

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques**

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Présenté par

Snani Boualem

Hassani Halim

Sous le thème

**Transformation de Fourier
et
méthodes des ondelettes**

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	F. BOUHMILA	M. C. A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
Mme.	H. BECHIR	M. C. B	Université A-Mira de Béjaia.	Rapporteur.
Mr.	R. BENMEZIANE	M. A. A	Université A-Mira de Béjaia.	Examineur.

Année 2013–2014

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Le Dieu de nous avoir donné la foi, la patience, le courage ainsi que la force afin de pouvoir réaliser ce modeste travail.

*Nous tenons à remercier notre promotrice, Madame **H. BECHIR** pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité qui ont contribué à faire de ce mémoire ce qu'il est aujourd'hui.*

*Nos remerciements sont aussi adressés à Monsieur **F. BOUHMILA** et Monsieur **R. BENMEZIANE** qui nous font l'honneur de juger notre travail. Nous remercions aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à notre formation.*

Nos profonds remerciements vont à nos chers parents, frères et sœurs, pour leur soutien et leur confiance en nous, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à notre formation.

Dédicaces

Snani Boualem

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mon père (rahimah ALLAH).

Ma très chère maman qui m'a encouragé et soutenu tout au long de mes études.

*Mes frères : **Mourad** ; **Oualid** ; **Fayçal**.*

Mes sœurs et toutes leurs petites familles.

Tous mes proches.

Tous mes amis dont cette page ne suffirait pas pour les citer tous.

Tous ceux qui m'ont soutenu pour que ce travail soit accompli.

Dédicaces

Hassani Halim

Je dédie ce modeste travail à :

*Mes parents, mes frères : **Anis ; Amine ; Mahdi.***

Mes oncles et tantes, surtout **dada Larbi**, qui a toujours été à mes côtés.

Mon cher cousin et ami intime **Zine**, qui m'a sans cesse encouragé afin d'achever ce travail.

Mes amis intimes : **Nordine, Fouad, A/Hamid, Mazigh et Lyes.**

Mon ami et collègue : **Brahmi Farid** qui m'a soutenu et conseillé.

Tous mes amis dont cette page ne suffirait pas pour les citer tous.

Tous ceux qui m'ont soutenu pour que ce travail soit accompli.

Table des matières

Notations	1
Introduction générale	2
1 Transformation de Fourier	4
1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	4
1.2 Propriétés de la transformée de Fourier	5
1.2.1 Propriétés de régularité	5
1.2.2 Parité, translation, changement d'échelle, modulation	5
1.2.3 Théorème d'échange	6
1.3 Convolution des fonctions	6
1.4 Inverse de la transformée de Fourier	7
1.4.1 Formule d'inversion de Fourier	7
1.5 Transformée de Fourier dans L^1 et convolution	8
1.5.1 Dérivée de la transformée	8
1.6 Transformation de Fourier dans L^2	8
1.6.1 Théorème de Plancherel	9
1.6.2 Théorème de Plancherel-Riesz	9
1.6.3 Théorèmes utiles	10
1.7 Propriétés élémentaires de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R})$	11
1.7.1 Formule d'échange	11
1.8 Transformée de Fourier dans L^2 et convolution	11
1.9 Transformation de Fourier à plusieurs variables	12

2 Les Ondelettes	14
2.1 Transformation de Gabor	14
2.2 Exemples d'ondelettes	19
2.2.1 L'ondelette de Haar :	19
2.2.2 Les dérivées gaussiennes	20
2.2.3 L'ondelette de Morlet	21
2.3 Conditions d'admissibilité:	21
2.3.1 Définition d'un signal:	28
2.4 Décomposition continue en ondelettes	28
2.4.1 Théorème de reconstruction	35
2.5 Exemples de transformées en ondelettes	37
2.6 Ondelettes régulières	38
3 Application	42
3.1 Limite de la transformée de Fourier	42
3.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante (Exemple d'un signal musical) .	47
3.2.1 Idée de fenêtre	47
3.2.2 Exemples de fenêtres	48
3.3 Comparaison Fourier-Gabor et limites de la transformée de Gabor	49
3.3.1 Analyse spectrale locale. Comparaison spectres Fourier / ondelettes	51
3.3.2 Relation entre le spectre de Fourier et le spectre moyen en ondelettes	52
3.3.3 Spectres à décroissance exponentielle.	53
Conclusion	56
Bibliographie	56

Notations

$L^p(\mathbb{R})$	$\left\{ f : f \text{ mesurable et } \int_{\mathbb{R}} f(t) ^p dt < \infty \right\}$
$L^\infty(\mathbb{R})$	{classes de fonctions essentiellement bornées}
$\int_{\mathbb{R}}$	Intégrale de Lebesgue
$\chi_{[a,b]}$	Indicatrice de l'intervalle $[a, b]$, $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\ f\ _p$	$\left(\int_{\mathbb{R}} f(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$
$\ f\ _\infty$	$\min \{A > 0 \mid f \leq A \text{ pp}\}$
μ	Mesure de Lebesgue
$\mathcal{F}(f)$ ou \widehat{f}	Transformée de Fourier de f (Contenu fréquentiel)
$\overline{\mathcal{F}}(f)$	Transformée de Fourier inverse de f
$T\psi$	La transformée d'ondelette continue
\mathcal{F}_ρ	La transformée de Fourier à fenêtres glissante
W	La transformée en ondelettes d'une fonction
id	L'application identité
$I(s, t)$	Intervalle d'extrémités s et t

Introduction générale

Le traitement de signal a pour principal objectif la description des signaux liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte, les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle, et parmi ces dernières, la plus célèbre et la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier(1822). Cette transformation permet d'explorer la composition fréquentielle du signal et par ses propriétés de lui appliquer facilement des opérateurs de filtrage. Lors de cette transformation, le signal est décomposé sur un ensemble de signaux "base" qui sont les cosinus et les sinus ou l'exponentielle imaginaire, mais, très tôt dans l'histoire du traitement de signal, il est apparu que la décomposition obtenue n'est pas toujours satisfaisante. La première transformation en ondelettes (le nom n'est pas encore utilisé) fut proposée par Haar en 1910; il serait plus judicieux de parler alors de «paléo-ondelette». La transformée en ondelettes est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles. Le premier à avoir utilisé la méthode et proposé le nom d'ondelettes fut Jean Morlet(1983).

Les recherches tant théoriques qu'appliquées se sont très largement développées ces dernières années au point que les ondelettes sont maintenant très à la mode et qu'on a parfois voulu en faire l'outil le plus adapté à tous les problèmes. Cet optimisme excessif a naturellement conduit à quelques déconvenues. Un volume annuel de plusieurs centaines de publications sur le sujet et une bonne dizaine de congrès internationaux lui étaient consacrés. Les applications les plus prometteuses qui semblent se dégager se retrouvent dans les domaines de l'analyse vocale, de l'analyse des signaux radar et dans le domaine de la compression des images. Les thématiques de recherche s'orientent vers les transformées

de signaux périodiques ou à support compacts, les transformées multidimensionnelles, les transformées adaptées au problème, les analyses multi-ondelettes, la déconvolution des signaux bruités, les approches multi-échelles dans les algorithmes stochastiques et bien entendu la mise en œuvre des algorithmes de transformée en ondelettes discrète.

Le travail que nous avons réalisé est composé de trois chapitres. Le premier est consacré aux transformations de Fourier; nous y trouverons l'ensemble des définitions et des propriétés. Le second nous parle des ondelettes d'une manière générale et de leurs transformations d'une façon particulière. Le dernier chapitre est débuté par un programme matlab qui permet de calculer à la fois l'ondelette d'un signal, les coefficients de cette dernière à une certaine échelle a (la dilatée), ainsi que le graphe qui leur est associé, et nous avons cité quelques cas où nous comprenons réellement l'handicap de la transformée de Fourier.

Transformation de Fourier

En analyse, pour les fonctions non périodiques, la transformation de Fourier est une approche analogue à celle des séries de Fourier. Elle permet de leur associer un spectre en fréquences et d'obtenir l'expression de la fonction comme « somme infinie » des fonctions trigonométriques de toutes les fréquences qui forment son spectre. Une telle sommation se présente donc sous forme d'intégrale. L'analyse non standard permet de la présenter sous forme d'une série et justifie le point de vue intuitif. Séries et transformation de Fourier constituent deux outils de base de l'analyse harmonique.

La transformée de Fourier \mathcal{F} est une opération qui transforme une fonction intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière.

1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f , notée \widehat{f} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tx} dt \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Remarque 1.1.1

L'intégrale précédente a un sens puisque

$$|f(t)e^{-2i\pi tx}| = |f(t)| \quad (1.1.2)$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(t)e^{-2i\pi tx} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } f(t)e^{-itx} \in L^1(\mathbb{R}) \quad (1.1.3)$$

1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

1.2.1 Propriétés de régularité

Lemme 1.2.1 (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{f}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

Proposition 1.2.1 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

- a) \widehat{f} est bien définie.
- b) \widehat{f} est uniformément bornée et

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| \leq \|f\|_1 = \mathcal{F}(|f|)(0) \quad (1.2.1)$$

Proposition 1.2.2 (Linéarité)

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g) \quad (1.2.2)$$

C'est à dire que \mathcal{F} est une application linéaire qui de plus est uniformément continue de $L^1(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$.

1.2.2 Parité, translation, changement d'échelle, modulation

Théorème 1.2.1 Soit $f \in L^1$.

- a) Si f est paire (resp. impaire) alors \widehat{f} est paire (resp. impaire)
- b) Si f est réelle alors $\widehat{f}(-x) = \overline{\widehat{f}(x)}$.

Il en résulte que, si f est réelle et paire (resp. réelle et impaire), alors \widehat{f} est réelle et paire (resp. imaginaire pure et impaire)

c) Translation : si $g(t) = f(t - u)$ où $u \in \mathbb{R}$, alors

$$\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x)e^{-2i\pi ux} \quad (1.2.3)$$

d) Modulation : si $g(t) = f(t)e^{2i\pi ut}$, alors

$$\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x - u) \quad (1.2.4)$$

e) Homothétie : si $g(t) = f(\alpha t)$ où $\alpha > 0$, alors

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{x}{\alpha}\right). \quad (1.2.5)$$

1.2.3 Théorème d'échange

Théorème 1.2.2 Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}g$ et $f\widehat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, de plus

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx \quad (1.2.6)$$

1.3 Convolution des fonctions

Définition 1.3.1 Etant données f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , on appelle convolution de f et g , la fonction $f * g$, si elle existe, définie par

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t - s)ds \quad (1.3.1)$$

Proposition 1.3.1 Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est définie p.p et appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 1.3.2 Soient $1 \leq p \leq \infty$, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad (1.3.2)$$

alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $f_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$, μ -p.p

1.4 Inverse de la transformée de Fourier

Nous venons de voir que beaucoup d'opérations se transposent agréablement par la transformation de Fourier.

La formule d'inversion est obtenue très simplement à partir de \mathcal{F} et elle est très utile puisque elle nous permet, de passer de \widehat{f} à f . Cependant, il y a quelques précautions à prendre car si f est intégrable, \widehat{f} ne l'est pas toujours.

1.4.1 Formule d'inversion de Fourier

Théorème 1.4.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t x} dx \text{ p.p} \quad (1.4.1)$$

On note que pour presque partout $f = [\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))]$.

Proposition 1.4.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue en un point t_0 alors

$$f(t_0) = \widehat{\mathcal{F}(f)}(t_0) \quad (1.4.2)$$

Corollaire 1.4.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors, on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t) \text{ p.p}$$

Théorème 1.4.2 (d'unicité) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} = 0$ alors $f = 0$ p.p, c'est à dire \mathcal{F} est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

1.5 Transformée de Fourier dans L^1 et convolution

Le théorème qui suit fait le lien entre la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et la convolution. Ce résultat permet de ramener la résolution d'équations de convolution (et donc d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants sur \mathbb{R}) à des problèmes de division.

Théorème 1.5.1 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}. \quad (1.5.1)$$

$$\overline{\mathcal{F}(f * g)} = \overline{\mathcal{F}(f)} \overline{\mathcal{F}(g)}. \quad (1.5.2)$$

Si de plus $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$fg \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}. \quad (1.5.3)$$

1.5.1 Dérivée de la transformée

Théorème 1.5.2 Si f et $tf \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}). \quad (1.5.4)$$

$$\left(\widehat{f}\right)'(x) = \widehat{(-2\pi itf)}(x). \quad (1.5.5)$$

1.6 Transformation de Fourier dans L^2

Dans l'espace L^1 , on a remarqué que les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier ne peuvent être remplies que si f est égale presque partout à une fonction continue tendant vers zéro à l'infini. Cela écarte malheureusement des fonctions d'un usage tout à fait courant en mathématiques et en physique.

La nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Ainsi, en 1910, Plancherel a défini la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions

de carré intégrable à savoir $L^2(\mathbb{R})$ qui a l'avantage sur $L^1(\mathbb{R})$ d'être un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt. \quad (1.6.1)$$

1.6.1 Théorème de Plancherel

Théorème 1.6.1 Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt. \quad (1.6.2)$$

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2. \quad (1.6.3)$$

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.6.4)$$

1.6.2 Théorème de Plancherel-Riesz

Il existe un automorphisme unique, qu'on note \mathcal{F} , de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge canoniquement l'isométrie

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

De plus, pour tout $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)}) = \overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))} = f \text{ p.p.} \quad (1.6.6)$$

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2. \quad (1.6.7)$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle \quad (1.6.8)$$

i.e

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x)\overline{\mathcal{F}(g)(x)}dx.$$

soit

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi itx} \chi_{[-n,n]} dt \implies \lim \|\varphi_n - \mathcal{F}(f)\|_2 = 0. \quad (1.6.9)$$

Remarque 1.6.1 \mathcal{F} désigne deux applications distinctes; d'une part celle de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$ et d'autre part celle de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. Ces deux applications ne coïncident que sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. En effet, $\widehat{f}(x)$ est bien définie en tout point x de \mathbb{R} lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, tandis que lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$, f est définie comme élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Mais en tant que fonction ponctuelle de x , on ne dispose que d'une fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Il y a là une différence importante entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ pour la transformée de Fourier.

Remarque 1.6.2 Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(t) e^{-2\pi itx}$ n'est intégrable pour aucune valeur de x . Il est donc hors de question d'utiliser la formule intégrale définie dans le chapitre 1. Dans ce cas, la formule (1.8.8) affirme (en terme de suites) que \widehat{f} est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{f}_n)_{n>0}$. Il faut prendre garde au fait qu'il n'y a pas, en général, de convergence presque partout de \widehat{f}_n vers \widehat{f} (on peut seulement l'affirmer pour une sous-suite).

1.6.3 T-héorèmes utiles

Comme nous venons de le voir dans le théorème précédent (la formule (1.8.8)), lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier est donnée par une limite dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc, le calcul se fait par approximation. Toutefois, on peut souvent se ramener à un calcul d'intégrales semi-convergentes.

C'est l'objet des théorèmes qui suivent.

Théorème 1.6.2 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-A}^A f(t) e^{-2\pi itx} dt \quad (1.6.10)$$

converge vers une limite finie que l'on note $g(x)$, lorsque A tend vers l'infini, alors $\mathcal{F}(f) = g$ p.p.

Théorème 1.6.3 Soit $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. S'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\overline{\mathcal{F}}(g) = f$ alors

$$\mathcal{F}(f) = g. \quad (1.6.11)$$

1.7 Propriétés élémentaires de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R})$

Toutes les propriétés de translation, de modulation et d'homothétie vues pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ sont encore valables pour $L^2(\mathbb{R})$. On les obtient par passage à la limite en utilisant la densité de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a les propriétés suivantes.

1.7.1 Formule d'échange

Proposition 1.7.1 *Soient f et g deux fonctions de carré intégrable, alors*

$\mathcal{F}(f)g$ et $f\mathcal{F}(g)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathcal{F}(g)(u)du \quad (1.7.1)$$

1.8 Transformée de Fourier dans L^2 et convolution

Proposition 1.8.1 *Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$f * g = \overline{\mathcal{F}(\widehat{f\hat{g}})}. \quad (1.8.1)$$

$$\widehat{fg} = (\widehat{f} * \widehat{g}). \quad (1.8.2)$$

Remarque 1.8.1 *Dans la proposition précédente la formule $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f\hat{g}}$ n'a pas de sens a priori car $f * g$ est seulement dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Cette formule serait vraie si l'on avait $f * g$ dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, la convolution et la transformée de Fourier sont bien définies.

Proposition 1.8.2 *Soit f dans $L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. On a*

$$\widehat{f\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.8.3)$$

$$f * g = \overline{\mathcal{F}(\widehat{f\hat{g}})}. \quad (1.8.4)$$

1.9 Transformation de Fourier à plusieurs variables

Dans tout ce qui précède, la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$, se généralise à \mathbb{R}^N muni du produit scalaire euclidien.

Nous allons donner les changements à apporter pour une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ceux-ci s'adaptent aux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Notations

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N \quad (1.9.1)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (1.9.2)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N. \quad (1.9.3)$$

On définit :

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_N); \quad (1.9.4)$$

$$x^\alpha = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N}.$$

$$D^\alpha g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}}(x) \text{ où} \quad (1.9.5)$$

$$|\alpha| = k_1 + k_2 + \dots + k_N.$$

$(t, x) = \sum_{i=1}^N t_i x_i$, le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^N .

Les normes euclidienne de t et x sont respectivement définits comme suit:

$$\|t\|^2 = \sum_{i=1}^N t_i^2. \quad (1.9.6)$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2. \quad (1.9.7)$$

Définition 1.9.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On appelle transformée de Fourier de f l'application qu'on note \widehat{f} ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) e^{-2\pi i(t,x)} dt. \quad (1.9.8)$$

Définition 1.9.2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On appelle transformée de Fourier conjuguée ; l'application qu'on note $\overline{\mathcal{F}}(f)$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) e^{2\pi i(t,x)} dt \quad (1.9.9)$$

Nombreux sont les domaines d'application de la transformation de Fourier, parmi ces derniers, on compte le traitement de signal, un domaine qui est intéressant mais surtout abordé par plusieurs chercheurs vu le nombre important de solutions qu'il a apporté aux problèmes posés dans le monde réel. Il s'est avéré que la transformation de Fourier n'était pas toujours un bon moyen pour aboutir aux résultats recherchés. A cet effet, nous voulions comprendre son handicap et de savoir s'il y a existence d'un autre moyen qui passera ce cap?

2.1 Transformation de Gabor

[8]

La transformation de Fourier ne permet pas de faire l'analyse d'un signal en temps, i.e. localement, puisqu'il faut le connaître sur \mathbb{R} . C'est à dire que La transformation de Fourier n'étudie pas un signal en temps et en fréquence ; alors qu'il est impératif de le savoir. Ainsi, trouver un moyen de surpasser ce cap est d'une grande importance.

Pour ce faire on introduit la transformation de Fourier à fenêtre glissante, due à D. Gabor dans les années 1940. Mais la largeur fixe de la fenêtre empêche une bonne analyse des sauts du signal. La décomposition en ondelettes, étudiée plus loin, semble résoudre ce problème.

Définition 2.1.1 Soit $\rho \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ avec $\|\rho\|_2 = 1$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tout $\lambda, s \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) = (e^{2\pi i \lambda \cdot} \rho_s | f) = \tag{2.1.1}$$

$$= \int e^{-2\pi i \lambda t} \overline{\rho_s}(t) \cdot f(t) dt = \mathcal{F}(\overline{\rho_s} \cdot f)(\lambda) \tag{2.1.2}$$

et on dit que c'est la transformée de Gabor de f .

L'application linéaire

$$\mathcal{F}_\rho : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.1.3}$$

s'appelle la transformation de Gabor. On dit aussi transformation de Fourier à fenêtre glissante.

Lemme 2.1.1 Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|f - f_s\|_2 = 0 \tag{2.1.4}$$

avec $f_s(t) = f(t - s)$

Proposition 2.1.1 Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}_\rho f \in C^b(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R})$ avec

$$\|\mathcal{F}_\rho f\|_\infty \leq \|f\|_2 \tag{2.1.5}$$

ainsi que la conservation de l'énergie, i.e

$$\|\mathcal{F}_\rho f\|_\infty = \|f\|_2 \tag{2.1.6}$$

Preuve. Tout d'abord, on a

$$|\mathcal{F}_\rho f(s, \lambda)| \leq \int |\rho_s(t)| \cdot |f(t)| dt$$

et selon Cauchy-Schwarz

$$|\mathcal{F}_\rho f(s, \lambda)| \leq \|\rho\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f\|_2$$

et

$$\begin{aligned}
 | \mathcal{F}_\rho f(u, \mu) - \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) | &\leq \int | \rho_\mu e^{2\pi i \mu t} - \rho_s e^{2\pi i \mu t} | \cdot | f(t) | dt \\
 &\leq \| f \|_2 \| \rho_\mu e^{2\pi i \mu t} - \rho_s e^{2\pi i \mu t} \|_2 \\
 &\leq \| f \|_2 (\| \rho_\mu - \rho_s \|_2 + \| (e^{2\pi i(\mu-\lambda)} - 1) \cdot \rho_s \|_2) < \infty
 \end{aligned}$$

Car lorsque (u, μ) tend vers (s, λ) , $\lim_{(u, \mu) \rightarrow (s, \lambda)} \| \rho_\mu - \rho_s \|_2 = 0$ par le lemme et de plus $|\rho_s|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et cela finit de prouver la première partie .

Remarquons maintenant que, par le théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
 \int \int | \rho_s(t) \cdot f(t) |^2 d(t, s) &= \int | f(t) |^2 \cdot \left(\int \mathcal{F}(\bar{\rho}_s \cdot f)(\lambda) d\lambda \right) ds \\
 &= \| f \|_2^2 \cdot \| \rho \|_2^2 = \| f \|_2^2 < \infty
 \end{aligned}$$

Ce qui montre, par le théorème de Fubini que pour presque tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\bar{\rho}_s \cdot f \in L^2(\mathbb{R})$$

En utilisant les théorèmes de Tonelli et Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int \int | \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) |^2 d(t, s) &= \int \cdot \left(\int | \rho_s(t) | ds \right) dt = \\
 &= \int \left(\int | \rho_s(t) \cdot f(t) |^2 dt \right) ds = \| f \|_2^2 .
 \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1 (*Formule d'inversion de Gabor*)

Pour tout $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, la restriction de la fonction: $(s, \lambda) \mapsto \rho(t-s)e^{2\pi i \lambda t}$ appartient à $L^2(\mathbb{R} \times [-\mu, \mu])$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$; en posant

$$f_\mu(t) = \int \int_{\mathbb{R} \times [-\mu, \mu]} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \rho(t-s) e^{2\pi i \lambda t} d(s, \lambda) \quad (2.1.7)$$

On a

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu = f \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (2.1.8)$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

D'une part on a $\mathcal{F}_\rho \in C^b(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et d'une autre part on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) &= (e^{2\pi i \lambda \cdot} \rho_s | f) = (\mathcal{F}(e^{2\pi i \lambda \circ} \rho_s) | \mathcal{F}f) = \\ &= ((\mathcal{F}_\rho)_\lambda | \mathcal{F}f) = ((e^{-2\pi i \circ s} \mathcal{F}_\rho)_\lambda | \mathcal{F}f) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (v-\lambda)s} \overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda}(v) \mathcal{F}f(v) = e^{-2\pi i \lambda s} \widehat{\mathcal{F}} \left[\overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda} \mathcal{F}f \right] (s) \end{aligned}$$

par la suite, en utilisant le théorème de Fubini; nous aurons

$$f_\mu(t) = \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \rho(t-s) e^{2\pi i \lambda t} ds \right) d\lambda$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \rho(t-s) e^{2\pi i \lambda t} ds &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda s} \widehat{\mathcal{F}} \left[\overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda} \mathcal{F}f \right] (s) \rho(t-s) ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda}(v) \mathcal{F}f(v) \widehat{\mathcal{F}} \left[e^{-2\pi i \lambda \circ} \rho(t-\circ) \right] (v) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda}(v) \mathcal{F}f(v) (\widehat{\mathcal{F}}_{\rho_t})_\lambda(v) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(\mathcal{F}_\rho)_\lambda}(v) \mathcal{F}f(v) (e^{2\pi i \circ t} \mathcal{F}_\rho)_\lambda(v) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (v-\lambda)t} |(\mathcal{F}_\rho)_\lambda(v)|^2 \mathcal{F}f(v) dv \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}_\rho)_\lambda(v)|^2 |\mathcal{F}f(v)| dv \right) d\lambda &\leq 2\mu \|\mathcal{F}_\rho\|_\infty \|\mathcal{F}_\rho\|_2 \|\mathcal{F}f\|_2 \leq \\ &\leq 2\mu \|\rho\|_1 \|\rho\|_2 \|f\|_2 < \infty \end{aligned}$$

grâce au théorème de Tonelli, il vient que

$$\begin{aligned}
 f_\mu(t) &= \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\rho f(s, \lambda) \rho(t-s) e^{2\pi i \lambda t} ds \right) d\lambda = \\
 &= \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (v-\lambda)t} |(\mathcal{F}_\rho(v-\lambda))^2| \mathcal{F}f(v) dv \right) e^{2\pi i \lambda t} d\lambda = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \lambda t} \left(\int_{-\mu}^{\mu} |(\mathcal{F}_\rho(v-\lambda))^2| d\lambda \right) \mathcal{F}f(v) dv = \widehat{\mathcal{F}}[\theta_\mu \mathcal{F}f](t),
 \end{aligned}$$

en ayant posé

$$\theta_\mu(v) = \int_{-\mu}^{\mu} |(\mathcal{F}_\rho(v-\lambda))^2| d\lambda.$$

