d'avoir :

- une qualité d'image plus élevée à fort taux de compression.
- un taux de compression plus élevé que JPEG.
- la possibilité de ne charger (décompresser) qu'une partie de l'image.
- la possibilité de décompresser des versions plus petites de l'image.
- la possibilité d'un mode optionnel de compression sans perte.

Remarque 4.2.1 *Cela dit cette méthode de compression ne peut prétendre à la perfection. En effet, après compression, l'image devient plus floue.*

Principe de la compression d'images

La figure ci-dessous résume les principes d'une compression d'images : décomposition sur une base bi-orthogonale d'ondelettes puis élimination par seuillage d'une partie des coefficients d'ondelettes. Les coefficients conservés sont alors quantifiés puis codés en vue d'archivage ou de transmission.

Dans ce cas, une "décompression" peut être envisagée en suivant la procédure inverse. En réalité, l'étape du codage des coefficients est assez délicate.

Remarque 4.2.2 *Quelques notions sur la stratégie de codage sont présentées par Misiti et al. dans [20].*

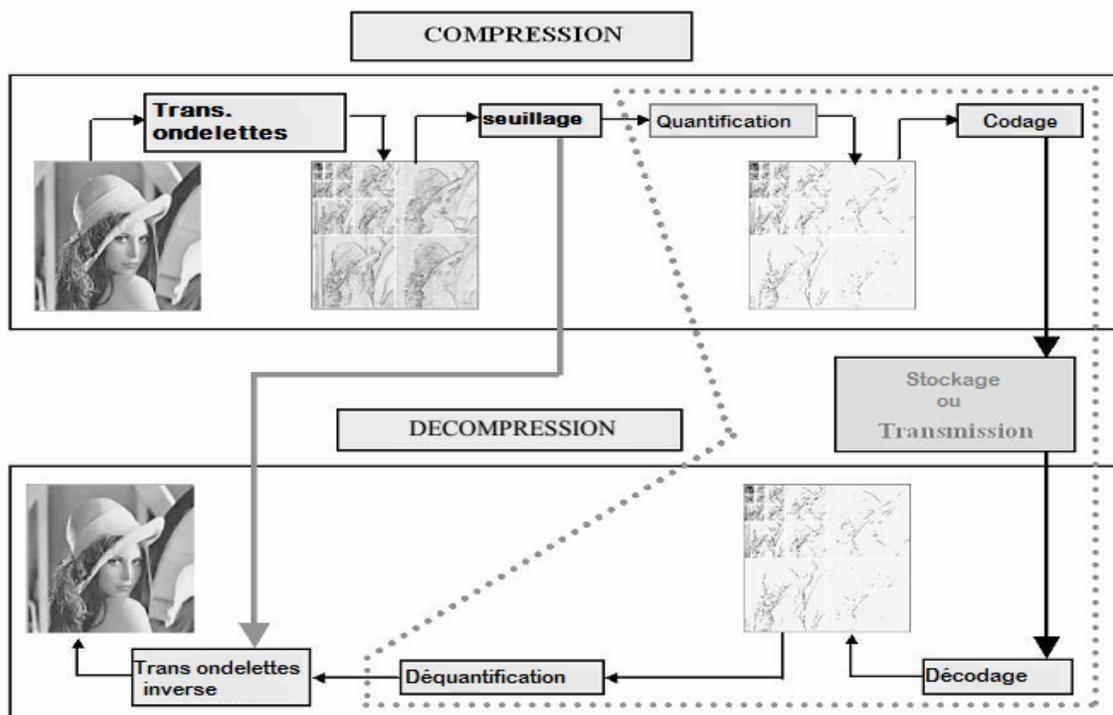


Figure 23 : Compression et décompression par ondelettes

Les dégradations induites par la compression doivent avoir le minimum d'impact dans le domaine spatial. De ce fait, les bases bi-orthogonales sont les mieux adaptées pour éviter l'apparition d'effets de bord ou de blocs.

4.2.7 Ondelettes bi-orthogonales, fonctions d'échelle et filtres associés

Ce type d'ondelettes est noté par deux indices, par exemple $\psi_{p,\tilde{p}}$ où p désigne le nombre de moments nuls de l'ondelette d'analyse ψ et \tilde{p} son équivalent pour l'ondelette de synthèse $\tilde{\psi}$.

De manière équivalente, p représente l'ordre du filtre passe-bas d'analyse et \tilde{p} l'ordre du filtre passe-bas de synthèse. Ces ordres peuvent être simultanément pairs ou impairs de façon à ce que leur différence soit un nombre pair.

Nous présentons, dans ce qui suit, les ondelettes bi-orthogonales 9/7 qui font partie de la famille des ondelettes bi-orthogonales symétriques CDF (Cauhen-Deaubechies-Feauveau) ayant un support de taille minimale égale à $p + \tilde{p} - 1 = 9 + 7 - 1 = 15$.

Ces propriétés avantageuses leur ont valu d'être adoptées en codage d'images par le codec JPEG2000.

Ces ondelettes bi-orthogonales 9/7 ($\psi, \tilde{\psi}$) ainsi que leur fonctions d'échelles ($\varphi, \tilde{\varphi}$) sont représentées en figure 24.

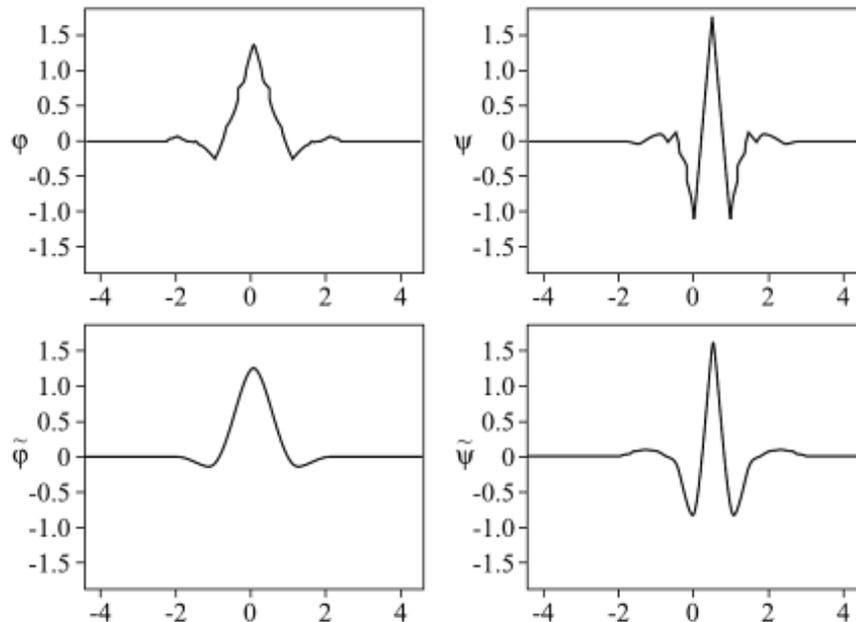


Figure 24 : Ondelettes bi-orthogonales 9/7 : φ, ψ et $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$

Les neuf coefficients du filtre passe-bas d'analyse h ainsi que les sept coefficients du filtre passe-bas de synthèse \tilde{h} sont donnés par le tableau suivant :

k	$h(k)$	$\tilde{h}(k)$
0	0,852699	0,788486
± 1	0,377403	0,418092
± 2	-0,110624	-0,040689
± 3	-0,023849	-0,064539
± 4	0,037828	

Tableau 2 : Réponses impulsionnelles des filtres passe-bas $h(k)$ et $\tilde{h}(k)$

Remarque 4.2.3 *Les ondelettes bi-orthogonales sont souvent utilisées en compression d'image et leur quasi-orthogonalité garantit une bonne stabilité numérique. La symétrie, quant à elle, permet de gérer les effets de blocs.*

Elles ont suffisamment de moments nuls et permettent d'obtenir des coefficients d'ondelettes quasi nuls dans les régions où l'image est régulière, ce qui aura pour conséquence d'arriver à un excellent taux de compression.

4.2.8 Comparaison, conclusion et exemples

Pour conclure, précisons que, même si la transformée en ondelettes constitue un outil performant pour la compression d'images, le problème de la détermination de la transformée la mieux adaptée aux images n'est pas pour autant clos. En effet, les ondelettes employées dans la décomposition dyadique ont un support carré qui ne peut s'adapter à la géométrie de toute les images. Or, le nombre de coefficients nécessaires à la représentation d'un contour dépend du support.

Un support capable de mieux s'adapter à l'orientation des contours permet d'accentuer la représentation creuse de l'image.

La figure 25 montre la différence entre la compression JPEG 2000 et JPEG de la photo de Lena, la première utilisant les ondelettes bi-orthogonales.

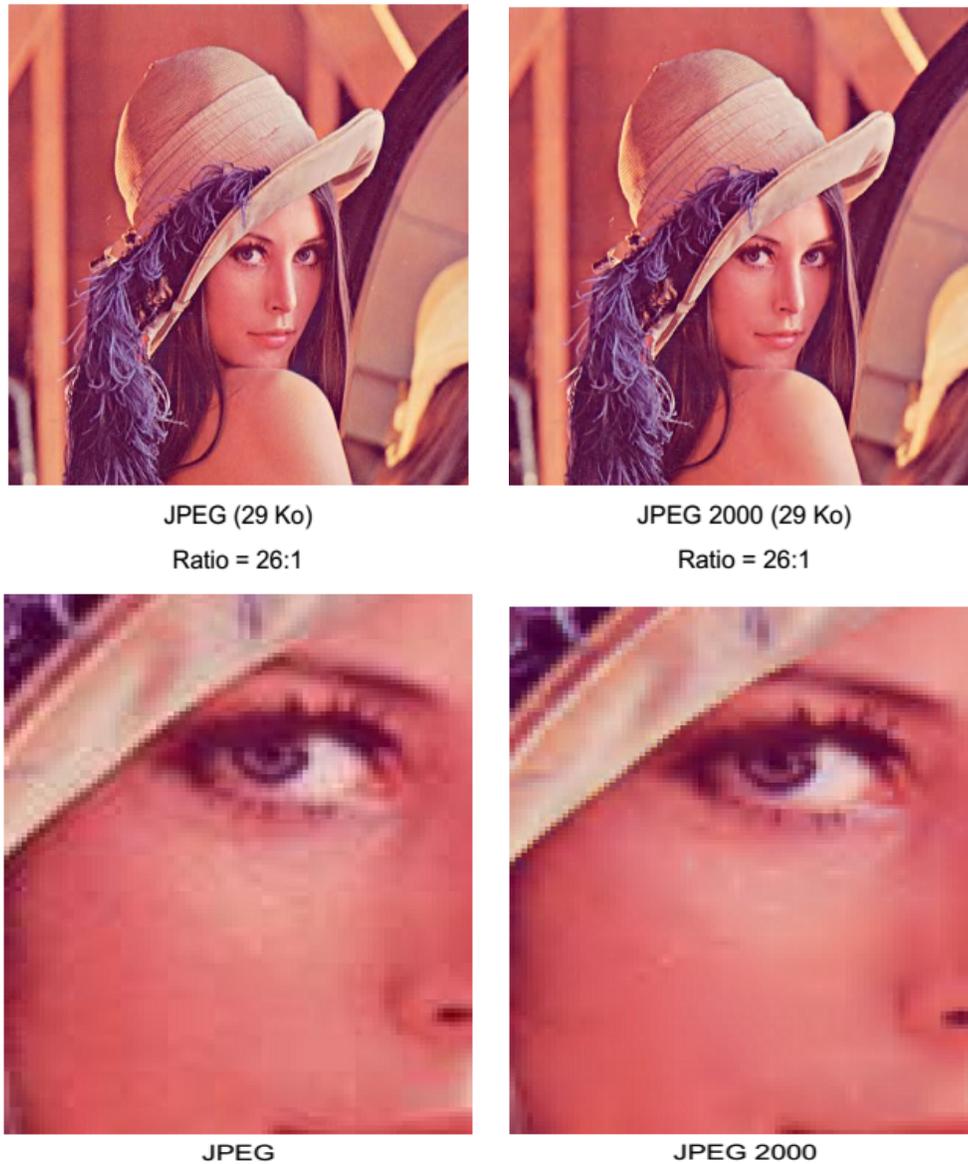


Figure 25 : Comparaison entre la compression *JPEG* et *JPEG 2000*

Il est clair que la compression JPEG 2000 offre un meilleur résultat en termes de qualité.

Dans l'exemple classique suivant (figure 26), les paquets d'ondelettes sont utilisés pour analyser et compresser une image en vue de résoudre l'épineux problème qui se posait au FBI (*Federal Bureau of Investigation*) pour gérer et maintenir une importante base de données sous forme d'images d'empreintes digitales.

Devant cet important flot de données électroniques, la compression de ces images a été la solution adoptée par le FBI pour en faciliter le stockage et la transmission.

