

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Béjaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en mathématiques**

Option : Analyse et Probabilités

Par

GOUSSEM Rahima

LASMI Razika

THÈME

Méthode de régularisation de Tikhonov et applications

Soutenu publiquement, le 30/06/2015 devant le jury composé de :

M ^r	BOUHMILA Fatah	M.C.A Univ Bejaia	Président.
M ^{me}	BECHIR Halima	M.C.A Univ Bejaia	Promotrice.
M ^{me}	TAS Saadia	Professeur Univ Bejaia	Examinatrice

Promotion : 2015/2016

Remerciment

Remerciements

Nous remercions notre promotrice M^{me}. BECHIR Halima, pour sa disponibilité et ses précieux conseils et motivations qui nous ont gardé sur le bon chemin afin de réaliser ce modeste travail durant l'évolution de notre mémoire .

Nous remercions également l'honorable jury pour avoir consentir à évaluer et à juger notre travail.

On tient a exprimer nos plus sincère remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques en particulier, ainsi que tous les enseignants pour les peines et les efforts qu'ils se sont donnés durant notre formation.

Nos sincères remerciements vont à tous les étudiants de Master 2 analyse et probabilité.

Nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du coeur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant notre reconnaissance et notre profonde gratitude durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à:

Mon père le plus beau et bon de tous les pères

Ma plus belle étoile qui puisse exister dans l'univers ma " Chère mère"

Ma très chère grand-mère que le Dieu la protège et la garde en bonne santé.

Mes chers frères: "Larbi et sa femme Fadila, Riaid"

Mes très chères sœurs: "Zohra, Nadjat, Radia, Karima, Lamia"

Mon meilleur ami: "Bilal"

Mes nièces "Inas, Abir, Tasnim, Aridj, Anfal, Belkasm"

Ma grande famille: mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Toutes mes amies en particulier "Lobna, Chahra, Lidia.

A celle avec qui j'ai partagé ce modeste travail: mon amie "Razika" et sa famille.

Tous les enseignants et les étudiants du département de mathématique en particulier notre promotion.

GOUSSEME Rahima

Dédicaces

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du coeur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant notre reconnaissance et notre profonde gratitude durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à:

Mon très chère père le plus beau et bon de tous les pères.

Ma plus belle étoile qui puisse exister dans l'univers ma " Très chère mère".

Mes chér frère: "Fares".

Mes très chères sœurs: "Salima et son epoux Abas, Fouzia et son epoux Hichame,Omana, Ikram"

Mes Anges:"Mohemed adem, iman, inas, serrine".

Ma grande famille: mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Toutes mes amies en particulier "Samra, Nada".

A celle avec qui j'ai partagé ce modeste travail: mon amie "Rahima" et sa famille.

Tous les enseignants et les étudiants du département de mathématique en particulier notre promotion.

LASMI Razika

Table des matières

1	Rappels d'analyse fonctionnelle	4
2	Méthode de Régularisation de Tikhonov et ses variantes	14
2.1	Problèmes inverses	14
2.1.1	Problèmes bien-posés et mal-posés	15
2.1.2	Exemples de problèmes mal-posés	16
2.2	méthode de régularisation	17
2.2.1	Méthode de régularisation de Tikhonov	18
2.2.2	Conditions de régularisation	19
2.2.3	Construction de la régularisation	20
2.2.4	Choix du paramètre de régularisation	31
2.3	Variantes de Tikhonov	32
2.3.1	Première variante de Tikhonov	33
2.3.2	deuxième variante de Tikhonov	33
3	Applications	35
3.1	Première application	35
3.1.1	Position du Problème	35
3.1.2	Conclusion	38
3.2	Deuxième application	38
3.3	Position du Problème	39
3.4	Méthode inverse de spécification de fonction avec régularisation	40
3.5	Modélisation des Transformations de Phases	43

3.6	Validation Numérique	44
3.6.1	Procédure de validation	44
3.6.2	Paramètres nécessaires au calcul	45
3.6.3	Calcul sans régularisation	45
3.6.4	Calcul avec régularisation	46
3.6.5	Influence du bruit de mesure de la température	49
3.7	conclusion	50

Introduction

La notion d'un problème inverse est apparue dans les discussions du mathématicien J.B Keller que deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

Les problèmes directs sont caractérisés par l'existence d'une solution unique qui est stable aux perturbations par rapport aux conditions initiales ou aux limites. Il est usuel d'appeler de tels problèmes directs, des problèmes bien posés. La notion d'un problème bien posé est formulée dans un article célèbre publié par Jacques Hadamard en 1902; Il a cru que les modèles mathématiques des phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

- L'existence d'une solution.
- L'unicité de la solution.
- La dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Un tel problème est dit bien posé. Un problème qui n'est pas bien posé est dit problème mal posé.

Notre objectif est de présenter la méthode de régularisation de Tikhonov, il est composé d'une introduction et de Trois chapitres. Dans le premier chapitre, on présente quelques notions et des résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert ,opérateur compact). Le second chapitre est consacré à la définition d'un prob-

lème inverse et quelques exemples, et puis on introduit une méthode directe s'appelée **la méthode de régularisation de Tikhonov** qui consiste à remplacer un problème mal posé par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La principale difficulté dans l'application de la régularisation de Tikhonov à un problème particulier, est la détermination du paramètre de régularisation, ensuite nous nous intéressons à deux variantes de Tikhonov telle que la première variante consiste à utiliser un contrôle différent pour la solution et la deuxième variante consiste à utiliser des itérations. Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à deux applications telles que dans la première application le problème est de calculer numériquement la dérivée d'une fonction. Dans la deuxième application une méthode inverse utilisant la technique de régularisation de Tikhonov est développée pour calculer la température et le flux de chaleur en surface d'un solide subissant un traitement thermique. Connaissant la température d'un point à l'intérieur du solide, le flux à la surface est estimé par un algorithme inverse qui tient compte de la non-linéarité du problème et surtout du terme source relatif aux transformations des phases générées lors du traitement thermique. Une validation numérique est effectuée sur le cas de l'acier XC42.