Finalement, on a

$$\|f - f_\mu\|_2^2 = \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_\mu\|_2^2 = \|(1 - \theta_\mu)\mathcal{F}f\|_2^2 = \int |1 - \theta_\mu|^2 |\mathcal{F}f|^2$$

ainsi que

$$|\theta_\mu| \leq \|\mathcal{F}_\rho\|_2^2 = \|\rho\|_2^2 = 1 \text{ et } \lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_\mu = 1 \text{ ponctuellement (convergence simple)}$$

et en appliquant le théorème de Lebesgue, il vient

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|f - f_\mu\|_2^2 &= \left\| \lim_{\mu \rightarrow \infty} (f - f_\mu) \right\|_2^2 = \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int |1 - \theta_\mu|^2 |\mathcal{F}f|^2 = \\
 &= \int \lim_{\mu \rightarrow \infty} |1 - \theta_\mu|^2 |\mathcal{F}f|^2 = 0
 \end{aligned}$$

i.e

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (f - f_\mu) = 0$$

d'où

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} f_\mu = f \in L^2(\mathbb{R})$$

■

Origine du mot "Ondelette"

Le terme "ondelette" a été introduit par Jean Morlet et Alex Gossmann au début des années 1980. Terme initialement français, il a été ensuite traduit en anglais par "wavelet", avec le terme 'wave' (onde) et 'let'(petite).

Définition 2.1.2 Soit ψ une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$; on appelle ψ une ondelette-mère si la quantité:

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(ue)|^2}{|u|} du \quad (2.1.9)$$

est finie et aussi indépendante du vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Exemples d'ondelettes

2.2.1 L'ondelette de Haar :

C'est la plus simple des ondelettes : définie sur l'intervalle $[0, 1]$ (ou parfois sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) c'est la fonction H constante par morceaux qui vaut :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

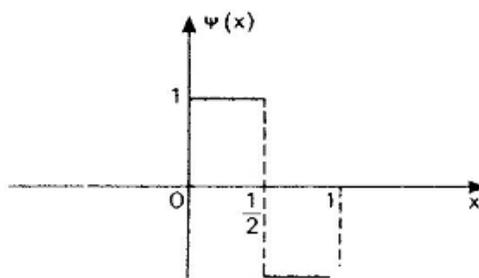


Fig.2.1:Ondelette de Haar

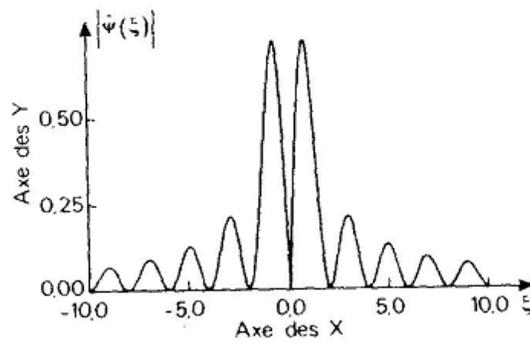


Fig.2.2: Spectre d'amplitude de L'ondelette de Haar

Cette ondelette est très simple et est donc facile à mettre en oeuvre algorithmiquement. De plus, son support est compact : elle est bien localisée en espace. En contrepartie, elle n'a qu'un seul moment nul et est discontinue ; sa transformée de Fourier,

$$\hat{H}(x) = ie^{-i\pi\omega} \frac{\sin \frac{2\pi\omega}{2}}{\frac{\pi\omega}{2}}, \text{ oscille beaucoup: la localisation en fréquence n'est pas bonne.}$$

2.2.2 Les dérivées gaussiennes

Elles sont de la forme $\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}$, pour $n \geq 1$. On utilise essentiellement la dérivée seconde, qu'on écrit le plus souvent sous la forme :

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.2.1}$$

On a alors

$$\hat{\psi}(\xi) = K \xi^2 e^{-2\pi^2 \xi^2} \tag{2.2.2}$$

où k est une constante. On peut remarquer que ψ et $\hat{\psi}$ sont à décroissance très rapide et C^∞ , ce sont des éléments de la classe de Schwartz \mathcal{S} .

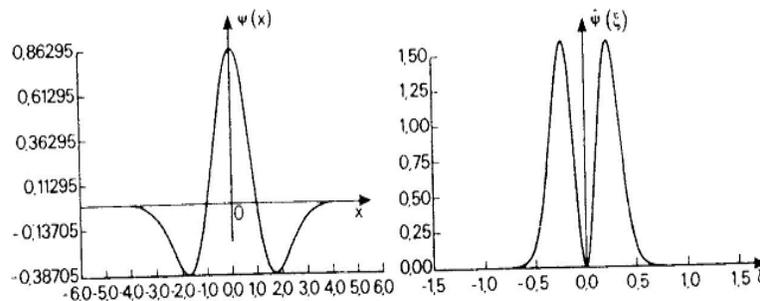


Fig.2.3:Deuxième dérivée gaussienne et son spectre

En raison de son graphe, on l'appelle souvent le chapeau mexicain.

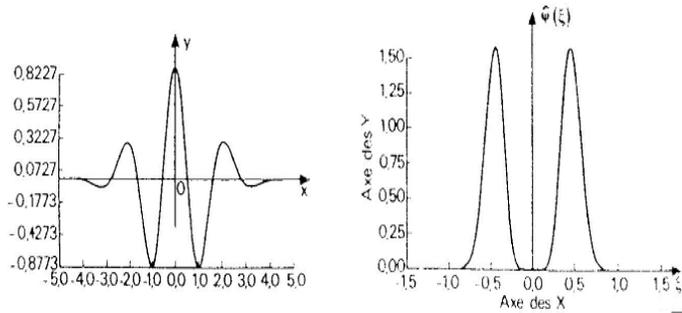


Fig.2.4:Huitième dérivée gaussienne et son spectre

2.2.3 L'ondelette de Morlet

S'écrit sous la forme :

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \text{ ou } \psi(t) = e^{-\pi t^2} e^{10i\pi x}. \quad (2.2.3)$$

On remarque d'abord que celle-ci n'est pas normalisée, et aussi $\hat{\psi}(0)$ n'est pas égal à zéro, et l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|}{|\lambda|} d\lambda < +\infty$ n'est pas non plus vérifiée ! Cependant cette valeur de $\hat{\psi}(0)$ est de l'ordre de 10^{-5} . On peut donc la considérer comme "nulle" dans un calcul numérique effectué sur ordinateur.

2.3 Conditions d'admissibilité:

Pour qu'une fonction ψ soit une ondelette-mère; elle doit satisfaire des conditions dites "conditions d'admissibilité" :

1- ψ doit être un signal à énergie finie, c'est à dire: $\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt < \infty$

Donc ψ doit être bien localisée dans le temps et décroître suffisamment vite à l'infini.

2- $C_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} |f^{-1}| |\psi(t)|^2 dt < \infty$

C_ψ sera utilisées pour la reconstruction du signal $f(t)$.

$$3-\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$$

Si ψ n'est pas bornée; elle ne sera pas inversible et dans ce cas le signal $f(t)$ ne pourra pas être reconstruit à partir de ces coefficients d'ondelettes $\psi_{a,b}$.

Le nom "ondelette" vient du fait que c'est une fonction oscillante (comme une onde), mais localisée (connue en temps et en espace). Les conditions ci-dessus suggèrent qu'elle vibre comme une onde et décroît rapidement quand $|t|$ augmente.

Définition 2.3.1 Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une ondelette mère. On dit que la famille $\psi_{(a,b)}$ est une famille d'ondelettes si elles sont engendrées par des translations et dilatations de ψ , Autrement dit:

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^n \text{ et } a > 0 \quad (2.3.1)$$

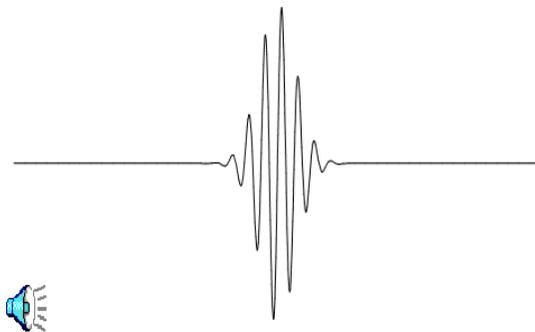


Fig.2.5:Fonction mère oscillante, localisée

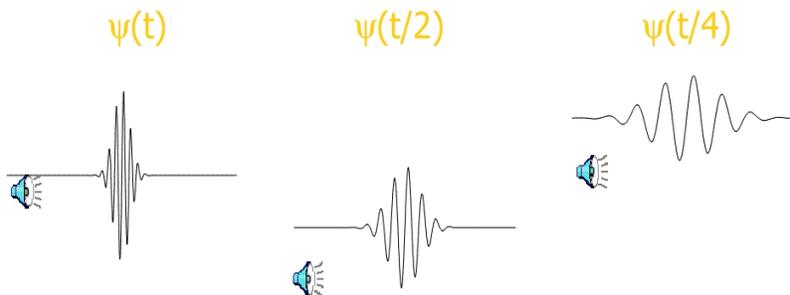


Fig.2.6:Famille construite par dilatation

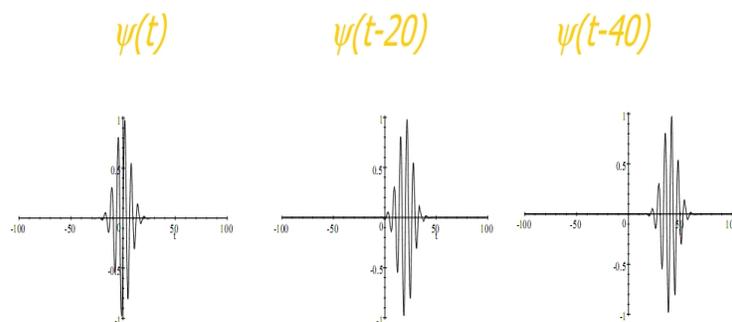


Fig.2.6:Famille construite par translation

Théorème 2.3.1 *Si ψ est une ondelette mère et que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\psi * \phi$ est une ondelette.*

Preuve. D'Après la proposition de convolution, on a bien

$$\psi * \phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

donc, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(\psi * \phi)(ue)|^2}{|u|} du < \infty$$

En effet; on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(\psi * \phi)(ue)|^2}{|u|} du = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(ue)|^2 |\hat{\phi}(ue)|^2}{|u|} du$$

Or, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\hat{\phi}(ue)|)$ existe et est fini

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(\psi * \phi)(ue)|^2}{|u|} du \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\hat{\phi}(ue)|) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(ue)|^2}{|u|} du < \infty$$

D'où $\psi * \phi$ est une ondelette. ■

Définition 2.3.2 Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on appelle la transformée d'ondelette continue; la relation d'intégration T_ψ définie dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par:

$$T_\psi(f)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \quad (2.3.2)$$

Propriété de base des transformations par les ondelettes :

