

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Itération de Newton d'un polynôme quadratique complexe

Présenté par : M. AITDAHMANE Djelloul

Soutenu le 17/06/2015

Devant le jury :

M.	AKROUNE Nourredine	Professeur	U. Bejaia	Promoteur
M.	BOUHMILA Fatah	M.C.A	U. Bejaia	Président
M.	YAHIAOUI Yanis	M.A.A	U. Bejaia	Examineur
M ^{me} .	BOULKROUNE Atika	M.A.A	U. Bejaia	Examinatrice

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord monsieur Akroune mon promoteur pour m'avoir proposé ce sujet; ainsi que pour la patience et le soutien qu'il m'a offert. Il a toujours respecté mes choix et me fait part de ces critiques sans m'imposer son point de vue. Je remercie M. Akroune de s'être engagé à m'encadrer pour un sujet contenant des notions sur les systèmes dynamiques, qu'il m'a fait découvrir.

J'adresse mes remerciements aux membres du jury : Merci M. Bouhmila d'avoir accepté de présider le jury, pour ses remarques pertinentes et constructives. Merci M. Yahiaoui pour avoir accepté d'être membre de ce jury. Merci M^{me}. Boukroune pour avoir accepté d'être membre de ce jury . Je leur exprime ma reconnaissance

Je tiens à remercier, particulièrement, tous les enseignants qui m'ont aidé directement ou indirectement .

Je remercie tous les amis que je ne peux pas citer, mais qui étaient une source de soutien moral et qui étaient présents dans les moments difficiles. J'ai des pensées particulières à Abderrezak, Nadjib, Sofiane, omar, Nassime, houssame..... Vos amitiés nous ont été précieuses.

Je remercie particulièrement M. le chef de département M. Boukhlifa pour nous avoir écoutés et accueillis, mes camarades de classe et moi, dans son bureau et pour ses encouragements permanents.

Je remercie infiniment tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de mon parcours. je leurs présente toute ma reconnaissance.

Je remercie très chaleureusement mes très chers parents pour leurs encouragements, leur participation, leur soutien et leur patience.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents.

A mes frères et sœurs ainsi qu'à mes neveux et nièces

A toute ma famille.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels sur la méthode de Newton-Raphson dans \mathbb{R}	3
1.1 Principe des méthodes itératives	3
1.1.1 Théorème général du point fixe	3
1.1.2 Estimation de la vitesse de convergence	5
1.2 Application à la résolution d'équations non linéaires réelles	5
1.3 Natures des points fixes de fonction d'une variable	6
1.3.1 Point fixe attractif , répulsif et neutre	6
1.3.2 Méthode de Newton-Raphson	8
1.4 Conclusion sur la méthode de Newton-Raphson	9
2 Une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes	11
2.1 Rappels sur les systèmes dynamiques	11
2.2 Sphère de Riemann ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)	12
2.3 Conjugaison topologique des systèmes dynamiques	14
2.4 Intérêt de la conjugaison topologique	15
2.5 Dynamique des fonctions holomorphes	16
2.6 Un exemple important de fraction rationnelle	18
2.6.1 La transformations de Möbius	18
3 Application de la méthode de newton à un polynôme complexe de degré deux	19

3.1	Traitement du cas du point à l'infini	19
3.1.1	point à l'infini	19
3.1.2	convention:	22
3.1.3	Application à la méthode de Newton	22
3.2	bassins d'attraction et médiane	23
3.2.1	l'équation de la droite qui joint z^* et z^{**}	24
3.2.2	Sur la médiane de la droite $[z^*, z^{**}]$	25
3.2.3	Invariance de (M) par la transformée de Newton R	26
3.3	Un système conjugué à R	27
3.4	Dynamique du système $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R_1)$	28
3.5	Correspondance entre les deux systèmes dynamiques	29
3.6	Convergence de la fraction R	31
3.7	Résumé du comportement itératif de la transformée de newton d'un polynôme de degré deux	31
3.8	Cas de polynôme de degré au moins trois	32
 Conclusion		 32
 Bibliographie		 33

Introduction

Notre travail rentre dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes, et on s'intéresse précisément à la détermination des ensembles invariants de fractions rationnelles R .

Ces transformations sont de degré inférieur ou égal à deux, définies et à valeurs dans la sphère de Riemann ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) . Les ensembles invariants traités sont les points fixes de R ou leurs bassins d'attractions respectifs.

Pour mener à bien cette étude, et par conséquent cerner le comportement itératif de R , on a suivi les étapes suivantes :

- i) Chercher toutes les racines d'une équation polynomiale complexe, en adaptant la méthode de Newton-Raphson classique au champ complexe.
- ii) Déterminer tous les points fixes de la fraction rationnelle, ainsi que leurs natures, et nous traitons à part le cas où le point à l'infini est point fixe.
- iii) Localiser les bassins d'attractions, et déduire les ensembles-limites de la fraction R

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions fondamentales liées aux systèmes dynamiques (principe des méthodes itératives, théorème général du point fixe, estimation de la vitesse de convergence, nature des points fixes, . . . etc.). Nous rappelons l'algorithme, les avantages et les inconvénients numériques de la méthode de Newton-Raphson dans \mathbb{R} ; on termine par un exemple qui nous a amené à transposer l'étude de la méthode de Newton-Raphson au champ complexe.

- Dans le cadre du chapitre suivant, on rappelle la définition générale d'un système dynamique, la sphère de Riemann, la conjugaison topologique et son intérêt dans les systèmes dynamiques holomorphes. Nous traitons finalement un type important de fractions rationnelles de degré un, représenté par les transformations de Möbius.
- Le troisième et dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude dans la sphère de Riemann, de la dynamique de la transformée de Newton, notée R , d'un polynôme quadratique complexe. En plus du point à l'infini qui est point fixe répulsif, les racines de ce type de polynômes sont des points fixes super-attractifs de la fraction R considérée. Après avoir montré que la médiane des deux racines est invariante par R , on utilise, à l'aide d'un homéomorphisme approprié, la conjugaison topologique du système engendré par R , pour la transformer en un autre système dont l'étude de la dynamique est plus simple. Cette démarche nous permet de connaître avec exactitude le comportement itératif de la transformée de Newton d'un polynôme de degré deux.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Rappels sur la méthode de Newton-Raphson dans \mathbb{R}

Les méthodes itératives de type "point fixe", et en particulier la méthode de Newton, figurent parmi les méthodes numériques les plus utilisées permettant la résolution approchée des équations algébriques. L'idée de ces méthodes est de partir d'une valeur initiale proche de la solution, et d'en améliorer la précision par des itérations d'une application bien choisie.

1.1 Principe des méthodes itératives

1.1.1 Théorème général du point fixe

Définition 1.1.1 *Notions de contraction et de point fixe:*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \rightarrow E$ une application continue. On dit que $x^* \in E$ est un point fixe de φ si $\varphi(x^*) = x^*$. φ est dite contractante si elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire s'il existe $k < 1$ tel que:

$$\forall x, y \in E, d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k.d(x, y)$$

Théorème 1.1.1 Soit $\varphi : E \rightarrow E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Alors φ admet un point fixe unique $x^* \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers x^* .

Unicité du point fixe. Si φ avait deux points fixes $x^* \neq x^{**}$, alors $d(\varphi(x^*), \varphi(x^{**})) = d(x^*, x^{**})$, or $d(x^*, x^{**}) \neq 0$, donc φ ne pourrait être contractante (contradiction).

Existence du point fixe. Soit $x_0 \in E$ un point initial quelconque et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la suite itérée associée. On a alors :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \quad (1.1.1)$$

d'où, de proche en proche, $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$. Pour tout entiers $(q > p)$, il vient (en vertu de l'inégalité 1.1.1) :

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l+1}) \leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) d(x_0, x_1)$$

avec $\sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{+\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}$. on a donc que

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1), \forall p < q$$

et ceci montre que $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $x^* \in E$. L'égalité $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ et la continuité de φ (induite par l'hypothèse de contraction) impliquent, à la limite, $x^* = \varphi(x^*)$.

(Pour plus de détail consulter [3]).

Exemple 1.1.1 Soit $\varphi(x) = 2 - \log_{10}(x)$ définie sur $X = [1, 2]$.

X est un fermé de \mathbb{R} , \mathbb{R} est complet donc X est complet. Et $\varphi([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ i.e. X est stable par φ , de plus

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x \ln(10)} < 0$$

alors $\sup_{x \in [1, 2]} |\varphi'(x)| = 0.43 < 1$; donc φ est contractante.

Par conséquent, φ admet un point fixe unique.

Exemple 1.1.2 les contres-exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème (1.1.1) est réellement nécessaire.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, 1]$. Or X est fermé dans \mathbb{R} et est complet car \mathbb{R} l'est aussi.

