

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BEJAIA

A. MIRA

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

en Mathématiques

Spécialité : Statistique et Analyse Décisionnelle

Mémoire

Présenté par

LAHLAH Nouria

BOUYOUCHEF Nadjet

THÈME

**Comparaison stochastique pour évaluation des performances
de système d'attente avec rappels exponentielle**

Soutenu publiquement, le 17/06/2014 devant le jury composé de :

Mme	Katia HASSAINI	M.A.A	U.A.M. Béjaïa	Président.
Mr	Mohamed BOUALEM	M.C.A	U.A.M. Béjaïa	Rapporteur
Mr	Mouloud CHERFAOUI	M.A.A	U. Biskra	Co-Rapporteur.
Mme	Lala Maghnia ALEM	Magister	U.A.M. Béjaïa	Examinatrice.

Remerciements

Nous remercions, avant tout, Dieu le Tout puissant de nous avoir donné patience, santé et volonté tout au long de nos études.

Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

Nous tenons aussi à remercier, nos deux promoteurs, Mr Mohamed BOUALEM et Mr Mouloud CHERFAOUI pour leurs suivis et leurs conseils durant l'évolution de ce travail.

Nous remercions, ainsi, les membres des jurys pour l'effort qu'ils feront pour examiner ce modeste travail.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui ont collaboré à la réalisation de ce projet.

Nous exprimons notre reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation.

Dédicaces

LAHLAH Nouria

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes très chers frères et sœurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous les étudiants de ma promotion.

Dédicaces

BOUYOUCHEF Nadjet

Je dédie ce travail :

A mes parents.

A mes frères Bader et Hani .

A mes sœurs Souhila et Bassma.

A mes cousines : Fahima, Malia , Saliha , Nadjima et Nassira.

A mes cousins : Azeddine, Walid, Majid, Mabrouk, Nassir, Rachide .

A mon bon père Mohand Ouali et ma belle mère Ourbih megudouda

A mon mari younes et ses frères (e) Belaid, Billal, Hichem, Saliha, Samia

A la femme de Belaid Samira et ses petits enfants Mahdi, Liza et Luoiza.

A tous ceux qui portent mon nom: Bouyoucef.

A tous(tes) mes amis(es).

A mes collègues.

A ma binôme Nouria.

Table des matières

1	Systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et feedback	5
1.1	Introduction	5
1.1.1	Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite	6
1.2	Systèmes d'attente M/G/1 avec rappels	6
1.2.1	Chaîne de Markov induite	8
1.3	Période d'activité	10
1.4	Files d'attentes avec rappels et feedback	11
1.5	Approximations stochastiques et monotonie d'un système d'attente avec rappels et feedback	12
1.6	Conclusion	13
2	Généralités sur la théorie des ordres stochastiques	14
2.1	Introduction	14
2.2	Propriétés générales des ordres partiels	15
2.2.1	Ordre stochastique	17
2.2.2	Ordre convexe	19
2.2.3	Ordre concave	22
2.2.4	Ordre en transformée de Laplace	23
2.2.5	Ordre en fonctions génératrices	24

2.2.6	Relations entre les ordres partiels	25
2.3	Modèles stochastiques et monotonie	25
2.3.1	Modèles stochastiques	25
2.3.2	Propriétés de monotonie	25
2.4	Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes	26
2.4.1	Opérateurs monotones et comparables	26
2.5	Distributions non-paramétriques	28
2.5.1	Relation avec les distributions paramétriques	30
2.5.2	Relation entre les classes de distributions non-paramétriques	30
2.6	Conclusion	31
3	Inégalités stochastiques du système d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs	32
3.1	Introduction	32
3.2	Description du modèle	33
3.3	Chaîne de Markov induite	34
3.4	Notations	35
3.5	Inégalités préliminaires	36
3.5.1	Monotonie de la chaîne de Markov induite	47
3.5.2	Monotonie de l'opérateur de transition	48
3.6	Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système	58
3.7	Application numérique	61
3.8	Conclusion	64
3.9	Cas particulier : $\delta = 0$ (sans clients négatifs)	65
3.10	Description du modèle	65

3.11 Chaîne de Markov induite	67
3.12 Inégalités préliminaires	68
3.12.1 Monotonie de la chaîne de Markov induite	72
3.12.2 Monotonie de l'opérateur de transition	73
3.13 Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système	80
3.14 Conclusion	83
Conclusion générale	84
Annexe A	85
3.15 Analyse mathématique d'un système d'attente	86
3.16 Notation de Kendall-Lee	86
3.17 Les différentes disciplines de service	87
3.18 Mesures de performance d'une file d'attente	88
3.19 Processus stochastique	89
3.19.1 Chaînes de Markov	89
3.19.2 Processus de Poisson	90
3.20 Modèles markoviennes	91
3.20.1 Système d'attente M/M/1	91
3.21 Modèles non markoviennes	94
3.21.1 Système d'attente M/G/1	94
Conclusion	97

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté un modèle d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs. Ce type du système diffère des systèmes classiques par l'existence de trois paramètres supplémentaires : rappels, feedback et clients négatifs.

Nous avons étudié les propriétés de monotonie d'une file M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques. Nous avons d'abord montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite par rapport à l'ordre stochastique, convexe et la transformée de Laplace. Par la suite, nous avons obtenu des conditions de comparabilité des deux opérateurs et de transition. Nous avons ensuite montré que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, si la distribution des temps de service est NBUE (respectivement NWUE). Enfin, nous avons confirmé les résultats théoriques obtenus par une application numérique. Il est à noter que les résultats obtenus dans ce mémoire est une extension du modèle M/G/1 avec rappels et feedback.

Mots-clés : Files d'attente avec rappels, Arrivées négatives, Feedback, Chaîne de Markov incluse, Distribution stationnaire, Ordres stochastiques, Bornes stochastiques, Monotonie.

Introduction

Dès la fin des années 1940, des chercheurs ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes réels de plus en plus complexes, tels que les systèmes téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition de demandes du service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels. Cependant, l'influence de ce phénomène a été longtemps négligée durant les décennies suivantes. Ce n'est que vers les années 1970 – 1980 qu'on a vu un net regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, avec l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de Yang et Templeton [64], Falin (1990) [42], A. Aïssani (1994) [3] et dans la monographie d'Artalejo et Gómez (2008) [20].

Il est apparu ces dernières années dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté, les arrivées négatives, dont la présence dans le système d'attente affecte ce dernier de différentes manières. Pour cela, Plusieurs possibilités différentes ont été introduite dans la littérature à ce sujet : élimination individuelle,

élimination par groupe, élimination d'une quantité aléatoire d'activité, le désastre (la catastrophe [14])).

Cependant, la théorie analytique des modèles d'attente avec rappels s'avère d'une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables afin que le praticien puisse en bénéficier. Par ailleurs, on peut citer le degré de difficulté pour l'obtention de certaines caractéristiques dans quelques modèles tels que les modèles de files d'attente avec rappels et vacances, avec rappels et priorité, avec rappels et feedback, avec rappels de distribution générale ayant deux types de clients. Cette difficulté réside essentiellement dans l'utilisation des inverses des transformées de Laplace-Stieljes et des distributions marginales. Pour pallier à toutes ces difficultés, les chercheurs ont recouru aux méthodes d'approximation qui permettent d'avoir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance. C'est pour toutes ces raisons, qu'on s'intéresse, dans notre étude, d'une manière particulière à la méthode de comparaison stochastique.

La méthode de comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour l'étude des performances de certains systèmes modélisés par des chaînes de Markov à temps continu ou discret. Ces études sont motivées par la difficulté d'obtenir des résultats de performance explicites pour la plupart de ces systèmes. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative. L'idée générale de cette méthode est de borner un système complexe par un nouveau système, plus simple à résoudre et fournissant des bornes qualitatives pour ces mesures de performance. Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans

divers domaines scientifiques, tels que l'économie, la biologie, la recherche opérationnelle, la théorie de fiabilité, la théorie de décision, les files d'attente et les réseaux informatiques et de télécommunication [45, 54].

Le but de notre travail est d'appliquer les méthodes de comparaison stochastiques, pour étudier les propriétés de monotonie du modèle M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs relativement à l'ordre stochastique, convexe et à l'ordre de Laplace, afin d'obtenir des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite liée au modèle [27, 28, 26, 30].

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre comprend une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec rappels. Cette synthèse actualise celles de Yang et Templeton (1987) [64], Falin (1990) [42], ainsi que celle de A. Aïssani (1994) [3]. Une attention particulière est consacrée au système M/G/1 avec rappels. De plus, on a introduire la notion de feedback.

Le deuxième Chapitre, on donne un aperçu sur la notion des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et de Laplace), ainsi que des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastiques. On présente aussi les classes de distributions d'âge issues de la théorie de la fiabilité.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude des inégalités stochastiques pour le modèle M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et des clients négatifs. On donne les conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe. On étudie la comparabilité des opérateurs de transition associée aux chaînes de Markov induite de deux systèmes M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs. Ainsi que la comparabilité des distributions stationnaires respectives de nombres de clients dans les deux systèmes. De plus, on détermine les bornes stochastiques pour la distribution stationnaires de modèle considéré. Finalement,

on donne des cas particuliers pour le modèle M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.

De plus, L'annexe A présente des préliminaires sur les files d'attente et on termine par une conclusion générale et une bibliographe.

1 Systèmes d'attente

M/G/1 avec rappels et

feedback

1.1 Introduction

Les files d'attente avec rappels ont été introduites par de nombreuses recherches portant sur l'influence du phénomène de rappels ont été cités (Aïssani (1994) [3], Amador et Artalejo (2009) [23], M. Boualem (2003) [25], Falin et Templeton (1997) [43], Artalejo et Gómez (2008) [41], Yang et Templeton (1987) [64]).

La description d'un système d'attente avec rappels se caractérisent par la propriété qu'un client arrivant dans le système et qui trouve tous les serveurs occupés quitte le système définitivement, ou rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite". Si un système d'attente classique est défini complètement par un processus des arrivées, la discipline d'attente et le mécanisme de service, alors que pour un système avec rappels, il y a lieu d'ajouter un élément décrivant

la loi des répétitions d'appels. Ces systèmes de files d'attente sont largement utilisés dans la modélisation du service d'abonnés dans une centrale téléphonique [10, 43].

Une classification bibliographique sur les systèmes avec rappels est donnée par Artalejo [15, 17]. Pour illustrer le rôle actif des files d'attente avec rappels au cours des dernières années, nous mentionnons certains articles récents [19, 38, 37, 40, 63].

1.1.1 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite

La définition du protocole de rappels est en effet un sujet de controverse (voir Falin (1990) [42]) et concerne l'aspect modélisation du système sous étude. Le protocole le plus décrit dans la théorie classique des files d'attente avec rappels est la politique de rappels classiques dans laquelle chaque source dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre α . Donc, il y a une probabilité $n\alpha dt + o(dt)$ d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle $(t, t + dt)$ sachant que n clients sont en orbite à l'instant t . Une telle politique a été motivée par des applications dans la modélisation du comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940, Le premier travail dans cette direction est celui de Fayolle [41], de plus on a des travaux de (Choi (1992) [36], Dudin et al. (2004) [39], Li et Zhao (2005) [53], Shikata (1999) [59], Artalejo et Gómez-Corral (1997) [10], [16].

1.2 Systèmes d'attente M/G/1 avec rappels

Le modèle M/G/1 avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés [6, 7, 8, 10, 13, 18, 23, 29, 60].

Soit λ le taux du flot poissonnien des appels primaires. La durée de service τ est de loi générale, de moyenne $\frac{1}{\theta}$, de distribution B et de transformée de Laplace-Stieltjes \tilde{B} .

La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre μ . La description du système est la suivante : on suppose que le $(i-1)^{\text{ème}}$ appel termine son service à l'instant η_{i-1} (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement.

Donc le $i^{\text{ème}}$ appel suivant, n'entre en service qu'après un intervalle de temps \mathfrak{R}_i durant le quelle le serveur canal est libre, bien qu'en général il y ait des clients qui attendent. À l'instant $\xi_i = \eta_{i-1} + \mathfrak{R}_i$, le $i^{\text{ème}}$ client débute le service durant un temps S_i . Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. Alors à l'instant $\eta_i = \xi_i + S_i$, le $i^{\text{ème}}$ client achève son service et le canal devient encore libre et ainsi de suite.

Le premier résultat sur le système M/G/1avec rappel à été obtenu Par Keilson et al [47] et Alexandrov [6], en utilisant la méthode de la variable auxiliaire. Ils ont obtenu les probabilités d'états et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système. L'état du système peut-être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t) & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \xi(t)\} & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

Où, $C(t) = 0$ ou 1 selon que le serveur est libre ou actif, $\xi(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ , et désignant la durée de service résiduelle à la date t , si $C(t) = 1$ et $N(t)$ représente le nombre de clients dans l'orbite.

Notons

$$P_{0j} = P(C(t) = 0, N(t) = j),$$

et

$$P_{1j}(t, x) = P(C(t) = 1, N(t) = j, x < \xi(t) < x + dx), j > 0.$$

Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)\varphi(z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z)-z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)}. \quad (1.2.1)$$

Où

$$\phi(z) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\mu} \int_0^z \frac{1-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)}{x-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)} dx \right\}.$$

On aura alors,

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)\varphi(z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z)-z} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\mu} \int_0^z \frac{1-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)}{x-\tilde{B}(\lambda-\lambda x)} dx \right\}. \quad (1.2.2)$$

Cette formule, appelée "décomposition stochastique", signifie que le nombre de clients dans un système M/G/1 avec rappels s'écrit comme somme de deux variables : l'une est le nombre de clients dans le système M/G/1 ordinaire et l'autre est une variable aléatoire positive de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$.

1.2.1 Chaîne de Markov induite

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la première fois par Choo et Conolly (1979) [35].

Cette méthode élaborée par Kendall [46], est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés 1, 2, 3, ..., n (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $\{X_n, n \geq 0\}$, où $X_n = X(n)$, soit markovienne et homogène.

Soit (X_i) la chaîne de Markov induite aux instantanés de départs, où $X_i = X(\eta_i)$ représente le nombre de clients dans le système après le $i^{\text{ème}}$ départ. Il est clair que (X_i) est une chaîne de Markov et

$$X_{i+1} = X_i - \delta_{X_i} + \Delta_{i+1}.$$

Où Δ_i est le nombre d'appels primaires durant le service du $i^{\text{ème}}$ client. La variable aléatoire Δ_{i+1} ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant ξ_{i+1} du début de service du $(i+1)^{\text{ème}}$ client.

La distribution de Δ_i est la suivante :

$$P(\Delta_i = k) = P_k = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x).$$

La variable δ_{X_i} est une variable aléatoire de Bernoulli

$$\delta_{X_i} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (i+1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle a pour distribution

$$P(\delta_{X_i} = 1 / X_i = n) = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu},$$

et

$$P(\delta_{X_i} = 0 / X_i = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}.$$

Les probabilités de transition en un pas s'écrivent alors :

$$P_{ij} = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} P_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} P_{j-i}.$$

En posant

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z) - z},$$

l'équation (1.2.1) s'écrira

$$\pi(z) = Q(z) \frac{\phi(z)}{\phi(1)}.$$

Cette formule est appelée "décomposition stochastique" du système M/G/1 avec rappels [15].

Si on note par \bar{n}_s le nombre moyen de clients dans le système, alors $\bar{n}_s = \bar{n}_\infty + \beta$ où β est la variable aléatoire de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$, et \bar{n}_∞ est le nombre moyen de clients dans le système attente M/G/1 ordinaire.

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}(\lambda-\lambda z)(1-z)}{\tilde{B}(\lambda-\lambda z)-z}. \quad (1.2.3)$$

La formule 1.2.3 n'est autre que la formule de "Pollaczek-Khintchine" [55], pour le nombre de clients dans le système M/G/1 (FIFO, ∞).

Les caractéristiques du système M/G/1 avec rappels sont données dans l'article de Yang et Templeton [64] comme suit:

Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}. \quad (1.2.4)$$

Nombre moyen de clients dans l'orbite : D'après les formules de Little, on a :

$$\bar{n}_0 = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}. \quad (1.2.5)$$

Temps d'attente et nombre de rappels : Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service. Pour trouver le temps moyen d'attente \bar{w} , on utilise la formule de Little $\bar{n} = \bar{w}\lambda$.