Soient ψ et Φ deux ondelettes et $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T_\psi(f)(\alpha f + \beta g) = \alpha T_\psi(f)(a, b) + \beta (\alpha T_\psi f)(a, b), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.3.3)$$

$$T_\psi(\tau_\lambda f)(a, b) = (T_\psi f)(a, b - \lambda) \quad (2.3.4)$$

où τ_λ est l'opérateur de la translation définit par : $\tau_\lambda f(x) = f(x - \lambda)$

$$T_\psi(D_\lambda f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (T_\psi f)\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right), \lambda > 0 \quad (2.3.5)$$

où D_λ est l'opérateur de translation définit par $D_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$

$$T_\psi P f(a, b) = - (T_\psi f)(a, -b) \quad (2.3.6)$$

où P est l'opérateur de parité définit par $P f(x) = f(-x)$

$$\overline{(T_\psi f)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = T_{\bar{\psi}}(\bar{f})\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), a > 0 \quad (2.3.7)$$

$$T_{\alpha\psi + \beta\phi}(\tau_\lambda f)(a, b) = \bar{\alpha} (T_\psi f)(a, b - \lambda) + \bar{\beta} (T_\phi f)(a, b - \lambda) \quad (2.3.8)$$

$$T_{\tau\lambda\psi}f(a,b) = T_{\psi}(f)(a,b + \lambda a) \quad (2.3.9)$$

$$T_{D\lambda\psi}(f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(T_{\psi}f)(\lambda a, \lambda b), \lambda > 0 \quad (2.3.10)$$

Preuve. L'expression (2.2.13) Découle de la linéarité de l'intégrale

2- Montrons l'expression (2.2.14); on a :

$$\begin{aligned} T_{\psi}(\tau_{\lambda}f)(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{\lambda}f)(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \lambda) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \lambda) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \end{aligned}$$

Posons: $y = x - \lambda$; alors $dx = dy$, et on aura

$$T_{\psi}(\tau_{\lambda}f)(a,b) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{y - (b - \lambda)}{a}\right) dy = T_{\psi}(f)(a, b - \lambda)$$

D'où

$$T_{\psi}(\tau_{\lambda}f)(a,b) = T_{\psi}(f)(a, b - \lambda)$$

3- Montrons l'expression (2.2.15); on a :

$$\begin{aligned} T_{\psi}(D_{\lambda}f)(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} (D_{\lambda}f)(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \end{aligned}$$

Posons $z = \frac{x}{\lambda}$ alors $dx = \lambda dz$, et par suite

$$\begin{aligned} T_{\psi}(D_{\lambda}f)(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{\lambda z - b}{a}\right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{z - \frac{b}{\lambda}}{\frac{a}{\lambda}}\right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}} \bar{\psi}_{\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}} dz = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} T_{\psi}(f)\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$T_{\psi}(D_{\lambda}f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} T_{\psi}(f)\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right)$$

4- Montrons l'expression (2.2.16); on a :

$$\begin{aligned} T_\psi(Pf)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}^n} (Pf)(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \end{aligned}$$

Posons $z = -x$ alors $dx = -dz$; et on aura:

$$\begin{aligned} T_\psi(Pf)(a, b) &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{-z-b}{a}\right) dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{z-(-b)}{-a}\right) dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{z-(-b)}{a}\right) dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \bar{\psi}_{a,-b}(z) dz \end{aligned}$$

D'où

$$T_\psi(Pf)(a, b) = -T_\psi(Pf)(a, -b)$$

5- Montrons l'expression (2.2.17); on a :

$$\begin{aligned} \overline{(T_\psi f)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{\psi}_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}(x) dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) \overline{\bar{\psi}_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) \psi_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) \sqrt{a} \psi\left(\frac{x-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}\right) dx \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{(T_\psi f)}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = (T_{\bar{\psi}} \bar{f})\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

6- Montrons l'expression (2.2.18); on a :

$$\begin{aligned} T_{\alpha\psi+\beta\phi}(\tau_\lambda f)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_\lambda f)(x) \overline{(\alpha\psi + \beta\phi)_{a,b}}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\lambda) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{(\alpha\psi + \beta\phi)}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\lambda) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{(\alpha\psi)}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\lambda) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{(\beta\phi)}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f)(x) \overline{\alpha\psi}_{a,b-\lambda}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f)(x) \overline{\beta\phi}_{a,b-\lambda}(x) dx, \quad \text{d'après (2)} \\ &= \overline{\alpha} T_\psi(f)(a, b-\lambda) + \overline{\beta} T_\phi(f)(a, b-\lambda) \end{aligned}$$

D'où

$$T_{\alpha\psi+\beta\phi}(\tau_\lambda f)(a, b) = \bar{\alpha}T_\psi(f)(a, b - \lambda) + \bar{\beta}T_\phi(f)(a, b - \lambda)$$

7- On a

$$\begin{aligned} T_{\tau_\lambda\psi}(f)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\tau_\lambda\psi}_{a,b}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\tau_\lambda\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a} - \lambda\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi}\left(\frac{x-(b+a\lambda)}{a}\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi}_{a,b+a\lambda}(x)dx \end{aligned}$$

D'où

$$T_{\tau_\lambda\psi}(f)(a, b) = T_\psi(f)(a, b + a\lambda)$$

7- Montrons l'expression (2.2.19); on a :

$$\begin{aligned} T_{\tau_\lambda\psi}(f)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\tau_\lambda\psi}_{a,b}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\tau_\lambda\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a} - \lambda\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi}\left(\frac{x-(b+a\lambda)}{a}\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi}_{a,b+a\lambda}(x)dx \end{aligned}$$

D'où

$$T_{\tau_\lambda\psi}(f)(a, b) = T_\psi(f)(a, b + a\lambda)$$

8- Montrons l'expression (2.2.20); on a :

$$\begin{aligned}
 T_{D_\lambda\psi}(f)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{D_\lambda\psi}_{a,b}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{D_\lambda\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\lambda} \overline{\psi}\left(\frac{\frac{x-b}{a}}{\lambda}\right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda} f(x) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda a}} \overline{\psi}\left(\frac{x-\lambda b}{\lambda a}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi}_{\lambda a, \lambda b}(x) dx
 \end{aligned}$$

D'où

$$T_{D_\lambda\psi}(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} T_\psi(f)(\lambda a, \lambda b)$$

■

2.3.1 Définition d'un signal:

La notion de signal est très extensive (générale). Il ressort de l'observation d'un phénomène certaines quantités qui dépendent du temps.

Ces quantités, supposées mesurables sont appelées des signaux. Elles correspondent, en mathématiques, à la notion de fonction : Si la variable est continue, on dit que le signal est analogique, si la variable est discrète, on dit que le signal est discret.

2.4 Décomposition continue en ondelettes

Afin de palier aux inconvénients des transformations de Fourier et de Gabor, le géophysicien J.Morlet, pour des problèmes de traitement numérique des signaux sismiques en prospection pétrolière, puis en collaboration avec A Grossman pour des problèmes de physique théorique, a introduit la transformation continue en ondelettes.

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f_{s,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t-s}{h}\right) \tag{2.4.1}$$

Etant donné $\zeta \in L^2(\mathbb{R})$, on dit que la fonction

$$Wf : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad (2.4.2)$$

définie par :

$$Wf(s, h) = (\zeta_{s,h} | f) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\zeta}_{s,h}(t) f(t) dt, \quad (2.4.3)$$

est la transformée en ondelettes de f et que

$$W : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est la transformation en ondelettes.

Le problème est de savoir sous quelles conditions on peut reconstruire f à l'aide de Wf .

Introduisons les opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} T_s & : f \mapsto f_s, \\ S_h & : f \mapsto \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{\cdot}{h}\right), \\ E_s & : f \mapsto e^{2\pi i \cdot s} f, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

On vérifie immédiatement que ces opérateurs sont isométriques dans $L^2(\mathbb{R})$, i.e. des bijections qui conservent la norme $\|\cdot\|_2$ et le produit scalaire. Il en est de même de la transformation de Fourier par le théorème de Plancherel.

Lemme 2.4.1 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

(i) on a $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|S_h f - f\|_2 = 0$.

(ii) Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $h, k \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$T_s T_t = T_{s+t}, \quad S_h S_k = S_{hk}, \quad S_h T_s = T_{hs} S_h \quad (2.4.5)$$

$$f_{s,h} = T_s S_h f, \quad f_{s,h}(t) = \bar{f}_{t,h}(s)$$

$$W(f_{t,k})(s, h) = Wf\left(\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}\right) \quad (2.4.6)$$

En outre

$$\mathcal{F}S_h = S_{\frac{1}{h}}\mathcal{F}, \mathcal{F}T_s = E_{-s}\mathcal{F} \text{ et } \widehat{\mathcal{F}}E_{-s} = T_s\widehat{\mathcal{F}} \quad (2.4.7)$$

Preuve. Démonstration de (ii):

Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $h, k \in \mathbb{R}_+^*$, on a:

$$\begin{aligned} (T_s T_t)(f)(t) &= T_s(T_t(f)(t)) = T_t(f)(v-s) \\ &= f(v-s-t) = f(v-(s+t)) = T_{s+t}(f)(t) \end{aligned}$$

d'où

$$T_s T_t = T_{s+t}$$

on a:

$$\begin{aligned} (S_h S_k)(f)(t) &= S_h[S_k(f)(t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} S_k(f)\left(\frac{t}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{k}} f\left(\frac{t}{hk}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{hk}} f\left(\frac{t}{hk}\right) \end{aligned}$$

d'où:

$$S_h S_k = S_{hk}$$

On a:

$$\begin{aligned} (S_h T_s)(f)(t) &= S_h[T_s(f)(t)] = \frac{1}{\sqrt{h}} T_s(f)\left(\frac{t}{h}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t}{h} - s\right) = \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t - hs}{h}\right) \dots (*) \end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} (T_{hs} S_h)(f)(t) &= T_{hs}[S_h(f)(t)] = S_h(f)(t - hs) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t - hs}{h}\right) \dots (**) \end{aligned}$$

de (*) et (**) on en déduit que :

$$S_h T_s = T_{hs} S_h$$

On a :

$$\begin{aligned} (T_s S_h)(f(t)) &= T_s[S_h(f)(t)] = S_h(f)(t-s) = \\ &= S_h(f)(t-s) = \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t-s}{h}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$f_{s,h} = T_s S_h f$$

On a :

$$\begin{aligned} W(f_{t,k})(s, h) &= (\zeta_{s,h}|f_{t,k}) = (T_s S_h \zeta|T_t S_k f) = \\ &= (S_{\frac{1}{k}} T_{-t} T_s S_h \zeta|f) = (S_{\frac{1}{k}} T_{s-t} S_h \zeta|f) = \\ &= (T_{\frac{s-t}{k}} S_{\frac{1}{k}} S_h \zeta|f) = (T_{\frac{s-t}{k}} S_{\frac{h}{k}} \zeta|f) = \\ &= (\zeta_{\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}}|f) = W(f)\left(\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$W(f_{t,k})(s, h) = W(f)\left(\frac{s-t}{k}, \frac{h}{k}\right)$$

On a:

$$\begin{aligned} f_{s,h}(t) &= \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t-s}{h}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(-\frac{t-s}{h}\right) \\ &= \check{f}_{t,h}(s). \end{aligned}$$

D'où

$$f_{s,h}(t) = \check{f}_{t,h}(s)$$

On a:

$$(\mathcal{F} \mathcal{S}_h f)(\lambda) = \int e^{-2\pi i \lambda t} \frac{1}{\sqrt{h}} f\left(\frac{t}{h}\right) dt$$

on pose $x = \frac{t}{h}$; on aura

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \mathcal{S}_h f)(\lambda) &= \int e^{-2\pi i \lambda x h} \frac{h}{\sqrt{h}} f(x) dx \\ &= \sqrt{h} \int e^{-2\pi i \lambda x h} f(x) dx \\ &= \sqrt{h} (\mathcal{F} f)(\lambda h) \\ &= \left(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \mathcal{F} f\right)(\lambda). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\mathcal{S}_h f = \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}\mathcal{F}f$$

On a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mathcal{T}_s f)(\lambda) &= \int T_s f(x) e^{-2\pi i \lambda x} dx \\ &= \int f(x-s) e^{-2\pi i \lambda x} dx \end{aligned}$$

on pose $t = x - s$ et on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mathcal{T}_s f)(\lambda) &= \int f(t) e^{-2\pi i \lambda(t+s)} dt \\ &= e^{-2\pi i \lambda s} \int f(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt \\ &= e^{2\pi i \lambda(-s)} (\mathcal{F}f)(\lambda) \\ &= E_{-s}(\mathcal{F}f)(\lambda) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\mathcal{T}_s f = E_{-s}\mathcal{F}f$$

On a

$$\begin{aligned} T_s \widehat{\mathcal{F}}\varphi &= \widehat{\mathcal{F}}\mathcal{F}T_s \widehat{\mathcal{F}}\varphi \\ &= \widehat{\mathcal{F}}E_{-s}\mathcal{F}\widehat{\mathcal{F}}\varphi \\ &= \widehat{\mathcal{F}}E_{-s}\varphi. \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{\mathcal{F}}E_{-s}\varphi = T_s \widehat{\mathcal{F}}\varphi$$