Notations

H	espace de Hilbert
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
T	opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert
T^*	l'opérateur adjoint de l'opérateur T
$\text{Im } T$	l'image de l'opérateur T
$\ker T$	le noyau de l'opérateur T
R_α	la régularisation
X_M	la classe correctrice
F^\perp	l'ensemble orthogonal de l'ensemble F
\overline{F}	l'ensemble fermeture de l'ensemble F
$\ \cdot \ $	la norme
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire
$K(E, F)$	l'ensemble des applications linéaires compacts
$\mathcal{L}(E, F)$	l'espace vectoriel des applications linéaires continues
B_E	la boule unité fermée $B_E = \{x \in E, \ x\ \leq 1\}$
$K(H)$	l'ensemble des opérateur compact sur H
P	projection
s.c.i	semi continue inférieurement

Rappels d'analyse fonctionnelle

Afin de simplifier la lecture de ce travail, cette partie du mémoire est consacrée à rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés définis sur les espaces de Hilbert.

Définition 1.0.1 *Soit H un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur H toute application $(.,.)$*

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow \mathbb{R}; \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que

1) $(.,.)$ est bilinéaire

$$\forall x_1, x_2, x, y, y_1, y_2 \in H; \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, y) = \beta_1 (x_1, y) + \beta_2 (x_2, y)$$

$$(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 (x, y_1) + \beta_2 (x, y_2)$$

2) $(.,.)$ est symétrique

$$\forall x, y \in H; (x, y) = (y, x)$$

3) (\cdot, \cdot) est défini positive

$$\forall x \in H, (x, x) = 0$$

Définition 1.0.2 On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Proposition 1.0.1 (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit H un espace préhilbertien

$\forall x, y \in H :$

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Démonstration. si $(x, y) = 0$ alors l'inégalité est toujours vraie

Supposons donc que $(x, y) \neq 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0$$

$$\Delta = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0$$

donc

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

■

Théorème 1.0.1 Dans un espace préhilbertien H , l'application

$\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbb{R},$ donnée par

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $x \in H$ est une norme pour H .

Démonstration. 1) $\forall x \in H$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x, x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

2) $\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} \\ &= \sqrt{\lambda(x, x)} \\ &= |\lambda| \|x\|\end{aligned}$$

3) $\forall (x, y) \in H$

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

d'où

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

La norme $\|\cdot\|$ ainsi définie s'appelle la norme induite par produit scalaire. ■

Définition 1.0.3 On appelle *espace de Hilbert* ou *hilbertien* tout espace préhilbertien complet.

Théorème 1.0.2 1) Soit H un espace de Hilbert et C une partie fermée et convexe de H alors :

$$\forall x \in H; \exists y \in C; \|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C .

2) Le point $y = P_C(x)$ est caractérisé par:

$$\forall z \in C; (x - y, z - y) \leq 0$$

Définition 1.0.4 On appelle *base hilbertienne* une suite (e_n) d'éléments de H tels que :

1)

$$\|e_n\| = 1 \forall n, (e_m, e_n) = 0 \quad \forall m, n, m \neq n.$$

2) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H .

Si (e_n) est une base hilbertienne alors tout $x \in H$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

avec

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Théorème 1.0.3 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Définition 1.0.5 *Soit H un espace de Hilbert. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont orthogonaux si*

$$(x, y) = 0.$$

On note

$$x \perp y$$

Définition 1.0.6 *Considérons deux ensembles A_1 et A_2 non vides d'un espace de Hilbert H . Nous disons que A_1 est orthogonal à A_2 , noté par $A_1 \perp A_2$, si pour tout $x \in A_1$ et pour tout $y \in A_2$ on a:*

$$x \perp y, \text{ c'est-à-dire } (x, y) = 0.$$

Proposition 1.0.2 1) *Si A est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert H , alors*

$$A^\perp = \{x; x \in H \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace linéaire fermé de H . A^\perp s'appelle le complément orthogonal de A .

2) $\overline{A}^\perp = A^\perp$

Démonstration. 1) Observons d'abord que $A^\perp \neq \emptyset$, puisque au moins $0 \in A^\perp$.

Soit $x_1, x_2 \in A^\perp, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $y \in A$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ et A^\perp est un sous-espace linéaire de H .

Soit maintenant $x_0 \in \overline{A^\perp}$, alors il existe une suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset A^\perp$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Nous avons pour $y \in A$.

$$(x_0, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = 0$$

donc $x_0 \in A^\perp$ et A^\perp est un sous-espace linéaire fermé.

2) comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A^\perp} \subset A^\perp$.

Soit maintenant $x \in A^\perp$. On veut montrer $x \in \overline{A^\perp}$.

Soit $y \in \overline{A}$, il existe une suite $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ tel que $y_n \rightarrow y$ dans H quand $n \rightarrow \infty$. Comme $(x, y_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit par continuité que $(x, y) = 0$.