On aura :

$$\bar{w} = \frac{\lambda E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Une fois \bar{w} obtenu, il est aisé de déduire \bar{n} , le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{n} = \mu\bar{w} = \frac{\lambda\mu E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}. \quad (1.2.6)$$

1.3 Période d'activité

Une période d'activité est définie comme étant la période qui débute à l'instant t_0 d'arrivée d'un premier client primaire dans un système vide ($C(t_0+0) = 1$, $N(t_0+0) = 0$) jusqu'à

l'instant t_1 où le système redevient vide pour la première fois :

$$t_1 = \inf\{t : t > 0, C(t) = 0, N(t) = 0\}.$$

On note $L = t_1 - t_0$, la durée de la période d'activité du système, cette période est constituée d'une alternance de période d'activité et d'inactivité du serveur.

La période d'activité pour le modèle M/M/1 a été étudiée par Choo et Conolly (1979) [35], qui fournissent une procédure récursive de calcul des moments de la variable L. Falin (1990) [42] procède à une étude de la période d'activité en utilisant la méthode des catastrophes qui permet de donner des résultats plus explicites dans le cas du système M/G/1.

Lopez-Herrero (2002) [51] a présenté les formules explicites pour les probabilités du nombre de clients (noté I) servis dans une période d'occupation, et une expression explicite pour le second moment de I pour un système d'attente M/G/1 avec rappels a été également donnée. Il a aussi employé le principe du maximum d'entropie pour estimer les distributions de I. Amador et Artalejo (2009) [15] utilisent le système M/G/1 avec rappels pour étudier de nouveaux descripteurs du comportement d'un client (primaire et secondaire) en investiguant la distribution : *i*) des rappels effectués avec succès, *ii*) des arrivées effectuées avec succès, *iii*) des rappels bloqués.

1.4 Files d'attentes avec rappels et feedback

Ce type de systèmes diffère des systèmes classiques par l'existence de deux paramètres supplémentaires : rappels et feedback. La notion de feedback introduite en général pour exploiter des situations d'attente où tous les clients demandent le principal service et seulement quelques uns parmi eux ont besoin de demander un autre service.

1.5 Approximations stochastiques et monotonie d'un système d'attente avec rappels et feedback

La majorité des études sur les systèmes d'attente avec rappels considère le modèle sans feedback. Néanmoins, plusieurs situations réelles peuvent être modélisées comme des systèmes de files d'attente avec rappels et feedback. Le phénomène de feedback dans ce type de systèmes peut apparaître dans plusieurs situations pratiques, par exemple, dans les systèmes MATS (Multiple Access Telecommunication Systems) où des messages s'avérant comme erreurs à la destination (messages perdus ou corrompus) sont renvoyés. Spécialement, les systèmes d'attente avec rappels et feedback sont utilisés pour modéliser le protocole ARQ (Automatic Repeat Request) dans un réseau de communication à haute fréquence.

Dans ces systèmes, à chaque fois qu'un client arrive et trouve le serveur occupé, quitte le service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé orbite, sinon il reçoit immédiatement son service. Une fois servi, il décide avec une probabilité θ , de retourner en orbite pour demander un autre service ou de quitter le système définitivement avec une probabilité complémentaire $1 - \theta$.

Comme les systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback, est complexe (elle contient des transformées de Laplace, des expressions intégrales). Elle n'est donc pas facile à interpréter en pratique. Pour pallier à cette difficulté analytique, les méthodes de comparaison stochastique ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant (en les majorant ou en les minorant) par des mesures de performance d'autres modèles plus simples.

1.6 Conclusion

En raison de la complexité des résultats analytiques obtenus dans l'étude des systèmes avec rappels, différents auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse des phénomènes de répétition d'appels. Parmi les principales approches, on trouve les méthodes de comparaisons stochastiques, qui conduisent à des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance. C'est pour toutes ces raisons, le chapitre suivant est consacré à la théorie des ordres stochastiques.

Généralités sur la théorie des ordres stochastiques

2.1 Introduction

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'obtention des mesures de performance, tels que la longueur de la file d'attente, le temps d'attente, la distribution de la période d'occupation [31, 33].

Toutefois, ces caractéristiques de performances ont été obtenues par des méthodes d'approximations qui ont donné des expressions très complexes et les résultats obtenus ne peuvent pas être utilisés en pratique.

Lors de la dernière décennie, il y a eu une tendance à la recherche d'approximations et les limites, et les propriétés qualitatives des modèles stochastiques constituent une importante base théorique des méthodes d'approximations.

La monotonie et la comparabilité sont les plus importantes propriétés qualitatives et méthodes d'approximations que peuvent être étudié à l'aide de la théorie générale des ordres stochastiques, voir [32, 34, 54, 56, 57, 58].

Ordonnement stochastique est utile pour étudier les changements internes de la performance en raison de variations de paramètres, à comparer des systèmes distincts, afin de se rapprocher d'un système complexe à un autre système simple, et pour obtenir des bornes supérieures et inférieures pour les principales mesures de performance d'un système.

2.2 Propriétés générales des ordres partiels

On appelle un ordre partiel, noté " \prec ", une relation binaire définie sur un ensemble \mathfrak{D}

d'éléments a, b, c, \dots , remplit les trois axiomes suivantes:

- (i) Réflexivité: $a \prec a \quad \forall a \in \mathfrak{D} .$
- (ii) Transitivité: $\text{si } a \prec b \text{ et } b \prec c \text{ alors } a \prec c \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{D}.$
- (iii) Antisymétrie: $\text{si } a \prec b \text{ et } b \prec a \text{ alors } a = b \quad \forall a, b \in \mathfrak{D}.$

Notons que $a \prec b$ est équivalent à dire que $b \succ a$.

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur l'ensemble \mathfrak{D} de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ses sous-ensembles).

Pour les deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement) on a par convention:

$$F \prec G \iff X \prec Y.$$

On suppose que deux variables aléatoires X et Y sont définis sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (iii) sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur \mathcal{D} découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela, on utilisera la distribution de Dirac, notée par $\Theta_c(\cdot)$, définie pour tous les nombres réels comme suit:

$$\Theta_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < c, \\ 1, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Définition 2.2.1 Soit un ordre partiel donné " \prec " défini sur (un sous ensemble de) l'espace \mathcal{D} des fonctions de répartition. On dit que cet ordre possède la propriété :

- (R) : si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors $\Theta_a \prec \Theta_b$.
- (E) : si $F \prec G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.
- (M) : si $F \prec G$, alors $F^c \prec G^c, \forall c > 0$, où

$$F^c(x) = F(x/c), \forall x.$$

- (C) : si $F_1 < F_2$, alors $F_1 * G \prec F_2 * G$, où

$$(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x-y)dG(y), \quad i = 1, 2.$$

- (W) : si F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement) alors

$$\forall n, F_n \prec G_n \implies F \prec G,$$

Remarque 2.2.1 Pour les deux variables aléatoires X et Y .

La propriété (M) garantit que:

$$X \prec Y \implies cX \prec cY, \text{ pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété (C) garantit que:

$$X_1 \prec X_2 \implies X_1 + Y \prec X_2 + Y,$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété (E) garantit que:

$$X \prec Y \Rightarrow E(X) \prec E(Y).$$

On remarque que la propriété (E) découle des autres propriétés.

Proposition 2.2.1 *Un ordre partiel \prec sur un ensemble (ou bien sur un sous ensemble de) \mathcal{D} qui vérifie les propriétés (R), (M), (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).*

Définition 2.2.2 *Pour une classe de fonctions réelles $\mathfrak{S}_<$, l'ordre partiel \prec défini sur l'ensemble (ou sur le sous ensemble de) \mathcal{D} est dit généré par $\mathfrak{S}_<$ si :*

$$F \prec G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dG(x),$$

pour toute fonction f dans $\mathfrak{S}_<$, telle que les intégrales existent.

Définition 2.2.3 *La classe ϕ de fonctions réelles définies sur la droite réelle \mathbb{R} (resp. la demi-droite \mathbb{R}_+) est dite invariante par translation, si pour tout $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}_+$), lorsque $f \in \phi$, on a aussi $f_a \in \phi$, où f_a est la fonction définie par*

$$f_a(x) = f(x + a), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

2.2.1 Ordre stochastique

Définition 2.2.4 *On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$, lorsque*

$$F(x) \geq G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

On écrit aussi $X \leq_{st} Y$ (\leq_{st} noté aussi par l'ordre \leq_d).

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , et en notant par $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

ce qui est équivalent à:

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que l'ordre stochastique \leq_{st} satisfait les axiomes de l'ordre partiel \prec .

Proposition 2.2.2 Si $F_1 \leq_{st} F_2$, alors il existe deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilité (Ω, A, P) pour lesquelles

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

et

$$P(\omega : X_k(\omega) \leq x) = F_k(x), \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

Notons par $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe $\mathbb{R}_{\leq_{st}}$ des fonctions \leq -monotones est confondue avec la classe $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{\leq_{st}} = \mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2.1 L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.2.1)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ pour laquelle l'intégrale existe, si et seulement si $F_1 \leq_{st} F_2$. Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.2.1) est vérifiée pour tout F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_{st} F_2$ uniquement si f est non décroissante.

Corollaire 2.2.1 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, avec $X \leq_{st} Y$, on a

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r \geq 0,$$

$$E(X^r) \geq E(Y^r), \quad r < 0,$$

lorsque les espérances existent. Et si celles-ci sont bien définies,

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r = 1, 3, 5, \dots$$

pour des variables quelconques (pas forcément non négatives).

2.2.2 Ordre convexe

On note par: $x_+ = \max(0, x)$.

Définition 2.2.5 On dit que la variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire Y , de fonction de répartition G , et on écrit $X \leq_v Y$, ou bien $F \leq_v G$ si et seulement si

$$\begin{aligned} E((X - x)_+) &= \int_x^{+\infty} (t - x) dF(t) dt = \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1 - G(t)) dt = E((Y - x)_+), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Théorème 2.2.2 lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies.

Dans le cas discret, on a: $X \leq_v Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}$, pour toute k .

Théorème 2.2.3 Une conséquence immédiate de cette définition:

$$\text{si } F \leq_{st} G \text{ et } E(Y_+) < \infty \text{ alors } F \leq_v G.$$

En notant par $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, l'inégalité (2.2.2) peut s'écrire comme suit:

$$\int_x^{+\infty} \bar{F}(t) dt \leq \int_x^{+\infty} \bar{G}(t) dt,$$

ou bien

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &= x + E((X - x)_+) \\ &\leq x + E((Y - x)_+) \\ &= E(\max(x, Y)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Lorsque $E((x - X)_+)$ et $E((x - Y)_+)$ existent,

$$X \leq_v Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(X) - E(Y) &= E((Y - x)_+) - E((X - x)_+) - E((x - Y)_+) + E((x - X)_+) \\ &\geq E((x - X)_+) - E((x - Y)_+) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

De l'inégalité (2.2.3) découle la transitivité et l'antisymétrie de l'ordre convexe. Alors, c'est un ordre partiel sur les sous ensembles de \mathfrak{D} pour lesquels $\int_0^{+\infty} t dF(t) < \infty$. Sans cette condition, la propriété de l'antisymétrie peut ne pas avoir lieu.

Pour une variable aléatoire X de moyenne finie m , il est clair que:

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &\geq E(\max(x, E(X))), \\ &= \max(x, m). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité (2.2.3), on a

$$m \leq_v X.$$

Il s'ensuit, d'après l'inégalité (2.2.3) que l'ordre convexe possède les propriétés (R) et (M).

D'après l'inégalité (2.2.2), on déduit que l'ordre convexe est généré par la famille

$$\mathfrak{S}_v = \{e_x, -\infty < x < +\infty\},$$

des fonctions e_x définies comme suit :

$$e_x(t) = (t - x)_+ = \int_{-\infty}^t \Theta_x(u) du.$$

Puisque la classe \mathfrak{S}_v est invariante par translation, alors l'ordre convexe possède la propriété (C).

Notons par $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$, la classe des fonctions convexes et non-décroissantes.

Théorème 2.2.4 1. *L'inégalité*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_2(t), \quad (2.2.4)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si $F_1 \leq_v F_2$.

2. Pour une fonction donnée f , l'inégalité (2.2.4) a lieu pour toutes les fonctions F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_v F_2$ uniquement si f est une fonction convexe et non décroissante.

3. Si $F_1 \leq_v F_2$ et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.2.4) est vérifiée pour toute fonction convexe f donnée.

Corollaire 2.2.2 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives telles que $X \leq_v Y$ on a :

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r \geq 0,$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires X et Y telles que

$$E(X) = E(Y), \quad \text{et} \quad X \leq_v Y,$$

alors

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad r = 2, 4, 6, \dots$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires telles que X et Y sont négatives et $X \leq_v Y$, alors l'égalité $E(X^r) = E(Y^r)$ pour tout $r \geq 1$ implique l'égalité $X =_{st} Y$.

En effet,

$$E(X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r(r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1 - F(y)) dy.$$

Cette propriété est l'analogie de la propriété suivante pour l'ordre stochastique

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \Rightarrow X =_{st} Y.$$

Proposition 2.2.3 *Supposons que les suites de variables aléatoires X_n et Y_n convergent faiblement vers X et Y (respectivement).*

Si

$$E(X_+) \text{ et } E(Y_+) \text{ sont finis,}$$

$$E((X_n)_+) \rightarrow E(X_+), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$E((Y_n)_+) \rightarrow E(Y_+), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

et si $X_n \leq_v Y_n$, alors

$$X \leq_v Y.$$

2.2.3 Ordre concave

Définition 2.2.6 *On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est inférieure en moyenne de vie écoulée à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , c'est-à-dire, $X \leq_{cv} Y$ (ce qui est équivalent à $F \leq_{cv} G$), lorsque:*

$$\begin{aligned} E((x - X)_+) &= \int_{-\infty}^x (x - t) dF(t) = \int_{-\infty}^x F(t) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^x G(t) dt = E((x - Y)_+), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

où les espérances mathématiques (les intégrales) sont bien définies.

Par conséquent, si

$$F \leq_{st} G \text{ et } E(X) = E(\max(0, -X)) < \infty, \text{ alors } X \leq_{cv} Y.$$

Remarquons que l'ordre concave " \leq_{cv} " est un ordre partiel sur le sous ensemble de \mathfrak{D} des fonctions vérifiant $\int_{-\infty}^0 |t| dF(t) < \infty$ comme dans le cas de l'ordre convexe.

Définition 2.2.7 *On observe d'après (2.2.5) que l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $-Y \leq_v -X$.*

Si on a l'égalité $E(X) = E(Y)$, alors l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $Y \leq_v X$.

2.2.4 Ordre en transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire X est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité $f(x)$:

$$\hat{f}(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx,$$

où s est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour $Re(s) \geq 0$.

La transformée de Laplace est notée aussi $L[f(x)]$.

Proposition 2.2.4 • Si X et Y sont indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de Laplace de X et de Y ,

- $L[f'(x)] = s\hat{f}(s) - f(0)$,
- $L[f''(x)] = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$,
- $L[\int_0^x f(u)du] = \frac{\hat{f}(s)}{s}$,
- Si $F(x)$ est la fonction de répartition de X et si $R(x) = 1 - F(x)$, alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{R}(s) = \int_0^{\infty} R(x)dx.$$

Définition 2.2.8 Pour deux variables aléatoires non négatives X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement), F est dite inférieure par rapport à l'ordre laplacien à G , et on note $F \leq_L G$, si pour tout s positif, on a l'inégalité suivante

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique.

Théorème 2.2.5 Soit une fonction f strictement monotone, alors $F \leq_L G$ implique

$$\int_0^{+\infty} f(t)dF(t) \leq \int_0^{+\infty} f(t)dG(t).$$

Corollaire 2.2.3 1. Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, de fonctions de répartition F et G respectivement, telles que $F \leq_L G$ alors, on a l'inégalité suivante:

$$\frac{1 - E(\exp(-sX))}{s} \leq \frac{1 - E(\exp(-sY))}{s}, \quad \forall s > 0.$$

2. Lorsqu'on fait tendre s vers 0, on obtient le résultat suivant:

$$F \leq_L G \Rightarrow E(X) \leq E(Y),$$

lorsque les espérances existent.