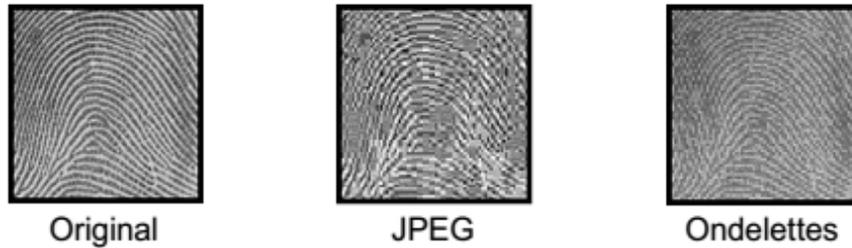


Figure 26 : Compression d'une empreinte digitale

4.3 Débruitage ou réduction du bruit

Les procédés d'acquisition d'images (caméra, amplificateur, quantificateur, etc.) induisent des perturbations, souvent gênantes, pour la compréhension et le traitement de l'image. L'objectif avoué du filtrage est de réduire les variations d'intensité au sein de chaque région de l'image tout en respectant l'intégrité des scènes : les éléments significatifs de l'image doivent être préservés au mieux.

Le challenge étant, de restituer le signal utile lorsque seulement une version bruitée est disponible. L'idée consiste simplement à modifier, de façon adéquate, les coefficients (de la transformée en ondelettes du signal observé) en tirant parti de leur caractère local, puis inverser la transformation pour obtenir une version non bruitée du signal.

4.3.1 Qu'est ce que le bruit

À chaque étape de l'acquisition d'une scène, des perturbations (rayures, poussières, caméra, amplification, quantification) vont détériorer la qualité de l'image. Ces perturbations sont regroupées sous le nom de *bruit* d'image. Celui-ci peut être réparti sur deux classes :

- * Bruit indépendant (aléatoire).
- * Bruit dépendant des données de l'image

$$X(i, j) = f(i, j) + W(i, j) \quad (4.3.1)$$

avec f : l'image de départ et W : le bruit.

Le bruit W est souvent décrit par sa variance σ_W^2 . Son effet sur l'image est souvent décrit par le rapport signal à bruit (SNR de l'anglais "Signal Noise Report"), donné par la relation suivante :

$$SNR = \frac{\sigma_f}{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{\sigma_W^2} - 1} \quad (4.3.2)$$

Où sont σ_f^2 et σ_X^2 sont les variances respectives de l'image réelle et de l'image traitée.

4.3.2 Qu'est ce que le débruitage

D'après la définition générale de Coiffman Wickerhauser [6], le débruitage par ondelette revient à l'extraction d'une structure cohérente du signal (ou de l'image) traité. Cela revient à considérer le bruit comme non cohérent par rapport à la base d'ondelette choisie, donc non corrélé avec les fonctions de base.

En effet, les coefficients peu corrélés avec la base sont faibles et attribués au bruit. Par un seuil adapté, on peut séparer le bruit "partie incohérente" du signal (image) "partie cohérente". Le débruitage par ondelettes classique est donc implémenté comme un filtrage non linéaire par seuillage : Les coefficients d'ondelette supérieurs à un seuil T sont considérés comme faisant partie du signal informatif.

Remarque 4.3.1 Avec un *filtre non linéaire*, le bruit est enlevé sans tentative de l'identifier explicitement .

4.3.3 Méthodologie

Principe général du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

En général, il est possible de réaliser une décomposition en ondelettes d'une image puis de la reconstruire à partir de ses coefficients d'ondelettes. Pourtant, cette technique n'aurait pas grand intérêt si nous ne modifions pas ces coefficients car nous obtiendrions une image finale identique à l'image initiale.

Les coefficients d'ondelettes marquent les discontinuités qui interviennent dans l'image. Ils correspondent donc aux détails. Si, maintenant, nous seuillons ces coefficients, cela revient à éliminer les détails les plus fins de l'image. Il découle donc deux grandes applications de cette technique de seuillage des coefficients d'ondelettes : la compression et le débruitage des images.

Pour le débruitage (ou "denoising") qui nous intéresse : nous ne gardons que les coefficients les plus grands et mettons les autres à zéros puis reconstruisons l'image. Le bruit correspond en général à des détails faibles donc il est éliminé par ce seuillage des coefficients d'ondelettes. Nous obtenons alors une image plus "lisse" donc débruitée.

Débruitage d'une image

Soit l'image bruitée X . Nous cherchons alors l'opérateur de débruitage D qui permettra d'estimer l'image sans le bruit W .

Nous aurons dans une base orthogonale d'ondelettes $B = \{g_m\}$, l'expression :

$$DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m(X_B[m])g_m \quad (4.3.3)$$

d_m est appelé *seuillage*.

4.3.4 Seuillage dans une base

Les estimateurs de seuillage furent introduits par Donoho et Johnstone pour des bases arbitraires. Ils furent, ensuite, introduits dans les méthodes d'ondelettes au début des années 90 dans une série d'articles de Donoho et Johnstone, Kerkyacharian et Picard. L'idée sous-jacente était de reconstruire le signal (l'image) uniquement à l'aide des coefficients empiriques dont la valeur absolue était supérieure à un seuil fixé. Cette idée est vite montrée très performante tant au point de vue théorique que pratique.

Dans une base $B = \{g_m\}$ $0 \leq m < N$, un estimateur diagonal de f à partir de $X = f + W$ s'écrit :

$$\tilde{F} = DX = \sum_{m=0}^{N-1} d_m(X_B[m])g_m$$

avec d_m fonction de seuillage, $X_B[m] = \langle X, g_m \rangle$, $W_B[m] = \langle W, g_m \rangle$, $F_B[m] = \langle F, g_m \rangle$.

Supposons que W soit un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .

Définition 4.3.1 *Un **bruit blanc** est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences.*

*Le **bruit blanc gaussien** est un bruit blanc qui suit une loi normale de moyenne et variance données.*

Définition 4.3.2 *On définit la **densité spectrale de puissance** comme étant la limite, quand T tend vers l'infini, de l'espérance mathématique du carré du module de la transformée de Fourier du signal.*

Ainsi, si x est un signal et X sa transformée de Fourier, la densité spectrale de puissance vaut :

$$\Gamma_x = \frac{|X|^2}{T}$$

Différents types de seuillage

Il existe plusieurs types d'estimateurs par seuillage. Nous pouvons d'abord distinguer les seuillage dur et seuillage doux.

Seuillage dur ou "hard thresholding" Le seuillage dur est le plus "intuitif". Nous nous fixons un seuil $T > 0$, ne conservons que les coefficients d'ondelettes supérieurs à T et mettons à zéro les autres. [9][17]

$$d_m(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > |T| \\ 0 & \text{si } x \leq |T| \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Nous aurons donc le seuillage suivant :

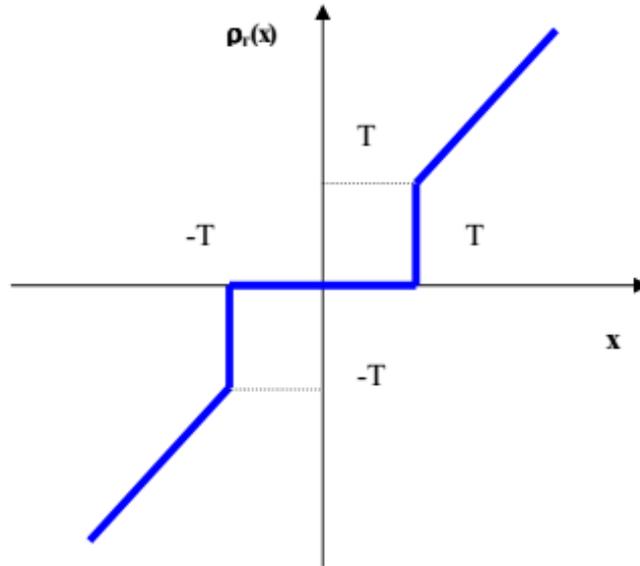


Figure 27 : Courbe du seuillage dur

L'opérateur D dans l'équation précédente est alors un projecteur non linéaire dans la base B . Le risque de ce seuillage est :

$$r_t(f) = r(D, f) = \sum_{m=0}^{N-1} E \{ |f_B[m] - \rho_T(X_B[m])|^2 \} \quad (4.3.5)$$

Seuillage doux ou "soft thresholding" Dans le cas du seuillage doux, nous mettons toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil T . Par contre, pour ceux supérieurs à T , nous atténuons l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil afin de nous assurer d'avoir enlevé l'effet du bruit même pour les forts coefficients.[9][17]

$$d_m(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x - \text{sign}(x)T & \text{si } x > T \\ 0 & \text{si } x \leq T \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Dans ce cas, la fonction de seuillage sera sous la forme suivante :

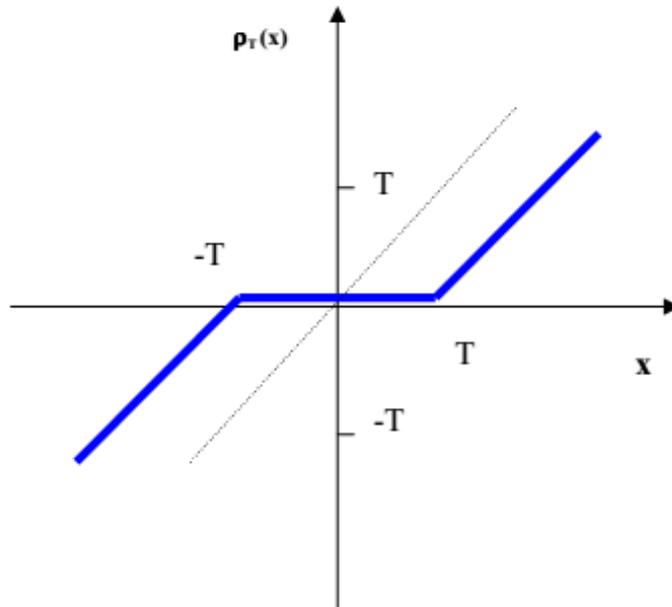


Figure 28 : Courbe du seuillage doux

Remarque 4.3.2 *Les deux fonctions de seuillage ci-dessus ne sont pas optimaux et présentent quelques inconvénients:*

- *Le seuillage doux n'est pas efficace pour les grands coefficients.*
- *En raison des discontinuités de la fonction de seuillage dur, les résultats ont tendance à avoir une grande variance et être instables.*

Choix du seuil

Le seuillage, ainsi que nous venons de le voir, est une technique d'estimation d'un signal ou d'une image.

La méthode **VisuShrink** introduite par Donoho et Johnstone [10] propose un seuil universel déterminé à partir de l'énergie estimée du bruit. Cette méthode utilise l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien superposé au signal.

Le seuil T est égal

$$T = \sigma_w \sqrt{2 \log(N)}$$

où N désigne le nombre de points du signal (ou la taille de l'image) et σ_W^2 la variance du bruit. Ce dernier est considéré blanc. Par conséquent, l'écart-type est estimé dans une bande où le signal informatif est considéré quasi-inexistant, notamment dans les plus hautes fréquences.

Le seuil est, généralement, choisi pour être avec une probabilité juste au dessus du niveau maximum des coefficients du bruit $|W_B[m]|$.

Ce type de seuillage garantit que le signal obtenu sera toujours plus régulier que le signal de départ.

Remarque 4.3.3 *Notons que, dans la logique de ce travail, nous nous tenons au seuillage présenté ci-dessus, mais il en existe d'autres. Pour plus de détails, se référer à [15][16].*

4.3.5 Exemples

Cas d'une image

- **Entrée 1**

Cet exemple montre le débruitage d'une image bruitée par un bruit gaussien d'écart type 20, le seuil $T = 100$ avec la taille de l'image $N = 512 \times 512$ pour cette image.

L'ondelette utilisée pour la décomposition est celle de Haar, niveau de décomposition 2, le résultat est satisfaisant puisque le bruit est assez faible.

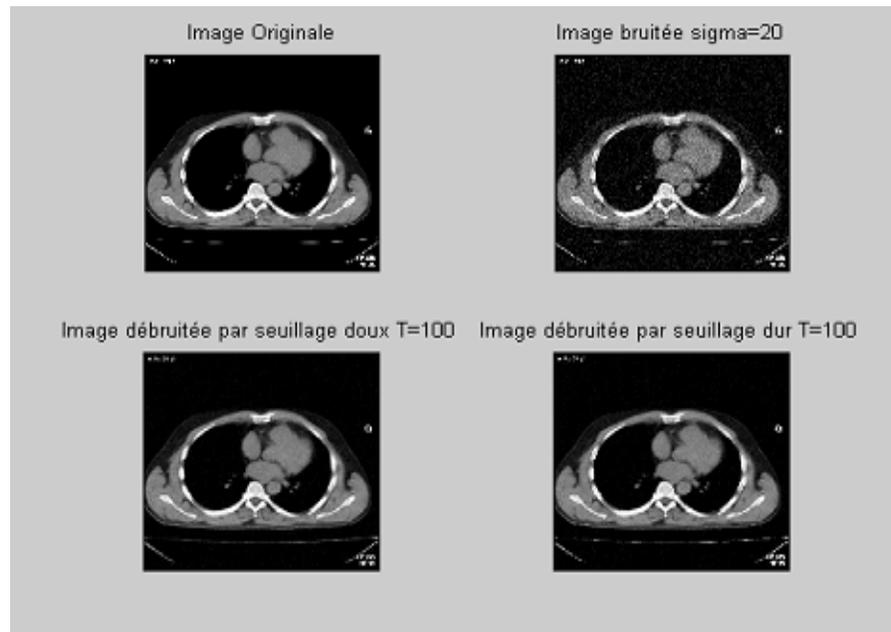


Figure 29 : Débruitage de l'image bruitée par un bruit gaussien d'écart type 20

Prenons, maintenant, le cas d'une image bruitée par un bruit d'écart type 40, débruitée avec un niveau de décomposition 2 par l'ondelette de Haar.