Donc $x \in \overline{A^\perp}$. Ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A^\perp}$. ■

Théorème 1.0.4 Soient H un espace de Hilbert et F un s.e.v fermé de H . Alors :

1) $H = F \oplus F^\perp$

2) $F = (F^\perp)^\perp$

Théorème 1.0.5 Soient H un espace de Hilbert et F un s.e.v de H . Alors :

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

Démonstration. \overline{F} est un sous espace fermé de H . Le théorème précédent donne

$$H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp.$$

On a déjà vu que

$$F^\perp = \overline{F}^\perp,$$

on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp$$

D'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$$

■

Définition 1.0.7 Soient H un espace de Hilbert séparable et T un opérateur linéaire de H dans H . On appelle opérateur adjoint de T un opérateur T^* tel que

$$\forall (x, y) \in H^2, (Tx, y) = (x, T^*y)$$

D'autre part si $T^* = T$, on dit que T est un opérateur auto-adjoint.

Proposition 1.0.3 1) Tout opérateur linéaire continu de H a un adjoint et un seul.

2) $(T^*)^* = T$.

3) Si T est continue T^* est continue et $\|T\| = \|T^*\|$.

4) $(T + B)^* = T^* + B^*$ et $(TB)^* = B^*T^*$.

Théorème 1.0.6 Soient E et F deux espace de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors T^{-1} est continue de F dans E .

Soient E et F deux espaces de Banach

Définition 1.0.8 une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite compacte si l'image $T(B_E)$ par l'application T de la boule unité fermée B_E de l'espace E est **relativement compacte** (en norme) dans F .

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit sa norme (norme d'opérateur) par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup \{ \|T(x)\| : x \in B_E \}$$

Théorème 1.0.7 L'ensemble $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Démonstration. Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.

supposons que

$$(T_n) \in K(E, F), T \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \longrightarrow 0$$

Montrons que $T \in K(E, F)$.

Comme F est complet il suffit de vérifier que, pour tout $\epsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \epsilon)$ dans F .

On fixe n tel que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\epsilon}{2}$$

Comme $T_n(B_E)$ est relativement compact, $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$ avec I fini

Donc

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \epsilon)$$

Définition 1.0.9 On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de **rang fini** si:

$$\dim \text{Im}(T) < \infty$$

Un opérateur continue de **rang fini** est **compact**.

■

Corollaire 1.0.1 Soit (T_n) une suite d'opérateurs continus de **rang fini** de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \rightarrow 0$ alors $T \in K(E, F)$.

Proposition 1.0.4 Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons T compact; alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E convergeant faiblement vers 0 la suite $\|T(x_n)\| \rightarrow 0$.

Théorème 1.0.8 Soit E un espace de Banach. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $T \in K(E)$
2. $T^* \in K(E^*)$

Démonstration. Rappelons que T^* est défini grâce a la relation suivante :

$$\langle T^*x^*, x \rangle = \langle x^*, Tx \rangle$$

Pour tout $x^* \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi

$$\|T^*x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*x^*, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x^*, Tx \rangle|$$

■

Théorème 1.0.9 Avec

$$|\langle x^*, Tx \rangle| \leq \|x^*\| \|Tx\| \leq \|x^*\| \|T\| \|x\|$$

Ainsi nous avons

$$\|T^* x^*\| \leq \|x^*\| \|T\|.$$

ce qui prouve en particulier la continuité de T comme application linéaire de E dans E . De plus, on a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Dans le cadre dans un **espace de Hilbert**, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Définition 1.0.10 Soient H un espace de Hilbert séparable et T un opérateur linéaire défini dans H à valeurs dans H . T est compact si l'image par T de toute suite faiblement convergente est une suite convergente en norme.

Proposition 1.0.5 Soit $\mathcal{L}(H)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de H dans H .

1) L'ensemble des opérateurs compacts de H dans H est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H)$.

2) Si $T \in K(H)$ et $B \in \mathcal{L}(H)$, alors TB et BT sont des éléments de $K(H)$.

Définition 1.0.11 Soit T un opérateur linéaire défini dans un espace vectoriel E à valeurs dans un espace F .

On dit que T est inversible si pour tout y appartenant à $\text{Im } T$ l'équation

$$Tx = y$$

a une solution et une seule. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de T et se note T^{-1}

Théorème 1.0.10 Soit H un espace de Hilbert, T un élément de $\mathcal{L}(H)$ et T^* son adjoint.

Nous avons

$$H = \ker T \oplus \text{Im } T^*$$

Démonstration. Soit $x \in H$

$$\begin{aligned} x \in \ker T &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow (Tx, y) = 0, \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow (x, T^*y) = 0, \forall y \in H \Leftrightarrow (x, v) = 0 \forall v \in \text{Im } T^* \\ &\Leftrightarrow x \perp \text{Im } T^* \end{aligned}$$

comme

$$H = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$$

■

Théorème 1.0.11 Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et T un opérateur compact défini dans H à valeurs dans H alors:

Si T est inversible, T^{-1} n'est pas continu.

Démonstration. On suppose le contraire.

Donc $I = T T^{-1}$ est compact. Ce qui est équivalent à dire que la boule unité est compacte dans H pour la topologie de la norme. Par conséquent H est de dimension finie d'après le théorème de **F. Riesz**. ■

Théorème 1.0.12 Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et T un opérateur compact défini dans H à valeurs dans H .

$$\text{Im } T \neq H$$

Définition 1.0.12 Soit E un espace de Banach et J l'injection canonique de E , dans E'' on dit que E réflexif si

$$J(E) = E''.$$

(telle que E' le dual de E et E'' le bidual de E , bien le dual de E').

Définition 1.0.13 On dit qu'un espace métrique est **séparable** s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense

Définition 1.0.14 Soient X un espace topologique, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$ un point. La fonction est semi continue inférieurement (sci) en a si l'une de ces deux conditions équivalent est satisfaite :

- $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \inf f(x)$.
- Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V de a tel que $f(a) - \epsilon < f(V)$.

Elle est semi-continue supérieurement en a si $-f$ est semi continue inférieurement en a .