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformée de Laplace.

Théorème 2.2.6 Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition F et G respectivement, alors:

$$F \leq_L G \Leftrightarrow E(f(x)) \leq E(f(y)),$$

pour toute fonction f strictement monotone, telle que les espérances existent.

2.2.5 Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $F \leq_g G$, si et seulement si:

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où,

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n \text{ et } E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)z^n, \quad |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant $s = -\ln z$.

2.2.6 Relations entre les ordres partiels

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement.

Alors, on a les relations suivantes:

- Si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$.
- Si $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$.
- Si $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \Leftrightarrow G \leq_v F$.
- $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
- Si $E(X) = E(Y)$ et $F \leq_v G \Rightarrow G \leq_L F \Rightarrow G \leq_g F$.
- $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.

2.3 Modèles stochastiques et monotonie

2.3.1 Modèles stochastiques

La modélisation est la représentation d'un système réel par un modèle mathématique. On parle de modèle stochastique lorsque les influences aléatoires sont prises en considération. Cette prise en compte du hasard et ses effets permet une meilleure compréhension des phénomènes réels et la résolution efficace de problèmes complexes. Plusieurs disciplines de la recherche opérationnelle reposent sur les probabilités et leurs applications. En particulier, les théories de files d'attente, de fiabilité et de gestion des stocks.

2.3.2 Propriétés de monotonie

Étudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est d'obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle Σ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i, \dots , décrivent son comportement.

Soit c_Σ une caractéristique dans Σ et soit C_Σ l'ensemble des valeurs possibles de c_Σ .

Pour une structure donnée et une distribution initiale U , c_Σ dépend uniquement des F_i , et on écrit

$$c_\Sigma = c_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in C_\Sigma.$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de c_Σ . Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de c_Σ par rapport aux F_i , c'est-à-dire, la manière avec laquelle c_Σ est affectée par les changements en F_i . Parmi les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques on trouve la monotonie (c'est-à-dire, si les F_i croissent dans un certain sens, alors c_Σ croit aussi).

2.4 Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

2.4.1 Opérateurs monotones et comparables

Soient (E, M) un espace probabilisable et P_M l'ensemble de toutes les mesures de probabilité définies sur M . Soient aussi les opérateurs T , $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ définis de P_M dans P_M et l'ordre partiel " \prec " défini sur P_M .

Définition 2.4.1 *Un opérateur T est dit \prec -monotone si pour toutes mesures de probabilités $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ appartenant à P_M telles que $p^{(1)} \prec p^{(2)}$, on a*

$$Tp^{(1)} \prec Tp^{(2)}.$$

2.4. Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

L'opérateur $T^{(1)}$ est inférieur à $T^{(2)}$ si $T^{(1)}p \prec T^{(2)}p$ pour tout $p \in P_M$ et on écrit,

$$T^{(1)} \prec T^{(2)}.$$

Pour des applications aux processus de Markov homogènes, on s'intéresse à la comparabilité des distributions $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ définies par

$$p_n^{(k)} = (T^{(k)}p^{(k)})_n, \quad k = 1, 2 \quad \text{et } n \in N^*,$$

pour deux distributions initiales $p^{(k)}$ et les opérateurs $T^{(k)}$, pour $k = 1, 2$.

Théorème 2.4.1 Soient $T^{(1)}, T^{(2)}$ deux opérateurs définis sur P_M et $p^{(1)}, p^{(2)}$ deux mesures de probabilité définies sur M , alors

$$p^{(1)} \prec p^{(2)} \text{ implique } p_n^{(1)} \prec p_n^{(2)}, \quad \forall n \in N^*,$$

s'il existe un opérateur T \prec -monotone défini sur P_M tel que

$$T^{(1)} \prec T \prec T^{(2)}.$$

Remarquons que ce théorème reste vrai, en général, pour les opérateurs définis dans un espace partiellement ordonné.

À présent, on considère les opérateurs de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$ d'espace d'état (E, M) . Les opérateurs de transition sont décrits par leurs fonctions de transition

$$p(x, \beta), \quad p(x, \beta) = P(X_{n+1} \in \beta / X_n = x), \quad x \in E \text{ et } \beta \in M,$$

ou bien, dans le cas où les processus sont à valeurs réelles, par leurs distributions de transition

$$p(x, y) = P(X_{n+1} < y / X_n = x), \quad x, y \in E \subseteq \mathbb{R}.$$

Maintenant, on donne des conditions sur les fonctions de transition, qui assurent la monotonie ou la comparabilité des opérateurs de transition.

Théorème 2.4.2 *Les opérateurs de transition $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ satisfont l'inégalité $T^{(1)} \prec T^{(2)}$ si et seulement si leurs fonctions $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ satisfont*

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in E.$$

2.5 Distributions non-paramétriques

Les notions de vieillissement et de relations d'ordre entre variables aléatoires sont étroitement liées. Nous présentons les principaux ordres permettant de comparer des variables aléatoires puis les notions de vieillissement. Cette présentation sera cependant partielle car l'activité scientifique sur ces sujets est importante. Il est donc difficile de prétendre faire un exposé exhaustif. L'un des états de l'art les plus récents sur ce sujet est [4, 45], mais on peut citer aussi [44, 57, 61].

En théorie de fiabilité, les classes de distributions nous renseignent sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de sa durée de vie résiduelle connaissant son âge (propriété qualitative). La connaissance de la classe (d'âge) de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision.

Dans cette section, sont présentées aussi les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité ces dernières années.

Les distributions non-paramétriques ont été introduites pour l'étude de certains problèmes en relation avec la théorie de fiabilité. Elles permettent ainsi de modéliser et caractériser des propriétés qualitatives telles que le vieillissement et le rajeunissement du système.

Ces distributions sont utilisées actuellement dans divers domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie (médecine), files d'attente, ordonnancement, théorie de décision, économie, gestion des stocks [54].

Définition 2.5.1 Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément, et soient F et F_τ leurs distributions respectives.

On dit que F est :

▲ *NBU* (New Better than Used), si $F_\tau \leq_{st} F$, ($0 < \tau < \infty$).

▲ *NWU* (New Worse than Used), si $F \leq_{st} F_\tau$, ($0 < \tau < \infty$).

▲ *NBUE* (New Better than Used in Expectation), si $E(X_\tau) \leq E(X)$, ($0 < \tau < \infty$).

▲ *NWUE* (New Worse than Used in Expectation), si $E(X) \leq E(X_\tau)$, ($0 < \tau < \infty$).

▲ *IFR* (Increasing Failure Rate), si $F_y \leq_{st} F_x$, ($0 \leq x < y < \infty$).

▲ *IFRA* (Increasing Failure Rate in Average), si $(-1/t)\log(1-F(t))$ croissante, $t \geq 0$.

▲ *DFR* (Decreasing Failure Rate), si $F_x \leq_{st} F_y$, ($0 \leq x < y < \infty$).

▲ *DFRA* (Decreasing Failure Rate in Average), si $(-1/t)\log(1-F(t))$ décroissante, $t \geq 0$.

▲ *IMRL* (Increasing Mean Residual Life), si

$$E(X_\varphi) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{+\infty} (1-F(u))du, \quad \text{croissante } (0 < \tau < \infty).$$

▲ *DMRL* (Decreasing Mean Residual Life), si

$$E(X_\tau) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{+\infty} (1-F(u))du, \quad \text{décroissante } (0 < \tau < \infty).$$

Proposition 2.5.1 Soit la variable aléatoire X de fonction de répartition F ayant une moyenne finie m .

1. Si F est *NBU* (resp. *NWU*), alors:

$$F \leq_{st} \exp(\lambda), \quad (\text{resp. } F \geq_{st} \exp(\lambda)),$$

pour un certain $\lambda \leq m^{-1}$ (resp. $\lambda \geq m^{-1}$), avec la possibilité d'avoir une égalité seulement si $F = \exp(m^{-1})$.

2. Si F est NBUE (resp. NWUE), alors

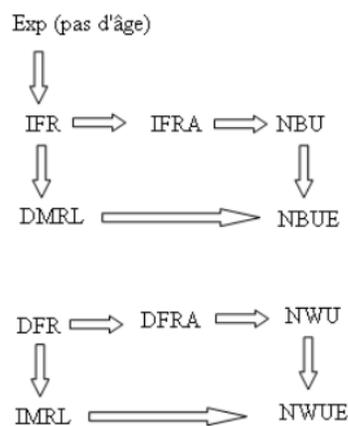
$$F \leq_v \exp(m^{-1}), \text{ (resp. } F \geq_v \exp(m^{-1})\text{)}.$$

2.5.1 Relation avec les distributions paramétriques

- ✓ La loi d'Erlang E_k est *IFR*.
- ✓ La loi de Weibull $W(a)$, pour $a > 1$ (paramètre de la forme), est *IFR*.
- ✓ La loi de Weibull $W(a)$, pour $a \leq 1$, est *DFR*.
- ✓ La loi Gamma $\Gamma(a)$, avec $0 \leq a < 1$, est *DFR*.
- ✓ La loi exponentielle est à la fois *IFR* et *DFR*.
- ✓ La distribution Hyper-exponentielle H est *DFR*.

2.5.2 Relation entre les classes de distributions non-paramétriques

La figure 1 illustre les relations d'implication existantes entre certaines classes de distributions non-paramétriques.



2.6 Conclusion

On a présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques et de la monotonie des processus stochastiques. On a donné aussi les classes de distributions d'âge issues de la théorie de la fiabilité. La méthode de comparaison stochastique sera appliquée, dans le chapitre suivant, pour l'étude des propriétés de monotonie du modèle d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback.

Inégalités stochastiques

du système d'attente

M/G/1 avec rappels

Bernoulli feedback et

clients négatifs

3.1 Introduction

Dans le contexte des systèmes de file d'attente ont recherché un système de file d'attente à un seul serveur exécute sous la présence simultanée des arrivées négatives. Il est clair que l'existence du flux des arrivées des clients fournit un mécanisme pour contrôler l'encombrement excessif dans la file du système. De plus, les files d'attente avec arrivées négative ont été effectivement utilisés et contrôlés les réseaux.

Pour comprendre l'analyse des files d'attente avec arrivées négatives, voir les travaux de Artalejo et Gomez-Corral (1998, 1999) [12], Anisimov et Artalejo (2001) [21], Atencia et Moreno (2004) [22] et Wang et Zhang (2009) [62].

Une caractéristique supplémentaire qui a été largement discutée est la Bernoulli Feedback dans le système de file d'attente apparaît dans des systèmes d'ordinateur, et dans la communication des réseaux où l'erreur de transmission des données libre.

Ce chapitre comprend deux parties, la première partie concerne l'étude sur la comparaison stochastique du système d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, et la deuxième parties et un cas particulier son le client négative c'est le système de files d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback.

3.2 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs. Les clients primaires positives arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Si l'arrivée d'un client positif trouve le serveur inactif, commence son service immédiatement. Sinon, si le serveur est occupé, ce dernier entre dans une orbite de capacité illimitée, et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire, jusqu'à ce qu'il le trouve libre. Le temps entre les tentatives répétées successives est supposé être distribué suivant la loi exponentielle de paramètre $n\mu$, lorsque le nombre des clients en orbite est n ($n > 0$). Les temps de service des clients positifs sont indépendants et identiquement distribuées avec une fonction de distribution continue $G(x)$ et de fonction de densité de probabilité $g(x)$.

Après qu'un client positif est complètement servi, il décidera soit de rejoindre l'orbite avec une probabilité θ_1 ($0 \leq \theta_1 < 1$) ou de quitter le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta_1)$. En plus de l'arrivée des clients positifs et les rappels des clients

en orbite. On suppose, en outre, que des clients négatifs, arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\delta > 0$. Le client négatif arrivant pendant le temps de service d'un client positive, supprimera ce dernier et décide soit d'entrer en orbite avec la probabilité θ_2 ($0 \leq \theta_2 < 1$) ou de quitter le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta_2)$.

Les temps entre les arrivées des clients positifs, clients négatifs, les de rappels des clients en orbite et des temps de service sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

D'après cette description, l'état du système à un instant arbitraire t peut être décrit par le processus stochastique à temps continu

$$\{X(t); t \geq 0\} = \{(C(t), N(t), \xi(t); t \geq 0\},$$

où,

$N(t)$: est le nombre de clients en orbite à l'instant t .

$C(t)$: est une variable aléatoire qui désigne l'état du serveur :

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre,} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

Si $C(t) = 1$, alors $\xi(t) > 0$ représente le temps de service écoulé du client positive en service et $\xi(t) = 0$ si $C(t) = 0$.

Dans ce qui suit, nous négligeons $\xi(t)$ et on considère que la paire $\{(C(t), N(t)); t \geq 0\}$, dont l'espace d'état $S = \{0, 1\} \times Z_+$.

3.3 Chaîne de Markov induite

Soit $\tau_i, i \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ qui représente les instants de départs des clients, c'est-à-dire, que ce soit l'instant de départ d'achèvement du service du $i^{\text{ème}}$ client positif, ou bien celui de $i^{\text{ème}}$ client positive en service qui est éliminé par un client négatif, $\tau_0 = 0$. Soit

$N_i = N(\tau_i+)$, $i \in Z_+$, est le nombre de clients en orbite juste avant l'instant de départ τ_i . Alors la suite $\{N_i, i \in Z_+\}$ des variables aléatoires constitue une chaîne de Markov induite avec un espace d'état Z_+ , qui est la chaîne de Markov induite pour notre système de files d'attente .

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov induite soit ergodique.

Théorème 3.3.1 [50] *L'inégalité*

$$\theta_1 \beta^*(\delta) + \theta_2 (1 - \beta^*(\delta)) + \frac{\lambda [1 - \beta^*(\delta)]}{\delta} < 1,$$

est une condition nécessaire et suffisante d'ergodicité de notre système de files d'attente avec clients négatifs.

Où $\beta^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx$, est la transformée de Laplace de $g(x)$.

3.4 Notations

Dans cette section, on utilise la théorie générale des ordres partiels (voir Chapitre 2) pour l'étude des propriétés de monotonie du système d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs relative aux ordres : stochastique " \leq_{st} ", laplacien " \leq_L " et convexe " \leq_v " .

On introduit les notations suivantes :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, pour $i = 1, 2$:

$\lambda^{(i)}$: taux d'arrivées des clients positifs Σ_i .

$\mu^{(i)}$: taux de rappels dans Σ_i .

$\theta_1^{(i)}$: la probabilité de rejoindre l'orbite.

$\bar{\theta}_1^{(i)}$: la probabilité de quitter le système.

$\theta_2^{(i)}$: la probabilité que le client Interrompu rejoindre l'orbite.

$\delta^{(i)}$: taux d'arrivées des clients négatifs .

$G^{(i)}(u)$: la distribution de temps de service.

$k_m^{(i)}$: le nombre de nouvelles arrivées durant le service du $n^{\text{ème}}$ clients dans Σ_i .

$h_m^{(i)}$: le nombre de clients négatifs qui arrivent durant le service du $n^{\text{ème}}$ clients dans Σ_i .

$\pi_m^{(i)}$: la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i .

3.5 Inégalités préliminaires

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs $\{k_m^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ et $\{h_m^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ sont comparables suivant les ordres partiels : stochastique, convexe et en transformée de Laplace.