■

Corollaire 2.4.1 *Pour tout $(s, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$Wf(s, h) = \widehat{\mathcal{F}}(S_{\frac{1}{h}}\overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f)(s), \quad (2.4.8)$$

et

$$Wf \in C^m(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \quad \text{avec} \quad \|Wf\|_\infty \leq \|\zeta\|_2 \cdot \|f\|_2. \quad (2.4.9)$$

En outre , si $\zeta \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\|Wf(\cdot, h)\|_2 \leq \sqrt{h} \|\zeta\|_1 \cdot \|f\|_2 \quad (2.4.10)$$

Si en plus $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\|Wf(\cdot, h)\|_\infty \leq \sqrt{h} \|\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 \quad (2.4.11)$$

Preuve. Par le théorème de Plancherel, on a :

$$\begin{aligned} Wf(s, h) &= (\zeta_{s,h}|f) = (T_s S_h \zeta | f) = \\ &= (\mathcal{F} T_s S_h \zeta | \mathcal{F} f) = (E_{-s} \mathcal{F} S_h \zeta | \mathcal{F} f) = \\ &= (E_{-s} \mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \mathcal{F} \zeta | \mathcal{F} f) = \int e^{2\pi i \lambda s} \cdot (\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F} \zeta})(\lambda) \cdot \mathcal{F} f(\lambda) d\lambda = \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(s) \end{aligned}$$

et, Pour tout $(s, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$|Wf(t, k) - Wf(s, h)| \leq |Wf(t, k) - Wf(t, h)| + |Wf(t, h) - Wf(s, h)|$$

ainsi que

$$\begin{aligned} |Wf(t, k) - Wf(t, h)| &= \left| \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(t) - \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(t) \right| = \\ &= \left| \hat{\mathcal{F}}([\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} - \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}] \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(t) \right| \leq \\ &\leq \left\| \hat{\mathcal{F}}([\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} - \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}] \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f) \right\|_\infty \leq \left\| [\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} - \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}] \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\| [\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} - \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}] \overline{\mathcal{F} \zeta} \right\|_2 \cdot \|\mathcal{F} f\|_2 \end{aligned}$$

et

$$|Wf(t, h) - Wf(s, h)| = \left| \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(t) - \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(s) \right|$$

on aura alors

$$|Wf(t, k) - Wf(s, h)| \leq \left\| [\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} - \mathcal{S}_{\frac{1}{h}}] \overline{\mathcal{F} \zeta} \right\|_2 \cdot \|\mathcal{F} f\|_2 + \left| \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(t) - \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f)(s) \right|$$

On en déduit la continuité de Wf , par le lemme (i) pour traiter le premier terme et le fait que $\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{k}} \overline{\mathcal{F} \zeta} \cdot \mathcal{F} f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ pour le second. D'autre part,

$$|Wf(s, h)| = |(\zeta_{s,h}|f)| \leq \|\zeta_{s,h}\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|\zeta\|_2 \cdot \|f\|_2$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Finalement si $\zeta \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \int |Wf(s, h)|^2 ds &= \int \left| \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f)(s) \right|^2 ds = \int \left| \mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta}(\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda = \\ &= h \cdot \int \left| \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda \leq h \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_\infty^2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2^2 = h \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_1^2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2^2 \end{aligned}$$

par le théorème de Plancherel.

d'où

$$\int |Wf(s, h)|^2 ds \leq h \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_1^2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2^2$$

et donc

$$\|Wf(s, h)\|_2^2 \leq h \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_1^2 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2^2$$

d'où

$$\|Wf(s, h)\|_2 \leq \sqrt{h} \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_2$$

Si de plus $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} |Wf(s, h)| &= (\zeta_{s,h} | f) = \left| (\hat{\mathcal{F}}\zeta_{s,h} | \hat{\mathcal{F}}f) \right| = \left| (\hat{\mathcal{F}}\mathcal{T}_s \mathcal{S}_h \zeta | \hat{\mathcal{F}}f) \right| = \\ &= \left| (E_{-s} \hat{\mathcal{F}} \mathcal{S}_h \zeta | \hat{\mathcal{F}}f) \right| = \left| (E_{-s} \mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \hat{\mathcal{F}}\zeta | \hat{\mathcal{F}}f) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{h} \cdot \left\| \hat{\mathcal{F}}\zeta(h, \cdot) \cdot \hat{\mathcal{F}}f \right\|_1 \leq \\ &\leq \sqrt{h} \cdot \|\mathcal{F}\zeta\|_\infty \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 \leq \sqrt{h} \cdot \|\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_1 \end{aligned}$$

Cela dit que

$$\|Wf(s, h)\|_\infty \leq \sqrt{h} \cdot \|\zeta\|_1 \cdot \|\mathcal{F}f\|_1$$

■

Théorème 2.4.1 *Si*

$$C_\zeta = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(v)|^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(-v)|^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.4.12)$$

alors l'application

$$f \mapsto \frac{1}{C_\zeta} \cdot Wf \quad (2.4.13)$$

est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^)$.*

Preuve. Grâce aux théorèmes de Tonelli et Plancherel, on a

$$\begin{aligned}
 \|Wf\|_2^2 &= \int \int |Wf(s, h)|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f)(s) \right|^2 ds \right) \frac{dh}{h^2} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{h} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \right|^2 d\lambda \right) \frac{dh}{h^2} = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda)|^2 \frac{d\lambda dh}{h} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(\text{sgn}\lambda \cdot v)|^2 \frac{dv}{v} \right) \cdot |\mathcal{F}f(\lambda)|^2 d\lambda = C_\zeta^2 \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

par la suite

$$\|f\|_2 = \frac{1}{c_\zeta} \|Wf\|_2$$

on remarque qu'il y a conservation de norme entre les espaces $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ ■

Remarque 2.4.1 Si $\zeta \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathcal{F}\zeta(v)|^2 \frac{dv}{v} < \infty$, entraîne $\int \zeta(t)dt = 0$.

Réciproquement, cette condition est suffisante si $\text{id} \cdot \zeta \in L^1(\mathbb{R})$.

2.4.1 Théorème de reconstruction

Théorème 2.4.2 Soit ζ une ondelette. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, la fonction

$$(s, h) \mapsto \zeta_{s,h}(t) \tag{2.4.14}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R} \times [\delta, +\infty[, \frac{dsdh}{h^2})$, et si $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous poserons

$$f_\delta(t) = \frac{1}{c_\zeta} \int \int_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} Wf(s, h) \cdot \zeta_{s,h}(t) \frac{dsdh}{h^2} \tag{2.4.15}$$

Si $\zeta \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$f = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f_\delta \text{ dans } L^2(\mathbb{R}). \tag{2.4.16}$$

Preuve. La première partie est évidente, car on a

$$\begin{aligned}
 \int \int_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} |\zeta_{s,h}(t)|^2 \frac{dsdh}{h^2} &= \int \int_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} \frac{1}{h} \left| \zeta\left(\frac{t-s}{h}\right) \right|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \\
 &= \int \int_{\mathbb{R} \times \{h \geq \delta\}} |\zeta(s)|^2 \frac{dsdh}{h^2} = \frac{1}{\delta} \cdot \|\zeta\|_2^2,
 \end{aligned}$$

grâce à la transformations $(s, h) \mapsto \left(\frac{t-s}{h}\right)$ dont le jacobien est $\frac{1}{h}$. Ceci montre que f_δ est bien définie.

Par le lemme et le corollaire 2.2.1 les fonctions $\zeta_{\circ, h}(t) = \check{\zeta}_{t, h}$ et $Wf(\circ, h)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, et grâce au théorème de Plancherel nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Wf(s, h) \cdot \zeta_{s, h}(t) ds &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{F}}(S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f)(s) \cdot \check{\zeta}_{t, h}(s) ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{F}}(S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f)(s) \cdot T_t S_h \check{\zeta}(s) ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_{\frac{1}{h}} \overline{\mathcal{F}\zeta} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \hat{\mathcal{F}}(T_t S_h \check{\zeta})(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h} \overline{\mathcal{F}\zeta}(h\lambda) \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot (E_{-t} S_{\frac{1}{h}} \hat{\mathcal{F}}\check{\zeta})(-\lambda) d\lambda = \\ &= h \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \lambda t} |\mathcal{F}\zeta(ht)|^2 \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_\delta(t) = \frac{1}{c_\zeta^2} \int_{\{h \geq \delta\}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \lambda t} |\mathcal{F}\zeta(ht)|^2 \mathcal{F}f(\lambda) d\lambda \right) \frac{dh}{h}$$

Posons

$$\begin{aligned} \theta_\delta(\lambda) &= \int_{\{h \geq \delta\}} |\mathcal{F}\zeta(ht)|^2 \frac{dh}{h} = \int_{\{v \geq \delta|\lambda\}} |\mathcal{F}\zeta(\text{sgn}\lambda \cdot v)|^2 \frac{dv}{v} \leq \\ \left\{ \int_{\frac{1}{\delta|\lambda}} \int_{\{v \geq \delta|\lambda\}} |\mathcal{F}\zeta(\text{sgn}\lambda \cdot v)|^2 \frac{dv}{v} \right\} &\leq \min(c_\zeta^2, \frac{1}{\delta|\lambda|} \|\zeta\|_2^2) \cdot 1 \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que $\theta_\delta \in L^2(\mathbb{R})$ et nous pouvons, grâce au théorème de Tonelli, à nouveau appliquer le théorème de Fubini. Il vient alors

$$f_\delta(t) = \frac{1}{c_\zeta^2} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \lambda t} \cdot \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \theta_\delta(\lambda) d\lambda = \frac{1}{c_\zeta^2} \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f \cdot \theta_\delta)(t);$$

puis

$$\|f - f_\delta\|_2^2 = \|\mathcal{F}(f - f_\delta)\|_2^2 = \left\| \left(1 - \frac{1}{c_\zeta^2} \theta_\delta\right) \cdot \mathcal{F}f \right\|_2^2 = \int |1 - \frac{1}{c_\zeta^2} \theta_\delta(\lambda)|^2 \cdot |\mathcal{F}f(\lambda)| d\lambda$$

Comme $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \theta_\delta = c_\zeta^2$ ponctuellement en croissant, le théorème de Lebesgue finit de prouver notre assertion. ■

2.5 Exemples de transformées en ondelettes

Dans ce qui suit, ζ est une ondelette paire, et I un intervalle de \mathbb{R} contenant support de ζ .

Exemple 2.5.1 *Considérons un signal de la forme*

$$f = |f|.e^{2\pi i\lambda_0} \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.5.1)$$

On dit que c'est une ligne spectrale.