Méthode de Régularisation de Tikhonov et ses variantes

2.1 Problèmes inverses

Le problème inverse est un problème qui détermine des causes connaissant des effets. Ce problème est l'inverse d'un autre appelé direct qui détermine les effets, les causes étant connues.

L'étude des problèmes inverses est ardue et cela est dû à la possibilité d'avoir plusieurs solutions, car des causes différentes mènent aux même effets.

Des informations en plus sont nécessaires pour récupérer l'unicité de la solution.

Une autre difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, d'où le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème.

Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu. Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important

nous pouvons citer :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...);

- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir...);
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques).

2.1.1 Problèmes bien-posés et mal-posés

Définition 2.1.1 Soient X , Y deux espace de Hilbert et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire continu. L'équation

$$Tx = y$$

est dite **bien posée** si :

- La solution x existe pour tout y de Y (surjectivité de T);
- elle est unique (injectivité de T);
- T^{-1} est continue.

Dans le cas contraire, le problème est dit **mal-posé**.

Remarque 2.1.1 En dimension fini tout opérateur linéaire est continu, et tout problème linéaire admettant une unique solution est bien posé.

L'exemple suivant montre que ceci n'est plus vrai en dimension infinie.

Exemple 2.1.1 Soit $X = Y = L^2([-1, 1])$ et T l'opérateur d'intégration

$$\begin{aligned} T & : L^2([-1, 1]) \longrightarrow L^2([-1, 1]) \\ f & \longrightarrow \int_{-1}^z f(x)dx \end{aligned}$$

On à T est borné et donc continu, si on pose $f_n = \sqrt{n}(1-n|x|) \mathbb{1}_{|x| \leq \frac{1}{n}}$, alors $\|f_n\|^2 = \frac{2}{3}$ mais $\|T^{-1}f_n\| = 2n^2$.

Donc T^{-1} n'est pas borné ce qui implique que la différentiation est un problème mal posé.

2.1.2 Exemples de problèmes mal-posés

On présente ici quelques exemples simples de problèmes **mal-posés**.

En physique: identifier la conductivité thermique à partir de la température finale.

Exemple 2.1.2 *Les sondages sont des problèmes mal posé par nature. Pour connaître l'avis d'une population il est rare d'interroger l'ensemble de la population, sauf dans des cas où l'erreur est interdite (les présidentielles, référendum..). Seul un échantillon est prélevé pour représenter l'ensemble de la population. Il n'est pas rare en France de représenter 60 millions d'habitants avec 1000 personnes. Le fait d'extrapoler l'avis de quelques personnes est un problème inverse. Et il est par nature mal posé.*

Si l'échantillon ne contient que des doctorants, la représentation sera faussée. La connaissance à priori de la population (statut social, àge.....) est indispensable.

Nous sommes ici dans une approche type bayésienne où les statistiques sont essentielles. Dans ce cas, il peut être plus judicieux de prendre un nombre de personnes bien choisi que de prendre aléatoirement un plus grand nombre. Il s'agit donc d'un compromis entre quantité et qualité de l'information.

Exemple 2.1.3 *soit à résoudre le système:*

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On trouve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *prenons maintenant un second membre* Y_* *différent de* Y ,

$$\text{Soit } Y_* = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \text{ on vérifie alors que la solution de } AX = Y_* \text{ est } X = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

On remarque que de très petites perturbations sur Y , ont conduit à de grandes variations.

Dans cet exemple $\text{cond}(A) = 2984.0942$.

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique en partie la difficulté de prévoir certains phénomènes.

Exemple 2.1.4 $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x^2 + 1$

L'équation

$$P(x) = 0$$

n'admet pas de solution dans \mathbb{R} . Donc on a un problème d'existence, c'est un problème mal posé.

2.2 méthode de régularisation

Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé, de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité, pour cela l'académicien soviétique A.Tikhonov a reformulé en 1943 la définition d'un problème "correctement posé", élargissant ainsi la classe des problèmes bien posés, c'est-à-dire mathématiquement résolubles.

Selon Tikhonov le problème

$$Tx = y \tag{2.2.1}$$

est correctement posé s'il vérifie les conditions suivantes:

- 1) la solution du problème(2.2.1)existe et appartient à un ensemble donné a priori X_M inclus dans X pour une classe de données dans Y .
- 2) Cette solution est unique dans la classe X_M .
- 3) La solution est stable.

Dans le cas où le second membre y n'appartient pas à l'image de X_M par l'opérateur T ,cas de figure très fréquent vu que y est souvent le résultat de mesure en laboratoire, M.Lavrentiev a remplacé l'équation(2.2.1) par une autre équation "proche"

$$(T + \alpha I)x = u \quad (2.2.2)$$

qui est un problème stable pour des petites variations de y et est résoluble pour tout x dans Y , et ceci moyennant certaines hypothèses sur le paramètre numérique α et la classe de solution possibles X_M .

Pour régulariser un problème mal posé on fait appel à plusieurs méthodes: directes et itérative.

La méthode de Tikhonov est une méthode directe parce qu'elle donne (dans le cas d'un problème linéaire de dimension fini) la solution exacte du problème régularisé en un nombre fini d'opérateur. Pour des problèmes de taille modérée, elles sont les plus utilisées. La difficulté de ce type de méthodes est la détermination du paramètre de régularisation.

Dans ce chapitre, T désigne un opérateur linéaire continu d'une espace de Hilbert X dans un espace de Hilbert Y , et nous supposons que ce problème est mal posé, c'est-à-dire que T n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(X; Y)$.

2.2.1 Méthode de régularisation de Tikhonov

On considère le problème

$$Tx = y$$

L'idée précédente pour trouver la solution de l'équation (2.2.1), était de faire la régularisation c-à-d pour trouver la solution de l'équation (2.2.1) on trouve la solution d'une autre famille d'équations dépendantes d'un paramètre α telles que leurs solutions convergent vers la solution de l'équation (2.2.1), lorsque $\alpha \rightarrow 0$.