De plus, $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante. mais f n'a pas de point fixe car

$$f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}], \text{ i.e } X \text{ n'est pas stable pas } f.$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, \infty[$. Or $f : X \rightarrow X$, et X est un fermé et complet de \mathbb{R} mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \frac{\pi}{4}]$. On a l'inclusion $f\left(]0, \frac{\pi}{4}]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$
et

$\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, donc f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans \mathbb{R} donc pas complet. On signale que $(x^* = 0)$ est point fixe de f mais $x^* \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

1.1.2 Estimation de la vitesse de convergence

Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, une méthode itérative de type "point fixe" ($x_{p+1} = \varphi(x_p)$) convergente (vers x^*) sur E est dite d'ordre ($s \geq 1$), s'il existe $c > 0$ et $l \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\|x_{p+1} - x^*\| \leq c \cdot \|x_p - x^*\|^s, \forall p \geq l$$

on dit qu'il s'agit d'une convergence linéaire (si $s = 1$), de convergence quadratique si $s = 2$, cubique si $s = 3$...etc.

1.2 Application à la résolution d'équations non linéaires réelles

Comme principale application des résultats de la section précédente, une équation non linéaire $f(x) = 0$ d'une variable réelle x . Supposons qu'on ait une fonction différentiable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que disons $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et f strictement croissante,

$0 < m \leq f'(x) \leq M$ sur $[a, b]$ (dans le cas opposé $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, et $-M \leq f'(x) < -m < 0$ il suffira de changer f en $-f$). Si on pose

$$\varphi(x) = x - Cf(x) \quad (*)$$

avec une constante $C \neq 0$, il est clair que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\varphi(x) = x$ et donc la résolution de l'équation $f(x) = 0$ se ramène à rechercher les points fixes de φ . L'espace $E = [a, b]$ est complet, il nous faut vérifier de plus que

- φ envoie bien E dans E .
- φ est bien contractante sur E .

Or nous avons $\varphi'(x) = 1 - Cf'(x)$, donc $1 - CM \leq \varphi'(x) \leq 1 - Cm$, et pour le choix $C = \frac{1}{M}$, la fonction φ est bien contractante dans le rapport $k = 1 - \frac{m}{M}$. De plus φ est croissante et on a $\varphi(a) > a$, $\varphi(b) < b$, donc $\varphi([a, b]) \subset [a, b]$. Il en résulte que toute suite itérative $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ calculée à partir d'un point $x_0 \in [a, b]$ quelconque va converger vers l'unique solution de l'équation ($f(x) = 0$) sur $[a, b]$.

1.3 Natures des points fixes de fonction d'une variable

1.3.1 Point fixe attractif, répulsif et neutre

Notre objectif est d'étudier le comportement itératif d'une fonction au voisinage de ses points fixes. Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow I$ une application de classe $C^1(I)$. Soit $x^* \in I$, un point fixe de φ , on notera, à travers tout ce travail, $s(\varphi, x^*)$ la quantité $|\varphi'(x^*)|$, appelée "multiplicateur de φ en x^* ". On a la classification :

$$\left\{ \begin{array}{ll} s(\varphi, x^*) > 1, & \text{le point } x^* \text{ est dit répulsif} \\ s(\varphi, x^*) < 1, & \text{le point } x^* \text{ est dit attractif} \\ s(\varphi, x^*) = 1, & \text{le point } x^* \text{ est dit neutre (ou indifférent).} \end{array} \right.$$

On traite ici, à titre d'illustration, le cas où $|\varphi'(x^*)| < 1$ (i.e. x^* est attractif).

Soit k tel que $s(\varphi, x^*) = |\varphi'(x^*)| \leq k < 1$. Par continuité de φ , il existe un intervalle $E = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), sur lequel $|\varphi'| \leq k$, donc φ est contractante de rapport k sur

E , on a nécessairement $\varphi(E) \subset E$ et par conséquent

$$\forall x_0 \in [x^* - h, x^* + h], \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = x^*$$

On dit que x^* est un point fixe attractif.

Cas particulier : $\varphi'(x^*) = 0$.

Supposons, de plus, que φ soit de classe C^2 et que $|\varphi''| \leq M$ sur E . La formule de Taylor appliquée à φ au voisinage de x^* donne :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x^*) + (x - x^*)\varphi'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2!}\varphi''(c), c \in]x^*, x[\\ &= x^* + \frac{1}{2}\varphi''(c)(x - x^*)^2 \end{aligned}$$

d'où $|\varphi(x) - x^*| \leq \frac{1}{2}M|x - x^*|^2$, soit encore $\frac{1}{2}M|\varphi(x) - x^*| \leq \frac{1}{2}M|x - x^*|^2$. On en déduit successivement

$$\frac{1}{2}M|x_p - x^*| \leq \left[\frac{1}{2}M|x_0 - x^*| \right]^{2^p}$$

ou encore :

$$|x_p - x^*| \leq \frac{2}{M} \left[\frac{1}{2}M|x_0 - x^*| \right]^{2^p}$$

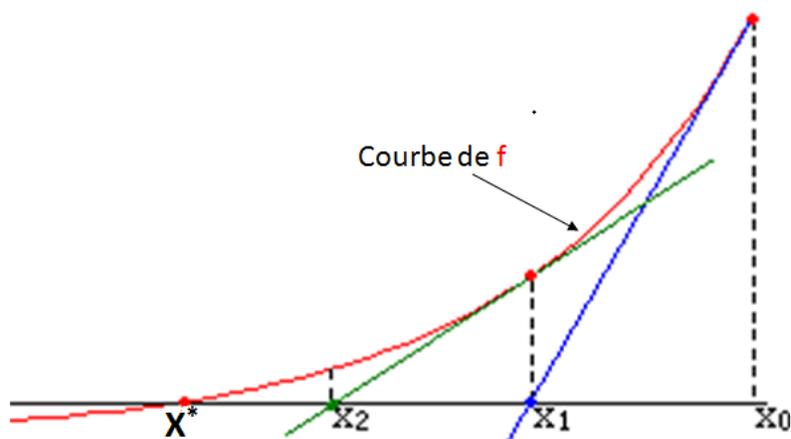
En particulier, si x_0 est choisi tel que $|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{5M}$, on obtient

$$|x_p - x^*| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^p}$$

l'erreur est élevée au carrée, d'une itération à une autre. La convergence vers x^* est donc ici très rapide, elle est en fait quadratique, et le point fixe x^* est alors appelé parfois "point fixe superattractif". Les points fixes de la méthode de Newton (appliquée aux polynômes), comme on le verra d'ailleurs dans la prochaine section, sont de module fini superattractifs.

1.3.2 Méthode de Newton-Raphson

On cherche à évaluer numériquement la racine x^* d'une équation $f(x) = 0$, en supposant qu'on dispose d'une valeur grossière x_0 de cette racine.



Le principe de la méthode de Newton-Raphson est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection, lorsque il existe, de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(deux itérations sont présentées dans la figure ci-dessus)

x_1 est, en général une meilleure approximation de x^* que x_0 . On est donc amené à itérer la fonction

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Supposons que f soit de classe C^2 et que $f'(x^*) \neq 0$. La fonction φ est alors de classe C^1 au voisinage de x^* et

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

ce qui donne $\varphi(x^*) = x^*$, $s(\varphi, x^*) = |\varphi'(x^*)| = 0$. La racine x^* de $f(x) = 0$ est donc un point fixe superattractif de φ . Le résultat suivant donne une estimation de l'écart $|x_p - x^*|$, avec $x_{p+1} = \varphi(x_p)$, $x_p \in V(x^*)$.

Théorème 1.3.1 On suppose qu'il existe ($r > 0$) tel que f soit de classe C^2 sur l'intervalle $I = [x^* - r, x^* + r]$ $r > 0$, et que $f' \neq 0$ sur I . Soit $M = \max_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$ et $h = \min(r, \frac{1}{M})$.

Alors pour tout $x \in [x^* - h, x^* + h]$ on a $|\varphi(x) - x^*| \leq M|x - x^*|^2$, et pour tout point initial $x_0 \in [x^* - h, x^* + h]$

$$|x_p - x^*| \leq \frac{1}{M}(M|x_0 - x^*|)^{2^p}, \text{ avec } x_{p+1} = \varphi(x_p).$$

autrement dit, la convergence de la méthode de Newton-Raphson est quadratique.

Preuve. Pour plus de détail consulter [3] ■

1.4 Conclusion sur la méthode de Newton-Raphson

1. Avantage principal : en règle générale, la convergence de cette méthode (quand elle a lieu) est quadratique i.e. (d'ordre 2) telle que $|x_{n+1} - x^*| \leq \lambda|x_n - x^*|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, (celle du point fixe est, le plus souvent, d'ordre 1 $|x_{n+1} - x^*| \leq \lambda|x_n - x^*|$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$).