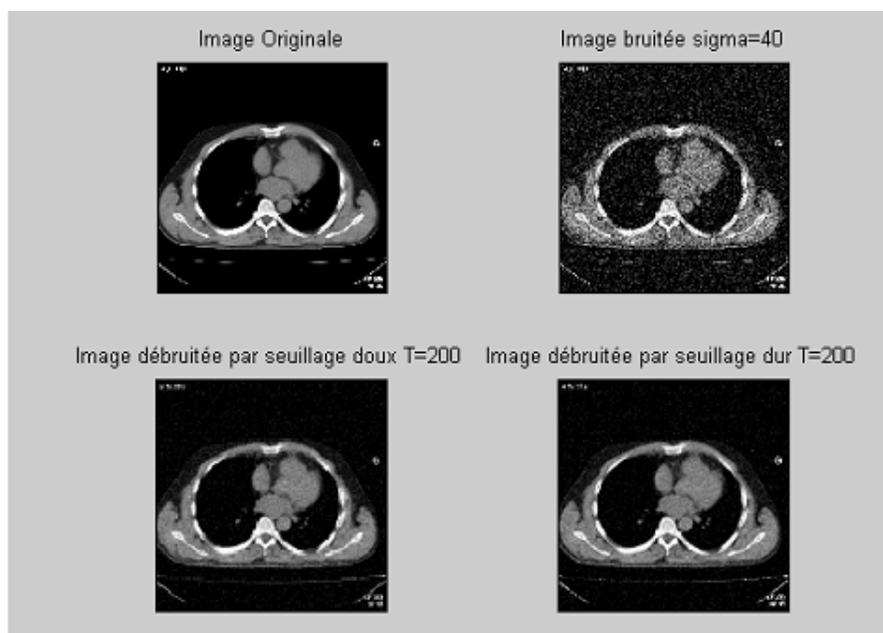


Figure 30 : Débruitage de l'image bruitée par un bruit gaussien d'écart type 40

Par contre, pour un bruit de même écart type et un débruitage avec un niveau de décomposition 4 par l'ondelette de Haar, nous aurons :

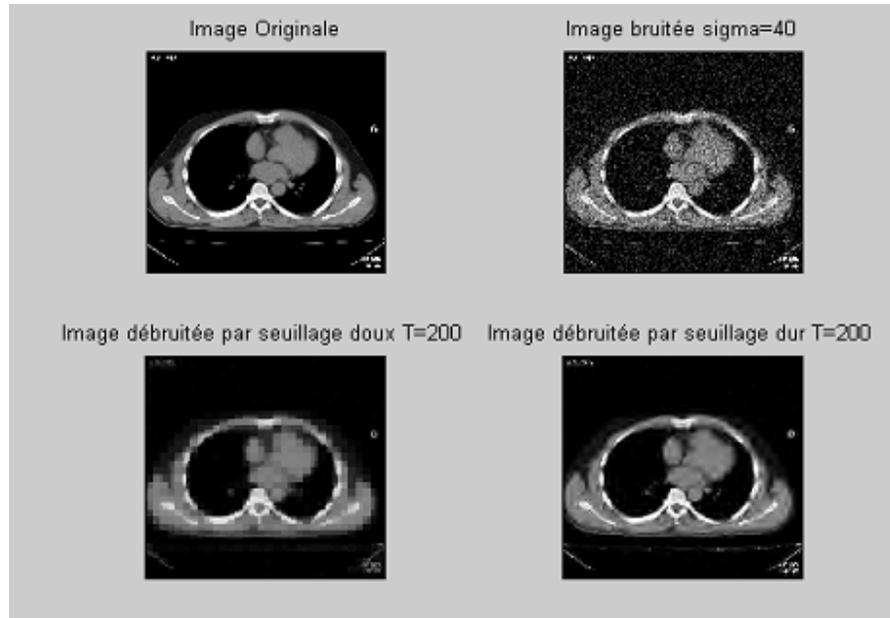


Figure 31 : Débruitage de l'image bruitée avec un niveau de décomposition 4

- **Entrée 2**

Si l'image est plus bruitée avec un niveau de bruit $\sigma = 40$, nous obtenons un résultat déjà bon (Figure 30), avec les mêmes paramètres que le cas précédent mais avec une valeur de T égale à 200.

- **Entrée 3**

Si nous augmentons le niveau de décomposition, nous aurons le résultat sur la Figure 31.

Dans ce cas, nous obtenons une image plus lisse après débruitage. En effet, l'image devient plus lisse avec ce niveau de décomposition car il y a filtrage passe-bas de l'approximation à chaque niveau de décomposition.

- **Entrée 4**

Si notre image est fortement bruitée avec un bruit d'écart type $\sigma = 100$, nous aurons le résultat illustré sur la figure suivante :

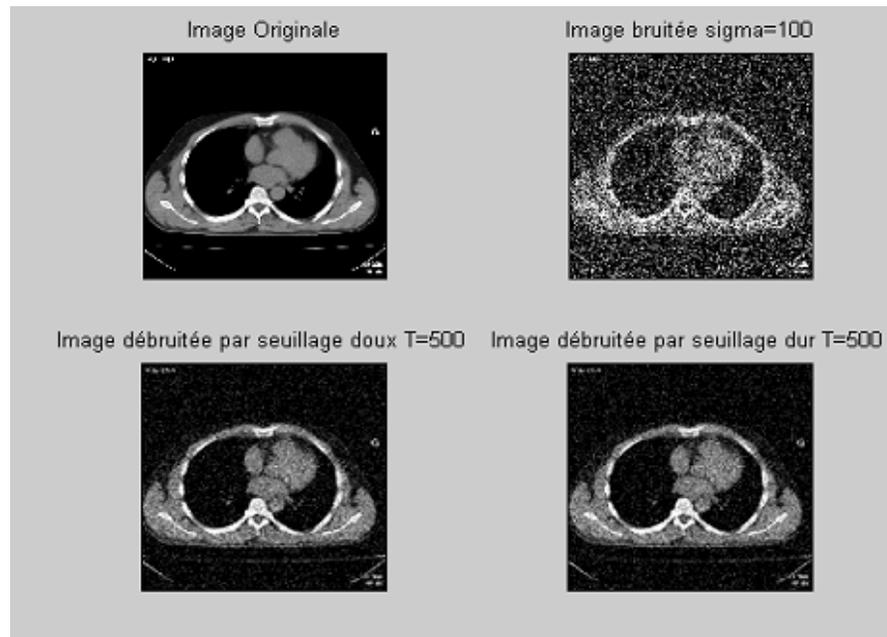


Figure 32 : Débruitage de l'image bruitée avec un niveau de décomposition 2

Nous voyons que nous avons du mal à identifier ce que contient l'image bruitée avec $\sigma = 100$. Le résultat est, cependant, satisfaisant lorsque nous faisons un bon choix du seuil.

- **Entrée 5**

Si l'image est noyée dans un bruit d'écart type $\sigma = 300$, nous ne reconnaissons pas le contenu de l'image.

De plus, avec un mauvais choix du seuil, nous ne trouverons pas l'information recherchée.

Par exemple, pour un seuil $T = 100$, le résultat sera le suivant :

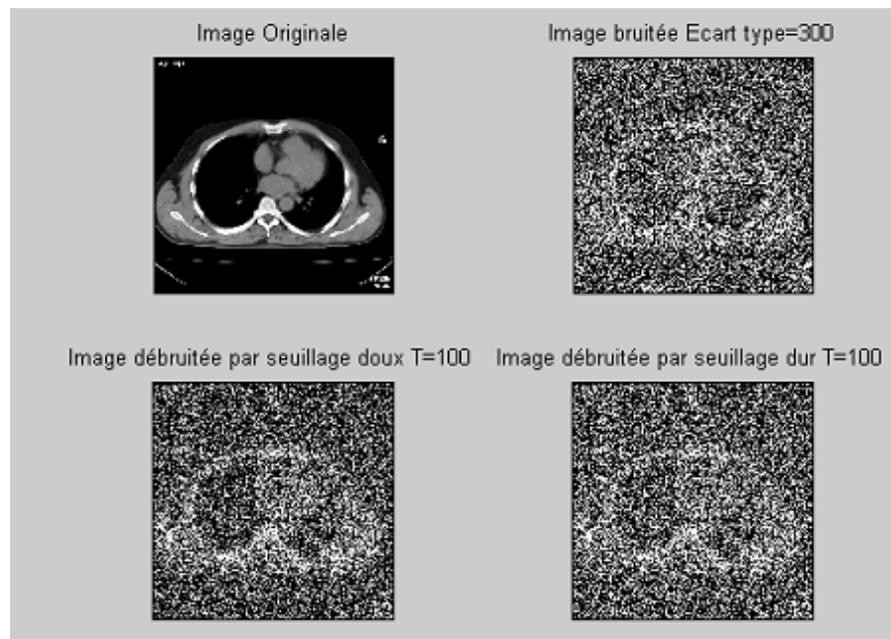


Figure 33 : Débruitage de l'image bruitée d'écart type 300 avec un seuil $T = 100$

Cas d'un signal

La figure ci-dessous représente :

1. les coefficients d'ondelettes (Daubechies d'ordre 3) du signal bruité, avant et après seuillage dur. Les coefficients de la transformée en ondelettes obtenus après seuillage serviront à reconstruire, par transformation inverse, le signal original débruité.
2. le signal bruité, ainsi que le signal débruité par seuillage dur. Le rapport signal à bruit obtenu est de l'ordre de $23dB$, ce qui est for encourageant.
3. la comparaison, en termes de rapport signal à bruit, des signaux débruités en utilisant un seuillage dur et un seuillage doux.

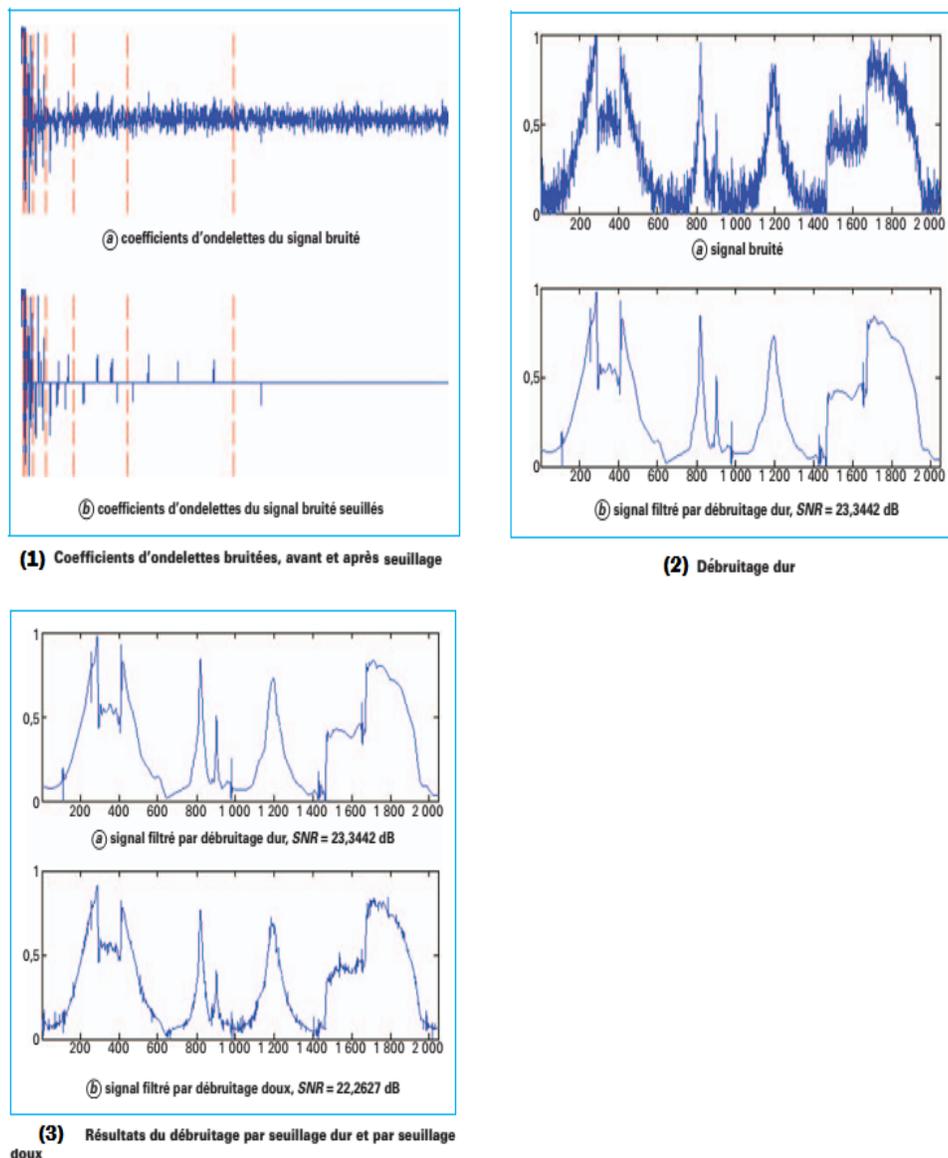


Figure 34 : débruitage d'un signal

4.3.6 Résultats et discussion

Cas d'une image

Généralement, les images sont porteuses d'informations. Les bruits venant de différentes sources causent des dégradations au niveau de la qualité d'une image, d'où la difficulté à appréhender ces informations.