Définition 2.2.1 Soit $U(X)$ l'ensemble de tous les sous-espaces fermés dans X . R est continu en y^0 si:

$$\|y^0 - y\| \rightarrow 0 \Rightarrow d(Ry^0, Ry) \rightarrow 0$$

La famille des opérateurs continus R_α est dans le voisinage de TX_M .

$$R_\alpha : TX_M \rightarrow U(X)$$

R_α la régularisation de l'équation (2.2.1) dans X_M alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha T x = x \quad (2.2.3)$$

pour $x \in X_M$; où α est le paramètre de régularisation

2.2.2 Conditions de régularisation

On choisit un sous-ensemble $X_M \subset X$. X_M s'appelle "classe correctrice" s'il ya les deux conditions suivantes :

- La solution est unique dans X_M . i.e $Tx = Tx^0 \implies x = x^0 \forall x, x^0 \in X_M$
- La solution est stable. i.e $\|y - y^0\|_Y \longrightarrow 0 \implies \|x - x_0\|_X \longrightarrow 0$

Définition 2.2.2 Soit w une fonction telle que :

$$\|x - x_0\| \leq w(\|Tx - Tx^0\|_Y)$$

Cette relation s'appelle estimation de stabilité, en effet

$$\|Tx - Tx^0\| \longrightarrow 0 \implies w(\|Tx - Tx^0\|_Y) \longrightarrow 0 \implies \|x - x_0\|_X \longrightarrow 0$$

Proposition 2.2.1 Si X_M est compact et la solution unique alors cette solution est stable.

Démonstration. Supposons que la solution est unique. Comme X_M est compact:

$$T : X \longrightarrow Y$$

Et

$$X_M \subset X$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} T : X_M \longrightarrow T(X_M) \\ \text{et } X_M \text{ compact} \end{array} \right. \implies T(X_M) \text{ compact.}$$

Comme la solution est unique $\implies T$ est injective

Comme $T : X_M \longrightarrow T(X_M)$ est un opérateur surjectif, donc T est bijectif

$$\left\{ \begin{array}{l} X_M \text{ compact} \\ \text{et } T : X_M \longrightarrow T(X_M) \text{ continu} \implies T^{-1} \text{ continu} \\ \text{et } T \text{ bijectif} \end{array} \right.$$

$$\exists c > 0, tq : \|x - x^0\| \leq c\|Tx - Tx^0\| \Rightarrow \underbrace{\|x - x^0\|}_{\searrow 0} \longrightarrow 0$$

Donc la solution est stable sur X_M . ■

2.2.3 Construction de la régularisation

On dira que μ est la fonctionnelle de stabilisation de Tikhonov sur X_M si les conditions suivantes sont vérifiées:

- μ s.c.i sur X
- La partie $X_{M,\tau} = \{x \in X_M, \mu(x) \leq \tau\}$ est bornée dans $X, \forall \tau$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min (\|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)) \\ v \in X_M \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Proposition 2.2.2 *Le problème (2.2.4) est équivalent à*

$$(\alpha I + T^*T)x^\alpha = T^*y$$

Ce problème admet une solution unique x^α qui s'écrit sous la forme

$$x^\alpha = R_\alpha(y)$$

Telle que

$$R_\alpha = (\alpha I + T^*T)^{-1} T^*$$

Lemme 2.2.1 *Si $X_{M,\tau}$ est compact dans $X, \forall \tau. R_\alpha(y)$ solution du problème (2.2.4) existe et R_α est la régularisation.*

Démonstration. On pose

$$\begin{cases} x_0 \in X_M \\ \text{et } \tau = \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(x_0) \end{cases}$$

On a

$$X_0 = \left\{ \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \right\} \cap X_M = \left\{ v \in X_M, \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \right\} = X_{M, \frac{\tau}{\alpha}}$$

et $X_{M, \tau}$ compact. Donc $X_{M, \frac{\tau}{\alpha}}$ compact.

Soit

$$\phi(v, y) = \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$$

$\phi(v, y)$ semi-continu inférieurement dans X_0 et X_0 compact. Donc ϕ admet au moins un v_0 dans X_0 , tq:

$$\phi(v, y) \geq \phi(v_0, y); \forall v_0 \in X_0$$

$\phi(v, y)$ a un point minimum dans X_M .

On pose:

$$x(\alpha) = R_\alpha(y)$$

un ensemble des suites minimisantes de ϕ . L'ensemble de tous les points minimum est un ensemble ferme.

(I) On montre que $R_\alpha(y)$ est un ensemble ferme

Soit $v_n \in R_\alpha(y)$ tq:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_0$$

pour montre que $R_\alpha(y)$ est fermé on montre que $v_0 \in R_\alpha(y)$

$$v_n \in R_\alpha(y) \implies v_n \text{ un minimum où une solution du problème(2.2.4)}$$

Donc

$$\|Tv_n - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_n) \leq \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$$

\implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\|Tv_n - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_n)] \leq \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$$

Et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_0$$

Alors

$$\|Tv_0 - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_0) \leq \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \implies v_0 \in R_\alpha y$$

Donc $R_\alpha y$ est un ensemble fermé.