Lemme 3.5.1 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs :*

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\},$$

où

$$k_m^{(i)} = P(X = m) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} u)^m \exp\{-\lambda^{(i)} u\}}{m!} \exp\{-\delta^{(i)} u\} dG^{(i)}(u), \quad i = 1, 2, \quad m \geq 0,$$

Preuve. *Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$.*

Par définition de l'ordre stochastique \leq_{st} , on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \{k_m^{(1)}\} &\leq_{st} \{k_m^{(2)}\} \iff \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(2)} = \bar{k}_m^{(2)}, \\
 &\iff \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} dG^{(1)}(u), \\
 &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} dG^{(1)}(u), \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^n \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} dG^{(2)}(u) = \bar{k}_m^{(2)}. \tag{3.5.1}
 \end{aligned}$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.5.1), on considère la fonction

$$f_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n \exp\{-\lambda u\}}{n!} \exp\{-\delta u\}. \tag{3.5.2}$$

En prenant sa dérivée par rapport à u , on obtient :

$$\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u} = \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right].$$

Donc $f_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en $u \in I = \left[0, \frac{n}{(\lambda + \delta)}\right]$, $\forall \lambda \geq 0, \delta \geq 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{\lambda u (\lambda u)^{n-1}}{n(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\left(\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right) \left(1 - \frac{(\lambda + \delta)u}{n} \right) \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} [r(u)g(u)],
 \end{aligned}$$

telle que $r(u) = \lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\}$ est une fonction positive pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.

Pour que $\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u}$ soit positive, il faut que :

$$g(u) \geq 0 \Leftrightarrow n - u(\lambda + \delta) > 0,$$

$$\Leftrightarrow u < \frac{n}{(\lambda + \delta)}, \quad \forall \lambda > 0, \delta > 0, n \geq m \geq 1 \text{ et } u \in \mathbb{R}^+.$$

On conclut que $\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \lambda}$ est positive si seulement si $u < \frac{n}{(\lambda + \delta)}$.

La dérivée par rapport à λ est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \lambda} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - u \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right], \quad n \geq 1 \\ &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \\ &\quad + u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \\ &= u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} > 0, \quad \forall u \geq 0, \forall m \geq 1. \end{aligned}$$

Donc la fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est croissant par rapport à λ .

La dérivée par rapport à δ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta} &= -u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} \\ &= -u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} < 0, \quad u \in \mathbb{R}^+, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Cette fonction est décroissante par rapport à δ , comme $f_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en u et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$, alors à l'aide du Théorème 2.2.1, donné dans le Chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.3)$$

D'autre part, puisque la fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est monotone par rapport à λ et δ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, on a

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.4)$$

Par conséquent, des inégalités (3.5.3) et (3.5.4), inégalité (3.5.1) est vérifiée par transitivité. ■

Lemme 3.5.2 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et des clients négatifs :

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{(1)} \leq_{st} \bar{G}^{(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_{st} \{h_m^{(2)}\},$$

où

$$h_m^{(i)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^m \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{m!} \exp(-\delta^{(i)}u) \delta^{(i)} d\bar{G}(u), \quad i = 1, 2, \quad m \geq 0.$$

Preuve. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $\bar{G}^{(1)} \leq_{st} \bar{G}^{(2)}$.

La démarche à suivre est similaire à celle de lemme 3.5.1.

$$\begin{aligned} \{h_m^{(1)}\} \leq_{st} \{h_m^{(2)}\} &\iff \bar{h}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} h_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} h_n^{(2)} = \bar{h}_m^{(2)}, \\ \bar{h}_m^{(1)} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta^{(1)} dG^{(1)}(u), \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta^{(1)} dG^{(1)}(u), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^n \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} \delta^{(2)} dG^{(2)}(u) = \bar{h}_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.5.5), on considère la fonction suivant :

$$g_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n \exp\{-\lambda u\}}{n!} \exp\{-\delta u\} \delta. \quad (3.5.6)$$

La dérivée par rapport à δ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} (\exp\{-2\lambda u\}) (1 - u\delta), \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda > 0, \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} [g_1(u)g_2(u)], \end{aligned}$$

telle que, $g_1(u) = \frac{(\lambda u)^n}{n!} (\exp\{-2\lambda u\})$, est une fonction positive pour tout $u \in \mathbb{R}^+$. Pour que $\frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta}$ satisfait la condition $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, il faut que $g_2(u) = (1 - u\delta)$ soit négative:

$$1 - u\delta < 0.$$

Donc, la fonction $\frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta}$ est décroissante pour tout $\delta \in \left[\frac{1}{u}, +\infty\right]$, tel que $u \in \left[0, \frac{n}{(\lambda + \delta)}\right]$, et comme $g_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en u et $\overline{G}^{(1)} \leq_{st} \overline{G}^{(2)}$, alors à l'aide du Théorème 2.2.1, donné dans le Chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\overline{G}^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\overline{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.7)$$

D'autre part, puisque la fonction $g_m(u, \lambda, \delta)$ est monotone par rapport à λ et δ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, on a

$$\int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\overline{G}^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\overline{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.8)$$

Par conséquent, des inégalités (3.5.5) et (3.5.7), inégalité (3.5.8) est vérifiée par transitivité. ■

Lemme 3.5.3 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_v G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v , on a :

$$\begin{aligned} \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\} &\iff \overline{\overline{k}}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} \overline{\overline{k}}_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \overline{\overline{k}}_n^{(2)} = \overline{\overline{k}}_m^{(2)}, \\ &\iff \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} u)^\ell \exp\{-\lambda^{(1)} u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(1)} u\} dG^{(1)}(u), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)} u)^\ell \exp\{-\lambda^{(2)} u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(2)} u\} dG^{(2)}(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u),
 \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

avec

$$f_n(u, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}) = \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^\ell \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(i)}u\}. \tag{3.5.10}$$

La fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est croissantes par rapport à λ et δ , alors la fonction définie par :

$\bar{f}_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda, \delta)$ l'est aussi. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right], \quad n \geq 2 \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right), \quad n \geq 2
 \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

On cherche la monotonie de la fonction $\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2}$.

Pour $\lambda u \geq 1$, on a

on a

$$\begin{cases} (\lambda u)^n \geq (\lambda u)^{n-2}, & \forall n \geq 2, \\ (\lambda u)^{n-1} \geq (\lambda u)^{n-2}, & \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.5.12}$$

De plus,

$$\frac{1}{(n-2)!} > \frac{1}{(n-1)!} > \frac{1}{n!}, \quad n \geq 2. \tag{3.5.13}$$

En utilisant les inégalités (3.5.12), on trouve que :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right),$$

on utilisant (3.5.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &\geq \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} (\lambda u)^{n-2} \left(\frac{\lambda^2}{n!} - \frac{2\lambda(\lambda + \delta)}{n!} + \frac{(\lambda + \delta)^2}{n!} \right) \\ &\geq \delta^2 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^{n-2}}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \delta \geq 0.$$

pour $\lambda u < 1$, on trouve :

$$\begin{cases} (\lambda u)^{n-1} > (\lambda u)^n, & \forall n \geq 1, \\ (\lambda u)^{n-2} > (\lambda u)^n, & \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \delta^2 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \geq 0.$$

Par conséquent, $\bar{f}_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante et convexe par rapport à la variable u .

D'après le Théorème 2.2.4, voir le Chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.15)$$

Et on obtient, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{f}_m(u, \lambda, \delta)$ par rapport à λ et δ , le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.16)$$

Finalement, l'inégalité (3.5.9) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.5.15) et (3.5.16). ■

Lemme 3.5.4 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{(1)} \leq_v \bar{G}^{(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_v \{h_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v on a :

$$\begin{aligned}
 \{h_m^{(1)}\} &\leq_v \{h_m^{(2)}\} \iff \bar{h}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{h}_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{h}_n^{(2)} = \bar{h}_m^{(2)}, \\
 &\iff \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^\ell \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta d\bar{G}^{(1)}(u), \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^\ell \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} \delta d\bar{G}^{(2)}(u), \\
 &\iff \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(1)}(u) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\bar{G}^{(2)}(u), \tag{3.5.17}
 \end{aligned}$$

avec

$$g_n(u, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}) = \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^\ell \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{\ell!} \exp\{-\delta^{(i)}u\} \delta. \tag{3.5.18}$$

La fonction $g_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante par rapport à λ et δ , alors la fonction définie par :
 $\bar{g}_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda, \delta)$ l'est aussi. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &= \left[\delta \sum_{n=m}^{+\infty} \lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - 2\delta\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right. \\
 &\quad \left. + \delta(\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \delta \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right). \tag{3.5.19}
 \end{aligned}$$

on cherche la monotonie de la fonction $\frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2}$, même raisonnement de lemme

3.4.3 on trouve

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \delta^3 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \geq 0.$$

Par conséquent, $\bar{g}_m(u, \lambda, \delta)$ est croissantes et convexe par rapport à la variable u .

D'après le Théorème 2.2.4, voir le Chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.20)$$

Et grâce à la monotonie de la fonction $\bar{g}_m(u, \lambda, \delta)$ par rapport à λ et δ , on trouve que

:

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.21)$$

Finalement, l'inégalité (3.5.17) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.5.20) et (3.5.21) ■

Lemme 3.5.5 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs,*

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Pour prouver que l'inégalité $\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1 - z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\} \iff \tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1 - z)). \quad (3.5.22)$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
 k(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} k_m z^m \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} z^m dG(u) \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u z)^m}{m!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} dG(u) \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\{-u[(\lambda + \delta) - \lambda z]\} dG(u) \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp\{-u(\delta + \lambda(1 - z))\} dG(u) = \tilde{G}(\delta + \lambda(1 - z)).
 \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes :

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z).$$

De plus, on a

$$G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \Rightarrow \tilde{G}^{(1)}(s) \geq \tilde{G}^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier, pour $s = \delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)$, on obtient

$$\tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)). \quad (3.5.23)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ impliquent l'inégalité suivante :

$$\tilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1 - z)). \quad (3.5.24)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5.22) découle des inégalités (3.5.23) et (3.5.24). ■

Lemme 3.5.6 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et des clients négatifs,

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{(1)} \leq_L \bar{G}^{(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Pour prouver que l'inégalité $\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$h^{(1)}(z) \geq h^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\delta \widetilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \widetilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence suivante :

$$\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\} \iff \delta \widetilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \widetilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.5.25)$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} h_m z^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} \delta z^m d\overline{G}(u) \\ &= \delta \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u z)^m}{m!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} d\overline{G}(u) \\ &= \delta \int_0^{+\infty} \exp\{-(\delta + \lambda(1-z))u\} dG(u) = \delta \widetilde{G}(\delta + \lambda(1-z)). \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes

De plus, on a

$$\overline{G}^{(1)} \leq_L \overline{G}^{(2)} \Rightarrow \delta \widetilde{G}^{(1)}(s) \geq \delta \widetilde{G}^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier pour $s = \delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)$, on obtient

$$\delta \widetilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \widetilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.5.26)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ impliquent l'inégalité suivante :

$$\delta \widetilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \widetilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.5.27)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5.25) découle des inégalités (3.5.26) et (3.5.27). ■

3.5.1 Monotonie de la chaîne de Markov induite

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite pour le système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs sont données par la formule suivante :

$$P_{n,m} = \begin{cases} (1 - \delta_{0m}) \theta_1 k_{m-1} + (1 - \theta_1) k_m + (1 - \delta_{0m}) \theta_2 h_{m-1} + (1 - \theta_2) h_m, & \text{si } n = 0 \text{ et } m \geq 0, \\ \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0, & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m = n - 1, \\ \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} \\ + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \\ + \frac{n\mu\theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n+1}, & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m > n - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5.28)$$

Avec

$$\begin{aligned} k_m &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^m}{m!} e^{-\delta u} dG(u), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ h_m &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^m}{m!} e^{-\delta u} \delta[1 - G(u)] du, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^m}{m!} e^{-\delta u} \delta d\bar{G}(u). \end{aligned}$$

et δ_{kn} est la fonction Delta de Kronecker, telle que

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Soit l'opérateur de transition τ de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $\tau p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n P_{nm}.$$

Les deux Théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ , est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe

3.5.2 Monotonie de l'opérateur de transition

Théorème 3.5.1 *L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$.*

Preuve. Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante:

$$\bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}, \forall n, m, \tag{3.5.29}$$

1^{er} cas:

On montre que

$$\bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}, \forall n = 0, m \geq 0,$$

Si $n = 0$ et $m \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= (1 - \delta_{0m})\theta_1 k_{m-1} + (1 - \theta_1)k_m + (1 - \delta_{0m})\theta_2 h_{m-1} + (1 - \theta_2)h_m, \\
 \bar{P}_{nm} &= \sum_{\ell \geq m} p_{n\ell} = \sum_{\ell \geq m} [(1 - \delta_{0\ell})\theta_1 k_{\ell-1} + (1 - \theta_1) + (1 - \delta_{0\ell})\theta_2 h_{\ell-1} + (1 - \theta_2)h_\ell] \\
 &= \theta_1 \bar{k}_{m-1} + (1 - \theta_1)\bar{k}_m + \theta_2 \bar{h}_{m-1} + (1 - \theta_2)\bar{h}_m \\
 &= \theta_1 \bar{k}_{m-1} + (1 - \theta_1)\bar{k}_m + \theta_2 \bar{h}_{m-1} + (1 - \theta_2)\bar{h}_m \\
 &= \theta_1 k_{m-1} + \theta_1 \bar{k}_m + \bar{k}_m - \theta_1 \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \theta_2 \bar{h}_m + \bar{h}_m - \theta_2 \bar{h}_m \\
 &= \theta_1 k_{m-1} + \theta_1 \bar{k}_m + \bar{k}_m - \theta_1 \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \theta_2 \bar{h}_m + \bar{h}_m - \theta_2 \bar{h}_m \\
 &= \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \bar{h}_m.
 \end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue, on trouve

$$\bar{P}_{n-1m} = \sum_{\ell \geq m} p_{n-1\ell} = \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m + \theta_2 h_{m-1} + \bar{h}_m. \quad (3.5.30)$$

Finalement, on trouve

$$\bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} \geq 0,$$

2^{ème} cas : $n \geq 1$ et $m = n - 1$, on a

$$P_{nm} = \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0,$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} &= \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_0, \\
 \bar{P}_{n-1m} &= \frac{(n-1)\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} k_0 + \frac{(n-1)\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + (n-1)\mu} h_0.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1 - \theta_1)k_0 \\
 &+ \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1 - \theta_2)h_0 \\
 &= \left[\frac{n\mu(\lambda + (n-1)\mu) - (n-1)(\lambda + n\mu)\mu}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1)k_0 \\
 &+ \left[\frac{n\mu(\lambda + (n-1)\mu) - (n-1)(\lambda + n\mu)\mu}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_2)h_0 \\
 &= \left[\frac{n\lambda\mu + n\mu^2(n-1) - (n-1)\lambda\mu - n(n-1)\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1)k_0 \\
 &+ \left[\frac{n\lambda\mu + n\mu^2(n-1) - (n-1)\lambda\mu - n(n-1)\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_2)h_0 \\
 &= \left[\frac{n\lambda\mu + n^2\mu^2 - n\mu^2 - n\lambda\mu + \lambda\mu - n^2\mu^2 + n\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1)k_0 \\
 &+ \left[\frac{n\lambda\mu + n^2\mu^2 - n\mu^2 - n\lambda\mu + \lambda\mu - n^2\mu^2 + n\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_2)h_0 \\
 &= \frac{\lambda\mu(1 - \theta_1)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} k_0 + \frac{\lambda\mu(1 - \theta_2)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} h_0 \geq 0.
 \end{aligned}$$

3^{ème} cas : $n \geq 1, m > n - 1$

avec,

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n+1} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \frac{n\mu\theta_2}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} h_{m-n+1} \\
 \bar{P}_{nm} &= \sum_{\ell \geq m} p_{n\ell} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_2}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n+1} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} [k_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n}] + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} [h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n}] + \frac{\lambda(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_2}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n+1}
 \end{aligned}$$

En suite

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu}\bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}\bar{k}_{m-n} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu}\bar{h}_{m-n+1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu}\bar{h}_{m-n} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu}\bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} [k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1}] \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu}\bar{h}_{m-n+1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu} [h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1}] \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1}
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\bar{P}_{nm} = \frac{\lambda\theta}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1}. \tag{3.5.31}$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu}h_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu}h_{m-n+1} - \bar{h}_{m-n+2} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + k_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+2} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n} + h_{m-n+1} + \bar{h}_{m-n+2} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu}h_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu}h_{m-n+1} - \bar{h}_{m-n+2} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n} \\
 &\quad + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda+n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu} - \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu} \right] h_{m-n} \\
 &\quad + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] h_{m-n+1},
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} \\
 &\quad + \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_1) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta_1}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n-1)\mu)} \right] k_{m-n} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu}h_{m-n-1} + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] h_{m-n+1} \\
 &\quad + \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_2) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta_2}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n-1)\mu)} \right] h_{m-n} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.5.29) est vérifiée pour tout n et m .