Ces techniques donnent des résultats qui dépendent des seuils choisis et des images que l'on prend.

En effet, lorsque nous seuillons les coefficients d'ondelettes pour enlever le bruit, nous perdons aussi quelques caractéristiques de l'image. Il arrive après le débruitage que :

- Les coefficients gardés contiennent du bruit.
- Nous supprimons les petits coefficients qui définissent eux aussi la singularité.

En effet, la mise à zéro des coefficients $\langle f, g_m \rangle$, soustrait $\langle f, g_m \rangle g_m$ de f . Ceci introduit des oscillations dès que $\langle f, g_m \rangle$ n'est pas négligeable.

L'erreur en seuillage doux est, en général, plus grande qu'en seuillage dur.

Cas d'un signal

Pour le signal testé (régulier par morceaux), la réduction de bruit par seuillage dur semble plus performante en termes de rapport signal à bruit. Toutefois, des améliorations sont possibles tant sur la manière de "seuiller" (choix de l'ondelette et du seuillage) que sur la valeur du seuil.

Alors, les ondelettes sont-elles le remède miracle à nos applications en traitement d'image et de signal?

4.4 Autres applications

Les ondelettes constituent, certes, un outil universel performant produisant des résultats immédiats, facilement interprétables ou exploitables. Mais pour des applications particulières nécessitant l'extraction d'informations ciblées, il faudra mettre en branle et "fusionner" des méthodes avancées (dont vraisemblablement une méthode à base d'ondelettes) exploitant, cette fois-ci, des connaissances a priori.

Le paragraphe suivant résume quelques applications récentes du concept "analyse multirésolution", dont les plus remarquables relèvent du domaine médical et du domaine des télécommunications et multimédia.

4.4.1 Génie biomédical

L'imagerie médicale a révolutionné les pratiques médicales en devenant un outil couramment utilisé en médecine. Toutefois, les images médicales sont souvent affectées par un bruit de nature aléatoire dont la source se situe au niveau du processus d'acquisition. La résolution de ce problème permet d'aboutir à une amélioration des diagnostics et des actes chirurgicaux. Il est donc essentiel d'éliminer ce bruit pour rehausser les détails les plus fins qui peuvent être totalement masqués dans les données bruitées.

Dans le cadre de la réduction de bruit, plus communément connue sous le vocable de "débruitage", le succès de l'analyse multirésolution à base d'ondelettes est précisément assuré par sa capacité de décorrélation (séparation du bruit et du signal utile) et par la notion de parcimonie de sa représentation.

Cette parcimonie se matérialise par un faible nombre de coefficients d'ondelettes de forte amplitude représentant le signal utile supposé. Quant au bruit, il aura tendance à se répartir sur tous les coefficients d'ondelettes.[22]

4.4.2 Débruitage en imagerie médicale

Illustration en IRM

En imagerie par résonance magnétique (IRM), les limites pratiques de la durée d'acquisition imposent un compromis entre le rapport signal à bruit et la résolution de l'image. L'image RM est communément reconstruite par le calcul de la transformée de Fourier discrète inverse des données brutes.

Généralement, le débruitage par analyse multirésolution est réalisé par un seuillage uniforme ou adaptatif (doux ou dur) ; l'algorithme, décrit plus bas, offre une fonctionnalité supplémentaire, qui est l'adaptation au contexte spatial local. En raison de la moyenne du bruit qui dépend du signal, les coefficients d'ondelettes et de la fonction d'échelle (détails et approximations) d'une image RM bruitée sont des estimations biaisées. Pour éviter d'avoir un biais dépendant du signal, l'algorithme proposé est appliqué au module

carré de l'image RM. Le biais constant est alors soustrait à partir des coefficients d'échelle (approximations), et ensuite la racine carrée de l'image débruitée est calculée.[22]

Définition 4.4.1 *En statistique, le **biais** d'un estimateur est la différence entre la valeur de son espérance et la valeur de la variable aléatoire qu'il est censé estimer.*

Concrètement, si $\hat{\theta}$ est l'estimateur de θ , nous aurons :

$$Biais(\hat{\theta}) \equiv E[\hat{\theta}] - \theta$$

Analyse multirésolution à base d'ondelettes

K.Bartušek et al. se sont intéressés aux techniques d'amélioration de la qualité de l'image obtenue par résonance magnétique (IRM) en s'appuyant sur une analyse multirésolution à base d'ondelettes. Cette amélioration a été évaluée selon trois critères dont les plus pertinents sont le rapport signal à bruit en décibels (SNR_{dB}) défini en (4.4.1), et le contraste relatif de l'image défini en (4.4.2).

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{l_{moy}^2}{\sigma_N^2} \right) \quad (4.4.1)$$

avec

l_{moy} moyenne des valeurs d'intensité l dans une région d'intérêt homogène dans l'image (signal)

σ_N écart-type de la région d'intérêt sans signal (bruit de fond supposé gaussien)

Pour N_{acq} acquisitions, l'écart type du bruit est :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma_N}{\sqrt{N_{acq}}}$$

Le contraste de l'image illustrée en figure 35 est défini par :

$$C_{AB} = |I_A - I_B| \quad (4.4.2)$$

Le contraste relatif C_{rel} est défini comme le contraste par rapport à l'image d'intensité de référence I_{ref} :

$$C_{rel} = \frac{C_{AB}}{I_{ref}} = 2 \frac{|I_A - I_B|}{I_A + I_B} \quad (4.4.3)$$

avec I_A et I_B images moyennes (d'intensités), respectivement des zones A et B , comme représentés en figure 36.

Dans ce travail, les parties réelles et imaginaires de l'image RM sont filtrées séparément et l'évaluation de l'efficacité du filtrage est réalisée sur l'image complexe obtenue. L'influence des ondelettes choisies, ainsi que le type de filtrage adopté, a été évaluée à partir d'images fantômes et d'images RM expérimentales.

Le paragraphe suivant résume les principaux résultats obtenus :

- **format** : il est recommandé de traiter à la fois l'amplitude et la phase de l'image afin de supprimer un biais dans l'image résultante, cependant, la phase n'est pas toujours disponible ;

- **qualité** : il est recommandé d'utiliser un débruitage à seuillage dur pour des images avec un SNR élevé, alors que le débruitage à seuillage doux est utilisé de préférence pour les images de mauvaise qualité ;

- **structure**: les ondelettes de Haar ou de Daubechies devraient être utilisées pour des images ayant une structure simple (par exemple, l'image test fantôme), alors que les ondelettes de Meyer seront réservées aux images ayant une structure plus complexe (par exemple, image du cerveau) ;

- **finesse de la résolution** : si la préservation d'un maximum d'informations sur l'image est requise, il est conseillé d'utiliser le seuillage dur avec l'ondelette mère de Meyer ou l'ondelette mère de Daubechies d'ordre élevé ;

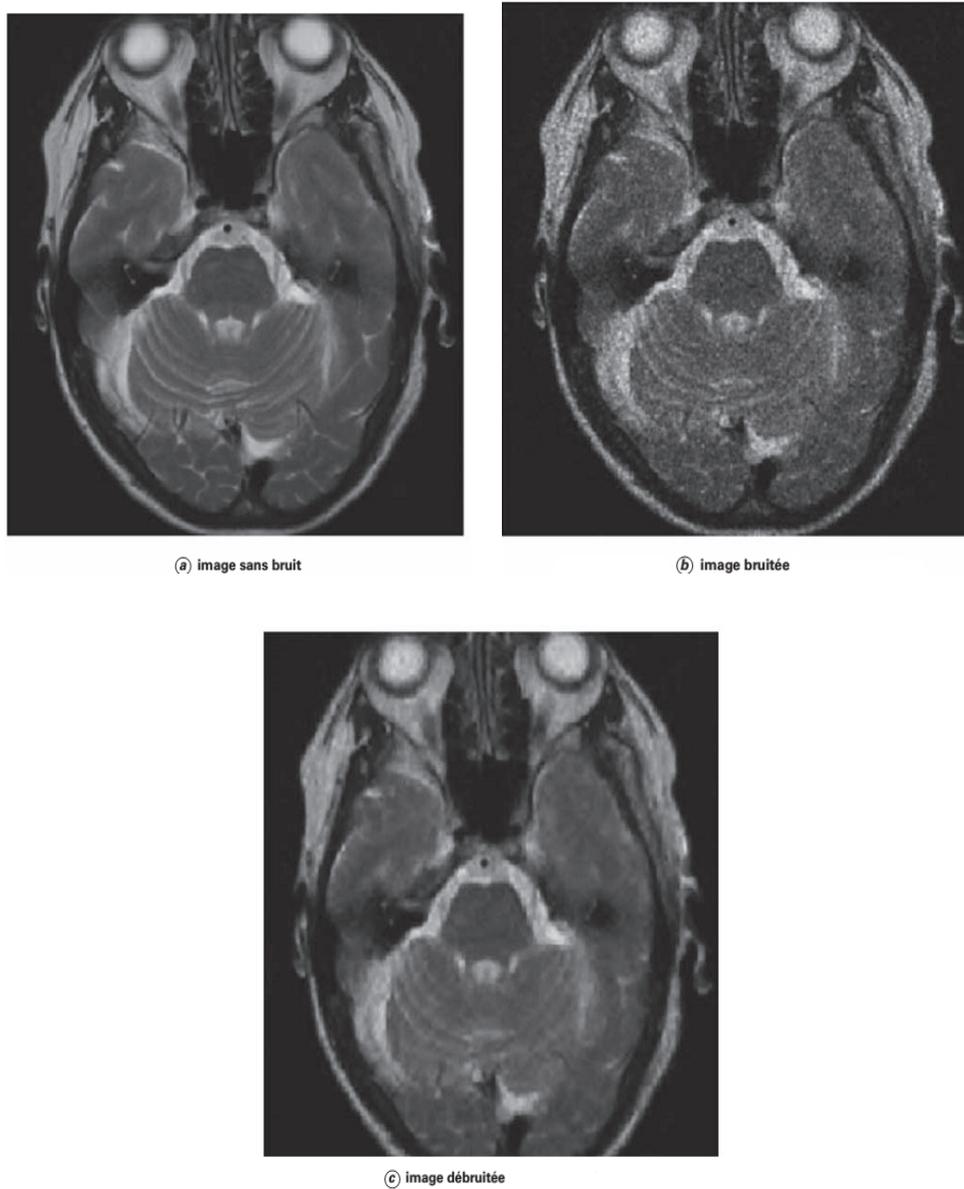


Figure 35 : Débruitage d'une image RM d'un cerveau (coupe axiale)

Approche heuristique

Par ailleurs, Aleksandra Pizurica et al. [23] ont proposé une alternative aux méthodes fondées sur un simple seuillage. Cette méthode est qualifiée de robuste et s'appuie sur une

analyse multirésolution à base d'ondelettes pour débruiter les images médicales. La méthode proposée s'adapte à différents types de bruits, ainsi qu'aux exigences et préférences de l'expert médical : un seul paramètre peut être utilisé pour équilibrer la préservation des détails pertinents par rapport au degré de réduction du bruit.

Une telle interaction avec l'utilisateur est utile pour la suppression du bruit dans les images ultrasonores.

L'algorithme proposé par Pizurica exploite les informations disponibles sur la corrélation des caractéristiques significatives de l'image à travers les échelles, en vue d'effectuer une classification préliminaire des coefficients d'ondelettes.

Cette classification est utilisée pour estimer, de façon empirique, les distributions statistiques des coefficients qui représentent, d'une part, les caractéristiques de l'image utile, et d'autre part le bruit.

L'adaptation au contexte spatial de l'image est obtenue en utilisant, dans le domaine des ondelettes, un indicateur de l'activité spatiale locale.