(II) On montre que R_α est continu par contradiction

Soit ■

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} y_k \longrightarrow y \\ \text{et } d(R_\alpha y_k, R_\alpha y) \succ \epsilon \end{array} \right. \\ \text{On a } d(R_\alpha y_k, R_\alpha y) \succ \epsilon & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(x_k, x) \succ \epsilon \\ \forall x_k \in R_\alpha y_k \text{ et } \forall x \in R_\alpha y \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_k \in X \\ \text{et } X_0 \text{ compact} \end{array} \right. \Rightarrow \{ \text{il existe une sous-suite extraite qui converge (vers } x_\infty) \} \\ & \Rightarrow x_k \longrightarrow x_\infty \Rightarrow \|x_k - x_\infty\| \prec \epsilon \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ continu par rapport à } y_k \\ \text{et } \phi \text{ sci par rapport à } x_\infty \end{array} \right. \Rightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \liminf \phi(x_k, y_k) \\ & \Rightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \liminf \phi(x_k, y_k) \leq \liminf \phi(v, y_k) = \phi(v, y) \end{aligned}$$

$$\phi(x_\infty, y_k) \leq \phi(v, y), \forall v \in X_0 \Rightarrow x_\infty \in R_\alpha y$$

Donc

$$\|x_k - x_\infty\| \succ \epsilon, \forall x_k \in R_\alpha y_k \text{ et } x_\infty \in R_\alpha y \quad (2.2.6)$$

Alors par (2.2.5)et(2.2.6) , on a la contradiction $\Rightarrow R_\alpha$ continu.

(III) On montre que $x(\alpha)$ convergente vers x quand $\alpha \longrightarrow 0$.c-à-d $R_\alpha y \longrightarrow 0$.avec :
 $\alpha_{\frac{1}{k}} \prec \frac{1}{k}, y = Tx, \alpha \longrightarrow 0$.Par contradiction On pose $x_k \in x(\alpha)$ tq

$$\|x_k - x\| \succ \epsilon$$

et on a

$$y = Tx.$$

$$\begin{aligned}
 x_k \in R_\alpha y_k &\Rightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \phi(x, y), \forall x \in X_0 \\
 \|Tx_k - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x_k) &\leq \|Tx - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x) \Rightarrow \\
 \|Tx_k - y\|_Y^2 &\leq \|Tx_k - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x_k) \leq \alpha_k \mu(x) \\
 &\Rightarrow \|Tx_k - y\|_Y^2 \leq \alpha_k \mu(x) \leq \frac{1}{k} \mu(x)
 \end{aligned}$$

Soit $X_* = \{v, v \in X_{M,\mu}(v) \leq \mu(x)\}$ compact. On a l'ensemble

$$X_{M,\tau} = \{v \in X_{M,\mu}(x) \leq \tau\} \text{ compact}$$

$$X_{M,\mu(x)} = \{v \in X_{M,\mu}(v) \leq \mu(x)\} \text{ compact}$$

Donc $X_* = X_{M,\mu(x)}$ compact. compact donc on peut extraire une suite x_k converge vers x_* .

Donc

$$\|x_k - x_*\| \prec \varepsilon \Rightarrow x_k \longrightarrow x_*$$

$$x_k \in R_\alpha y_k \Rightarrow \|x_k - x\| \succ \varepsilon \Rightarrow \liminf \|x_k - x\| \succ \varepsilon \Rightarrow \|x_* - x\| \succ \varepsilon \Rightarrow x_* \neq x,$$

et on a

$$\|Tx_k - Tx\|_Y^2 \leq \alpha_k \mu(x) \leq \frac{1}{k} \mu(x).$$

Alors

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|Tx_k - Tx\|_Y^2 \leq 0,$$

donc

$$\|Tx_* - Tx\|_Y^2 = 0,$$

T continu.

On aura

$$\begin{cases} x_* \neq x \\ \text{et } x_* = x \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction .}$$

Donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha y = x \Rightarrow R_\alpha$ la régularisation . Alors par (I), (II), (III) on a

$$\begin{cases} x(\alpha) = R_\alpha(y) \text{ exist et } R_\alpha \text{ continu} \\ \text{et } R_\alpha \text{ régularisation .} \end{cases}$$

Proposition 2.2.3 Soit $\phi(v, y) = \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$ est semi-continu inférieurement.

Démonstration. Soit

$$f(v) = \|Tv - y\|_Y^2$$

continue par rapport à v donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists v_0, \forall v \in V_0 \implies |f(v) - f(v_0)| \leq \epsilon$$

$$|f(v) - f(v_0)| \leq \epsilon \implies -\epsilon \leq f(v) - f(v_0) \leq \epsilon \implies f(v_0) - \epsilon \leq f(v) \leq \epsilon + f(v_0)$$

Donc

$$[\forall \epsilon > 0, \exists v_0, \forall v \in V_0 \implies f(v_0) - \epsilon \leq f(v)] \implies f \text{ est sci}$$

Alors f est sci par rapport à v . f et μ sci $\implies f + \mu$ sci

$$f \text{ sci} \implies \forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists V'_{v_0}, \forall v \in V'_{v_0} \implies f(v_0) - \epsilon' \leq f(v)$$

$$\mu \text{ sci} \implies \forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists V'_{v_0}, \forall v \in V'_{v_0} \implies \mu(v_0) - \epsilon' \leq \mu(v)$$

Donc

$$\begin{aligned} (f + \mu)(v_0) - \epsilon &= f(v_0) + \mu(v_0) - \epsilon \text{ tq } \epsilon' + \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= (f(v_0) - \epsilon') + (\mu(v_0) - \epsilon') \leq f(v) + \mu(v) \end{aligned}$$

On aura

$$\forall \epsilon > 0, \exists V_{v_0} = V'_{v_0} \cup V'_{v_0}, \forall v \in V_{v_0} \implies (f + \mu)(v_0) - \epsilon \leq (f + \mu)(v)$$