2. Inconvénients :

- a) choix du point de départ x_0 pour avoir la convergence,
- b) calcul, à chaque étape, de $f'(x_n)$ en plus de $f(x_n)$.

Exemple 1.4.1 Pour la fonction $f(x) = x^3 - 4x + 1$, on a

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}$$

Par itération de φ , on obtient alors les valeurs suivantes:

x_0	-2	0	2
x_1	-2.125	0.25	1.875
x_2	-2.114975450	0.254098361	1.860978520
x_3	-2.114907545	0.254101688	1.860805877
x_4	-2.114907541	= x_3	1.860805853
x_5	= x_4		= x_4

On observe, sur cet exemple, la convergence de la méthode de Newton-Raphson au bout de 3 à 4 itérations, alors que la méthode du point fixe (vue précédemment) nécessite une dizaine d'essais.

Exemple 1.4.2 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, x^* = 0.$

Pour $x_0 \neq 0$ on a apres calculs :

$$x_1 = -x_0, x_2 = x_0, x_3 = x_1, x_4 = x_2, \dots$$

On constate que la méthode diverge : les itères oscillent indéfniment entre deux valeurs différents.

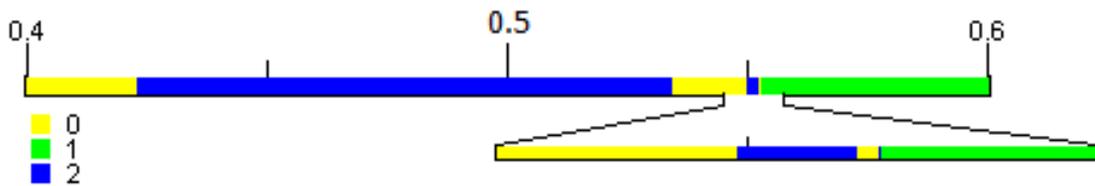
Exemple 1.4.3 Prenons à présent la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Ce polynôme cubique admet 3 racines différents : 0, 1 et 2. On va lui appliquer la méthode de Newton avec différents points initiaux.

Que se passe- t-il lorsque on applique la méthode de Newton en partant de $x_0 = 0.4$? En partant de $x_0 = 0.5$? de $x_0 = 0.6$? de $x_0 = 0.5527$? de $x_0 = 0.55275$? et de $x_0 = 0.5528$?

Observations :

x_0	=	0,4	→	0
x_0	=	0,5	→	2
x_0	=	0,6	→	1
x_0	=	0,5527	→	0
x_0	=	0,55275	→	2
x_0	=	0,5528	→	1

On remarque que la limite est différente même pour des points de départ très proches.. Le graphique ci-dessous nous montre le comportement itératif de la méthode.



racines($x_1=0$:couleur jaune, $x_2=1$:couleur verte , $x_3=2$:couleur bleue)

(Pour plus de détail consulter [6])

Afin de mieux cerner les bassins d'attraction de chacune des racines du polynôme considéré il nous a paru nécessaire de transposer l'étude de la méthode de Newton-Raphson au champ complexe: ce sera l'objet du chapitre suivant.

Une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes

Dans ce chapitre, on introduit la notion de systèmes dynamique ainsi que les notions essentielles qui nous seront utiles pour l'étude de la méthode de Newton-Raphson sur la sphère de Riemann.

2.1 Rappels sur les systèmes dynamiques

Dans ce travail, nous nous intéressons au cas où la variable temporelle est discrète (i.e : $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{N}$). Nous adopterons, pour un système dynamique, la définition générale suivante:

Définition 2.1.1 *Un système dynamique est un triplet (X, T, f) formé par un espace temporel ($T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, ou \mathbb{R}), un espace métrique X non vide appelé espace de phases $X = \mathbb{R}^n$, et par une fonction*

$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow X. \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t) \end{aligned} \quad \text{continue par rapport à } x \text{ et par rapport à } t, \text{ qui vérifie:}$$

$$\begin{cases} \forall x \in X, f(x, 0) = x \\ \forall x \in X, \forall t_1, t_2 \in T : f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

Appellations :

X : espace de phases (ou d'états) .

T : espace temporel.

f : flot (ou fonction d'évolution) du système dynamique.

(Pour plus de détail consulter [4])

Exemple 2.1.1 Soit (P): $\begin{cases} y' = y'(t) = y \\ y(0) = x \end{cases} :$

on trouve la solution générale ainsi :

$$y(t) = f(x, t) = x.e^t$$

et on a :

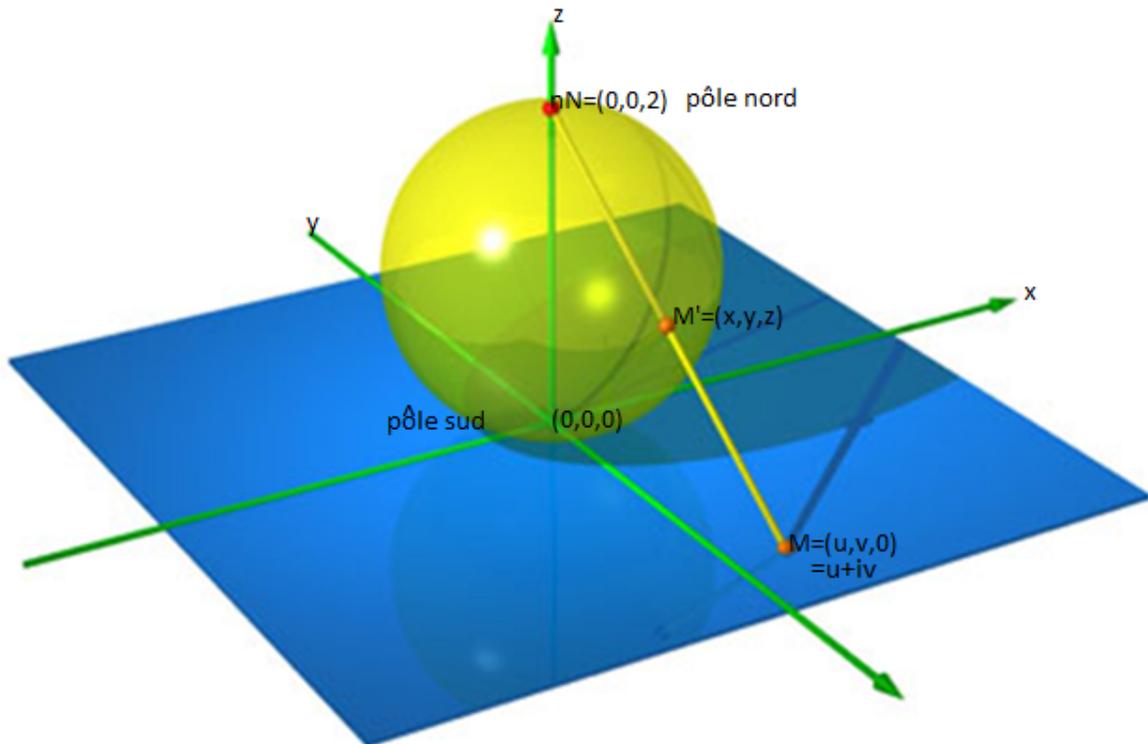
$$\begin{cases} \forall x \in X, f(x, 0) = x.e^0 = x \\ \forall x \in X, \forall t_1, t_2 \in T : f(f(x, t_1), t_2) = f(x.e^{t_1}, t_2) = x.e^{t_1+t_2} = f(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

Alors $y(t) = f(x, t)$ est un système dynamique continue .

2.2 Sphère de Riemann ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

Soit S la surface de la sphère de \mathbb{R}^3 centrée en $(0, 0, 1)$ et de rayon unité. On assimilera le plan OXY au champ complexe \mathbb{C} , le point $N = (0, 0, 2)$ est dit pôle nord de S , et son

pôle sud coïncide, à la fois, avec l'origine O de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{C}



La droite qui joint le point N de S au point $(u, v, 0)$ de \mathbb{R}^3 , ou encore au point $(u + i.v)$ de \mathbb{C} , coupe la surface de S en un seul et unique point (x, y, z) distinct de N (ie : $z \neq 2$). L'équation cartésienne de cette droite, auquel appartient le point (x, y, z) , s'écrit alors :

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{(2 - z)}{2} \dots\dots(1)$$

d'autre part, $(x, y, z) \in S$ entraîne que :

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \dots\dots(2)$$

Remplaçons dans (2), les expressions de $x = x(u, z)$ et $y = y(v, z)$ tirées de (1), on obtient que :

$$u^2 + v^2 = \frac{4z}{(2 - z)}$$

où ($z \neq 2$) comme indiqué plus haut. Cette dernière égalité nous permet d'écrire successivement :

$$\begin{cases} z = \frac{2(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+4)} \\ x = \frac{4u}{(u^2+v^2+4)} \dots (3) \\ y = \frac{4v}{(u^2+v^2+4)} \end{cases}$$

Les formules (3) appellent les remarques suivantes :

Si $u = v = 0$, alors $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, i.e. le pôle sud de la sphère S .