En conclusion, l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre " \leq_{st} ". ■

Théorème 3.5.2 *L'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconque $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante: $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$.*

Preuve. L'opérateur est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{\bar{P}}_{nm} \leq \bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m}, \quad \forall n, m, \quad (3.5.32)$$

où,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{P}}_{nm} &= \sum_{m=\ell}^{+\infty} \bar{P}_{n,\ell} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n+1} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \left[\bar{k}_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n} \right] + \frac{\lambda(1-\theta_1) + n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \left[\bar{k}_{m-n} - \bar{k}_{m-n} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu} \left[\bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} \right] + \frac{\lambda(1-\theta_2) + n\mu\theta_2}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \left[\bar{h}_{m-n} - \bar{h}_{m-n} \right] \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda\theta_1 + \lambda(1-\theta_1) + n\mu\theta_1 + n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \right] \bar{k}_{m-n} - \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda\theta_2 + \lambda(1-\theta_2) + n\mu\theta_2 + n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \right] \bar{h}_{m-n} - \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n-1} - \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{k}_{m-n} + \bar{k}_{m-n} + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n-1} - \frac{n\mu(1-\theta_2)}{\lambda+n\mu} \bar{h}_{m-n} + \bar{h}_{m-n}, \\ \\ \bar{\bar{P}}_{n-1,m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu} \bar{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+1} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+(n-1)\mu} \bar{h}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda+(n-1)\mu} \bar{h}_{m-n+1} + \bar{h}_{m-n+1} \\ \\ \bar{\bar{P}}_{n+1,m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n-1} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda+(n+1)\mu} \bar{h}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda+(n+1)\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{n-1m} + \bar{P}_{n+1m} - 2\bar{P}_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+1} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n-1} \\
 &- \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \frac{2n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} - 2\bar{k}_{m-n} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{h}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{h}_{m-n+1} + \bar{h}_{m-n+1} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{h}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n-1} \\
 &- \frac{2\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n-1} + \frac{2n\mu(1-\theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} - 2\bar{h}_{m-n}
 \end{aligned}$$

En suite

$$\begin{aligned}
 &= \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} [\bar{k}_{m-n} - k_{m-n}] \\
 &+ [\bar{k}_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n} + \bar{k}_{m-n}] + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} [k_{m-n-2} + \bar{k}_{m-n-1}] \\
 &- \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} [k_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n}] - 2\bar{k}_{m-n} \\
 &- \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} [k_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n}] + \frac{2n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} \\
 &+ \bar{h}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{h}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda + (n-1)\mu} [\bar{h}_{m-n} - h_{m-n}] \\
 &+ [\bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} + \bar{h}_{m-n}] + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + (n+1)\mu} [h_{m-n-2} + \bar{h}_{m-n-1}] \\
 &- \frac{(n+1)\mu(1-\theta_2)}{\lambda + (n+1)\mu} [h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n}] - 2\bar{h}_{m-n} \\
 &- \frac{2\lambda\theta_2}{\lambda + n\mu} [h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n}] + \frac{2n\mu(1-\theta_2)}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n},
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1m} - 2\overline{\overline{P}}_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} k_{m-n-2} + \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{(\lambda + (n-1)\mu)} k_{m-n} + \\
 &+ \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_1) + (n-\theta_1)\lambda\mu + n(n+1)\mu^2\theta_1}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n+1)\mu)} \right] k_{m-n-1} \\
 &+ \left[\frac{2\mu^2}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n-1)\mu)(\lambda+(n+1)\mu)} \right] \overline{k}_{m-n} \\
 &+ \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + (n+1)\mu} h_{m-n-2} + \frac{(n-1)\mu(1-\theta_2)}{(\lambda + (n-1)\mu)} h_{m-n} \\
 &+ \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_2) + (n-\theta_2)\lambda\mu + n(n+1)\mu^2\theta_2}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n+1)\mu)} \right] h_{m-n-1} \\
 &+ \left[\frac{2\mu^2}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n-1)\mu)(\lambda+(n+1)\mu)} \right] \overline{h}_{m-n} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1m} - 2\overline{\overline{P}}_{nm} \geq 0, \quad \forall n \geq 0, m \geq n-1.$$

Alors, l'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre convexe. ■

Maintenant, on considère Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attentes M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs ayant les paramètres suivants : $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement. Notons par $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de chaque système.

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.5.3 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)}$, c'est-à-dire pour une distribution quelconque p , on a $\tau^{(1)}p \leq_{st} \tau^{(2)}p$.*

Preuve. D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,

$$\overline{P}_{nm}^{(1)} \leq \overline{P}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m. \tag{3.5.33}$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\
 & + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\
 & \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}k_{m-n}^{(2)} + \bar{k}_{m-n}^{(2)} \\
 & + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}h_{m-n}^{(2)} + \bar{h}_{m-n}^{(2)}. \tag{3.5.34}
 \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.5.1, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \tag{3.5.35}$$

D'autre part,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ alors } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}} \text{ ou } \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \geq \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}}. \tag{3.5.36}$$

En outre, du fait que la fonction $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , l'inégalité suivante a lieu :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \tag{3.5.37}$$

De plus, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$ et $\theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$, donc

$$\frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \text{ et } \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \tag{3.5.38}$$

De même, la fonction : $\frac{x}{1+x}$ est croissante alors :

$$\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \tag{3.5.39}$$

De plus,

$$\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)} \text{ et } \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)} \text{ implique que } (1 - \theta_1^{(1)}) \geq (1 - \theta_1^{(2)}) \text{ et } (1 - \theta_2^{(1)}) \geq (1 - \theta_2^{(2)}),$$

donc

$$-\frac{n\mu^{(1)}(1-\theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}} \leq -\frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}} \quad \text{et} \quad -\frac{n\mu^{(1)}(1-\theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}} \leq -\frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}. \quad (3.5.40)$$

Des inégalités (3.5.38), (3.5.40) et (3.5.35) on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1-\theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\quad + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1-\theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)}+n\mu^{(1)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\quad + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}h_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}h_{m-n}^{(1)} + \bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n-1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}(1-\theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\quad + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n-1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}(1-\theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n}^{(1)} \\ &\quad + \frac{n\mu^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{k}_{m-n+1}^{(1)} \\ &\quad + \frac{n\mu^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}(1-\theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)}+n\mu^{(2)}}\bar{h}_{m-n+1}^{(1)} \leq \bar{P}_{nm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

Par conséquent, si $G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u)$ alors l'inégalité (3.5.33) est vérifiée. ■

Théorème 3.5.4 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$, $\theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_v G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$, c'est-à-dire que pour une distribution quelconque p on a $\tau^{(1)}p \leq_v \tau^{(2)}p$.*

Preuve. D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre convexe,

$$\bar{\bar{P}}_{nm}^{(1)} \leq \bar{\bar{P}}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(1)} \\
& + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{h}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{h}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(1)} \\
& \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(2)} \\
& + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{h}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_2^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{h}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(2)}. \tag{3.5.42}
\end{aligned}$$

En effet, d'après le Lemme 3.5.3, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \tag{3.5.43}$$

D'après les inégalités (3.5.37) et (3.5.40), on obtient le résultat final suivant :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{k}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(1)} \\
& + \frac{\lambda^{(1)}\theta_2^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{h}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_2^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \bar{h}_{m-n}^{(1)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(1)} \\
& \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{k}}_{m-n}^{(2)} \\
& + \frac{\lambda^{(2)}\theta_2^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{h}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{h}_{m-n}^{(2)} + \bar{\bar{h}}_{m-n}^{(2)}.
\end{aligned}$$

D'ou l'opérateur τ est monotone par rapport a l'ordre convexe. ■

3.6 Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.6.1 *On considère Σ_1, Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, ayant les paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement, et soient $\pi_i^{(1)}, \pi_i^{(2)}$, les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivantes lieu*

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_w G^{(2)},$$

on a aussi l'inégalité suivante sur la distribution stationnaire

$$\left\{ \pi_i^{(1)} \right\} \leq_w \left\{ \pi_i^{(2)} \right\}, \quad \text{où } w = st \text{ (ou } v).$$

Preuve. D'après le Théorème 3.5.4, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(1)} \leq \theta_2^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_w G^{(2)}$ implique $\tau^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}$, c'est-à-dire, pour une distribution quelconque p on a l'inégalité suivante :

$$\tau^{(1)}p \leq_w \tau^{(2)}p. \quad (3.6.1)$$

Par hypothèse, on a $G^{(2)} \leq_w G^{(1)}$ alors d'après le Théorème 3.5.2 (resp. le Théorème 3.5.4), l'opérateur τ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}$ telle que $p_1^{(2)} \leq_w p_2^{(2)}$,

on a

$$\tau^{(2)}p_1^{(2)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.6.2)$$

Cependant, de l'inégalité (3.6.1), on obtient

$$\tau^{(1)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p^{(1)}. \quad (3.6.3)$$

Il existe une probabilité $p_1^{(2)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p_1^{(2)}. \quad (3.6.4)$$

En combinant les inégalités (3.6.3) et (3.6.4), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p^{(2)}, \quad (3.6.5)$$

pour deux distributions quelconques $p^{(1)}, p^{(2)}$.

L'inégalité (3.6.5), peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}p_i^{(1)} &= P(Z_l^{(1)} = i) = P(Z_l^{(1)} = i) \\ &\leq_w P(Z_l^{(2)} = i) = P(Z_l^{(2)} = i) = \tau^{(2)}p_i^{(2)}, \end{aligned}$$

quand $l \rightarrow \infty$, on a $\{\pi_i^{(1)}\} \leq_w \{\pi_i^{(2)}\}$, pour $i \in \mathbb{N}$. ■

Théorème 3.6.2 *Si pour le modèle M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, la distribution de temps de service est NBUE (New Better than Used Expectation), (respectivement NWUE-New Worse than Used in Expectation), alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans ce système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.*

Preuve. Considérons un système de files d'attente M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, du serveur avec les mêmes paramètres : taux d'arrivée λ , taux de rappels μ , la probabilité de rejoindre l'orbite θ , temps moyen de service β_1 que le système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, mais avec un temps de service exponentiellement distribué avec des taux $\theta = \frac{1}{\beta_1}$.

$$G^*(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\beta_1}}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{si } u < 0. \end{cases} \quad (3.6.6)$$

D'après la proposition 2.4.1, si $G(u)$ est NBUE (respectivement NWUE), alors

$$G(u) \leq_v G^*(u). \quad (3.6.7)$$

Et comme $G^{(1)} \leq_v G^{(2)}$ alors d'après le Théorème 3.6.1, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs. ■

3.7 Application numérique

Dans le but de donner un sens pratique et d'illustrer l'applicabilité des résultats obtenus dans la section précédente, nous avons opté pour la technique de simulation à événements discrets. En effet, nous avons élaboré un simulateur, sous environnement Matlab, basé sur la simulation à événements discrets, qui reproduira le comportement du modèle d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, afin d'estimer ses probabilités stationnaires afin de réaliser la comparaison du Théorème 3.6.2. Pour cela, on a choisi une loi de probabilité de type NBUE (une distribution d'Erlang d'ordre k notée $E_k(\lambda)$) et une autre de type NWUE (une distribution gamma de paramètres a et b notée $\Gamma(a, b)$ avec $0 < a < 1$) pour les temps de service.

De plus, afin d'analyser l'influence de taux d'arrivées des clients négatifs δ , sur la comparaison en question, et ce la dans le but d'avoir une tendance générale des résultats, nous avons fixé le taux des arrivées des clients positifs $\lambda = 0.5$, la probabilité de quitter le système $\theta_1 = 0.4$, le client interrompu rejoindre l'orbite $\theta_2 = 0.6$ et nous avons considéré trois situations de variations de δ . Pour un temps de simulation $t_{max} = 200$ unités de temps et $n = 30$ (nombre de réplication). Prenant en considération les différentes lois citées dans le tableau suivant :

		δ	N	N_o
Loi NBUE	$E_2(0.4)$	0.1	36.4714	35.6905
		0.2	34.1880	33.4765
		0.4	28.5069	27.9250
Loi exp	EXP (0.2)	0.1	35.0514	34.3619
		0.2	30.7560	30.1288
		0.4	23.7252	23.3224
Loi NWUE	$\Gamma(0.5, 10)$	0.1	33.6244	32.8351
		0.2	28.4042	27.6962
		0.4	18.6257	18.1475

Table : Différentes situations prises en considération lors de simulation

Et les graphes suivants représentent les trois situations de comparaison

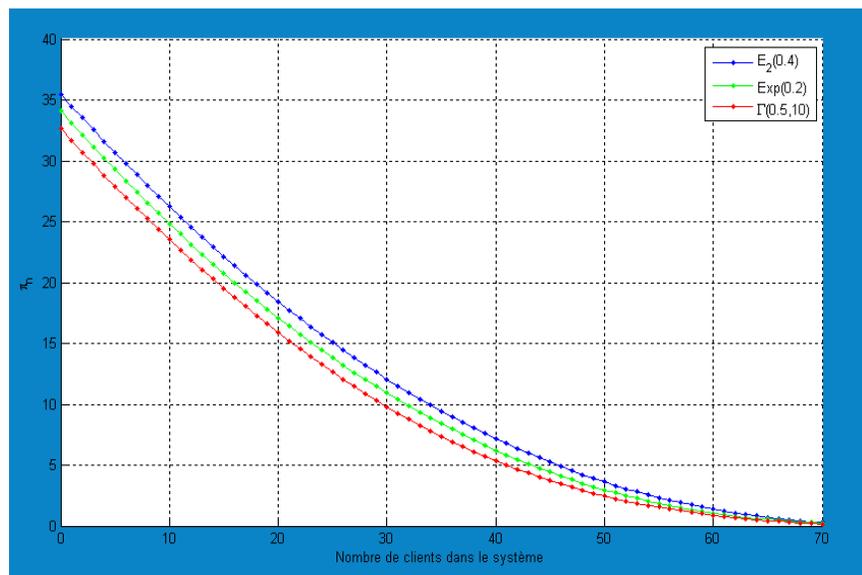


Figure 3.1. Nombre de clients dans le système.

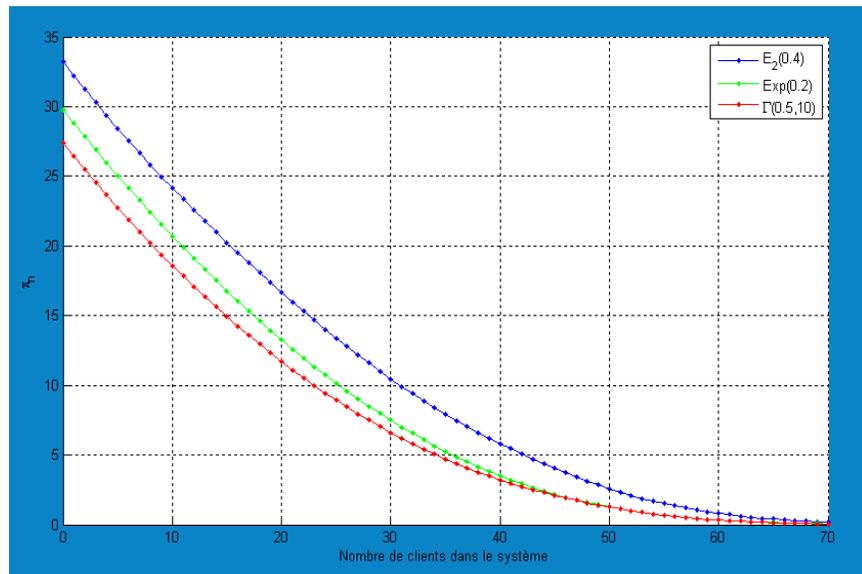


Figure 3.2. Nombre de clients dans le système.