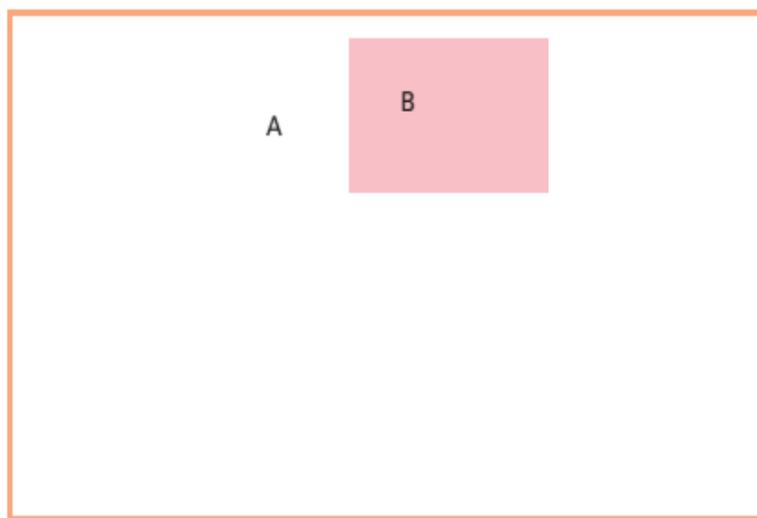


Figure 36 : Image RM d'un fantôme pour la définition du contraste

Notations et hypothèses $d_j^D(k)$ représentent les coefficients d'ondelettes (ou détails) à l'échelle de résolution 2^j ($1 \leq j \leq J$), à la position spatiale k et à l'orientation D . Trois orientations sont utilisées $D \in \{HL, LH, HH\}$ représentant les trois images de

détails à chaque échelle caractérisées par les directions horizontale, verticale et diagonale. La transformée en ondelettes est utilisée sans décimation, avec un nombre de coefficients identique à chaque échelle de résolution. L'ondelette préconisée est une ondelette spline quadratique.

Soit $X(k)$ une variable aléatoire qui prend les valeurs $x(k)$ du label binaire $\{0, 1\}$. L'hypothèse "le coefficient d'ondelette $d(k)$ représente le signal d'intérêt" est équivalente à l'événement " $X(k) = 1$ " et l'hypothèse contraire est équivalente à l'événement $X(k) = 0$.

L'estimation du signal débruité est donnée par une approche de Bayes :

$$\hat{g}(k) = \frac{\xi(k)\mu(k)}{1 + \xi(k)\mu(k)}d(k) \quad (4.4.4)$$

avec :

$$\xi(k) = \frac{p(d(k)/1)}{p(d(k)/0)} \quad \text{et} \quad \mu(k) = r \frac{p(e(k)/1)}{p(e(k)/0)}$$

où :

$$r = \frac{P(X(k) = 1)}{P(X(k) = 0)}$$

représente le rapport des probabilités a priori, et $e(k)$ un indicateur de l'activité spatiale locale.

Remarque 4.4.1 *Pour plus de détails sur les motivations et justifications de ces choix, se reporter à l'article référencé en [23].*

Algorithme Soit N le nombre de coefficients d'ondelettes. Pour chaque image de détails $W_j^D = \{W_{1,j}^D, \dots, W_{N,j}^D\}$, le masque, indiquant les positions des coefficients d'ondelettes les plus significatifs (représentant le signal d'intérêt), est d'abord estimé $\hat{x}_j^D = \{\hat{x}_{1,j}^D, \dots, \hat{x}_{N,j}^D\}$.

L'analyse ou classification "grossière à fine" s'effectue comme suit :

$$\hat{x}_{k,j}^D = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \hat{d}_j^D(k) \right| \left| \hat{g}_{j+1}^D(k) \right| \geq (K \hat{\sigma}_j^D)^2 \\ 0 & \text{si } \left| \hat{d}_j^D(k) \right| \left| \hat{g}_{j+1}^D(k) \right| < (K \hat{\sigma}_j^D)^2 \end{cases} \quad (4.4.5)$$

où

$\hat{\sigma}_j^D$ est l'estimation de l'écart-type du bruit dans l'image de détail $\hat{d}_j^D(k)$

et K le paramètre heuristique de réglage ou d'ajustement qui contrôle la notion de signal d'intérêt.

L'estimation de l'écart-type du bruit $\hat{\sigma}$ est réalisée par la dérivation médiane absolue des coefficients d'ondelettes dans la sous-bande HH (diagonale) à la résolution fixe divisée par 0,6745.

Par conséquent, le calcul de $\hat{\sigma}_J^D$ est donné par $(\hat{\sigma}_J^D)^2 = S_j^D \hat{\sigma}^2$,

où la constante S_j^D est calculée, pour toute sous-bande, à partir des coefficients du filtre passe-haut g et du filtre passe-bas h de l'analyse multirésolution :

$$\begin{aligned} S_j^{LH,HL} &= \left(\sum_k g^2(k) \right) \left(\sum_l h^2(l) \right)^{2j-1}, \\ S_j^{HH} &= \left(\sum_k g^2(k) \right)^2 \left(\sum_l h^2(l) \right)^{2(j-1)}. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

La classification (4.4.6) est initialisée par $\hat{y}_J^D = w_J^D$ où J est le niveau de résolution le plus grossier dans la décomposition en ondelettes.

L'estimateur (4.4.5) requiert des densités de probabilités conditionnelles, elles seront estimées de façon empirique à partir d'histogrammes.

En supposant que $P(X(k=1))$ puisse être estimée par le nombre fractionnaire de labels pour lesquels $\hat{x}(k) = 1$, le paramètre r peut être alors estimé par (4.4.8).

Par conséquent, l'estimateur pratique est :

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{r} \hat{\xi}(k) \hat{\eta}(k)}{1 + \hat{r} \hat{\xi}(k) \hat{\eta}(k)} d(k) \quad (4.4.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{\sum_{l=1}^N \hat{x}(l)}{\left(N - \sum_{l=1}^N \hat{x}(l) \right)} \\ \hat{\xi}(k) &= \frac{\hat{p}(m(k)/1)}{\hat{p}(m(k)/0)} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

et

$$\hat{\eta}(k) = \frac{\hat{p}(e(k)/1)}{\hat{p}(e(k)/0)}$$

où $m(k) = |d(k)|$ est le module du coefficient d'ondelettes.

Soient $S_0 = \{k : \hat{x}(k) = 0\}$ et $S_1 = \{k : \hat{x}(k) = 1\}$, les estimateurs $\hat{p}(m(k)/0)$ et $\hat{p}(e(k)/0)$ sont calculés, respectivement, à partir des histogrammes de $\{m(k) : k \in S_0\}$ et $\{e(k) : k \in S_0\}$.

Il en est de même pour $\hat{p}(m(k)/1)$ et $\hat{p}(e(k)/1)$ qui seront calculées à partir des histogrammes pour $k \in S_1$.

Le calcul des rapports $\hat{\xi}(k)$ et $\hat{\eta}(k)$ à partir des histogrammes normalisés introduit des erreurs d'où l'intérêt d'utiliser un *fitting* (lissage) approprié.

Définition 4.4.2 *En traitement d'images, le **lissage** est une opération importante, utilisée pour atténuer un bruit qui corrompt l'information. Cette opération consiste, le plus souvent, à appliquer à l'image un filtre linéaire passe-bas.*

*En mathématique, le **lissage** est une technique qui consiste à réduire les irrégularités et singularités d'une courbe.*

Résumé de l'algorithme De par toutes ces considérations, l'algorithme proposé peut être résumé comme suit :

1. Calculer la transformée en ondelettes au niveau de résolution J (dans notre cas $J = 4$) ;
2. Initialiser $\hat{y}_j^D = \hat{d}_j^D$, $D \in \{HL, LH, HH\}$;
3. Pour chaque orientation D et pour chaque échelle 2^j , $j = 1, \dots, J - 1$:
 - (a) pour toute position spatiale $k = 1, \dots, N$:
 - i. appliquer la relation (4.4.6), ce qui permet d'obtenir l'estimateur du label $\hat{x}(k)$,
 - ii. calculer l'indicateur de l'activité spatiale locale $e(k)$;
 - (b) calculer :

$$\hat{r} = \frac{\sum_{l=1}^N \hat{x}(l)}{\left(N - \sum_{l=1}^N \hat{x}(l)\right)}$$

(c) définir $S_0 = \{k : \hat{x}(k) = 0\}$ et $S_1 = \{k : \hat{x}(k) = 1\}$ et estimer $\hat{p}(m/1)$, $\hat{p}(e/0)$, $\hat{p}(e/1)$ à partir des histogrammes correspondants de $m(l) = |d(l)|$ et $e(l)$ pour $l \in S_0$ et pour $l \in S_1$;

(d) lisser $\log(\xi(k))$ et $\log(\eta(k))$:

$$\hat{\xi}(k) = \frac{\hat{p}(m(k)/1)}{\hat{p}(m(k)/0)} \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(k) = \frac{\hat{p}(e(k)/1)}{\hat{p}(e(k)/0)}$$

(e) pour k allant de 1 à N :

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{r}\hat{\xi}(k)\hat{\eta}(k)}{1 + \hat{r}\hat{\xi}(k)\hat{\eta}(k)}d(k)$$

4. Appliquer la transformée en ondelettes inverse.

Performances La figure suivante montre qu'en matière de qualité, le débruitage par la méthode proposée surpasse clairement le débruitage par seuillage. Les images RM ont été fournies par l'hôpital universitaire de Gand (Belgique).

Le niveau optimal de décomposition en ondelettes est $J = 4$. La valeur du paramètre de réglage K , qui semble optimale, est 3 en échographie et 2 en IRM. L'augmentation de ce paramètre peut lisser l'image, et par conséquent occasionner une perte d'informations. Une fenêtre de taille 3×3 est intéressante en termes de rapport signal à bruit (SNR) aussi bien en échographie qu'en IRM.

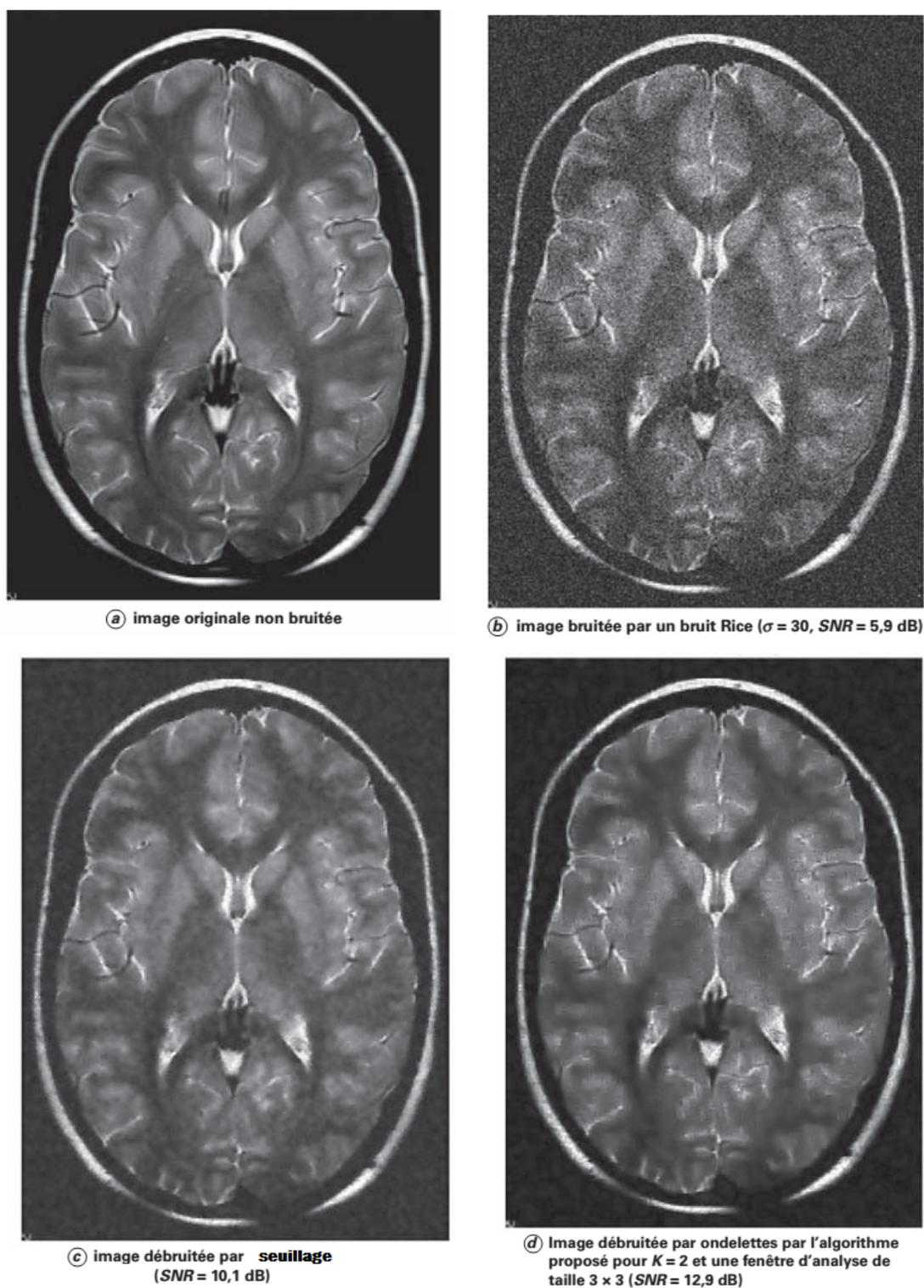


Figure 37 : Illustration du débruitage sur une image RM artificiellement bruitée

L'analyse multirésolution en vision informatique

"Matlab dispose de fonctions de calcul de base ainsi que de bibliothèques plus spécialisées, appelées boîtes à outils (angl. Toolboxes). Nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, à l'une d'elles en particulier, la boîte à outils ondelettes, une collection de fonctions de MathWorks conçues pour l'analyse en ondelettes, mais non incluses dans la boîte à outils de traitement d'image de Matlab."