Si $(u^2 + v^2) \rightarrow \infty$, nous avons $(x, y, z) \rightarrow N = (0, 0, 2)$ qui n'est autre que le pôle nord de S .

Cette dernière limite permet d'adjoindre à \mathbb{C} un point, noté (∞) et appelé « point à l'infini », qui est l'image du point N par les équations notées (3).

La transformation T , qui à $(x, y, z) \in S$ associe $(u + iv) \in (\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$, est inversible, d'inverse :

$$\begin{array}{lcl} T^{-1} : & \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & S \\ & u + iv & \longmapsto & \begin{cases} z = \frac{2(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+4)} \\ x = \frac{4u}{(u^2+v^2+4)} \\ y = \frac{4v}{(u^2+v^2+4)} \end{cases} \\ & \infty & \longmapsto & (x, y, z) = N \end{array}$$

T est appelée " projection stéréographique " de la sphère S sur $\overline{\mathbb{C}}$, et $\overline{\mathbb{C}}$ est couramment désignée par " Sphère de Riemann ".

(Pour plus de détail consulter [2], [4] et [5]).

2.3 Conjugaison topologique des systèmes dynamiques

La notion de conjugaison topologique joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques, et en particulier des systèmes dynamiques holomorphes.

Définition 2.3.1 Soit $R : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une fonction continue, et considérons le système dynamique engendré par R . S'il existe L un homéomorphisme inversible $L : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tel que: $R_1 = L \circ R \circ L^{-1}$, on dira que les systèmes dynamiques $(\overline{\mathbb{C}}, N, R)$ et $(\overline{\mathbb{C}}, N, R_1)$ sont

conjugés topologiquement par la transformation L : Cette relation entre les deux systèmes dynamiques est illustrée par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}} \\ L \downarrow & & \downarrow L \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R_1} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

2.4 Intérêt de la conjugaison topologique

Soit z^* un point fixe de R , i.e $R(z^*) = z^*$: Pour $z = z^*$, on a:

$$(R_1 \circ L)(z) = (L \circ R)(z) \iff R_1(L(z^*)) = L(R(z^*))$$

Comme $R(z^*) = z^*$, donc $R_1(L(z^*)) = L(z^*)$: On conclut que $L(z^*)$ est un point fixe de R_1 .

D'autre part, si de plus L est un difféomorphisme, on a :

$$(R_1 \circ L)'(z) = (L \circ R)'(z) \iff R_1'(L(z))L'(z) = L'(R(z))R'(z)$$

Si on prend $z = z^*$, on obtient

$R_1'(L(z^*))L'(z^*) = L'(R(z^*))R'(z^*) \iff R_1'(L(z^*))L'(z^*) = L'(z^*)R'(z^*)$: comme $L'(z^*) \neq 0$ car L est un difféomorphisme, alors $R_1'(L(z^*)) = R'(z^*)$

Si l'on note $s(R, z^*)$ la quantité $|R'(z^*)|$ (appelée multiplicateur de R en z^*), on fait remarquer que $s(R, z^*) = s(R_1; L(z^*))$ i.e. que les points fixes z^* et $L(z^*)$ sont de même nature. Nous montrons de la même manière que cette égalité (de multiplicateurs) est aussi valable pour les cycles de R , cette égalité nous sera très utile dans le prochain chapitre.

Exemple 2.4.1 Soit $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ le système dynamique discret tel que :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

Posons : $L(z) = \sqrt{|a|}z + \frac{b}{3\sqrt{|a|}}$, il est clair que L est un homéomorphisme. Cherchons $Q(z) = (L \circ P \circ L^{-1})(z)$.

On a :

$$\begin{aligned} L^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto L^{-1}(w) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}w - \frac{b}{3\sqrt{|a|}} \end{aligned}$$

donc $Q(z) = (L \circ P) \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}z - \frac{b}{3\sqrt{|a|}} \right)$

Ainsi $Q(z) = \pm z^3 + pz + r$, où le signe de z^3 est le même que celui de a .

$$p = -\frac{b^2}{3a} + c \quad \text{et} \quad r = \sqrt{|a|} \left(\frac{b}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right)$$

Alors $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, P)$ et $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, Q)$ sont topologiquement conjugués par la transformation inversible L , et grâce à cette conjugaison, l'espace des paramètres passe de quatre (i.e: a, b, c et d) à deux (i.e: p et r) : l'étude de la dynamique de Q est bien plus simple que celle de P .

(Pour plus de détail consulter [1])

2.5 Dynamique des fonctions holomorphes

Définition 2.5.1 Une fonction $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est appelée fonction (ou fraction) rationnelle si

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{2.5.1}$$

où P et Q sont deux polynômes complexes sans un facteur commun. Le degré de R est le maximum des degrés de (P et Q).

L'intérêt pour les fractions rationnelles réside, en particulier, dans le fait que la transformée de Newton d'un polynôme complexe aussi une fonction rationnelle

(Pour plus de détail consulter [5])

Définition 2.5.2 Soit $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R)$ un système dynamique holomorphe engendré par une fraction rationnelle R .

Prenons un point $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, et considérons la suite $\{z_n\}$ définie par :

$$z_{k+1} = R^{k+1}(z_0) = R(z_k), \quad k \in \mathbb{N}$$

Cette suite est appelée l'orbite (future) de z_0 notée $O^+(z_0)$. L'orbite inverse de z_0 , notée $O^-(z_0)$, est l'ensemble

$$O^-(z_0) = \{w : \exists k \in \mathbb{N}, R^k(w) = z_0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{-k}\{z_0\}.$$

Le problème central de la dynamique holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ consiste à étudier la nature et la forme des différents types d'orbites $O(z_0)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, sous l'action d'une fraction rationnelle R de degré supérieur à un, ainsi que les variations subies par ces orbites lorsque le point z_0 varie.

Cela nous conduit à donner les définitions suivantes

Définition 2.5.3 Un point $a \in \overline{\mathbb{C}}$ est périodique de période $p > 1$ (ou p -périodique) s'il vérifie les deux relations

$$\begin{cases} R^p(a) = a \\ R^i(a) \neq a, \quad 1 \leq i < p. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Si $R(a) = a$, a est simplement appelé "point fixe" de R .

Définition 2.5.4 Si a est p -périodique, son orbite $O^+(a)$ est appelé aussi cycle d'ordre p (ou encore p -cycle) et on lui associe son multiplicateur μ défini par :

$$\mu = (R^p)'(a) = \prod_{i=0}^{p-1} R'(R^i(a)), \quad \text{avec } R^0 = Id_{\mathbb{C}} \quad (2.5.3)$$

localement, on a le développement suivant au voisinage de a

$$R^p(a) = a + \mu(z - a) + O(|z - a|^2). \quad (2.5.4)$$

(Pour plus de détail consulter [5])

Définition 2.5.5 On dit que le cycle a est

- répulsif si $|\mu| > 1$
- attractif (super attractif) si $0 < |\mu| < 1$ ($\mu \neq 0$)
- indifférent rationnel si $\mu = \exp(2i\pi m/n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$
- indifférent irrationnel si $\mu = \exp(2i\pi\theta)$; θ irrationnel

2.6 Un exemple important de fraction rationnelle

Nous traitons maintenant un type particulier de fractions rationnelles holomorphes, de degré un : les transformations de Möbius. On les utilise fréquemment pour construire des systèmes dynamiques typologiquement conjugués.

2.6.1 Les transformations de Möbius

La transformation de Möbius est la fonction rationnelle de la forme

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

On peut facilement vérifier que

$$\begin{cases} R(\infty) = \frac{a}{c}, R(-\frac{d}{c}) = \infty, \text{ si } c \neq 0 \\ R(\infty) = \infty, \text{ si } c = 0 \end{cases}$$

La transformation de Möbius est une classe de fonctions pour laquelle il est possible de calculer explicitement les itérations successives.

Par exemple, si $a = 3, b = -2, c = 2$ et $d = -1$, on a

$$R(z) = \frac{3z - 2}{2z - 1}$$

Alors, on montre aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$R^n(z) = \frac{(2n+1)z - 2n}{2nz - (2n-1)} = 1 + \frac{z-1}{2nz - (2n-1)}$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$R^n(z) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

Malgré cette convergence, le point $z^* = 1$ n'est pas un point fixe attractif. Puisque $R'(z^*) = 1$, quelques calculs montrent que pour $z_0 = 1 - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit, la suite $z_{n+1} = R(z_n)$ commence par s'éloigner du point 1. Cependant, elle finit par retourner vers celui-ci.

En général, toute transformation de Möbius R possède deux points fixes z_1, z_2 distincts (dont l'un peut être le point à l'infini), ou un seul point fixe double.