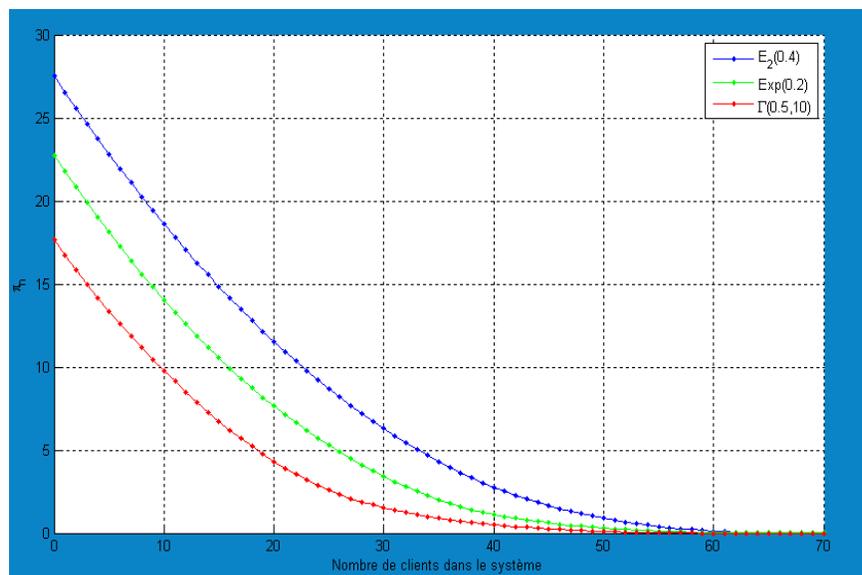


Figure 3.3. Nombre de clients dans le système.

- Les bornes stochastiques données dans le Théorème 3.5.2, dépendent de taux d'arrivées des clients négatifs δ (voir les Figure 3.1, 3.2 et 3.3).

-D'après les Figures, on remarque que :

- Si le taux d'arrivées des clients négatifs est assez petite alors le système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs se comporte de la même manière qu'un système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs (voir la Figures 3.1).
- Si le taux d'arrivées des clients négatifs δ assez grande alors les caractéristiques du système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs s'éloignent de celles du système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs (voir les Figures 3.2 et 3.3).
- Des que le taux d'arrivées des clients négatifs δ augmente dans le système alors le nombre moyen de clients positifs dans le système N et le nombre moyen de clients positifs dans l'orbite N_o diminue.

D'une manière générale, les résultats théoriques obtenus dans le Théorème 3.5.2, sont confirmés par les résultats de simulation (une bonne concordance entre les résultats analytiques et ceux issus de la simulation). De plus, si le taux d'arrivées des clients négatifs δ sont faibles alors les bornes stochastiques en question sont une bonne approximation pour les probabilités stationnaires du modèle considéré dans notre étude et ce quelque soit la distribution des temps de service (NBUE ou NWUE). Par conséquent, les performances d'un tel système (nombre moyen de clients dans le système, le temps d'attente moyen,...) peuvent être estimés par celles du système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons trouvé des conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs,

et on a montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne Markov induite par rapport aux ordres stochastique et convexe. De plus nous avons obtenu que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système M/G/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, du serveur soit majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système M/M/1 avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs si la distribution de temps de service est NBUE (respectivement NWUE).

3.9 Cas particulier : $\delta = 0$ (sans clients négatifs)

Dans ce travail, nous considérons $\delta = 0$ et on a abouties a le travail de Boualem et al [33], et on a fait l'étude sur des inégalités stochastiques pour le modèle d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback.

Les systèmes d'attente avec rappels et Bernoulli feedback. Ce type de systèmes diffère des systèmes classiques par l'existence de deux paramètres supplémentaires : rappels et feedback. La notion de feedback introduite en général pour exploiter des situations d'attente où tous les clients demandent le principal service et seulement quelques uns parmi eux ont besoin de demander un autre service.

3.10 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback. Les clients primaires arrivent de l'extérieur au système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. L'arrivée d'un client reçoit un serveur immédiat si le serveur est inactif, sinon il quitte la zone du service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé orbite. Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, jusqu'à ce qu'il

le trouve disponible. Après que le client est complètement servi, le client doit décider, soit de rejoindre l'orbite pour un autre service avec une probabilité θ_1 ($0 \leq \theta_1 < 1$) où de quitter le système définitivement avec une probabilité complémentaire $\bar{\theta}_1 = (1 - \theta_1)$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux $n\mu$ ($n \in \mathbb{N}$) Comme cette politique de rappel dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel classique. La durée de service est de loi générale, de fonction de distribution $G(x)$, de transformée de Laplace $\tilde{G}(s)$ et des deux premiers moments finis β_1 et β_2 , respectivement. Toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus

$$X(t) = (C(t), N_o(t), \zeta(t), t \geq 0),$$

où $C(t)$ est la fonction de l'indicateur de l'état du serveur : $C(t)$ est égal à 0 ou 1 selon que le serveur est libre ou occupé à l'instant t .

$N_o(t)$: le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Si $C(t) = 1$, $\zeta(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service à l'instant t .

Le schéma général d'un tel système d'attente est donné par la Figure 3.4

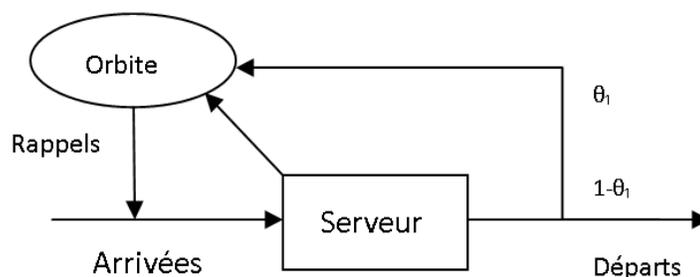


Figure 3.4. Schéma d'un Système M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback.

3.11 Chaîne de Markov induite

Soit $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'instants de la fin d'un service. La suite de variables aléatoires $Y_n = \{q_n = N_o(t_n^+); n \in \mathbb{N}\}$ forme une chaîne de Markov induite, dont l'équation fondamentale est :

$$q_{n+1} = q_n - \delta_{q_n} + \Delta_{n+1} + \eta, \quad (3.11.1)$$

où,

- Δ_{n+1} : représente le nombre de clients qui arrivent pendant un temps de service qui se termine à l'instant t_{n+1} . Sa distribution est donnée par :

$$k_m = P(\Delta_{n+1} = m) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} e^{-\lambda u} dG(u), \quad m \geq 0, \quad (3.11.2)$$

avec la fonction génératrice

$$K(z) = \sum_{m \geq 0} k_m z^m = \int_0^{+\infty} e^{-u(\lambda - \lambda z)} dG(u) = \tilde{G}(\lambda(1 - z)), \quad m \geq 0,$$

- δ_{q_n} est la variable de Bernoulli définie par :

$$\delta_{q_n} = \begin{cases} 1, & \text{si le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La distribution de δ_{q_n} dans le cas des rappels classiques est donné par Boualem et al. [31] :

$$P(\delta_{q_n} = 1/q_n = k) = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}, \quad P(\delta_{q_n} = 0/q_n = k) = \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}. \quad (3.11.3)$$

- La variable aléatoire η est définie par :

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{si le client servi décide de rejoindre l'orbite,} \\ 0, & \text{si le client servi décide de quitter le système.} \end{cases}$$

En outre,

$$P[\eta = 1] = \theta_1 \quad \text{et} \quad P[\eta = 0] = \bar{\theta}_1 = 1 - \theta_1.$$

Théorème 3.11.1 *La chaîne de Markov induite $\{q_n, n \geq 1\}$ est ergodique si et seulement si $\rho = \lambda\beta_1 + \theta_1 < 1$.*

Preuve. voir (Boualem et al [32]). ■

3.12 Inégalités préliminaires

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback $\{k_m^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ sont comparables suivant les ordres partiels : stochastique, convexe et en transformée de Laplace.

Lemme 3.12.1 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback,*

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\},$$

où,

$$k_m^{(i)} = P(X = m) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(i)}u\} dG^{(i)}(u), \quad i = 1, 2, \quad m \geq 0.$$

Preuve. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$

Par définition de l'ordre stochastique \leq_{st} , on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\} &\iff \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(2)} = \bar{k}_m^{(2)} \\ &\iff \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n}{n!} \exp\{-\lambda^{(1)}u\} dG^{(1)}(u), \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n}{n!} \exp\{-\lambda^{(1)}u\} dG^{(1)}(u), \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^n}{n!} \exp\{-\lambda^{(2)}u\} dG^{(2)}(u). \quad (3.12.1)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.12.1), on considère la fonction

$$f_m(u, \lambda) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\}. \quad (3.12.2)$$

En prenant sa dérivée par rapport à u , on obtient l'expression positive suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m(u, \lambda)}{\partial u} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda u\} - \lambda \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \right] \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda u\} \right) - \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \right) \\ &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda u\} \right) - \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\lambda \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \right) \\ &\quad + \lambda \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} \\ &= \lambda \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} > 0, \quad \forall u \geq 0. \end{aligned}$$

donc $f_m(u, \lambda)$ est une fonction croissante en u .

La dérivée par rapport à λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m(u, \lambda)}{\partial \lambda} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda u\} - u \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \right] \\ &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\lambda u\} \right) - u \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \right) \\ &\quad + u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} \\ &= u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} > 0, \quad \forall u \geq 0. \end{aligned}$$

On remarque que la dérivée est positive pour toutes les valeurs positives que peut prendre le paramètre λ . Alors, la fonction $f_m(u, \lambda)$ est croissante par rapport aux valeurs du paramètre λ .

Comme $f_m(u, \lambda)$ est une fonction croissante en u et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$, alors à l'aide du théorème 2.2.1, donné dans le chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.12.3)$$

D'autre part, puisque la fonction $f_m(u, \lambda)$ est monotone par rapport à λ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, on a

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.12.4)$$

Par conséquent, des inégalités (3.12.3) et (3.12.4), inégalité (3.12.1) est vérifiée par transitivité. ■

Lemme 3.12.2 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_v G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v on a :

$$\begin{aligned} \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\} &\iff \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{k}_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{k}_n^{(2)} = \bar{k}_m^{(2)}, \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^\ell}{\ell!} \exp\{-\lambda^{(1)}u\} dG^{(1)}(u), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^\ell}{\ell!} \exp\{-\lambda^{(2)}u\} dG^{(2)}(u), \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(1)}) dG^{(1)}(u), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(2)}) dG^{(2)}(u), \end{aligned} \quad (3.12.5)$$

avec

$$f_n(u, \lambda^{(i)}) = \sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^\ell}{\ell!} \exp\{-\lambda^{(i)}u\}. \quad (3.12.6)$$

Les fonctions $f_m(u, \lambda)$ sont croissantes par rapport à λ , alors la fonction définie par :

$$\bar{f}_m(u, \lambda) = \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda) \text{ l'est aussi.}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \bar{f}_m(u, \lambda) &= \lambda \frac{\partial}{\partial u} f_{m-1}(u, \lambda) \\ &= \lambda^2 \left(\frac{(\lambda u)^{m-2}}{(m-2)!} \right) \exp\{-\lambda u\} > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\bar{f}_m(u, \lambda)$ est croissantes et convexe par rapport à la variable u .

D'après le théorème 2.2.4, donné dans le chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.12.7)$$

Et on obtient, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{f}_m(u, \lambda)$ par rapport à λ que :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.12.8)$$

Finalement, l'inégalité (3.12.5) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.12.7) et (3.12.8). ■

Lemme 3.12.3 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Pour prouver que l'inégalité $\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\tilde{G}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\} \iff \tilde{G}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.12.9)$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned} k(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} k_m z^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} z^m dG(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda u z)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} dG(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda u(1-z)\} dG(u) = \tilde{G}(\lambda(1-z)). \end{aligned}$$

De plus,

$$G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \Rightarrow \tilde{G}^{(1)}(s) \geq \tilde{G}^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier, pour $s = \lambda^{(1)}(1-z)$, on obtient

$$\tilde{G}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.12.10)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, impliquent l'inégalité suivante :

$$\tilde{G}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.12.11)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.12.9) découle des inégalités (3.12.10) et (3.12.11). ■

3.12.1 Monotonie de la chaîne de Markov induite

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite pour le système M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback sont données par la formule suivante :

$$P_{n,m} = \begin{cases} \theta k_{m-1} + (1 - \theta_1)k_m, & \text{si } n = 0 \text{ et } m \geq 0, \\ \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0, & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m = n - 1, \\ \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n} \\ + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n+1}, & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m > n - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12.12)$$

3.12.2 Monotonie de l'opérateur de transition

Les deux théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 3.12.1 *L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$.*

Preuve. Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}, \forall n, m. \quad (3.12.13)$$

1^{er} cas : $n = 0$ et $m \geq 0$

Dans ce cas, on a

$$P_{nm} = \theta_1 k_{m-1} + (1 - \theta_1)k_m, \quad (3.12.14)$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} &= \sum_{\ell \geq m} p_{n\ell} = \sum_{\ell \geq m} \theta_1 k_{\ell-1} + (1 - \theta_1) k_\ell \\
 &= \theta_1 \bar{k}_{m-1} + (1 - \theta_1) \bar{k}_m \\
 &= \theta_1 \left[k_{m-1} + \bar{k}_m \right] + (1 - \theta_1) \bar{k}_m \\
 &= \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m,
 \end{aligned}$$

et

$$\bar{P}_{n-1m} = \sum_{\ell \geq m} p_{n-1\ell} = \theta_1 k_{m-1} + \bar{k}_m. \quad (3.12.15)$$

Finalement, on trouve

$$\bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} \geq 0.$$

2^{ème} cas : $n \geq 1$ et $m = n - 1$.

On a

$$\begin{aligned}
 P_{nm} &= \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0, \\
 \bar{P}_{nm} &= \frac{n\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + n\mu} k_0,
 \end{aligned}$$

et

$$\bar{P}_{n-1m} = \frac{(n-1)\mu(1 - \theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} k_0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1 - \theta_1) k_0 \\
 &= \left[\frac{n\mu(\lambda + (n-1)\mu) - (n-1)(\lambda + n\mu)\mu}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1) k_0 \\
 &= \left[\frac{n\lambda\mu + n\mu^2(n-1) - (n-1)\lambda\mu - n(n-1)\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1) k_0 \\
 &= \left[\frac{n\lambda\mu + n^2\mu^2 - n\mu^2 - n\lambda\mu + \lambda\mu - n^2\mu^2 + n\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] (1 - \theta_1) k_0 \\
 &= \frac{\lambda\mu(1 - \theta_1)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} k_0 \geq 0.
 \end{aligned}$$

3^{ème} cas : $n \geq 1, m > n - 1$.

$$P_{nm} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} k_{m-n+1},$$

et

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm} &= \sum_{\ell \geq m} p_{n\ell} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} [k_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n}] + \frac{\lambda(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \left[\frac{\lambda\theta + \lambda(1-\theta_1) + n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \right] \bar{k}_{m-n} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda + n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda + n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} [k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1}] \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda + n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\bar{P}_{nm} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n-1} + \frac{\lambda + n\mu\theta_1}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1}, \quad (3.12.16)$$

et

$$\bar{P}_{n-1m} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n} + \frac{\lambda + (n-1)\mu\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n} + k_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+2} \\
 &\quad - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n} - \frac{\lambda+(n-1)\mu\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu}k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda+n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} - \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n} \\
 &\quad + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu}k_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_1) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta_1}{(\lambda+n\mu)(\lambda+(n-1)\mu)} \right] k_{m-n} \\
 &\quad + \left[\frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda+(n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.12.13) est vérifiée pour tout n et m .