5.1 Description de la boîte à outils ondelettes

La boîte à outils ondelettes se décompose en plusieurs familles de fonctions : familles d'ondelettes, ondelettes continues, discrètes, paquets d'ondelettes ...

La commande << **help wavelet** >> nous donne une liste de toutes les instructions nécessaires à la manipulation des ondelettes.

5.2 Prise en main de la boîte à outils

5.2.1 La commande << wavemenu >>

Cette commande ouvre l'interface graphique de prise en main de la boîte à outils. Cette interface sert à utiliser, de façon visuelle, les différentes fonctions proposées sur des signaux (1D) ou des images (2D), sans connaître les commandes Matlab nécessaires à la création d'un programme.

>> **wavemenu**

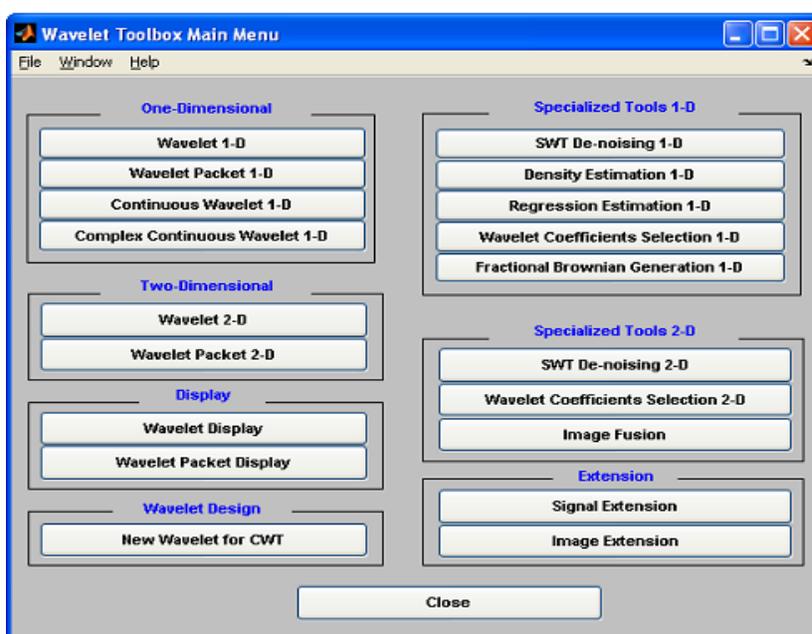


Figure 38 : Exécution de la commande <<wavemenu >>

Wavemenu 1D

Les fonctions à une dimension concernent l'analyse multirésolution de signaux avec les ondelettes prédéfinies de la boîte à outils, l'analyse en paquet d'ondelettes, les ondelettes continues réelles et complexes.

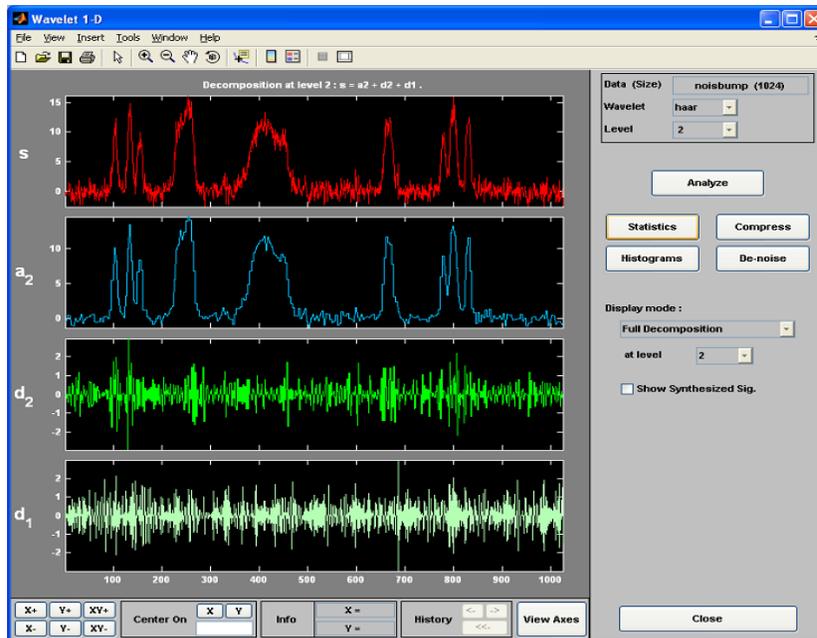


Figure 39 : La commande << **wavemenu** >> pour les signaux (1D)

Wavemenu 2D

Dans la partie 2D, nous trouvons des fonctions d'analyse multirésolution 2D et de paquets d'ondelettes 2D.

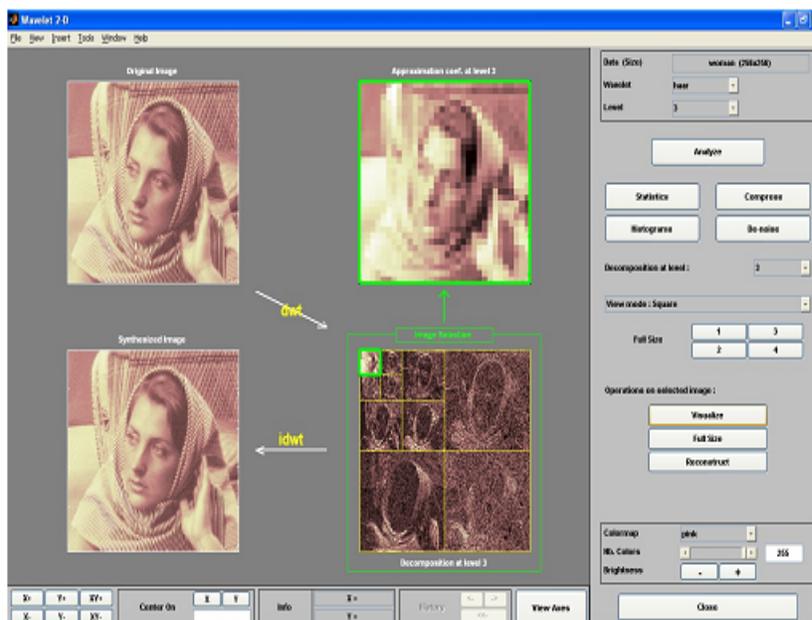


Figure 40 : La commande <<wavemenu >> pour les images (2D)

5.2.2 La commande <<wavedemo >>

La commande <<wavedemo>> permet d'étudier des exemples d'analyse multirésolution à l'aide de commandes du langage de programmation Matlab.

>> wavedemo

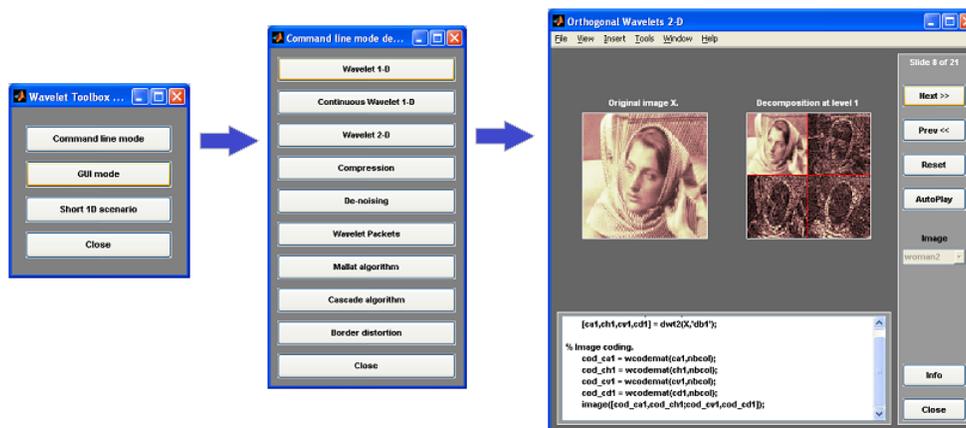


Figure 41 : Menu de la commande <<wavedemo>>

La partie Command line mode détaille la programmation des fonctions d'analyse multirésolution.

Dans le cas de la figure ci-dessus, nous avons choisi, dans le menu Command line mode, la partie Wavelet 2D, ce qui a permis d'illustrer le codage de l'image proposée en exemple.

5.3 Langage de programmation

5.3.1 Analyse multirésolution 1D

Analyse à un niveau de décomposition

Dans l'exemple ci-dessous, nous calculons la transformée (analyse) d'un signal au premier niveau de résolution.

a) Lecture d'un signal et affichage :

```
>> clear
>> load noisbump.mat; sig=noisbump; % Chargement du signal.
>> whos %Fournit la liste des variables dans l'espace de travail (workspace).
    Name      Size      Bytes class
noisbump    1 × 1024    8192 double array
    sig      1 × 1024    8192 double array
>> figure;plot(sig);
```

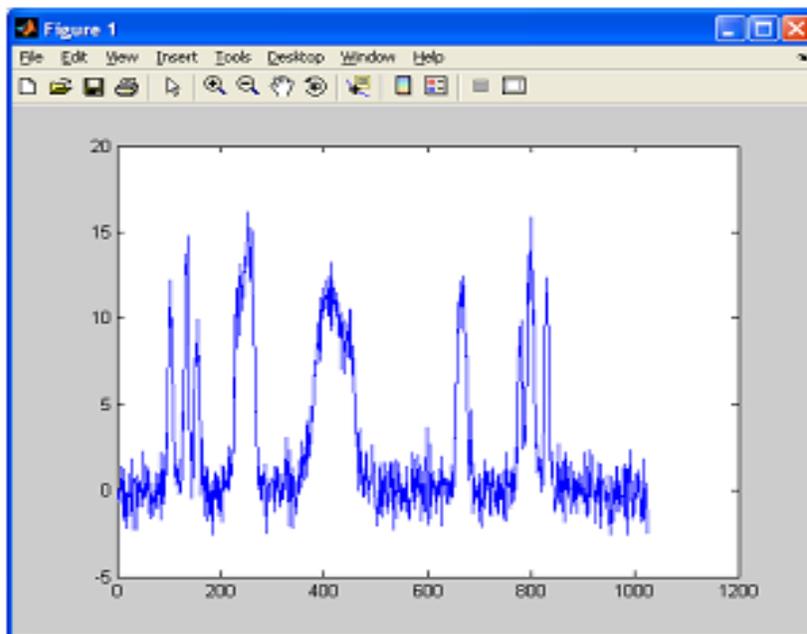


Figure 42 : Signal analysé au premier niveau de résolution

b) Analyse multirésolution à un niveau et affichage du résultat :

```
>> clear
>> [a,d]=dwt(sig, 'db2'); % dwt effectue la transformée en ondelettes discrète des
variables d'entrée.
>> figure;
>> subplot(2,2,1); plot(sig); subplot(2,2,3); plot(a); subplot(2,2,4); plot(d);
```