(Pour plus de détail consulter [5])

Application de la méthode de newton à un polynôme complexe de degré deux

A travers ce chapitre, on mène une étude sur la dynamique de la transformée de Newton d'un polynôme de degré deux. Cette étude concerne aussi bien la détermination des points fixes (de module fini ou non) que la localisation des bassins d'attraction des points fixes attractifs.

3.1 Traitement du cas du point à l'infini

3.1.1 point à l'infini

Dans ce paragraphe, on va définir, dans le cas où l'infini est un point fixe d'une fonction rationnelle, ce qu'est le multiplicateur de cette fraction en ce point particulier.

Soit $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle telle que

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha z^r + \beta(z)}{\gamma z^m + \lambda(z)}$$

où

$$\alpha = a_0, \beta(z) = a_1 z^{r-1} + a_2 z^{r-2} + \dots + a_{r-1} z + a_r$$

$$\gamma = b_0 \text{ et } \lambda(z) = b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_{m-1} z + b_m$$

avec : $\alpha\gamma \neq 0$ et $r > m$ (pour que le point à l'infini soit point fixe de R)

Posons $L(z) = \frac{1}{z} = L^{-1}(z)$ pour nous ramener de l'infini vers 0, et $R_1 = L \circ R \circ L^{-1}$ (i.e.

R est conjuguée topologiquement à R_1)

On a $R_1(z) = (L \circ R \circ L^{-1})(z) = L((R \circ L^{-1})(z))$, Comme le point à l'infini est point fixe de R , alors 0 est point fixe de R_1 car $L(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} L(z) = 0$.

Si l'on note $U(z) = (R \circ L^{-1})(z)$, alors

$$\begin{aligned} U(z) &= R\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{\alpha \frac{1}{z^r} + \beta(z)}{\gamma \frac{1}{z^m} + \lambda(z)} \end{aligned}$$

On obtient :

$$U(z) = \frac{\frac{\alpha + \beta(z)z^r}{z^r}}{\frac{\gamma + \lambda(z)z^m}{z^m}} = \frac{\alpha + \beta(z)z^r}{\gamma + \lambda(z)z^m} \frac{1}{z^{r-m}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} R_1(z) &= L(U(z)) \\ R_1(z) &= z^{r-m} \frac{\gamma + \lambda(z)z^m}{\alpha + \beta(z)z^r} = \frac{\lambda(z)z^r + \gamma z^{r-m}}{\alpha + \beta(z)z^r} \end{aligned}$$

Calcul des multiplicateurs de R au point à l'infini et de R_1 en 0

Pour calculer les multiplicateurs de R au point à l'infini $s(R, \infty)$ et de R_1 au point zéro $s(R_1, 0)$, on s'intéressera au seul cas où : $r = (m + 1)$ (**Pour plus de détail consulter [1]**)

(i) calcul de $s(R_1, 0)$

On a $s(R_1, 0) = |R_1'(0)|$, d'autre part

$R_1'(z) = \left(\frac{\lambda(z)z^r + \gamma z^{r-m}}{\alpha + \beta(z)z^r}\right)'$, en remplaçant r par $(m + 1)$ et en calculant la dérivée, on

obtient :

$$R_1'(z) = \left(\frac{\lambda(z)z^{m+1} + \gamma z}{\alpha + \beta(z)z^{m+1}}\right)$$

Et en développant, on obtient que:

$$\begin{aligned}
 R_1'(z) &= \frac{(\lambda'(z)z^{m+1} + (m+1)\lambda(z)z^m + \gamma)(\alpha + \beta(z)z^{m+1})}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &\quad - \frac{(\beta'(z)z^{m+1} + (m+1)\beta(z)z^m)(\lambda(z)z^{m+1} + \gamma z)}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &= \frac{\lambda'(z)\beta(z)z^{2(m+1)} + \alpha\lambda'(z)z^{m+1} + (m+1)\lambda(z)\beta(z)z^{2m+1}}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &\quad + \frac{\alpha(m+1)\lambda(z)z^m + \gamma\beta(z)z^{m+1} + \gamma\alpha - \beta'(z)\lambda(z)z^{2(m+1)}}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &\quad - \frac{\gamma\beta'(z)z^{m+2} + (m+1)\beta(z)\lambda(z)z^{2m+1} + (m+1)\gamma\beta(z)z^{m+1}}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2}
 \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
 R_1'(z) &= \frac{(\lambda'(z)\beta(z) - \lambda(z)\beta'(z))z^{2(m+1)} - \gamma\beta'(z)z^{m+2} + \gamma\alpha}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &\quad + \frac{(\alpha\lambda'(z) + \gamma\beta(z) - (m+1)\gamma\beta(z))z^{m+1} + \alpha(m+1)\lambda(z)z^m}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &= \frac{(\lambda'(z)\beta(z) - \lambda(z)\beta'(z))z^{2(m+1)} - \gamma\beta'(z)z^{m+2}}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2} \\
 &\quad + \frac{\alpha\lambda'(z) - m\gamma\beta(z)z^{m+1} + \alpha(m+1)\lambda(z)z^m + \gamma\alpha}{(\alpha + \beta(z)z^{m+1})^2}
 \end{aligned}$$

On tire enfin que : $R_1'(0) = \frac{\gamma\alpha}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$, donc le multiplicateur de R_1 à l'origine est :

$$s(R_1, 0) = \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right|$$

Dans ce cas, si $\left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| < 1$, le zéro est attractif, si $\left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| > 1$ l'origine est répulsif, et il est indifférent si $\left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| = 1$.

(ii) calcul de $s(R, \infty)$

$$\text{on a } R(z) = \frac{\alpha z^r + \beta(z)}{\gamma z^m + \lambda(z)} = \frac{\alpha z^{m+1} + \beta(z)}{\gamma z^m + \lambda(z)}$$

$$R'(z) = \left(\frac{\alpha z^{m+1} + \beta(z)}{\gamma z^m + \lambda(z)} \right)'$$

d'où :

$$= \frac{(\alpha(m+1)z^m + \beta'(z))(\gamma z^m + \lambda(z))}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2} - \frac{(\alpha z^{m+1} + \beta(z))(m\gamma z^{m-1} + \lambda'(z))}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2}$$

$$= \frac{\alpha(m+1)\gamma z^{2m} + \alpha\lambda(z)(m+1)z^m + \gamma\beta'(z)z^m + \lambda(z)\beta'(z)}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2} \\ - \frac{\alpha\gamma m z^{2m} + \alpha\lambda'(z)z^{m+1} + \beta(z)m\gamma z^{m-1} + \beta(z)\lambda'(z)}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2}$$

Ordonnons le numérateur par degré décroissant, on trouve:

$$R'(z) = \frac{\alpha\gamma z^{2m} - \alpha\lambda'(z)z^{m+1} + (\alpha\lambda(z)(m+1) + \gamma\beta'(z))z^m}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2} \\ - \frac{\beta(z)m\gamma z^{m-1} - (\beta'(z)\lambda(z) + \beta(z)\lambda'(z))}{(\gamma z^m + \lambda(z))^2}$$

Donc $(R'(z))|_{z=\infty} = \frac{\alpha\gamma z^{2m}}{\gamma^2 z^{2m}}|_{z=\infty} = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Comme signalé en (section 2.4), on a donc : $s(R, \infty) = s(R_1, 0) = \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma}}\right|$, et on écrira dorénavant que $s(R, \infty) = \frac{1}{|R'(\infty)|}$

En ce qui concerne les multiplicateurs de R , on adoptera alors la convention importante suivante:

(Pour plus de détail consulter [1]).

3.1.2 convention:

si z^* est un point fixe d'une fraction rationnelle complexe R , alors le multiplicateur de R en z^* sera pris égal à:

$$s(R, z^*) = \begin{cases} |R'(z^*)| & \text{si } z^* \text{ est fini} \\ \frac{1}{|R'(z^*)|} & \text{si } z^* = \infty \end{cases}$$

3.1.3 Application à la méthode de Newton

Dans notre cas, R est la transformée de Newton d'un polynôme complexe de degré 2, en abrégé $TN(P)$, on a : $r = 2$ et $m = 1$, c.à.d ($r = m + 1$).

Considérons le polynôme quadratique :

$$P(z) = \delta(z - z_1)(z - z_2) = \delta(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1.z_2); \delta \neq 0 \text{ et } z_1 \neq z_2$$

$$\text{Alors : } TN(P)(z) = R(z) = \frac{z^2 - z_1.z_2}{2z - (z_1 + z_2)}$$

admet z_1, z_2 comme points fixes, de plus, on sait (voir pour cela section 1.3.2), que $s(R, z_1) = s(R, z_2) = 0$.