En conclusion, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre " \leq_{st} ". ■

Théorème 3.12.2 *L'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconque $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante : $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$.*

Preuve. L'opérateur est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{\bar{P}}_{nm} \leq \bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m}, \quad \forall n, m. \quad (3.12.17)$$

Où,

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{P}}_{nm} &= \sum_{m=\ell}^{+\infty} \bar{P}_{n,\ell} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n-1} + \frac{\lambda(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n} + \frac{n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n+1} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \left[\bar{\bar{k}}_{m-n-1} + \bar{\bar{k}}_{m-n} \right] + \frac{\lambda(1-\theta_1) + n\mu\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n} + \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \left[\bar{\bar{k}}_{m-n} - \bar{\bar{k}}_{m-n} \right] \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n-1} + \left[\frac{\lambda\theta_1 + \lambda(1-\theta_1) + n\mu\theta_1 + n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \right] \bar{\bar{k}}_{m-n} - \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n} \\
 &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n-1} - \frac{n\mu(1-\theta_1)}{\lambda+n\mu} \bar{\bar{k}}_{m-n} + \bar{\bar{k}}_{m-n},
 \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{P}}_{n-1,m} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n+1} + \overline{k}_{m-n+1},$$

et

$$\overline{\overline{P}}_{n+1,m} = \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n-1} + \overline{k}_{m-n-1}.$$

On a,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1m} - 2\overline{\overline{P}}_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n+1} + \overline{k}_{m-n+1} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n-2} - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n-1} + \overline{k}_{m-n-1} \\ &\quad - \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \overline{k}_{m-n-1} + \frac{2n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \overline{k}_{m-n} - 2\overline{k}_{m-n} \\ &= \overline{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} [\overline{k}_{m-n} - k_{m-n}] \\ &\quad + [\overline{k}_{m-n-1} + \overline{k}_{m-n} + \overline{k}_{m-n}] + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} [k_{m-n-2} + \overline{k}_{m-n-1}] \\ &\quad - \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} [k_{m-n-1} + \overline{k}_{m-n}] - 2\overline{k}_{m-n} \\ &\quad - \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} [k_{m-n-1} + \overline{k}_{m-n}] + \frac{2n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \overline{k}_{m-n} \\ &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} k_{m-n-2} + \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n} \\ &\quad + \left[\frac{\lambda(1+\theta_1) + (n+1)\mu\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} - \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \right] k_{m-n-1} \\ &\quad + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n} + \overline{k}_{m-n-1} + \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n} \\ &\quad - \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n-1)\mu} \overline{k}_{m-n} + \frac{(n+1)\mu(1-\theta_1)}{\lambda + (n+1)\mu} \overline{k}_{m-n} \\ &\quad - \frac{2\lambda\theta_1}{\lambda + n\mu} \overline{k}_{m-n} + \frac{2n\mu(1-\theta_1)}{\lambda + n\mu} \overline{k}_{m-n}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1m} - 2\overline{\overline{P}}_{nm} &= \frac{\lambda\theta_1}{\lambda + (n+1)\mu} k_{m-n-2} + \frac{(n-1)\mu(1-\theta_1)}{(\lambda + (n-1)\mu)} k_{m-n} + \\ &\quad + \left[\frac{\lambda^2(1-\theta_1) + (n-\theta_1)\lambda\mu + n(n+1)\mu^2\theta_1}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] k_{m-n-1} \\ &\quad + \left[\frac{2\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] \overline{k}_{m-n} \geq 0 \end{aligned}$$

Alors l'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre convexe. ■

Maintenant, on considère Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback ayant les paramètres suivants : $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, G^{(1)}(u)$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}, G^{(2)}(u)$ respectivement. Notons par $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de chaque système.

Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.12.3 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback,*

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u) \text{ alors } \tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)},$$

c'est-à-dire pour une distribution quelconque p on a $\tau^{(1)}p \leq_{st} \tau^{(2)}p$.

Preuve. D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,

$$\bar{P}_{n-1m}^{(1)} \leq \bar{P}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m. \quad (3.12.18)$$

Ce qui revient à montrer :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{(2)} + \bar{k}_{m-n}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.12.19)$$

D'après le Lemme 3.12.1, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \quad (3.12.20)$$

D'autre part,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ alors } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}} \text{ ou } \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \geq \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \quad (3.12.21)$$

En outre, du fait que la fonction $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , l'inégalité suivante a lieu :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad (3.12.22)$$

De plus, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$, donc

$$\frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad (3.12.23)$$

De même, la fonction : $\frac{x}{1+x}$ est croissante alors :

$$\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad (3.12.24)$$

De plus, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$ implique que $(1 - \theta_1^{(1)}) \geq (1 - \theta_1^{(2)})$. Donc

$$-\frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq -\frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}. \quad (3.12.25)$$

Des inégalités, (3.12.23), (3.12.25) et (3.12.20) on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{(1)} + \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n-1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\quad + \frac{n\mu^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n}^{(1)} + \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \bar{k}_{m-n+1}^{(1)} \leq \bar{P}_{nm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.12.26)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.12.18) est vérifiée, $\forall n \geq 0, m \geq 0$. ■

Théorème 3.12.4 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_v G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$, c'est-à-dire que pour une distribution quelconque p on a $\tau^{(1)}p \leq_v \tau^{(2)}p$.

Preuve. D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre convexe,

$$\overline{\overline{P}}_{nm}^{(1)} \leq \overline{\overline{P}}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m. \quad (3.12.27)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \overline{k}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \overline{k}_{m-n}^{(1)} + \overline{k}_{m-n}^{(1)} \\ & \leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \overline{k}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \overline{k}_{m-n}^{(2)} + \overline{k}_{m-n}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.12.28)$$

En effet, d'après le Lemme 3.12.2, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \quad (3.12.29)$$

D'après les inégalités (3.12.22) et (3.12.25), on obtient le résultat final suivant :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}}_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}\theta_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \overline{k}_{m-n-1}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}(1 - \theta_1^{(1)})}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \overline{k}_{m-n}^{(1)} + \overline{k}_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}\theta_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \overline{k}_{m-n-1}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}(1 - \theta_1^{(2)})}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \overline{k}_{m-n}^{(2)} + \overline{k}_{m-n}^{(2)} = \overline{\overline{P}}_{nm}^{(2)}. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe. ■

3.13 Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback, par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.13.1 *On considère Σ_1, Σ_2 deux système de files d'attente M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback, ayant les paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta_1^{(1)}, G^{(1)}(u)$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta_1^{(2)}$,*

3.13. Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

$G^{(2)}(u)$ respectivement, et soient $\pi_i^{(1)}$, $\pi_i^{(2)}$, les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivante sont lieu

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}, G^{(1)} \leq_w G^{(2)},$$

on a aussi les inégalités suivantes sur les distribution stationnaires

$$\left\{ \pi_i^{(1)} \right\} \leq_w \left\{ \pi_i^{(2)} \right\}, \quad \text{où } w = st \text{ (ou } v).$$

Preuve. D'après le Théorème 3.12.4, les inégalités si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_w G^{(2)}(u)$ implique $\tau^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}$, c'est-à-dire, pour une distribution quelconque p on a l'inégalité suivante :

$$\tau^{(1)}p \leq_w \tau^{(2)}p. \quad (3.13.1)$$

Par hypothèse, on a $G^{(2)} \leq_w G^{(2)}$ alors d'après le Théorème 3.12.2, (resp. le Théorème 3.12.4), l'opérateur $\tau^{(2)}$ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}$, $p_2^{(2)}$ telle que $p_1^{(2)} \leq_w p_2^{(2)}$,

on a

$$\tau^{(2)}p_1^{(2)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.13.2)$$

Cependant, de l'inégalité (3.13.1), on obtient

$$\tau^{(1)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p^{(1)}. \quad (3.13.3)$$

Il existe une probabilité $p_1^{(2)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p_1^{(2)}. \quad (3.13.4)$$

En combinant les inégalités (3.13.2) et (3.13.4), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)}p^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p^{(2)}, \quad (3.13.5)$$

pour deux distributions quelconques $p^{(1)}, p^{(1)}$.

L'inégalité (3.13.5), peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} p_i^{(1)} &= P(Z_l^{(1)} = i) = P(Z_l^{(1)} = i) \\ &\leq {}_w P(Z_l^{(2)} = i) = P(Z_l^{(2)} = i) = \tau^{(2)} p_i^{(2)}, \end{aligned}$$

quand $l \rightarrow \infty$, on a $\{\pi_i^{(1)}\} \leq_w \{\pi_i^{(2)}\}$, pour $i \in \mathbb{N}$. ■

Théorème 3.13.2 *Si pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, la distribution de temps de service est NBUE (New Better than Used Expectation), (respectivement NWUE-New Worse than Used in Expectation), et si de plus $G^{(1)} \leq_v G^{(2)}$ alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans ce système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et Bernoulli feedback.*

Preuve. Considérons un système de files d'attente $M/M/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, du serveur avec les mêmes paramètres : taux d'arrivée λ , taux de rappels μ , la probabilité de rejoindre l'orbite θ , temps moyen de service β_1 que le système $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, mais avec un temps de service exponentiellement distribué avec des taux $\theta_1 = \frac{1}{\beta_1}$.

$$G^*(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\beta_1}}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{si } u < 0. \end{cases} \quad (3.13.6)$$

D'après la proposition 2.5.1, si $G(u)$ est NBUE (respectivement NWUE), alors

$$G(u) \leq_v G^*(u). \quad (3.13.7)$$

Et comme $G^{(1)} \leq_v G^{(2)}$ alors d'après le théorème 3.13.2, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système avec rappels et Bernoulli feedback. ■

3.14 Conclusion

Les résultats obtenus pour le cas $\delta = 0$, coïncident avec ceux obtenus par Boualem et al. (2012) [32]. Il est à noter que le modèle étudié dans ce mémoire est une extension du modèle M/G/1 avec rappels et feedback.

Conclusion générale

Le phénomène de répétition de demandes du service est étudié par la théorie de files d'attente avec rappels dont nous avons actualisé une synthèse des résultats connus. Nous nous sommes intéressés aux modèles avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs.

Nous avons aussi étudié quelques problèmes de comparabilité pour l'analyse du système $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, en utilisant la méthode de comparaison stochastique. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative.

Ceci nous a permis d'obtenir les conditions qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov induite.

Nous avons aussi établi des conditions sous lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires de deux chaînes de Markov incluses associées à deux systèmes $M/G/1$ avec rappels Bernoulli feedback et clients négatifs, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe.

Finalement, si $\delta = 0$, on retrouve les mêmes résultats obtenus par Boualem et al. (2012), pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et feedback.

De plus, on a confirmé les résultats théoriques obtenus par une application numérique.

Annexe A

Système de files d'attente

Introduction

La théorie des files d'attente et des réseaux de files d'attente est l'un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes logistiques et de communications. En quelques mots, cette théorie a pour objet l'étude des systèmes où des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'obtenir un service.

La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de files de clients désirant accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques ou, encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

Les systèmes de files d'attentes ont été très étudiés et une abondante littérature couvre ce sujet (Voir [49, 55]).

3.15 Analyse mathématique d'un système d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer:

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n) = P(X = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

3.16 Notation de Kendall-Lee

Un modèle d'attente est totalement décrit selon la notation de Kendall-Lee [46]. Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles:

$$A/B/s/N/M/D$$

La signification de chacun de ces symboles est :

- A : nature du processus des arrivées,
- B : nature du processus de service,

- s : nombre de serveurs,
- N : capacité d'accueil de la file d'attente,
- M : taille de la population,
- D : discipline de la file.

Dans la description des processus d'arrivée et de service, les symboles les plus courants sont :

- M : loi Exponentielle (Memoryless),
- E : loi d'Erlang,
- Γ : loi Gamma,
- D : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant),
- G : loi Générale (quelconque).

La forme abrégée est : $A/B/s$ signifie que N et M sont infinis.

3.17 Les différentes disciplines de service

La discipline de service décrit l'ordre avec lequel les arrivées dans le système vont accéder au service. Ces disciplines sont :

FIFO (First In First Out) : Le premier arrivée est le premier servi,

LIFO (Last In First Out) : Le dernier arrivé sera le premier servi,

Random (aléatoire) : Les clients accèdent au serveur de manière aléatoire, indépendamment de l'ordre des arrivées,

Priorité relative : Un client accède au service selon sa priorité. La file est gérée par ordre de priorité de la plus forte à la plus faible,

Priorité absolue : Le service d'un client est interrompu lorsqu'un client de priorité supérieur se présente devant la file d'attente. Le client dont ce service est interrompu est remis en tête de la file.

3.18 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente (ou d'un réseau de files d'attente) a pour but de calculer ou d'estimer ses performances dans des conditions de fonctionnement données. Ce calcul se fait le plus souvent pour le régime stationnaire uniquement et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- $\bar{N} = E(X)$: nombre moyen de clients dans le système,
- \bar{Q} : nombre moyen de clients dans la file d'attente,
- \bar{T} : temps moyen de séjour d'un client dans le système,
- \bar{W} : temps moyen d'attente d'un client dans la file,
- \bar{U} : taux d'utilisation de chaque serveur,
- \bar{S} : le temps moyen de service,
- \bar{A} : le temps moyen entre deux arrivées.

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivante :

- $\bar{N} = \lambda \bar{T}$ (Formule de Little), où λ représente le taux des arrivées,
- $\bar{Q} = \bar{W}$,
- $\bar{T} = \bar{W} + \frac{1}{\mu}$, où μ représente le taux de service,
- $\bar{N} = \bar{Q} + \rho$, où ρ représente la charge du système.

De manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté λ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter μ clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est m , une file est stable si et seulement si

$$\lambda < m\mu \iff \rho = \lambda/m\mu < 1,$$

où, ρ est appelé intensité du trafic.

3.19 Processus stochastique

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$, est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire. Un processus stochastique peut être donc considéré comme une famille de variables généralement non indépendantes. L'ensemble de temps T peut être discret ou continu. Ainsi, $X(t)$ définit l'état du processus à un instant donné t . L'ensemble noté E des valeurs que peut prendre le processus à chaque instant est appelé espace d'état et de même T , peut être discret (fini ou infini) ou continu. En fonction des valeurs possibles de T , et de E , on classe les processus stochastiques, de la façon suivante :

1. Processus à temps discret et à espace d'état discret.
2. Processus à temps continu et à espace d'état discret.
3. Processus à temps discret et à espace d'état continu.
4. Processus à temps continu et à espace d'état continu.

3.19.1 Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une classe de processus aléatoires à temps discret qui permet une description mathématique de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique [5, 52]

Définition 3.19.1 *Un processus stochastique $X = (X_n, n = 0, 1, \dots)$ dont l'espace des états E est fini ou infini dénombrable est une chaîne de Markov si pour tout $k = \overline{0, n-1}$, $i_k \in E$, $(i, j) \in E \times E$, on a :*

$$\begin{aligned} P_{ij}(n) &= P_r[X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] \\ &= P_r[X_{n+1} = j / X_n = i], \end{aligned} \tag{3.19.1}$$

Le nombre réel $P_{ij}(n)$ est appelé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, probabilité de transition de la chaîne X à l'instant n de l'état i vers l'état j .

Remarque 3.19.1 (i) : L'équation (3.19.1) est appelée propriété de Markov. Elle signifie que le futur est indépendant du passé et ne dépend donc que du présent.

(ii) : Si X est une chaîne de Markov à espace des états E telle que

$$P_r[X_{n+1} = j / X_n = i] = P_r[X_1 = j / X_0 = i], \quad n \geq 0, \quad \forall (i, j) \in E \times E,$$

alors, la chaîne X est dite homogène dans le temps ou stationnaire.

(iii) : On vérifie que $\forall (i, j) \in E \times E : P_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij} = 1$. Alors, la matrice $P = (P_{ij})_{i,j \in E}$ est dite matrice de transition à une seule étape de la chaîne de Markov homogène X .

Définition 3.19.2 Soit $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$ une suite de variable aléatoire à valeurs dans l'espace continu $S \subseteq \mathbb{R}$. Si pour tout $x \in S, n \geq 1, y_k \in S$ avec $k = \overline{0, n}$, on a :

$$\begin{aligned} P_r(\xi_n \leq x / \xi_0 = y_0; \xi_1 = y_1; \dots; \xi_{n-1} = y_{n-1}) \\ = P_r(\xi_n \leq x / \xi_{n-1} = y_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

alors, $\xi = \{\xi_i\}$ forment une chaîne de Markov à espace d'états continu S .

3.19.2 Processus de Poisson

Supposons que certains événements se répartissent de manière aléatoire dans le temps.