\implies

$$f + \mu = \phi \text{ sci par rapport à } v \in X_M$$

\implies

$$\phi \text{ sci par rapport à } v \in X_0, X_0 \subset X_M$$

Proposition 2.2.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(v, y) \text{ semi continu inférieurement} \\ \text{dans } X_0 \\ \text{et } X_0 \text{ compact} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ admet au moins un } v_0 \\ \text{dans } X_0 \\ \text{tq: } \phi(v, y) \geq \phi(v_0, y), \forall v \in X_0 \end{array} \right.$$

■

Démonstration. Pour montrer cette proposition on montre le théorème suivant:

Théorème 2.2.1 Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ compact} \\ f \text{ semi-continu inférieurement} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists x_0 \in X \text{ tq:} \\ f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) \end{array} \right.$$

On note $d = \inf_{x \in X} f(x)$

Soit

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + d \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = d,]-\infty, \alpha_n[\subset \mathbb{R}$$

Et

$$X_n = f^{-1}]-\infty, \alpha_n[\subset \mathbb{R} \implies X_{n+1} \subset X_n \implies \overline{X_{n+1}} \subset \overline{X_n}$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ semi-continu inférieurement} \\ \text{et }]-\infty, \alpha_n[\text{ ouvert} \end{array} \right. \implies f^{-1}]-\infty, \alpha_n[= X_n \text{ ouvert} \implies \overline{X_n} \text{ fermé}$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X_n} \text{ fermé, } \forall n \geq 1 \\ \text{et } X \text{ compact} \end{array} \right. \implies \bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} \neq \emptyset \implies \exists x_0 \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} \text{ (i.e. } x_0 \in \overline{X_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Alors

$$\begin{aligned} x_0 \in \overline{X_n} &\implies f(x_0) \leq \alpha_n = \frac{1}{n} + d; \forall n \in \mathbb{N}^* \implies f(x_0) \leq d \implies f(x_0) = d \\ &\implies x_0 \text{ est optimum} \implies \text{il existe } f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x). \end{aligned}$$

■

Donc

$$\phi(v_0, y) = \inf_{v \in X_0} \phi(v, y) = R_\alpha(y)$$

Alors il existe $R_\alpha(y)$ solution de probleme(2.2.4)

Proposition 2.2.5

$$\begin{aligned} \phi(v) \leq \phi(x_0) &\implies v \in X \\ x_0 \in X_M & \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\phi(v) \leq \phi(x_0) \implies \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \|Tx_0 - y\|_Y^2 + \alpha\mu(x_0) = \tau$$

Donc

$$\begin{aligned} \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \tau &\implies \alpha\mu(v) \leq \|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \tau \\ &\implies \alpha\mu(v) \leq \tau \implies \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \end{aligned}$$

Et on a $v \in X_M$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \\ \text{et} \\ v \in X_M \end{array} \right\} \implies \left\{ \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \right\} \cap X_M = X_0 \implies v \in X_0$$

Proposition 2.2.6 x_* minimum dans $X_0 \subset X_M \implies x_*$ minimum dans X_M .

Démonstration. Soit x_* minimum dans $X_0 \implies \forall x \in X_0, \phi(x_*) \leq \phi(x)$. Mais n'est pas minimum dans $X_M \implies$

$$\exists v \in X_M, \phi(v) < \phi(x_*).$$

Donc

$$\begin{cases} \phi(x_*) \leq \phi(x) \\ \text{et} \implies \phi(v) \leq \phi(x_*) \leq \phi(x) \\ \phi(v) \leq \phi(x_*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) \leq \phi(x_*) \\ x_* \in X_M \end{cases} \implies v \in X_0 \implies \phi(x_*) \leq \phi(v) \quad (2.2.7)$$

puisque

$$\phi(v) \leq \phi(x_*)$$

Donc il y a contradiction avec (2.2.7) alors x_* minimum dans X_M . ■

■

Lemme 2.2.2 Soit X, Y deux espaces de Hilbert, $x^0 \in X$ et $\mu(v) = \|v - x^0\|_X^2$ donc le probleme

$$\min (\|Tv - x\|_Y^2 + \alpha\mu(v))$$

admet un minimum unique $R_\alpha(y)$, qui est une solution unique de ces problèmes tq R_α soit la régularisation

Démonstration. x_m est une suite minimisante donc $\phi(x_m) \longrightarrow \inf_{x \in X} \phi(x) = \phi_*$.

$$\phi(x_m) \longrightarrow \inf_{x \in X} \phi(x) = \phi_* \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{x \in X} \phi(x) = \phi_*$$

■

ϕ_* la limite existe, donc la suite $(\phi(x_m))_m$ convergent $\implies \phi(x_m)$ borné $\implies x_m$ borné.

Donc toutes les suites x_m minimisantes forment une suite bornée.

(I) On recherche la solution. Comme X est un espace de Hilbert il est donc réflexif

On a le théoreme suivant:

Théorème 2.2.2 Dans l'espace de Banach réflexif, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite de x_k convergente faiblement vers x . donc $x_m \longrightarrow x$ converge faiblement

$$\{\phi \text{ convexe et } \phi \text{ sci}\} \implies \phi \text{ sci faiblement}$$

Et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m \longrightarrow x \\ \text{et } \phi \text{ sci faiblement} \end{array} \right. \implies \phi(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m) = \phi_* \implies \phi(x) \leq \phi_* \quad (2.2.8)$$

Et on a

ϕ_* est inf de ϕ sur $X \implies \phi_* \leq \phi(x)$. Par (2.2.8) on a : $\phi(x) = \phi_*, x \in X \implies \exists \phi_*$ solution de problème (2.2.4)

(II) On montre que la solution est unique.