On remarque que le point à l'infini est aussi point fixe de R

Calcul des multiplicateurs de R au point à l'infini et de R_1 en 0

(i) calcul de $s(R_1, 0)$

avec les notations de la précédente section, on a :

$$R_1(z) = \frac{2z - (z_1 + z_2)z^2}{1 - (z_1 \cdot z_2)z^2} \quad (*)$$

d'où

$$R'_1(z) = \frac{2 + 2(z_1 \cdot z_2)z^2 - 2(z_1 + z_2)z}{(1 - (z_1 \cdot z_2)z^2)^2}$$

le multiplicateur $s(R_1, 0) = R'_1(0) = 2 > 1$, le zéro est par conséquent répulsif

(ii) calcul de $s(R, \infty)$

on a $R(z) = \frac{z^2 - z_1 \cdot z_2}{2z - (z_1 + z_2)}$, ceci nous donne

$$R'(z) = \frac{2z^2 - 2z(z_1 + z_2) + 2(z_1 \cdot z_2)}{(2z - (z_1 + z_2))^2}$$

$R'(\infty) = \frac{1}{2}$, on a donc : $s(R, \infty) = s(R_1, 0) = 2 = \frac{1}{2}$, d'où le résultat :

la $TN(P)(z)$ où P est un polynôme de degré 2, admet le point à l'infini comme point fixe répulsif, sachant que les racines de P sont des points fixes super-attractifs.

Définition 3.1.1 Soit $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la transformée de Newton d'un polynôme quadratique complexe, et z^* un point fixe de R .

On appelle bassins d'attraction de z^* , l'ensemble :

$$B(z^*) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} R^n(z) = z^*\}$$

3.2 bassins d'attraction et médiane

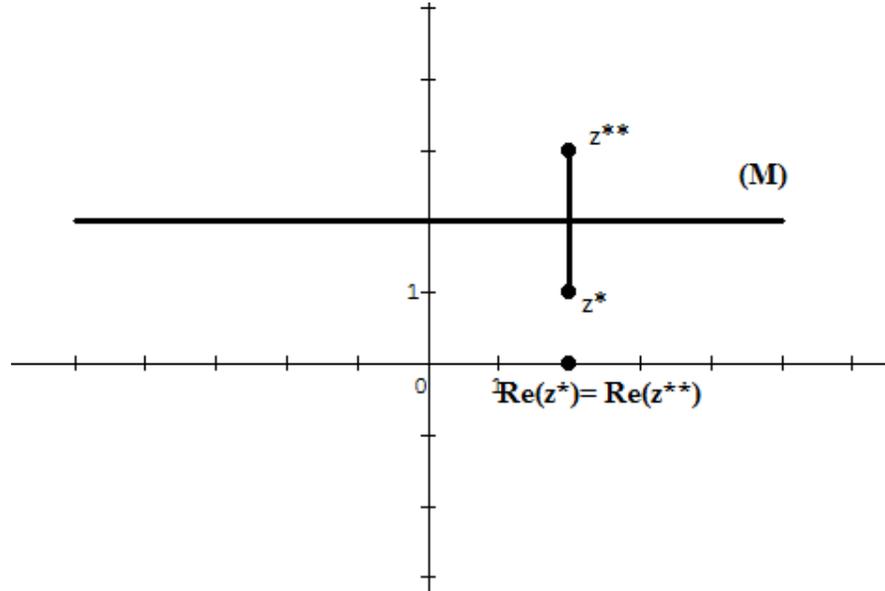
On vient de voir que les racines z^* et z^{**} d'un polynôme quadratique complexe P sont des points fixes super-attractifs de la $TN(P)$. Dans cette section, on s'intéresse à leurs bassins d'attraction respectifs

3.2.1 l'équation de la droite qui joint z^* et z^{**}

soit $y = ax + b$, l'équation de la droite qui joint z^* et z^{**} .

On souligne ici que si $\operatorname{Re}(z^*) = \operatorname{Re}(z^{**})$, la droite cherchée, voir la figure ci-dessous, est restreinte à la verticale paramétrisée par les points de l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} / z = \operatorname{Re}(z^*) + it, \operatorname{Im}(z^*) \leq t \leq \operatorname{Im}(z^{**})\}.$$



Posons :
$$\begin{cases} z^* = x_1 + iy_1 \\ z^{**} = x_2 + iy_2 \end{cases}$$
 on a, pour $x_1 \neq x_2$:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z^*) = a(\operatorname{Re}(z^*)) + b & (1) \\ \operatorname{Im}(z^{**}) = a(\operatorname{Re}(z^{**})) + b & (2) \end{cases}$$

en soustrayant les deux équations (1) et (2), on trouve que :

$$\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**}) = a(\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**}))$$

d'où le coefficient directeur a :

$$a = \frac{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})}{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})} \quad (3)$$

puis, on remplace cette valeur de a dans l'équation (1) :

$$\operatorname{Im}(z^*) = \left(\frac{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})}{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})} \right) \operatorname{Re}(z^*) + b$$

donc le coefficient b est donné par

$$\begin{aligned} b &= \operatorname{Im}(z^*) - \left(\frac{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})}{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})} \right) \operatorname{Re}(z^*) \\ &= \frac{\operatorname{Im}(z^*)(\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})) - (\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})) \operatorname{Re}(z^*)}{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})} \end{aligned}$$

ou encore :

$$b = \frac{\operatorname{Re}(z^*) \operatorname{Im}(z^{**}) - \operatorname{Re}(z^{**}) \operatorname{Im}(z^*)}{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}$$

3.2.2 Sur la médiane de la droite $[z^*, z^{**}]$

Notons maintenant par $y = \alpha x + \beta$, l'équation de la médiane (M), qui passe donc par le point milieu $C = \left(\frac{\operatorname{Re}(z^*) + \operatorname{Re}(z^{**})}{2}, \frac{\operatorname{Im}(z^*) + \operatorname{Im}(z^{**})}{2} \right)$ du segment de droite $[z^*, z^{**}]$

(i) la pente de la médiane (M) est le symétrique de l'inverse de la pente (voir équation (3)) de la droite qui joint z^* à z^{**} , i.e. que :

$$\alpha = - \frac{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})}$$

notons que si $\operatorname{Re}(z^*) = \operatorname{Re}(z^{**})$, la valeur de α est nulle. et $\beta = \frac{\operatorname{Im}(z^*) + \operatorname{Im}(z^{**})}{2}$.

(ii) on remplace α dans l'équation de la médiane (M), on trouve que

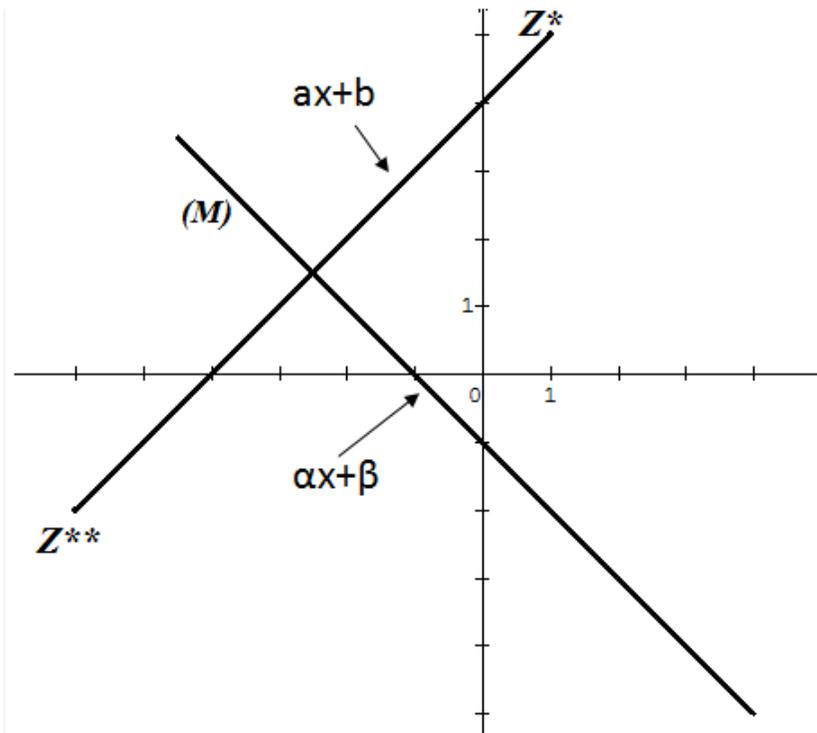
$$y = - \frac{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} x + \beta$$

et comme la médiane passe par le point C , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Im}(z^*) + \operatorname{Im}(z^{**})}{2} &= \left(- \frac{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} \right) \frac{\operatorname{Re}(z^*) + \operatorname{Re}(z^{**})}{2} + \beta \\ \beta &= \frac{\operatorname{Im}(z^*) + \operatorname{Im}(z^{**})}{2} + \left(\frac{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} \right) \frac{\operatorname{Re}(z^*) + \operatorname{Re}(z^{**})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\operatorname{Im}(z^*) + \operatorname{Im}(z^{**}))(\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})) + (\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**}))(\operatorname{Re}(z^*) + \operatorname{Re}(z^{**}))}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} \right] \end{aligned}$$

et finalement :