Si $|f| \in C^1(\mathbb{R})$ et étant donné $s \in \mathbb{R}$, le théorème de la moyenne nous permet d'écrire

$$|f|(\cdot) = |f|(s) + r(s, \cdot).(\cdot - s) \quad \text{avec } r(s, \cdot) \in C(\mathbb{R}). \quad (2.5.2)$$

Preuve. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t \neq s$, on a

$$r(s, t) = \frac{1}{t - s} \cdot \int_s^t |f|'(u) du$$

et

$$\lim_{t \rightarrow s} r(s, t) = |f|'(s).$$

En outre

$$|r(s, t)| \leq \left\| |f|' \right\|_{\infty, I(s, t)}$$

où $I(s, t)$ désigne l'intervalle d'extrémités s et t . ■

En faisant le changement de variable $u = \frac{t-s}{h}$, il vient

$$\begin{aligned} Wf(s, h) &= \int \bar{\zeta}_{s, h}(t).f(t)dt = h^{\frac{1}{2}} \cdot \int \bar{\zeta}(u).f(h.u + s)du = \\ &= h^{\frac{1}{2}} \cdot \int \bar{\zeta}(u).(|f|(s) + r(s, h.u + s).(h.u)).e^{2\pi i\lambda(h.u+s)}du = \\ &= |f|(s).e^{2\pi i\lambda s} \cdot \overline{\mathcal{F}\zeta}(h.\lambda).h^{\frac{1}{2}} + R(s, h).h^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

avec

$$R(s, h) = e^{2\pi i\lambda s} \cdot \int u.\bar{\zeta}(u).r(s, h.u + s).e^{2\pi i.h\lambda.u} du \quad (2.5.3)$$

Ainsi

$$Wf(s, h) = (f(s) + \frac{R(s, h)}{\overline{\mathcal{F}\zeta}(h.\lambda)}.h).\overline{\mathcal{F}\zeta}(h.\lambda).h^{\frac{1}{2}} \quad (2.5.4)$$

et

$$|R(s, h)| \leq \left\| |f'| \right\|_{\infty, hI+s} \cdot \int |u \cdot \zeta(u)| du. \quad (2.5.5)$$

Exemple 2.5.2 *Considérons un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1[$ tels que l'on ait*

$$|f(t) - f(\tau)| \leq c \cdot |t - \tau| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons tout d'abord que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$$

Nous supposons que $a \leq b$. Par le théorème de la moyenne; il existe un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^$ entre b et $a + b$ tel que*

$$(a + b)^\alpha - b^\alpha = a \cdot \alpha \varepsilon^{\alpha-1} \leq a \alpha^{\alpha-1} = \alpha^\alpha$$

puisque $id^{\alpha-1}$ est une fonction décroissante sur \mathbb{R}_+^ .*

On choisit une ondelette ζ telle que ζ et $id \cdot \zeta \in L^1(\mathbb{R})$. Elle est donc intégrale nulle par la remarque 2.2.1 et il vient

$$\begin{aligned} |Wf(s, h)| &\leq h^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \int \bar{\zeta}(u) \cdot (f(h \cdot u + s) - f(\tau)) du \right| \leq c \cdot h^{\frac{1}{2}} \int |\zeta(u)| \cdot |h \cdot u + s - \tau|^\alpha du \leq \\ &\leq c \cdot h^{\frac{1}{2}} \left(\int |\zeta(u)| \cdot |h \cdot u|^\alpha du + |s - \tau|^\alpha \cdot \int |\zeta(u)| du \right) \leq \\ &\leq c \cdot \left(\int |\zeta(u)| du \right) \cdot |s - \tau|^\alpha \cdot h^{\frac{1}{2}} + c \cdot \left(\int |\zeta(u)| \cdot (1 + |u|) du \right) \cdot h^{\frac{1}{2} + \alpha}. \end{aligned}$$

Il est donc possible d'estimer τ à α

2.6 Ondelettes régulières

Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ une ondelette. Rappelons que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$Wf(s, h) = W(T_{-s}f)(0, h) \quad (2.6.1)$$

En effet, on a

$$W(T_{-s}f)(0, h) = Wf_s(0, h) = \int \frac{1}{\sqrt{h}} \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) f(t + s) dt$$

En posant $y = t + s$, alors $dy = dt$ et on obtient

$$\begin{aligned} W(T_{-s}f)(0, h) &= \int \frac{1}{\sqrt{h}} \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) f(t+s) dt = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{h}} \bar{\zeta}\left(\frac{y-s}{h}\right) f(y) dy = \\ W(T_{-s}f)(0, h) &= Wf(s, h) \end{aligned}$$

Pour étudier le comportement de Wf au voisinage de $\mathbb{R} \times \{0\}$, il nous suffit donc d'étudier celui de $Wf(0, h)$ lorsque h tend 0, et nous allons voir qu'il dépend essentiellement des moments de ζ .

Définition 2.6.1 *Pour $n \in \mathbb{N}$, nous dirons que ζ a des moments finis jusqu'à l'ordre n si $\text{id}^k \cdot \zeta \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, et nous poserons*

$$M_k = \int \bar{\zeta}(t) \cdot t^k dt \quad (2.6.2)$$

Remarque 2.6.1 *Si ζ une ondelette dont le premier moment est fini, on a $M_0 = 0$. Réciproquement si les moments d'ordre 0 et 1 sont fini et $M_0 = 0$, alors ζ est une ondelette.*

Ce n'est qu'une reformulation de la remarque 2.2.1.

Etant donné $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$, considérons son développement limité de Taylor en 0

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t) \quad (2.6.3)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{h} \cdot Wf(0, h) &= \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot f(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) t^k dt + \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot R_n(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^{k+1} + \tilde{R}_n(h); \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{R}_n(h) = \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(s) ds \right) dt. \quad (2.6.4)$$

Proposition 2.6.1 Soient ζ une ondelette et $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^r(\mathbb{R})$.

(i) Si les moments de ζ sont finis jusqu'à l'ordre $n - 1$ et $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{R}_n(h)}{h^n} = 0 \quad (2.6.5)$$

i.e.

$$Wf(0, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^{k+1} + o(h^n) \right). \quad (2.6.6)$$

(ii) Si les moments de ζ sont finis jusqu'à l'ordre n et $f^{(n)} \in C^b(\mathbb{R})$, alors

$$\left| \tilde{R}_n(h) \right| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \cdot \left(\int |\zeta(t)| \cdot |t|^n dt \right) \cdot h^{n+1}; \quad (2.6.7)$$

i.e.

$$Wf(0, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot M_k \cdot h^k + O(h^{n+1}) \right). \quad (2.6.8)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \left| \tilde{R}_n(h) \right| &= \left| \int \zeta(x) \cdot \left(\int_0^{hx} \frac{(hx-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(s) ds \right) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{h^n}{(n-1)!} \cdot \int |\zeta(x)| \cdot |x|^n \cdot \left(\int_{-h|x|}^{h|x|} |f^{(n)}(s)| ds \right) dx \end{aligned}$$

d'où le résultat par le théorème de Lebesgue, puisque $\zeta \cdot id^{n-1} \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{-h|x|}^{h|x|} |f^{(n)}(s)| ds \leq \|f^{(n)}\|_1 < \infty.$$

Pour la seconde partie, il vient que

$$|R_n(t)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \cdot \frac{|t|^n}{n!},$$

et comme

$$\tilde{R}_n(h) = \int \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \cdot R_n(t) dt$$

il en résulte

$$\left| \tilde{R}_n(h) \right| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \cdot \int \left| \bar{\zeta}\left(\frac{t}{h}\right) \right| \cdot |t|^n dt = \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \cdot \left(\int |\zeta(t)| \cdot |t|^n dt \right) \cdot h^{n+1}.$$

■

Cette formule montre que la convergence de $Wf(0, h)$ vers 0, lorsque h tend vers 0, est d'autant plus rapide lorsque le plus grand r , tel que $M_k = 0$ pour $k \leq n$, est grand. Remarquons que dans la formule de reconstruction, si l'ondelette est bien concentrée au voisinage de 0, par exemple à décroissance rapide, seules les valeurs s proches de t sont nécessaires et que la qualité de la convergence ci-dessus entraîne une bonne convergence de l'intégrale, supprimant l'effet négatif dû au facteur $\frac{1}{h^2}$. Ceci nous conduit à poser la définition suivante:

Définition 2.6.2 Soit $\zeta \in L^2(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que ζ est une ondelette régulière d'ordre n si

$$(a) \quad \zeta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) ; \text{ et pour } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } k = 0, \dots, n, \text{ on a}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \langle t \rangle^m \cdot |\partial^k \zeta(t)| < \infty. \quad (2.6.9)$$

avec

$$\langle t \rangle = 1 + t^2$$

$$(b) \quad M_k = \int t^k \cdot \zeta(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots, n \quad (2.6.10)$$

La régularité d'ordre 0 signifie que ζ est à décroissance rapide et que $\int \zeta(t) dt = 0$.

CHAPITRE 3 Application

3.1 Limite de la transformée de Fourier

L'analyse de Fourier est performante pour l'analyse de signaux périodiques et suffisamment réguliers. Les signaux numériques caractérisant le signal dans le domaine des fréquences. En effet si t est le temps et $f(t)$ le signal.

Si la fonction f est périodique de période T :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \quad (3.1.1)$$

ou, si f appartient à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} dt \quad (3.1.2)$$

donne le contenu fréquentiel de f pour la fréquence $\frac{n}{T}$ ou x .

Cependant si le signal est irrégulier la quantité de paramètres à conserver devient trop importante. Par conséquent, même avec la transformée de Fourier rapide, l'analyse de Fourier présente des inconvénients majeurs pour une analyse satisfaisante du signal.

Le premier est principal inconvénient est que dans le spectre $\hat{f}(x)$ tous les aspects temporels du signal **disparaissent**, par exemple le début et la fin ou l'instant d'une singularité. En effet si f n'est pas continue il est quasiment impossible de le détecter à l'aide \hat{f} . Nous pouvons le voir sur l'exemple suivant où f est un signal créneau : $f = 1_{[-a,a]}$ avec $a > 0$. Sa transformée de Fourier est

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin(2\pi\omega a)}{\pi\omega} \quad (3.1.3)$$

Exemple 3.1.1 On représente en dessous la fonction $f = 1_{[-1,1]}$ et sa transformée de Fourier ainsi que la fonction $f = 0.9 1_{[-1,1]} + 0.1 1_{[-2,2]}$ et sa transformée.

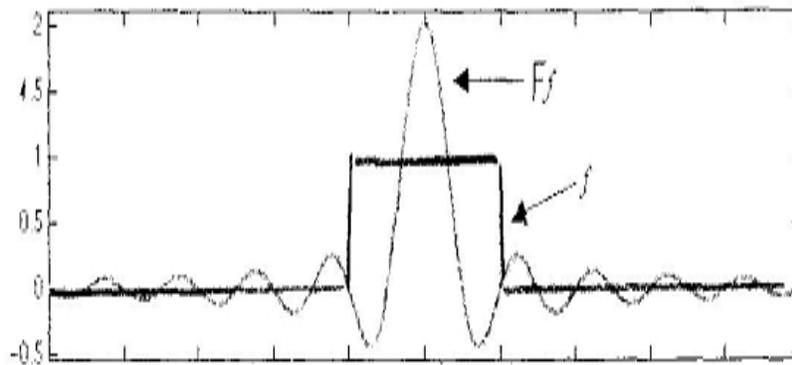
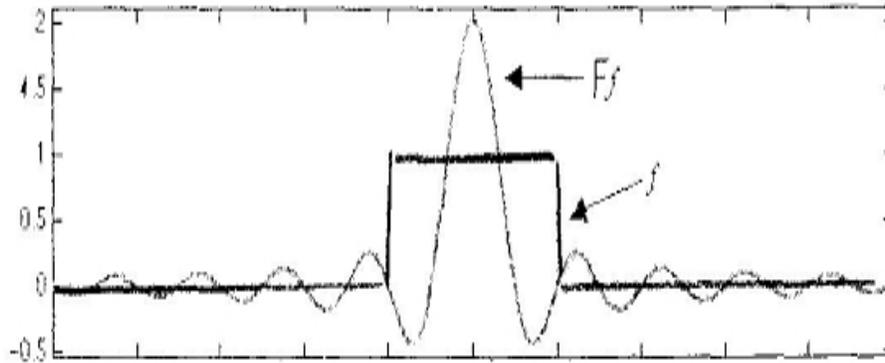


Fig.3.1

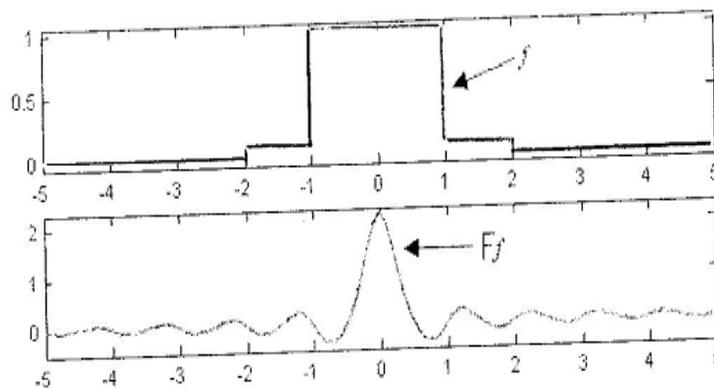


Fig.3.2

On remarque que les deux transformées de Fourier sont similaires alors que la seconde fonction possède bien plus de discontinuités que la fonction créneau. On ne peut donc pas repérer les ruptures et les changements de régularité de la fonction f (l'intégration sur \mathbb{R} effectue une moyenne qui masque les discontinuités).