Désignons par $N(t)$ le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $[0, t]$. On dit que le processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson du paramètre $\lambda > 0$, si

1. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est homogène dans le temps,

$$P_r(N(t+s) - N(s) = k) = P_r(N(t) = k) = P_k(t), \quad \forall s > 0, \quad \forall t > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

2. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est à accroissement indépendant,

$$P_r(N(t+s) - N(s) = k; N(s) = j) = P_r(N(t+s) - N(s) = k)P_r(N(s) = j) = P_k(t)P_j(s).$$

3. De plus, on a

$$P_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & k \geq 2, \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t), & k = 1, \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), & k = 0. \end{cases}$$

Si le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ satisfait aux conditions citées ci-dessus, alors :

$$P_r[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.20 Modèles markoviennes

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (modèle M/M/1). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{N(t), t \geq 0\}$ est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

3.20.1 Système d'attente M/M/1

C'est le modèle de files d'attente le plus simple. Il permet en effet d'illustrer les concepts fondamentaux liés à l'attente devant un serveur. Le flot des arrivées est poissonnien de

taux λ et le temps qu'occupe le serveur pour satisfaire un client est une loi exponentielle du paramètre μ .

On décrit ce système par le processus stochastique markovien homogène $\{X(t), t \geq 0\}$, où $X(t)$ modélise le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Régime transitoire

Soit $X(t)$ le nombre de clients présents dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, $X(t)$ est un processus markovien homogène.

Les probabilités d'états $P_n(t) = P[X(t) = n]$ peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov ci-dessous, connaissant les conditions initiales du processus.

$$\begin{cases} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_n(t) = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t). \end{cases} \quad (3.20.1)$$

La résolution de ces équation différentielle (recherche des $P_n(t)$) est difficile. De ce fait, on ne s'intéressera qu'au calcul des probabilités limites.

Régime stationnaire

Lorsque $t \rightarrow +\infty$ dans le système d'équation, précédent (3.20.1), on peut montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = \pi_n,$$

existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p'_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ceci est vrai seulement si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (condition d'ergodicité).

On obtient alors, le système d'équation linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1, \\ (\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}. \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.20.2)$$

Sous la condition supplémentaire de normalisation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1,$$

la résolution du système (3.20.2) par récurrence conduit à

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho, \\ \pi_n = \pi_0 \rho^n \dots \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.20.3)$$

avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

On remarque que les probabilités limites ne dépendent de λ et de μ qu'à travers leur rapport ($\rho = \frac{\lambda}{\mu}$).

Caractéristique du système

L'une des importantes caractéristiques des systèmes de files d'attente est bien le nombre moyen de clients dans le système. Pour le système M/M/1, cette caractéristique est donnée par

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\bar{N} = E(X) = \sum_{n \geq 0} n \pi_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n.$$

D'où

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (3.20.4)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$\bar{Q} = \sum_{n \geq 0} (n - 1) \pi_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (3.20.5)$$

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$\bar{T} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (3.20.6)$$

- Le nombre moyen d'attente dans la file :

$$\bar{W} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (3.20.7)$$

3.21 Modèles non markoviennes

En l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques: le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyses suivantes [4, 1] :

3.21.1 Système d'attente M/G/1

Le flot des arrivées dans le système M/G/1 à la fin de service du $n^{\text{ième}}$ client.

Notons par $G(s)$ la distribution de la durée de service et par λ le paramètre de la distribution exponentielle régissant la durée entre deux arrivées consécutives.

Le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $P = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$,

où :

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{si } i = 0, \\ p_{j-i+1}, & \text{si } i \geq 1. \end{cases} \quad (3.21.1)$$

avec,

$$p_k = \int \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} dG(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En effet, si A_n est le nombre de clients qui entrent dans le système pendant le $n^{\text{ième}}$ service, on a :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1}, \quad \text{avec } \delta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n > 0, \\ 0, & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} , et non pas de X_{n-1}, X_{n-2}, \dots . Ce qui signifie que la suite $\{X(t), t \geq 0\}$ est markovienne, où $X(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Régime stationnaire

Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite X_n , si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$. Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(z)$ (voir [48]) :

$$\Pi(z) = G^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{G^*(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (3.21.2)$$

où G^* représente la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service, et z est un nombre complexe vérifiant $|z| \leq 1$. La formule (3.21.2) est appelée formule de **pollaczek-Khintchine** [55].

Caractéristique du système

On note λ le taux d'arrivée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est $E(Y) = \frac{1}{\mu}$.

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E(Y)}{E(X)},$$

où X est la loi des inter-arrivées et Y est la loi de service.

- Le nombre moyen de clients dans le système :

Cette quantité peut être déterminée, en régime stationnaire, en utilisant la relation :

$$\tilde{E}(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \Pi'(z).$$

Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué.

Par contre, elle peut être obtenue aisément en utilisant la relation (??).

$$\bar{N} = \tilde{E}(X_n) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1 - \rho)}. \quad (3.21.3)$$

Où $V(Y)$ est la variance de la variable aléatoire Y .

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$\bar{Q} = \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1 - \rho)}. \quad (3.21.4)$$

En utilisant la formule de Little, on obtient :

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu} + \lambda \left(\frac{V(Y) + 1/\mu^2}{2(1 - \rho)} \right). \quad (3.21.5)$$

- Le temps moyen d'attente dans la file :

$$\bar{W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \lambda \left(\frac{V(Y) + 1/\mu^2}{2(1 - \rho)} \right). \quad (3.21.6)$$

Bibliographie

- [1] A. Aïssani (1988). Evaluation des performances des systèmes informatiques, Cours de Post-Graduation, Institut d'Informatique, U.S.T.H.B, Alger.
- [2] A. Aïssani (1991). Influence des pannes des serveurs sur la distribution de nombre de clients en orbite et dans un système M/G/1/0 avec rappels, Technologies Avancées, **2**, 23 – 38.
- [3] A. Aïssani et A survey on retrial queueing models, Actes des Journées Statistiques Appliquées, U.S.T.H.B., Alger, pp. 1 – 11, 1994.
- [4] D. Aïssani et A. Aïssani (2005). Méthode statistiques en fiabilité, Cours de Post-Graduation Statistique des Processus Aléatoire, Université de constantine.
- [5] D. Aïssani (2006/2007). *Cours de processus aléatoires appliquée et prévisions*, Département de recherche opérationnelle, Université Abderahmane Mira de Béjaia.
- [6] A. M. Alexandrov (1974). A queueing system with repeated orders. Engennering Cebernetics Review, 12 (3) : 1 – 4.
- [7] J. R. Artalejo and M. J. Lòpez-Herrero (2001). On the M/G/1 queue with quadratic repeated attempts, Statistical Methods **3**, 60 – 78.

- [8] J. R. Artalejo (1992). A unified cost function for M/G/1 queueing systems with removable server, *Trabajo de Investigacion Operativa* **7**, 95 – 104.
- [9] J. R. Artalejo and G. I. Falin (1994). Stochastic decomposition for retrial queues, *Top*, 2, pp. 329 – 342.
- [10] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral (1997). Steady state solution of single server queue with linear repeated requests, *Journal of Applied Probability*, 34 (3 – 4), 223 – 233.
- [11] J. R. Artalejo (1997). Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations, *Computers and Operations Research*, 24(6), pp. 493 – 504.
- [12] J.R. Artalejo and A. Gomez-Corral (1998). Generalized birth and death processes with application to queues with repeated attempts and negative arrivals. *ORS pecktrum* **20** : 5 – 14.
- [13] J.R. Artalejo et A. Gomez-Corral (1999). Performance analysis of a single-server queue with repeated attempts. *Math Comput Modell* 30 : 79 – 88.
- [14] J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral (1999). Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters, *RAIRO Operations Research*, 33 : 371 – 382.
- [15] J. R. Artalejo (1999). Accessible bibliography on retrial queue, *Mathematical and Computer Modelling*, **30**, 1 – 6.
- [16] J. R. Artalejo and M. J. López-Herrero, (2001). On the M/G/1 queue with quadratic repeated attempts. *Statistical Methods* 3, 60 – 78.

-
- [17] J. R. Artalejo and G. Falin (2002). Standard and retrial queueing systems : a comparative analysis, *Revista Mathematica Computense*. **15**, 101 – 129.
- [18] J. R. Artalejo and G. Choudhuy (2004). Steady state analysis of an M/G/1 queue with repeated attempts and two phase service, *Quality Technology and Quantitative Management* **1(2)**, 189 – 199.
- [19] J. R. Artalejo and M. J. Lòpez-Herrero (2007). On the distribution of the number of retrials, *Applied Mathematical Modelling*, 31, 478 – 489.
- [20] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral (2008). *Retrial queueing systems : A computation approach*, Berlin, Springer Edition.
- [21] W. Anisimov and JR. Artalejo (2001). Analysis of Markov multiser verretrial queues with negative arrivals.
Queueing Syst 39 : 157 – 182.
- [22] I. Atencia and P. Moreno (2004). The discrete-time Geo/Geo/1 queue with negative customers and disasters. *Comput Oper Res* 31 : 1537 – 1548.
- [23] J. Amador and J. R. Artalejo (2009). The M/G/1 retrial queue : New descriptors of the customer’s behavior, *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 223, 15 – 26.
- [24] B. Benameur (2002). *Sur les systèmes de files d’attente avec arrivées négatives et rappels*. Thèse de Magister, Université de Babezzour (Alger).
- [25] M. Boualem (2003). *Inégalités pour les systèmes d’attente avec rappels*, Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, U.S.T.H.B., Alger.

- [26] M. Boualem and A. Aïssani (2004). Inégalités pour les systèmes de files d'attente avec rappels et vacances du serveur, Actes du Colloque International MSS'. (Modélisation Statistique et Stochastique), U.S.T.H.B., ISBN : 978 – 9947 – 0 – 173, Alger, 52 – 57.
- [27] M. Boualem, D. Aïssani et N. Djellab (2005). Bornes pour la distribution stationnaire de la file M/G/1 avec rappels et vacances, Actes du Colloque International COSI'05 (2^{ème} Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information), Béjaia, 558 – 570.
- [28] M. Boualem and D. Aïssani (2006). Bornes stochastiques pour les caractéristiques du modèle M/G/1 avec rappels et vacances, Actes de la Conférence ROADEF'. (7^{ème} Congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision), Lille, [http : www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme.html](http://www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme.html).
- [29] M. Boualem (2009). Sur la propriété de décomposition stochastique dans un système d'attente avec rappels et vacances, Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université A.MIRA-BEJAIA Faculté des Sciences Exactes Département de Recherche Opérationnelle.
- [30] M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani (2009). Stochastic qualities for M/G/1 retrial queues with vacations and constant retrial policy, International Journal MCM (Mathematical and Computer Modelling), Doi : 10.1016/j.mcm.2009.03.009, ElsevierEd, 50, 207 – 212.
- [31] M. Boualem, N. Djellab et D. Aïssani (2011). Approche régénérative de la file d'attente M/G/1 avec rappels classiques et vacances exhaustives du serveur. Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol. 45 (1 – 3), pp. 253 – 267.

-
- [32] M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani. (2012). Stochastic Approximations and Monotonicity of a Single Server Feedback Retrieval Queue. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2012, Article ID 536982, pp. 1 – 13.
- [33] M. Boualem, M. Cherfaoui, N. Djellab et D. Aïssani. (2013). Analyse des performances du système M/G/1 avec rappels et Bernoulli feedback, *Journal européen des systèmes automatisés*, vol. 45 (1 – 2 – 3), 181 – 193, pp. 1 – 13.
- [34] M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani (2014), Stochastic bounds for a single server queue with general retrieval times, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 40, No. 1, pp. 183 – 198.
- [35] Q.H. Choo and B. W. Conolly (1979). New results in the theory of repeated orders queueing systems. *J. Appl. Probab.*, 16 : 631 – 640.
- [36] B.D. Choi, Y.W. Shin, and W. C. Ahn (1992). Retrieval queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems* 11, 335 – 356.
- [37] G. Choudhury (2008). Steady state analysis of an M/G/1 queue with linear retrieval policy and two phase service under Bernoulli vacation schedule, *Applied Mathematical Modelling*, 32, 2480 – 2489.
- [38] G. Choudhury and J.C. Ke (2012). Abatch arrival retrieval queue with general retrieval times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 255 – 269.
- [39] A. N. Dudin, A Krishnamoorthy, V. C. Joshua and Tsarenkov, G. V. (2004), Analysis of the BMAP/G/1 retrieval system with search of customers from the orbit. *European Journal of Operational Research* 157, 169 – 179.

- [40] T. V. Do (2010). An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queueing capacity, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 2272 – 2278.
- [41] G. Fayolle (1986). A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In : Boxma, O. J. Cohen, J. W. Tijms, H. C. (Eds.), *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Elsevier Science, Amsterdam, 245 – 253.
- [42] G. I. Falin (1990). A survey of retrial queues. *Queueing Systems*, **7**, 127 – 168.
- [43] G. I. Falin and J. G. C. Templeton (1997). *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London.
- [44] B. Genedenko, Y. Beliaev and A. Soloviev (1972). *Méthodes Mathématiques en théorie de la fiabilité*, Chapman and Hall, London.
- [45] E. Gine, C. Houdre and D. Nualart (2003). *Stochastic inequalities and applications*, Progress in Probability 56, Birkhauser.
- [46] D. G. Kendall (1953). Stochastic processes occurring in theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain, *Annals of Mathematical Statistics*, **24**, 338 – 354.
- [47] J. Keilson and V.A. Cozzolino and H. Young (1968). A service system with unfilled request repeated, *Operations Research*, **16** : 1126 – 1137.
- [48] L. Kleinrock (1975). *Queueing système-Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc, **1**.
- [49] L. Kleinrock (1976). *Queueing systems-Computer Applications*, John Wiley and Sons, Inc, **2**.

-
- [50] B. Krishna Kumar and S. Pavai Madheswari and S. R. Anantha Lakshmi (2013). An M/G/1 Bernoulli feedback retrial queueing system with negative customers, *Oper. Res. Int. J.* (2013) 13 : 187 – 210, DOI 10.1007/s 12351 – 011 – 0107 – 5.
- [51] H. Lopez (2002). On the number of customers served in M/G/1 retrial queue : first moments and maximum entropy approach. *Computers and Operations Research*, **29**, 1739 – 1757.
- [52] M. Lefebvre (2003). *Cours et exercices de Probabilités appliquées*, Presses intl, Polytechnique, 2003.
- [53] H. Li and Y. Q. Zhao (2005). Aretrial queue with a constant retrial rate, server break downs and impatient customers, *Stochastic Models*, 21, 531 – 550.
- [54] A. Müller and D. Stoyan (2002). *Comparison methods for stochastic models and risk*, John Wiley and Sons, LTD.
- [55] A. Ruegg (1989). *Processus Stochastiques*, Presses Polytechniques Romandes.
- [56] D. Stoyan (1983). *Comparison methods for queues and other stochastic models*, John Wiley and Son, Inc, New York, USA.
- [57] M. Shaked and J. G. Shantikumar (1994). *Stochastic orders and their applications*, Probability and Mathematical Statistics.
- [58] R. Szekli (1995). *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*, Springer, New York.
- [59] N. P. Shikata, Y. Suzuki, Y. Takahashi, T. Ihara and T. Nakanishi (1999), Loss probability evaluation of PCS call-terminating control. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences E 82A 7*, 1230 – 1234.

- [60] A. N. Tikhonov (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the régularisation method. *Soviet. Math. Doklady*, 4 : 1035 – 1038.
- [61] P. H. Theodore and H. Christian (1999). Stochastic inequalities and their applications, *Contemporary Mathematics*, 234, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [62] J. Wang and P. Zhang (2009). A discrete-time retrial queue with negative customers and un reliable server. *Comput Ind Eng* 56 : 1216 – 1222.
- [63] J. Wu, Z. Liu and G. and Yang (2011). Analysis of the finite source MAP=PH=N retrial G-queue operating in a random environment, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 1184 – 1193.
- [64] T. Yang and J. G. C. Templeton (1987). A survey on retrial queues, *Queueing Systems*, 2, 201 – 233.