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{(\operatorname{Im}(z^*))^2 - (\operatorname{Im}(z^{**}))^2 + (\operatorname{Re}(z^*))^2 - (\operatorname{Re}(z^{**}))^2}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} \right]$$



la médiane et donc l'ensemble :

$$(M) = \left\{ z = (x + iy) \in \mathbb{C}, y = \alpha x + \beta; \alpha = -\frac{\operatorname{Re}(z^*) - \operatorname{Re}(z^{**})}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})}, \beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{Im}(z^*)^2 - \operatorname{Im}(z^{**})^2 + \operatorname{Re}(z^*)^2 - \operatorname{Re}(z^{**})^2}{\operatorname{Im}(z^*) - \operatorname{Im}(z^{**})} \right] \right\}.$$

3.2.3 Invariance de (M) par la transformée de Newton R

Le but, dans cette partie, est de prouver que la médiane (M) est invariante par la fraction rationnelle R, représentant la transformée de Newton du polynôme

$$P(z) = \delta(z - z^*)(z - z^{**}), \text{ i.e : } \forall z \in (M) \quad R(z) \in (M) \text{ où}$$

$$R(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Sans perte de généralité, et pour simplifier les calculs, on se ramène au cas suivant:

$$\begin{cases} P(z) = z^2 - 1, \text{ avec } z^* = -z^{**} = 1 \\ \text{et } (M) = \{z = iy, y \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

$$z \in (M) \implies \exists y \in \mathbb{R} / z = iy$$

$$R(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z}, z \neq 0 \quad (*)$$

si $z = iy$, on remplace z dans l'équation (*) :

$$R(iy) = \frac{(iy)^2 + 1}{2(iy)}$$

soit $w = R(iy)$, alors:

$$w = \frac{1 - y^2}{i(2y)} = i \frac{y^2 - 1}{2y}$$

on prend $t = \frac{y^2 - 1}{2y} \in \mathbb{R}$, alors:

$$w = it \in (M)$$

la médiane est bien invariante par R .

Afin de montrer l'importance de (M) , dans l'étude du comportement itératif de R on va introduire, ci-après, une nouvelle fraction qui fait appel à l'importante notion de conjugaison topologique de systèmes dynamiques.

3.3 Un système conjugué à R

Considérons $P : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, le polynôme quadratique complexe précédent : $P(z) = z^2 - 1$. On rappelle que ce polynôme a été choisi en remplacement de $P(z) = \delta(z - z^*)(z - z^{**})$.

En appliquant la transformée de Newton à R , on a trouvé que

$$R(z) = TN(P)(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad z \neq 0$$

On fait remarquer que $(z = 0) \in (M)$ et est l'antécédent du point fixe à l'infini.

Les points fixes de P sont $-1, 1$, et le point à l'infini; et comme signalé précédemment, la nature de ces points fixes est:

$$\left. \begin{array}{l} s(R, \infty) = 2 > 1 \quad , \text{ ce point est donc repulsif} \\ s(R, -1) = 0 \quad , \text{ superattractif} \\ s(R, 1) = 0 \quad , \text{ superattractif} \end{array} \right\} \text{ par le biais de l'homéomorphisme}$$

$$L(z) = \frac{1}{z}.$$

Posons $L: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, le difféomorphisme suivant de $\overline{\mathbb{C}}$, $L(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$;

On a : $L(1) = 0$, $L(-1) = \infty$, et $L(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} L(z) = 1$.

A l'aide de L , construisons $R_1 = L \circ R \circ L^{-1}$, la fraction conjuguée topologiquement à R :

(i) le calcul de L^{-1} donne l'expression

$$\begin{aligned} L^{-1} : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{z+1}{1-z} \end{aligned}$$

(ii) calculons R_1 , la fraction topologiquement conjuguée à R :

$$R_1(\mathbf{z}) = (L \circ R \circ L^{-1})(\mathbf{z})$$

en développant, on trouve que

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{z}) &= L\left(R\left(\frac{\mathbf{z} + \mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{z}}\right)\right) \\ &= L\left(\frac{z^2 + 1}{1 - z^2}\right) \\ R_1(\mathbf{z}) &= \mathbf{z}^2 \end{aligned}$$

(consulter [4]) pour d'avantage d'explications sur cette conjugaison topologique.

3.4 Dynamique du système $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R_1)$

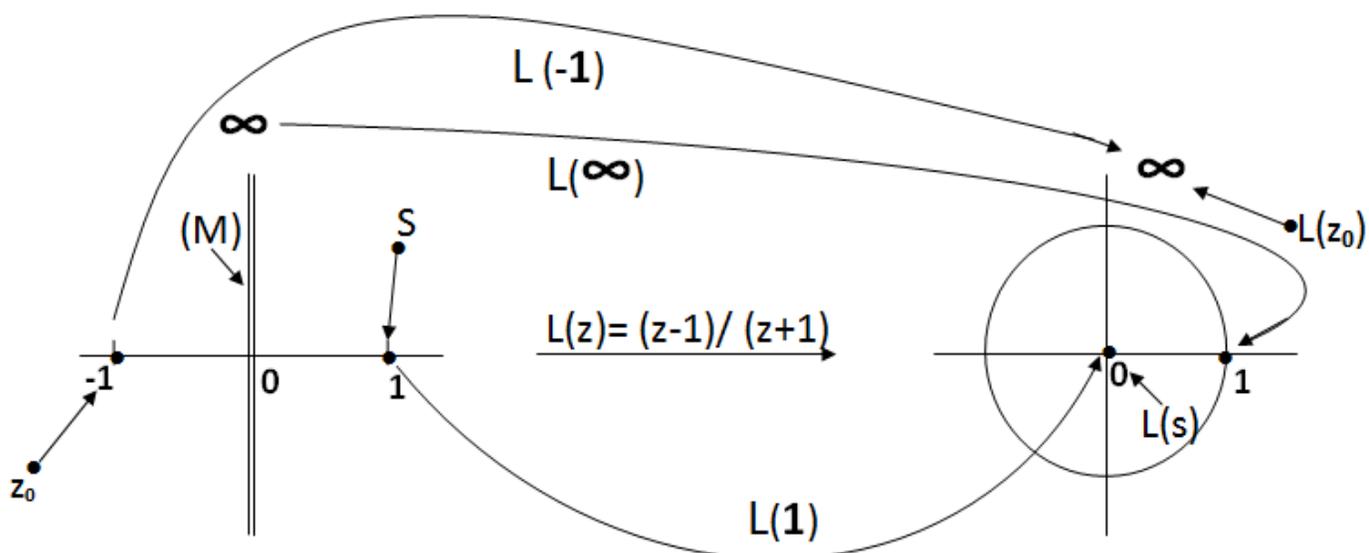
R_1 admet , conformément à la conjugaison topologique de R_1 avec R , $z_1 = 0 = L(1)$, $z_2 = 1 = L(\infty)$, et $z_3 = \infty = L(-1)$ comme points fixes. Ils sont respectivement attractif, repulsif, et attractif.

on constate que:

- si $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < 1$, alors $R_1^k(z_0) = z_0^{2^k} \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow \infty$.
- si $|z_0| > 1$, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} / z_{k+1} = R_1(\mathbf{z}_k) \longrightarrow \infty$ lorsque $k \longrightarrow \infty$.
- si $|z_0| = 1$, c.a.d: $z_0 = \exp(i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, donc $|z_k| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

d'où l'invariance du cercle unité $\zeta(0, 1)$ par R_1 : autrement dit, ζ constitue la frontière entre les bassins d'attractions de l'origine et du point à l'infini.

On a donc le schéma général suivant, qui illustre la conjugaison topologique précédente entre les systèmes dynamiques $(\mathbb{C}, \mathbb{N}, R)$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{N}, R_1)$.



3.5 Correspondance entre les deux systèmes dynamiques

Nous cherchons, ci-après, les image par L , des ensembles (points fixes de R et médiane (M)).

soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $z = it \in (M)$,

$$L(z) = \frac{it - 1}{it + 1}$$

Calculons le module de $L(z)$, on a

$$|L(z)| = \left| \frac{it - 1}{it + 1} \right| = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} = 1$$

en d'autres termes, les points de la médiane (M) sont transformés, par L , en des points sur le cercle unité.

Prenons maintenant un point $s = a + ib$, avec $a > 0$.