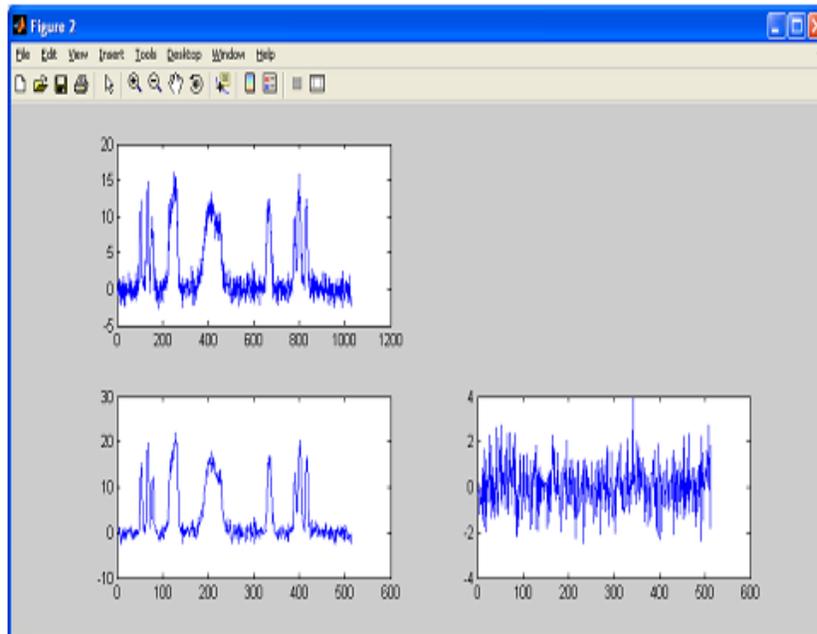


Figure 43 : AMR à un niveau de résolution et affichage du résultat

Analyse à trois niveaux de décomposition suivie d'une reconstruction

Dans l'exemple ci-dessous, nous calculons l'analyse d'un signal à trois niveaux de résolution, ensuite effectuons la reconstruction (synthèse). Cette transformée utilise les ondelettes *symlets d'ordre 3*.

b) Transformation à trois niveaux de résolution et affichage du résultat :

```
>> clear a;clear d;
>> [c,l]=wavedec(sig,3,'sym3');
% wavedec effectue un décomposition en ondelettes 1D
>> ap3=appcoef(c,l,'sym3',3); % appcoef représente le coefficient d'approximation
>> ap2=appcoef(c,l,'sym3',2);
>> ap1=appcoef(c,l,'sym3',1);
>> d3=detcoef(c,l,3); % detcoef représente le coefficient de détails.
>> d2=detcoef(c,l,2);
>> d1=detcoef(c,l,1);
>> figure;
```

```

>> subplot(4,2,1);plot(sig);
>> subplot(4,2,3);plot(ap1);
>> subplot(4,2,4);plot(d1);
>> subplot(4,2,5);plot(ap2);
>> subplot(4,2,6);plot(d2);
>> subplot(4,2,7);plot(ap3);
>> subplot(4,2,8);plot(d3);

```

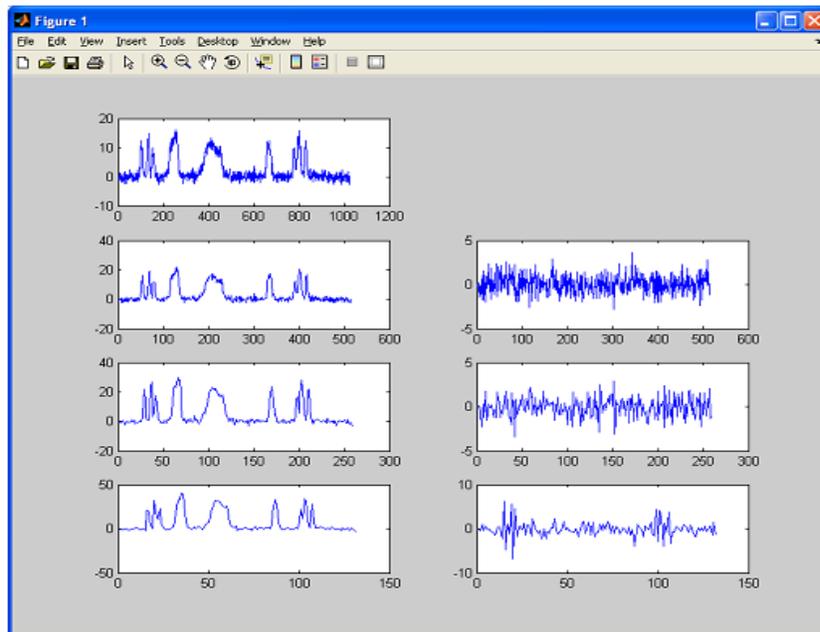


Figure 44 : AMR à trois niveaux de résolution et affichage du résultat

b) Reconstruction à trois niveaux de résolution et affichage du résultat :

```

>> orig=waverec(c,1,'sym3');
% waverec reconstruit le signal en se basant sur une décomposition en ondelettes.
% Celle-ci utilise l'ondelette symlet
>> figure;subplot(2,2,1);plot(sig);
>> subplot(2,2,2);plot(orig);
>> subplot(2,2,3);plot(sig-orig);

```

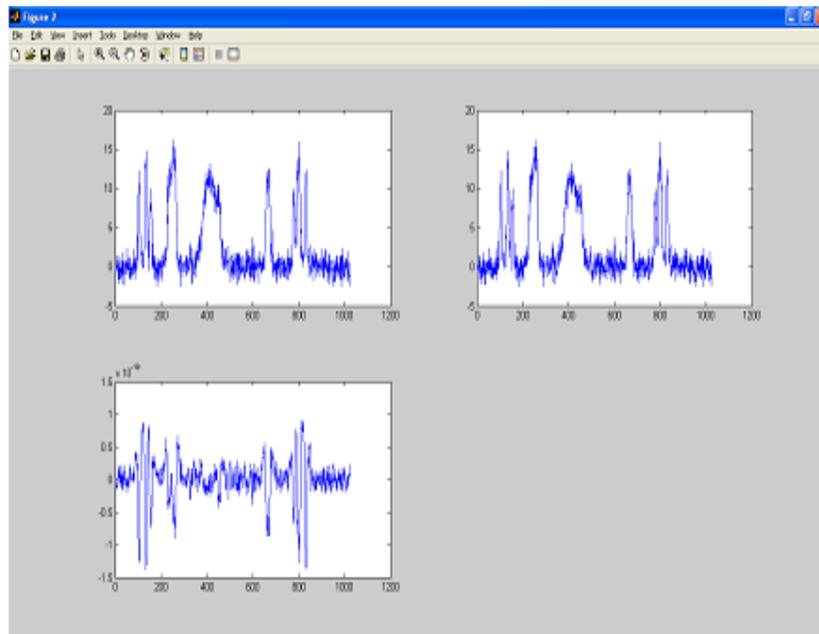


Figure 45 : Reconstruction du signal

5.3.2 Analyse multirésolution 2D

Analyse à un niveau de résolution :

Dans l'exemple qui suit, nous calculons la transformée d'une image au premier niveau de résolution, éliminons des détails et reconstruisons l'image moins détaillée.

b) Analyse au premier niveau de résolution et affichage du résultat :

```
>> close all
>> clear
>> img=imread('vue_uchon.jpg');
>> img=imdouble(rgb2gray(img));
```

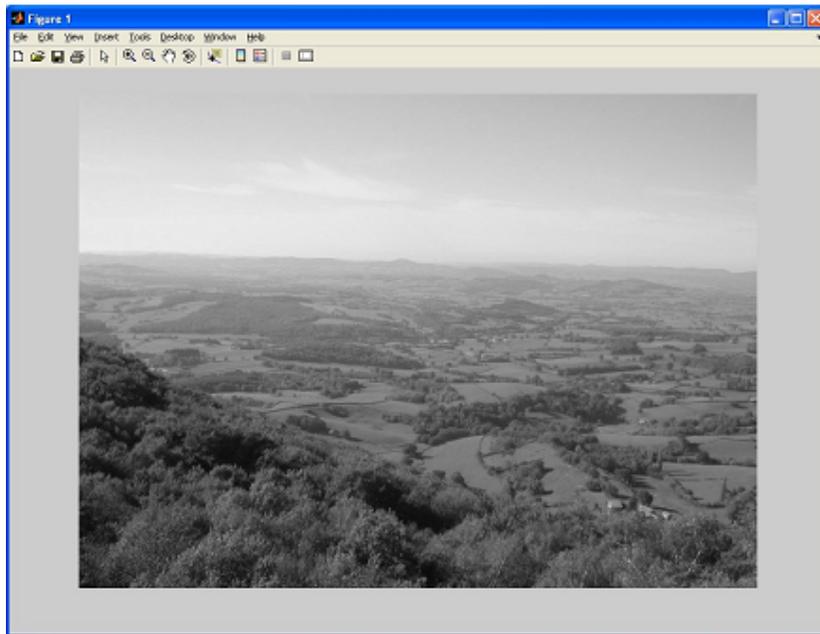


Figure 46 : Affichage de l'image

```
>> [ap,dh,dv,dd]=dwt2(img,'db4');  
% dwt2 décompose en ondelette l'image en utilisant l'ondelette de Daubechies.  
>> figure;imshow([ap,dh;dv,dd]);  
% imshow va permettre l'affichage de l'image d'approximation ainsi que celles de  
détails. (gauche).  
>> figure;imshow([ap/2,dh*8;dv*8,dd*8]);  
% La qualité des images de détails est améliorée. (droite)
```

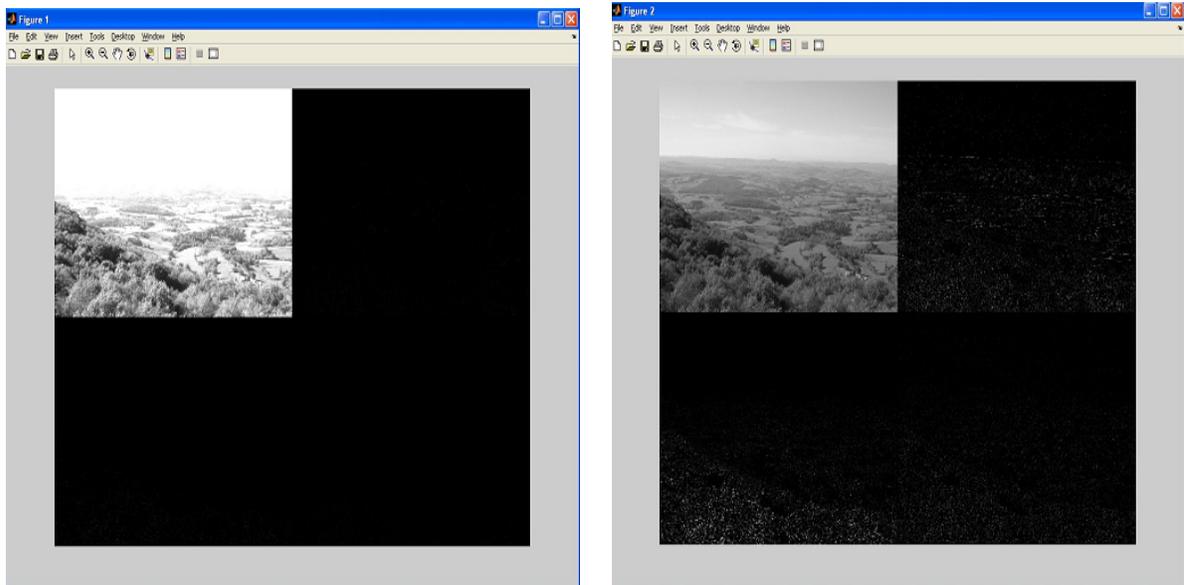


Figure 47 : Affichage des images d'approximation et de détails

>> `figure;mesh([ap,dh;dv,dd]);`

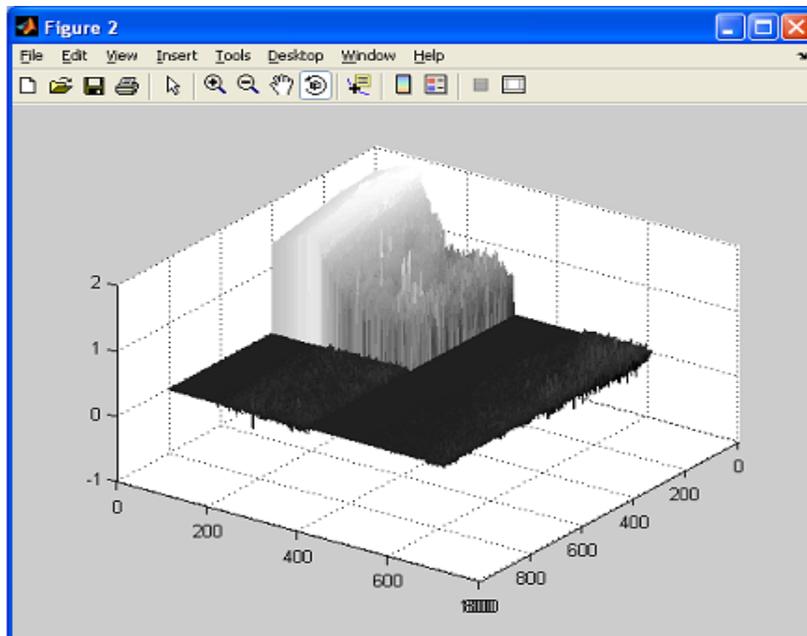


Figure 48 : Représentation de l'approximation et des détails dans l'espace

b) Annulation des détails verticaux et diagonaux :

```

>> size(dv)
ans =
    303    403
>> dv=zeros (303,403); % Annulation des détails verticaux.
>> size(dd)
ans =
    303    403
>> dd=zeros (303,403); % Annulation de détails horizontaux.
c)Reconstruction et affichage :
>> new=idwt2 (ap,dh,dv,dd,'db4');
% idwt effectue la transformation en ondelette inverse.
>>figure;imshow(new);