Exemple 3.1.2 *deux notes de musique jouées en même temps.*

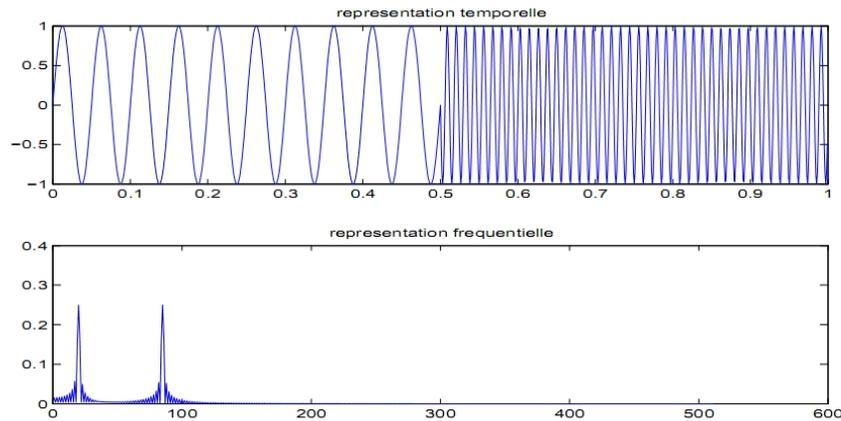


Fig.3.3: Représentation temporelle et fréquentielle de deux notes musicales

De la même façon si on écoute un "glissando" joué par un violoncelle par exemple, la fréquence dépend du temps, ce que l'analyse de Fourier ne "voit" pas.

Un autre inconvénient est **la non-causalité** de la transformée de Fourier. Il est clair que le calcul de \hat{f} nécessite la connaissance de f sur \mathbb{R} tout entier. Une analyse en temps réel est donc impossible. On ne peut pas connaître le spectre de \hat{f} d'un signal f si on ignore la fonction.

Exemple 3.1.3 Deux fonctions identiques sur un même intervalle peuvent avoir des transformées de Fourier très différentes.

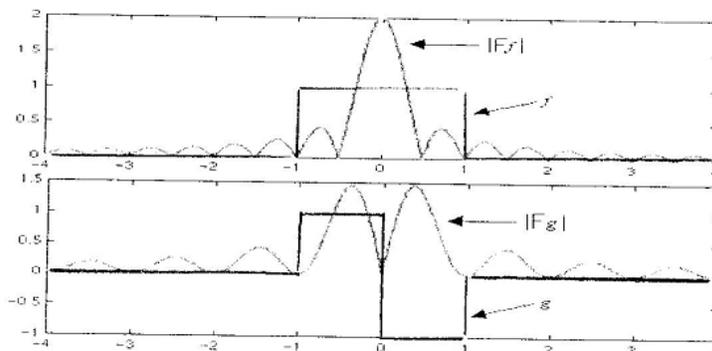


Fig.3.4

Le troisième inconvénient est dû au **principe d'incertitude d'Heisenberg**.

Définition 3.1.1 On appelle dispersion d'énergie de f en temps

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \quad (3.1.4)$$

où f et tf sont dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 3.1.2 On appelle dispersion de f en fréquence

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{f}(x)|^2 dx \quad (3.1.5)$$

On pose $E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ l'énergie de f ; on introduit aussi

$$(\Delta t)^2 = \frac{\sigma_f^2}{E_f} \quad (3.1.6)$$

$$(\Delta \lambda)^2 = \frac{\sigma_{\hat{f}}^2}{E_f} \quad (3.1.7)$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg précise le lien entre la localisation d'un signal et celle de son spectre, autrement dit entre les dispersions σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$, c'est à dire:

$$\sigma_f - \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{E_f}{4\pi} \Rightarrow \Delta t \times \Delta \lambda \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (3.1.8)$$

Ceci pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que f, f', tf sont dans $L^2(\mathbb{R})$.

Ceci se comprend dans le sens où plus le support de f est "petit", plus le support de \hat{f} est "grand" et réciproquement.

Exemple 3.1.4 Prenons une fonction dont sa transformée de Fourier vérifie $\mathcal{F}(\delta) = 1$ et $\mathcal{F}(1) = \delta$.

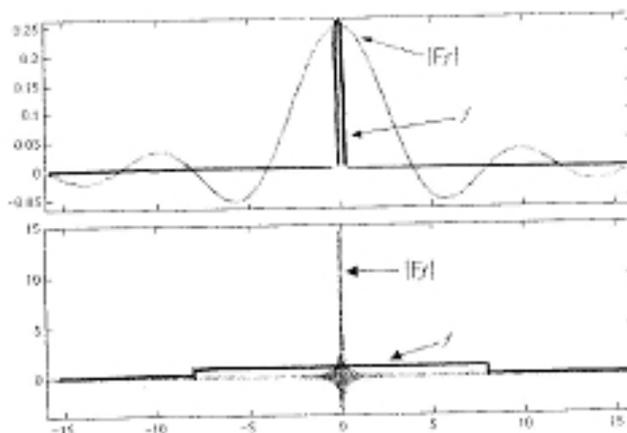


Fig.3.5: La fonction $f = 1_{[-a,a]}$ où $a = \frac{1}{8}$ et $a = 8$

Cette propriété implique que la transformée de Fourier inverse peut être numériquement instable puisque les informations utiles pour reconstruire f à partir de \hat{f} par la formule d'inversion peuvent se trouver à très haute fréquence.

En effet si l'on prend l'exemple d'unregistrement analogique d'un son régulier sur un disque détérioré en un unique point, la présence du craquement empêche la transformée de Fourier du signal de décroître rapidement ce qui provoquera une reconstruction par la formule d'inversion numériquement instable car en tout point elle est obtenue à partir de l'intégrale d'une fonction très oscillante. Comment localiser cette instabilité numérique?

Tout ceci montre que la transformée de Fourier est une transformation à caractère global, ce qu'il va falloir corriger.

3.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante (Exemple d'un signal musical)

3.2.1 Idée de fenêtre

Pour éviter l'inconvénient du caractère global, une idée naturelle consiste à "tronquer" le signal. On localise ainsi l'analyse en sélectionnant une portion autour d'une position temporelle. Puis, on fait l'analyse de Fourier de ce signal tronqué. On peut ensuite commencer par d'autres positions.

Tout d'abord, il est donc naturel de multiplier le signal $f(t)$ par le créneau $1_{[-a,a]}$ dans le cadre où l'on veut "ouvrir une fenêtre" autour de l'origine, ou bien un translaté pour regarder le signal en un point.

On regarde donc le signal $g(\lambda) = 1_{[-a,a]}f(\lambda)$ ce qui avec les règles sur les transformées de Fourier revient à effectuer le calcul suivant :

$$\hat{g}(\lambda) = \widehat{1_{[-a,a]}f(\lambda)} = \frac{\sin 2\pi a\lambda}{\pi\lambda} * \hat{f}(\lambda) = (s_a * \hat{f})(\lambda) \quad (3.2.1)$$

où $s_a = \frac{\sin 2\pi a\lambda}{\pi\lambda}$ est le sinus cardinal.

La représentation graphique suivante nous permet de comprendre l'insuffisance de l'utilisation du sinus cardinal.

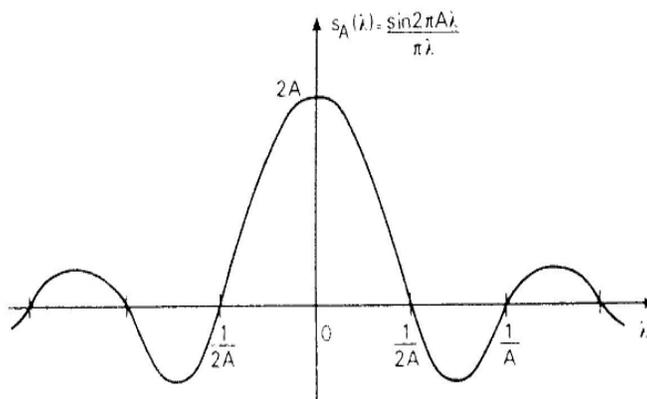


Fig.:Le sinus cardinal

En effet, cette fonction s'amortit très lentement et présente d'important lobes près de l'origine.

Remarque 3.2.1 Remarquons tout de même que plus a est grand, plus l'approximation de \hat{f} par \hat{g} est précise, d'où l'envie d'utiliser des fonctions plus régulières et centrées autour de l'origine.

3.2.2 Exemples de fenêtres

Fenêtre triangulaire:

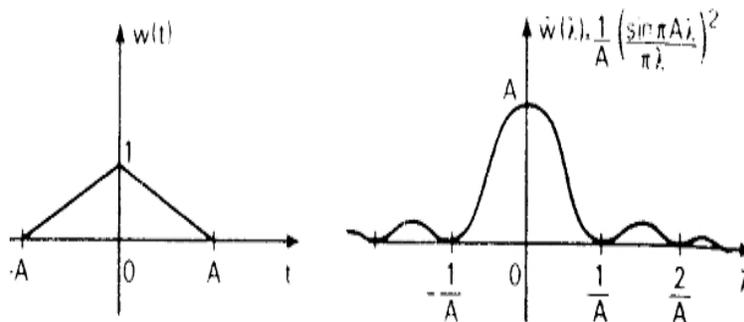


Fig.3.6: La fenêtre triangulaire

Fenêtre de Hamming et Hanning: de la forme :

$$w(t) = \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos 2\pi \frac{t}{\alpha} \right] r(t).$$

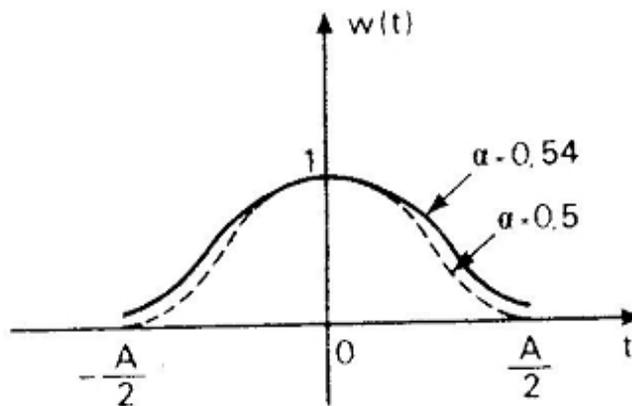


Fig.3.7: $\alpha = 0.54$:fenêtre de Hamming, $\alpha = 0.5$: fenêtre de Hanning

Fenêtre de Gauss:de la forme :

$$w(t) = Ae^{-\alpha t^2} \quad (\alpha, A > 0) \quad (3.2.2)$$

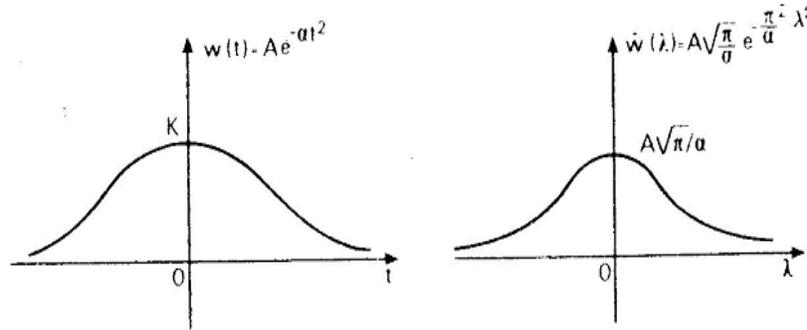


Fig.3.8: La fenêtre de Gauss

3.3 Comparaison Fourier-Gabor et limites de la transformée de Gabor

On peut écrire ces deux transformées :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{2\pi itx} dx \quad (3.3.1)$$

$$f(t) = \int \int_{\mathbb{R}^2} W_f(\lambda, b)w_{\lambda, b}(t)d\lambda db \quad (3.3.2)$$

Nous pouvons voir qu'elles peuvent s'interprète comme la décomposition du signal f sur une famille de fonctions jouant le rôle d'une base et où les sommes sont remplacées par des intégrales. Dans le cas de Fourier cette famille est évidemment $(e^{2\pi itx})_{x \in \mathbb{R}}$ et dans le cas de Gabor $(w_{\lambda, b}(t))_{(\lambda, b) \in \mathbb{R}^2}$ où on rappelle que $w_{\lambda, b}(t) = w(t - b)e^{-2\pi i\lambda t}$.

On appelle les éléments de cette famille les atomes de cette transformée ou bien "ondelette de Gabor". Graphiquement, on a une fonction sinusoïdale fortement amortie pour Gabor, c'est à dire une gaussienne modulée en temps.