Le complexe s est situé à droite de la médiane (M) , voir la figure ci-dessus, évaluons son module et comparons-le à l'unité

$$L(s) = \frac{(a-1) + ib}{(a+1) + ib}, \quad a > 0$$

On constate que:

$$|L(s)| = \left| \frac{(a-1) + ib}{(a+1) + ib} \right| = \frac{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}}{\sqrt{(a+1)^2 + b^2}}$$

est inférieur à 1 si :

$$(a-1)^2 + b^2 < (a+1)^2 + b^2$$

donc

$$a^2 - 2a + 1 < a^2 + 2a + 1$$

c.a.d que l'on doit avoir :

$$a > 0$$

Observations

(i) Pour que le module de $L(s = a + ib)$ soit donc inférieur à l'unité, il faut et il suffit que $a = \text{Re}(s)$ soit positif; le demi plan $\{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) > 0\}$ est par conséquent transformé, par L , en $\widehat{\zeta(0,1)}$ (intérieur du cercle unité).

(ii) De même, le module de $L(s)$ est supérieur à l'unité, en module, si et seulement si $\text{Re}(s)$ est négatif.

Notre étude peut être alors résumée par le tableau suivant, en tenant compte de la conjugaison topologique des deux systèmes dynamiques $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R)$ et $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R_1)$ par le biais de L

Ensemble dans le plan de phases du système $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R)$	Son image par L dans le plan de phases du système $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{N}, R_1)$
$u = -1$ $v = 1$ $w = \infty$	$L(u) = \infty$ $L(v) = 0$ $L(w) = 1$
la médiane (M) $\text{Re}(z) > 0$ $\text{Re}(z) < 0$	Circonférence de $\zeta(0,1)$ $\widehat{\zeta(0,1)}$ $ z > 1$

3.6 Convergence de la fraction R

Soit $s \in \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$, cherchons la limite, quand $k \rightarrow \infty$, de la suite $(R^k(s))_{k \in \mathbb{N}}$.

D'après la conjugaison topologique entre les systèmes engendrés par R et R_1 , on a : $R_1 \circ L = L \circ R$. En fait, on montre par récurrence, sur $k \in \mathbb{N}^*$, que: $R_1^k \circ L = L \circ R^k$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_1^k(L(s)) = L(R^k(s))$.

Mais d'après la section précédente, on a : $L(s) \in \widehat{\zeta(0,1)}$, et donc (en vertu du comportement de R_1 voir section 3.4) $R_1^k(L(s))$ converge vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$

or $L(1) = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} L(R^k(s)) = L(\lim_{k \rightarrow \infty} R^k(s))$, car L est un homéomorphisme d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^k(s) = 1$$

On montre de même que si $\operatorname{Re}(s) < 0$, la limite de $R^k(s)$ tend vers -1 ; et par conséquent, la médiane (M) sépare les bassins d'attractions des deux points fixes (superattractifs) de la fraction (transformée de Newton) R .

3.7 Résumé du comportement itératif de la transformée de newton d'un polynôme de degré deux

Soit $P(z) = \delta(z - z_1)(z - z_2)$, $\delta \neq 0$ et $z_1 \neq z_2$, un polynôme quadratique complexe. Alors, on a montré que le système engendré par la

$$TN(P)(z) = R(z) = \frac{z^2 - z_1.z_2}{2z - (z_1 + z_2)}$$

possède la dynamique suivante :

- si $z_0 \in (M)$, médiane de la droite joignant z_1 a z_2 , alors $R(z_0) \in (M)$, car (M) est invariante (section 3.2.3)
- si $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (M)$, tel que z_0 appartient au demi-plan délimité par (M) et contenant z_1 (respectivement z_2) alors : $R^k(z_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_1$ (respectivement z_2).

3.8 Cas de polynôme de degré au moins trois

Dans cette section, on illustre à travers un exemple de polynôme cubique Q , que la conclusion précédente n'est plus valable car la médiane (M) ne constitue pas une séparatrice des bassins d'attractions des racines de Q .

Prenons par exemple :

$$Q(z) = z^3 - 1$$

Les racines de Q sont : $z_1 = 1$, $z_2 = j = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $z_3 = \bar{j} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

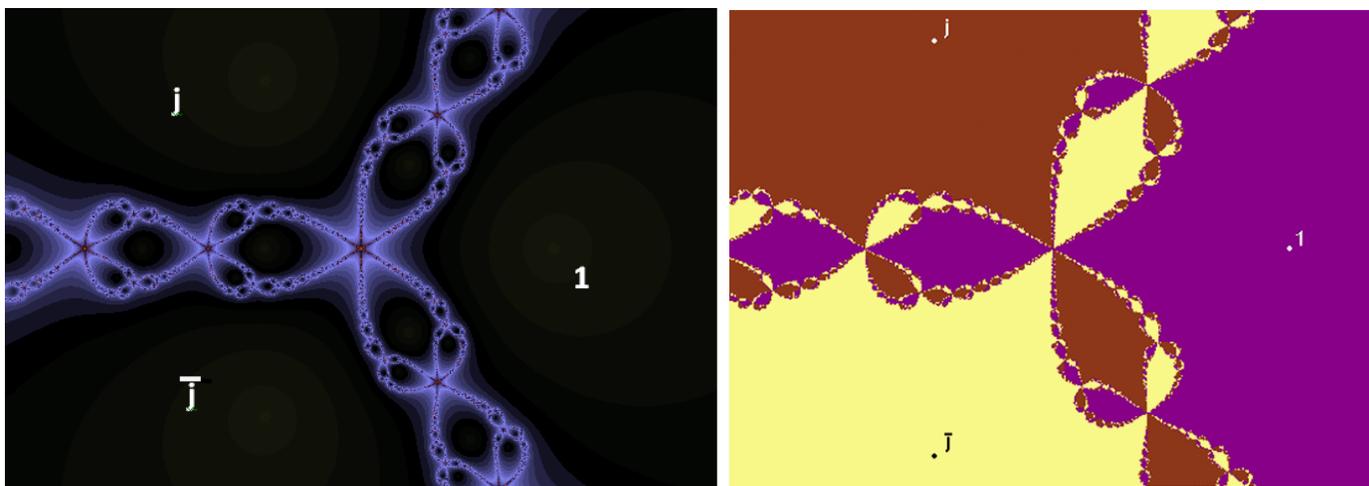
Sa transformé de Newton est donné par:

$$TN(Q)(z) = R(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}$$

Nous présentons ci-dessous les figures qui montre les différents bassins d'attractions de z_1 , z_2 , et z_3

(voir le site pour d'autres exemples et représentations graphiques).

La solution en image



La figure de gauche illustre la séparatrice (ou frontière) de trois bassins d'attractions des racines $(1, j, \bar{j})$, celle de droite montre (couleurs à l'appui) comment ces bassins s'impliquent en une structure self-similaire (dite aussi "fractale").

(**Pour plus de détail consulter [6].**)

Conclusion

L'objectif de ce travail est l'étude des systèmes dynamiques engendrés par l'itération de fractions rationnelles complexes, notamment celles issues de transformées de Newton de polynômes quadratiques.

Dans ce contexte, on a commencé par rappeler le principe général des méthodes itératives de type "point fixe", et plus particulièrement celui de la méthode de Newton-Raphson dans \mathbb{R} .

Cette méthode a l'avantage d'avoir un ordre de convergence quadratique, mais un de ses inconvénients est le choix du point de départ. En effet, des points de départ, même très proches, peuvent faire converger la méthode vers des limites différentes.

Ce fait nous a amené à transposer le domaine de recherche des points fixes, au champ complexe, auquel on a adjoint le point à l'infini.

On a vérifié que la transformée de Newton d'un polynôme quadratique (ayant deux racines distinctes), laisse invariante la médiane de ces racines.

Par le biais d'une conjugaison topologique convenablement choisie, on a ensuite remplacé le système dynamique initial, par un autre système dont l'étude de la dynamique est plus simple. Ce changement de systèmes nous a permis de montrer que la médiane constitue la frontière des bassins d'attractions des points fixes de la transformée de Newton du polynôme quadratique.

Quand cette dernière est appliquée aux polynômes de degré supérieur ou égal à trois, la frontière des bassins d'attractions de leurs racines respectives a une structure géométrique très différente de celle d'une médiane : de tels systèmes dynamiques sont actuellement l'objet de nombreuses recherches.

Bibliographie

- [1] A. Boulkroune, Ensembles invariants de fractions rationnelles complexes : Une étude algorithmique et numérique, Diplôme de Magister en Mathématique, Université Abderahmane Mira de Béjaïa, 2005.
- [2] H.O. Peitgen, H. Jurgens, D. Soupe, Chaos and Fractals, Springer-verlag (New York), 1992.
- [3] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sciences, 2006.
- [4] R. A. Holmgren, A First course in Discrete Dynamical Systems, Springer-verlag (2nd edition), 1996 .
- [5] M. L. SAHARI, Sur la dynamique de quelques méthodes donnant les racines de polynômes, Thèse doctorat en Mathématique, Université Badji Mokhtar Annaba, 2011.
- [6] Site, > <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2008/08/30/10303555.html>