```

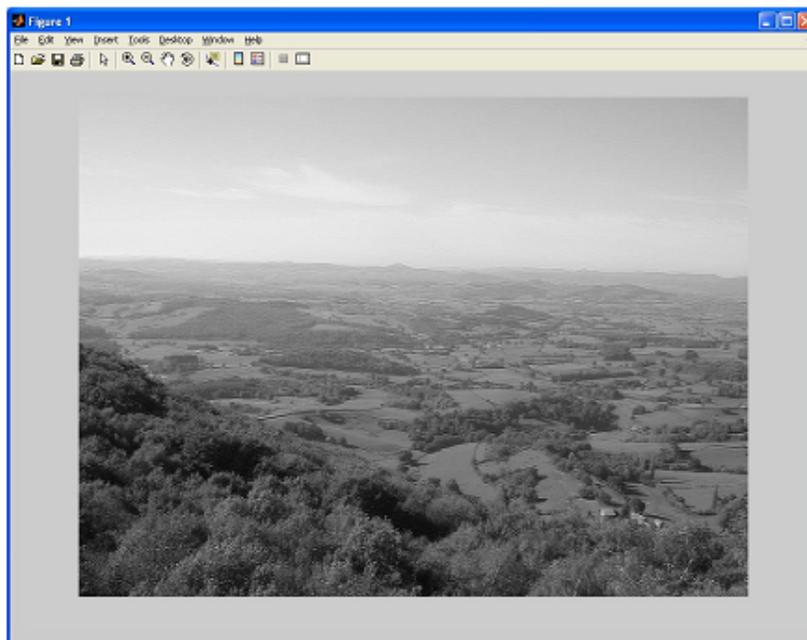


Figure 49 : Affichage de l'image reconstruite

Analyse à deux niveaux de résolution :

Nous allons calculer la transformée d'une image à deux niveaux de résolution.

a)Analyse à deux niveaux de résolution et affichage du résultat :

```
>> close all
>> clear
>> img=imread('lena.jpg');
>> img=im2double(rgb2gray(img));
>> figure;imshow(img);

>> [c,s]=wavedec2(img,2,'haar');
% La décomposition est effectuée au moyen de l'ondelette de Haar.
>> a2=appcoef2(c,s,'haar',2);
>> a1=appcoef2(c,s,'haar',1);

>> figure;
>> subplot(1,3,1);imshow(img);
>> subplot(1,3,2);imshow(a1/2);
>> subplot(1,3,3);imshow(a2/4);
```

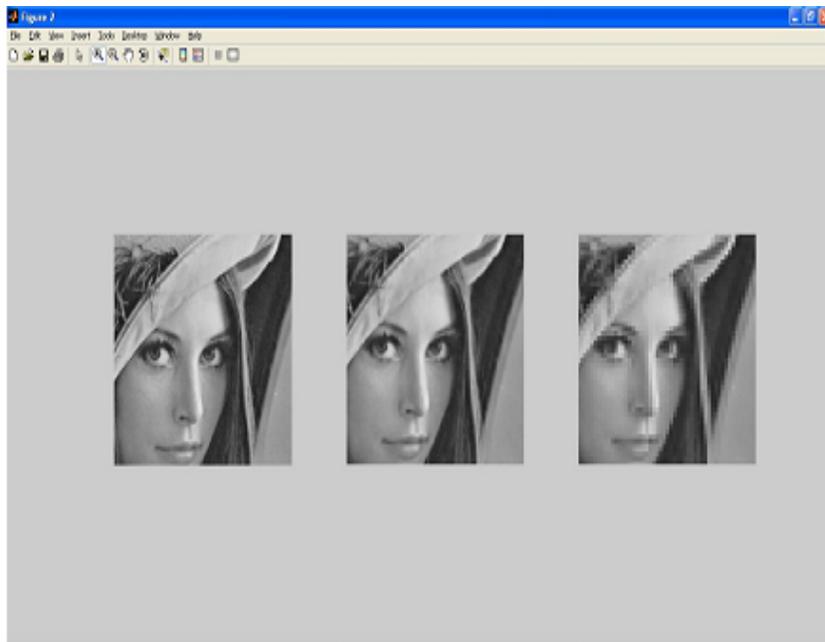


Figure 50 : Décomposition à deux niveaux de l'image de Léna

```
>> dh2=detcoef2('h',c,s,2);
>> dh1=detcoef2('h',c,s,1);
```

```
>> dv2=detcoef2('v',c,s,2);  
>> dv1=detcoef2('v',c,s,1);  
>> dd2=detcoef2('d',c,s,2);  
>> dd1=detcoef2('d',c,s,1);  
>> figure;  
>> subplot(1,3,1);imshow(img);  
>> subplot(1,3,2);imshow([a1/2,dh1;dv1,dd1]);  
>> subplot(1,3,3);imshow([a2/4,dh2;dv2,dd2]);
```

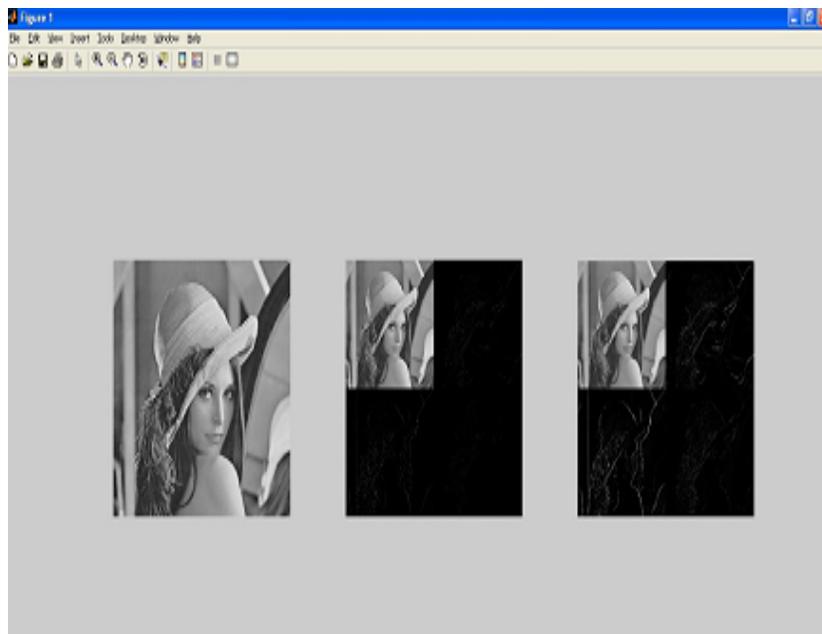


Figure 51 : AMR à deux niveaux de résolution

5.4 Conclusion

La boîte à outils ondelettes de Matlab fournit de nombreuses fonctions, simples à mettre en oeuvre et très efficaces, pour développer rapidement des prototypes d'applications de traitement du signal et des images. Elle complète les boîtes à outils traitement du signal (signal processing) et traitement d'images (image processing).

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à l'analyse multirésolution et à l'apport de celle-ci autant dans le domaine des mathématiques que dans les autres disciplines. Notre but étant de couvrir et de synthétiser cette pratique, pour ensuite en présenter l'essentiel.

Dans un premier temps, nous avons retracé l'histoire de l'AMR, ce qui correspondait à l'introduction. Puis, nous sommes passés au champ lexical de cette analyse, dans le premier chapitre.

En second lieu, la théorie des ondelettes et son développement sont abordés, pour ensuite, passer à l'analyse multirésolution : de l'introduction des bases qui la définissent, à ses algorithmes de décomposition et de reconstitution. Nous avons énuméré quelques unes des nombreuses applications de cette pratique en quatrième partie de ce travail.

Au final, nous avons appréhendé le côté informatique de l'analyse multirésolution en présentant quelques programmes utiles à cet effet.

L'analyse multirésolution est un sujet récent et dont les applications foisonnent. C'est un domaine en phase de développement dont les richesses, encore inexploitées, constituent une véritable mine d'or pour la recherche. En particulier, elle permet l'épanouissement de certains domaines, justement par l'utilisation judicieuse de cet outil.

Notre objectif, à travers ce travail, était avant tout de rendre accessible et moins austère cette notion et susciter l'envie de s'informer sur ce thème de façon plus approfondie.

Bibliographie

- [1] Bartusek K., Prinosil J., et Smekal Z. Wavelet-based de-noising techniques in MRI. *Computer methods and programs in biomedecine*, 104(3), p. 480 – 488. 2011.
- [2] Beylkin G., Brewster M. et Gilbert A. A multiresolution strategy for numerical homogenization of nonlinear ODEs, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 5, p. 450 – 486. 1998.
- [3] Brewster M., Beylkin G. A multiresolution strategy for numerical homogenization, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 2, p. 327 – 349. 1995.
- [4] Bulke Hubbard B. *Ondes et Ondelettes, la Saga D'un Outil Mathématique, Pour la Science*, Diffusion Belin, Paris. 1995.
- [5] Burt P.J., Adelson E.H. The Laplacien Pyramid as a Compact Image Code. *IEEE Trans. Commun.*, vol COM-31, no. 4, p. 532 – 540. 1983.
- [6] Coifman R., Wickerhauser M. Adapted wave for denoising for medical signals and images. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 14(5); p 578 – 586. 1995.
- [7] Daubechies I. *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA. 1992.
- [8] Donoho D.L., Johnstone I.M. *Ideal Denoising in an Orthonormal Basis Chosen From a Library of Basis*. Department of Statistics, Stanford University. 1994.

- [9] Donoho D.L. Denoising by Soft Thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1994.
- [10] Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., et Picard D. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90(432), p. 1200 – 1224. 1995.
- [11] Dumont S. Ondelettes, Homogénéisation Périodique et Elasticité, PhD thesis, Université de Montpellier II. 1996.
- [12] Farge M., Kevlahan N., Perrier V. et Schneider K. Turbulence analysis, modeling and computing using wavelets, in J. Van Den Berg (ed.), *Wavelets and Physics*, Cambridge University Press, chapter 4, p. 117 – 200. 1999.
- [13] Goedecker S. *Wavelets And their Applications, for the Solution of Partial Differential Equations in Physics*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne. 1998.
- [14] Gonzales R.C., Woods R.E., Eddins S.L. *Digital Image Processing using MATLAB*. 2^e Édition, Gatesmark Publishing, Etats Unis d'Amérique. 2009.
- [15] Grace Chang S., Bin Yu, Veterli M. Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression. *IEEE Transactions. Image Processing*, Vol. 9, p. 1532 – 1546. 2002.
- [16] Lakhwinder Kaur, Savita Gupta, Chauhan R.C. Image denoisind using Wavelet Thresholding. *Third Conference on Computer Vision, Graphics and Images Processing*. India. 2002.
- [17] Mallat S. *Une Exploration des Signaux en Ondelettes*. Editions de l'école Polytechnique, France. 2000.
- [18] Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing : The Sparse Way*. 3^e Édition, Academic Press, New York. 2009.

- [19] Meyer Y., Jaffard S., Rioul O. L'analyse par ondelettes. Hermés, Paris, p. 28 – 37.1987.
- [20] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J.M. Les Ondelettes et leurs Applications. Hermés, Lavoisier, Paris.2003.
- [21] Ouahabi A. Introduction à l'analyse multirésolution. Analyse multirésolution pour le signal et l'image. Hermés, Lavoisier, Paris, p. 15 – 159. 2012.
- [22] Ouahabi A. Filtrage numérique à base d'ondelettes -Applications en imagerie médicale. Techniques de l'ingénieur. Paris. 2013.
- [23] Pižurica A., Philips W., Lemahieu I., et Acheroy M. A Versatile Wavelet Domain Noise Filtration Technique for Medical Imaging. IEEE Transactions on Medical Imaginig, 22 (3), p. 323 – 331. 2003.

Résumé

L'analyse multirésolution est un sujet récent et dont les applications foisonnent. C'est un domaine en phase de développement dont les richesses, encore inexploitées, constituent une véritable mine d'or pour la recherche. En particulier, elle permet l'épanouissement de certains domaines, justement par l'utilisation judicieuse de cet outil.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à l'analyse multirésolution et à l'apport de celle-ci autant dans le domaine des mathématiques que dans les autres disciplines. Notre but étant de couvrir et de synthétiser cette pratique, pour ensuite en présenter l'essentiel.

Dans un premier temps, nous avons retracé l'histoire de l'AMR, ce qui correspondait à l'introduction. Puis, nous sommes passés au champ lexical de cette analyse, dans le premier chapitre. En second lieu, la théorie des ondelettes et son développement sont abordés, pour ensuite, passer à l'analyse multirésolution : de l'introduction des bases qui la définissent, à ses algorithmes de décomposition et de reconstitution. Nous avons énuméré quelques unes des nombreuses applications de cette pratique en quatrième partie de ce travail.

Au final, nous avons appréhendé le côté informatique de l'analyse multirésolution en présentant quelques programmes utiles à cet effet.