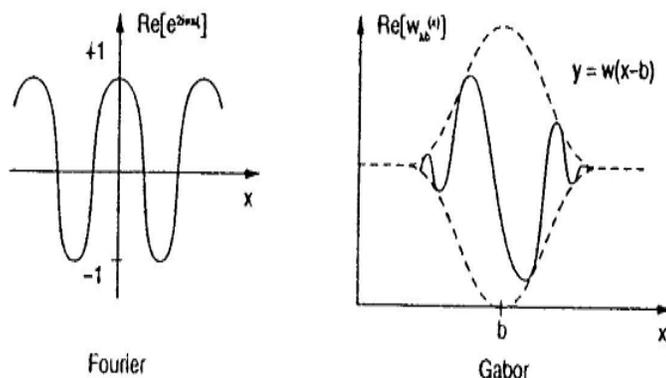
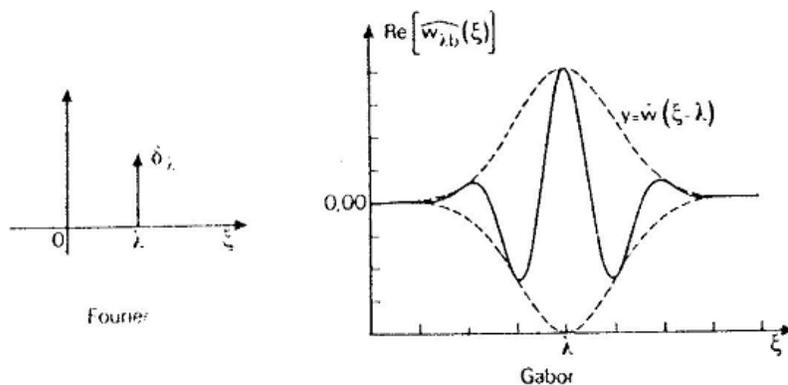


Fig.3.9:Fonctions de base dans la décomposition de Fourier et de Gabor

On obtient de la même manière dans l'espace des fréquences:



On voit alors que dans la méthode de Fourier les fonctions de base sont totalement concentrées en fréquence (sous forme d'impulsion de Dirac) et totalement réparties sur l'axe du temps car la sinusoïde ne s'amortit pas et s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. On voit ainsi que la transformée de Fourier donne le maximum d'informations sur la répartition des fréquences mais perd complètement celles relatives au temps.

La transformée de Gabor nous met en présence d'un objet nouveau appelé plan temps-fréquence ou espace de phase. Il s'agit ici du plan \mathbb{R}^2 . La transformée de Gabor permet

donc de présenter les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ comme des fonctions sur le plan temps-fréquence. Ceci met en évidence les avantages de la méthode de Gabor sur celle de Fourier.

Inconvénient majeur de Gabor:

On peut cependant noter un inconvénient majeur de la méthode de Gabor. En effet, la fenêtre de longueur fixe ce qui est un handicap important lorsqu'on veut traiter des signaux dont les variables peuvent avoir des ordres de grandeur très variables. Il serait donc intéressant de pouvoir faire varier cette fenêtre non seulement par translation mais également par dilatation et contraction en fonction des caractéristiques du signal et de ce que l'on veut mettre en évidence.

3.3.1 Analyse spectrale locale. Comparaison spectres Fourier / ondelettes

Spectre de Fourier d'un signal.

Définition 3.3.1 Soit $f(t)$ un signal réel. Sa transformée de Fourier est définie par:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt} dt \quad (3.3.3)$$

et son spectre de puissance :

$$E(x) = \left| \hat{f}(x) \right|^2 \text{ pour } x \geq 0. \quad (3.3.4)$$

L'énergie totale E du signal f vérifie :

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(x) \right|^2 dx = \int_0^{+\infty} E(k) dk. \quad (3.3.5)$$

Spectre local, spectre global en ondelettes.

Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une ondelette avec p moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \text{ pour } n = \overline{0, p-1}, \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \psi(t) dt \neq 0 \quad (3.3.6)$$

Cette condition est équivalente à l'existence d'une fonction continue bornée φ , telle que $\varphi(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ et

$$\hat{\psi}(x) = x^p \varphi(x). \quad (3.3.7)$$

La transformée en ondelettes \hat{s} du signal s est:

$$\hat{s}(a, b) = Ts(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (3.3.8)$$

La conservation de l'énergie de la transformation en ondelettes s'écrit :

$$E = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db \quad (3.3.9)$$

avec

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (3.3.10)$$

Le spectre local en ondelettes est défini pour $k \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{E}(k, x) = \frac{1}{c_\psi k_0} \left| \tilde{s} \left(\frac{k_0}{k}, x \right) \right|^2 \quad (3.3.11)$$

où k_0 est la fréquence la plus importante de l'ondelette ψ .

Ce spectre local mesure la contribution à l'énergie totale provenant du voisinage du point x et du nombre d'onde k , le voisinage dépendant de la forme de l'ondelette ψ dans l'espace physique et dans l'espace de Fourier.

A partir du spectre local, on peut définir un spectre moyen en ondelette $\tilde{E}(k)$:

$$\tilde{E}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k, x) dx \quad (3.3.12)$$

qui est relié à l'énergie totale par: $E = \int_0^{+\infty} \tilde{E}(k) dk$

3.3.2 Relation entre le spectre de Fourier et le spectre moyen en ondelettes

On a la relation entre le spectre de Fourier $E(k)$ et le spectre moyen en ondelettes $\tilde{E}(k)$:

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{c_\psi k} \int_0^{+\infty} E(x) \left| \hat{\psi} \left(\frac{k_0 x}{k} \right) \right|^2 dx \quad (3.3.13)$$

Le spectre en ondelette est une moyenne du spectre de Fourier pondéré par le carré de la transformée de Fourier de ψ centrée en k . On montre plus loin que le comportement du spectre en ondelettes à haute fréquence dépend du comportement de l'ondelette à petits nombres d'onde et donc du nombre des moments nuls.

Preuve.

$$\begin{aligned}\tilde{E}(k) &= \int_0^{+\infty} E(k, x) dx \\ &= \frac{1}{c_\psi k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{s}\left(\frac{k_0}{k}, x\right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{c_\psi k} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{s}(v)|^2 \left| \hat{\psi}\left(\frac{k_0 v}{k}\right) \right|^2 dv\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Parseval à la fonction $x \rightarrow \tilde{s}\left(\frac{k_0}{k}, x\right)$, et on a déjà vu que la transformée de Fourier de la fonction $x \rightarrow \tilde{s}(a, x)$ est

$$v \rightarrow \sqrt{a} \tilde{s}(v) \overline{\hat{\psi}(av)} \quad (3.3.14)$$

■

3.3.3 Spectres à décroissance exponentielle.

Supposons que le spectre de Fourier vérifie :

$$E(k) = e^{-k^2} \quad (3.3.15)$$

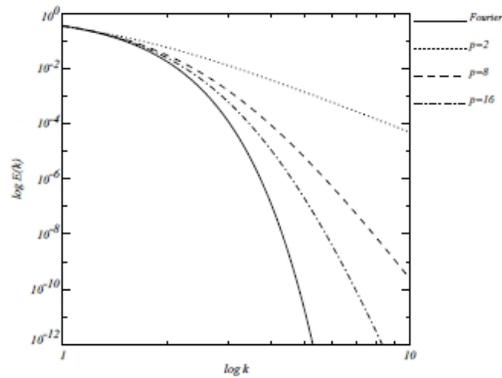
Le spectre moyen en ondelettes s'écrit :

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{c_\psi k} \int_0^{+\infty} e^{-w^2} \left| \hat{\psi}\left(\frac{k_0 w}{k}\right) \right|^2 dw \quad (3.3.16)$$

D'après le théorème de Lebesgue, l'intégrale converge vers une limite finie non nulle quand $k \rightarrow +\infty$, donc

$$\tilde{E}(k) \sim k^{-(2p+1)} \quad \text{pour } k \rightarrow +\infty \quad (3.3.17)$$

Le comportement du spectre en ondelettes dépend du nombre p de moments nuls de l'ondelette : $\tilde{E}(k) \sim k^{-(2p+1)} \quad \text{pour } k \rightarrow +\infty$



Spectre de Fourier : $E(k) = e^{-k^2}$ et spectres en ondelettes associés $\tilde{E}(k)$ pour des ondelettes avec p conciliations,

$$\hat{\psi}(k) = k^p \exp(-\pi k^2) \text{ pour } p = 2, 8 \text{ et } 16.$$

Programme en matlab

```
%ondelette.m
%PROGRAMME DE TRANSFORMEE EN ONDELETTES
%Le signal à analyser est y
ii=sqrt(-1)
%..y=signal à analyser(en mémoire)
%y est un vecteur du signal de dim n+1=m
x1=0:0.1:1;
y=sin(40*pi*x1)+sin(170*pi*x1)
n=length(y)-1;
p=fix(log(n)/log(2));
dx=1/n; %pas
t=0:dx:1;
x=-1:dx:1;% xx est un vect
%calcul de l'ondelette
a0=1/2
```

```
a0=a0^(1/2)
p=2*p;
for i=p-1:-1:0
a=a0^i;% 'echelle
xx=x/a;
g=exp(-xx.^2/2).*exp(ii*5*xx)./sqrt(a)%ondelette de morlet où g=(1-2*xx.^2).*exp(-
2*xx.^2)./sqrt(a);%chapeau mexicain
%calcul des coefficients d'ondelettes à l'echelle a
W=zeros(p,n+1); %matrice qui ne contient que des zéros
wa=conv(y,g); % produit de convolution %
W(i+1,1:n)=abs(wa(n+1:2*n));
end
%trace
subplot(3,1,1),plot(t(1:n),y(1:n)),title('fonction a analyser')
subplot(3,1,2),imagesc(W(1:p,1:n)),title('coefficientsd ondelettes')
```

Conclusion

Nous avons vu en quoi les ondelettes et les gaborettes constituent une alternative à l'analyse de Fourier traditionnelle. En effet nous disposons à présent de méthode de décomposition des signaux en fonctions élémentaires, engendrées par des transformations simples d'une fonction de base. La fonction de base est soit déplacée et modulée (dans le cas des gaborettes), soit translatée et dilatée (ondelette). Il s'avère que les différents outils que nous avons étudiés ici sont davantage complémentaires que concurrents, et l'analyse de Fourier classique peut en effet être plus performante sur certains domaines.

Nous souhaitons qu'à travers ce modeste travail, l'idée sur l'analyse par ondelettes soit désormais plus claire qu'elle en était. Nous espérons aussi que ce mémoire sera un support pour ceux qui voudraient travailler sur le sujet qui s'avère très intéressant. Et nous finirons par dire que la transformation de Fourier et les ondelettes ont apporté de belles choses et ont permis d'améliorer et de faciliter l'étude d'un signal. Cependant, un nombre très important de questions restent encore posées, des questions que l'on rencontre dans certains domaines d'applications

Bibliographie

- [1] **A. Aldroubi** and **A. Laine** eds, IEEE Transactions on Medical Imaging, revue : Special issue on "Wavelets in Medical Imaging", M. Unser, vol.22, no. 3, mars 2003.
- [2] **A. Bilgot, O. Le Cadet, V. Perrier, L. Desbat** Edge detection and Classification in X-Ray images. Application to Interventional 3D-vertebra-shape reconstruction, SURGETICA 2005, p. 459-467.
- [3] **A. Bilgot, V. Perrier, L. Desbat** Wavelets, Local Tomography and Interventional X-Ray Imaging, IEEE NSS/MIC'2004, Rome, 2004.
- [4] **Christian Bourdarias**. Intégration et applications. Université de Savoie, Groupe de Modélisation Mathématique et mécanique. 2000.
- [5] **Thierry Gallay**. Théorie de la mesure et de l'intégration. Université JOSEPH FOURIER, GRENOBLE. 2009.
- [6] **Claude Gasquet et Patrick Witomski**. Analyse de Fourier et applications. DUNOD, Paris 2000.
- [7] **Valérie Perrier**. Cours de l'Ecole Doctorale, Orsay, 12 décembre 2005.
- [8] **Claude Portenier**. ONDELETTES, Paris, 1998.

Résumé

Dans l'ensemble de ce travail; nous rappellerons l'essentiel de la transformation de Fourier, ensuite nous nous consacrerons aux ondelettes; où nous donnerons l'ensemble des définitions et propriétés de ces dernières pour arriver enfin au point qui fait l'objet de notre mémoire, la limite de l'analyse de Fourier. Nous citerons des exemples concrets où nous expliquerons pourquoi d'un côtés la transformée de Fourier n'est plus applicable et d'un autre pourquoi un outil comme les ondeletes est un moyen adéquat pour l'obtention des résultats satisfaisants.