Pour montrer l'unicité de la solution du problème (2.2.4) on montre l'unicité de problème dans l'exemple suivant

Exemple 2.2.1 Soit X et Y deux espaces de Hilbert et T compact et linéaire $T : X \longrightarrow Y$

$$\mu(x) = \|x - x^0\|_X^2$$

On pose

$$X = X_M$$

Exemple 2.2.2 Les conditions nécessaires pour que $x(\alpha)$ soit un point minimisant de la fonction sont

$$q(v) = (Tv - y, Tv - y)_Y + \alpha(v - x^0, v - x^0)_X$$

et

$$\frac{d}{dt}(q(x(\alpha) + tu)) = 0 \quad t = 0, \forall u \in X$$

On a

$$\begin{aligned} q(x(\alpha) + tu) &= (T(x(\alpha) + tu) - y, T(x(\alpha) + tu) - y)_Y \\ &\quad + \alpha((x(\alpha) + tu) - x^0, (x(\alpha) + tu) - x^0)_X \\ &= (Tx(\alpha) + tTu - y, Tx(\alpha) + tTu - y)_Y + \alpha(x(\alpha) + tu - x^0, x(\alpha) + tu - x^0) \\ &\quad (Tx(\alpha) - y, Tx(\alpha) - y)_Y + t(Tx(\alpha) - y, Tu)_Y + t(Tu, Tx(\alpha) - y)_Y \\ &\quad + t^2(Tu, Tu)_Y + \alpha(x(\alpha) - x^0, x(\alpha) - x^0)_X + \alpha t(x(\alpha) - x^0, u)_X + \\ &\quad \alpha t(u, x(\alpha) - x^0)_X + \alpha t^2(u, u)_X \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (q(x(\alpha) + tu)) = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \\ \implies & (Tx(\alpha) - y, Tu)_Y + (Tu, Tx(\alpha) - y)_Y + \alpha(x(\alpha) - x^0, u)_X + \alpha(u, x(\alpha) - x^0)_X \\ \implies & 2(Tx(\alpha) - y, Tu)_Y + 2\alpha(x(\alpha) - x^0, u)_X = 0 \\ \implies & 2(T^*Tx(\alpha) - T^*y, u)_Y + 2\alpha(u, x(\alpha) - x^0)_X = 0 \\ \implies & 2(u, T^*Tx(\alpha) - T^*y)_X + 2\alpha(u, x(\alpha) - x^0)_X = 0 \\ \implies & 2(u, T^*Tx(\alpha) - T^*y + \alpha(x(\alpha) - x^0))_X = 0 \\ \implies & (u, T^*Tx(\alpha) - T^*y + \alpha(x(\alpha) - x^0))_X = 0, \forall u \in X \\ \implies & T^*Tx(\alpha) - T^*y + \alpha(x(\alpha) - x^0) = 0 \\ & \implies (T^*T + \alpha)x(\alpha) = T^*y + \alpha x^0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$x(\alpha)$ est une solution du problème: $\min (\|Tv - y\|^2 + \alpha\mu(v))$.et aussi solution du problème(2.2.9). Donc pour montrer l'unicité de la solution du probleme(2.2.4) on montre l'unicite de la solution du problème(2.2.9).

On suppose que ce problème(2.2.9) admet deux solution $x(\alpha)$ et $x'(\alpha)$.Donc

$$\begin{cases} (T^*T + \alpha)x(\alpha) = T^*y + \alpha x^0 \\ \text{et } (T^*T + \alpha)x'(\alpha) = T^*y + \alpha x^0 \end{cases} \implies (T^*T + \alpha)(x(\alpha) - x'(\alpha)) = 0$$

On remarque que T^*T est positif et auto-adjoint dans X

On considère l'exemple suivant

Exemple 2.2.3 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \implies \lambda_k \in \mathbb{R}_0^+$

T est compact $\implies T^*$ est compact donc T^*T est compact. T est linéaire d'un espace de Hilbert vers un espace de Hilbert.

Comme $T^*T = (T^*T)^* \implies T^*T$ auto-adjoint.

T^*T positif et T^*T auto-adjoint on aura donc:d'après le théorème de Hilbert schmidt.

Il existe une base orthonormée des vecteur propres a_k

Soit

$$b_k = \|Ta_k\|_Y^{-1} Ta_k$$

Alors on trouve

(1)

$$T^*T a_k = T^* \lambda_k a_k = \lambda_k T^* a_k = \lambda_k^2 a_k \implies T^*T a_k = \lambda_k^2 a_k$$

(2)

$$\begin{aligned} TT^* b_k &= TT^* \|T a_k\|_Y^{-1} T a_k = \|T a_k\|_Y^{-1} TT^* T a_k = \|T a_k\|_Y^{-1} T \lambda_k^2 a_k = \lambda_k^2 \|T a_k\|_Y^{-1} T a_k \\ &= \lambda_k^2 b_k \implies TT^* b_k = \lambda_k^2 b_k \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} T^* b_k &= T^* \|T a_k\|_Y^{-1} T a_k = \|T a_k\|_Y^{-1} T^* T a_k = \|T a_k\|_Y^{-1} \lambda_k^2 a_k = \|\lambda_k a_k\|_Y^{-1} \lambda_k^2 a_k \\ &= \lambda_k \|a_k\|_Y^{-1} a_k = \lambda_k a_k, \|a_k\| = 1 \text{ puisque } a_k \text{ est une base} \end{aligned}$$

(4)

$$\lambda_k b_k = \lambda_k \|T a_k\|_Y^{-1} T a_k = \lambda_k \|\lambda_k T a_k\|_Y^{-1} T a_k = \lambda_k \lambda_k^{-1} \|a_k\|_Y^{-1} T a_k = T \|a_k\|_Y^{-1} a_k = T a_k$$

(b_k) est aussi une base orthonormale puisque:

$$\begin{aligned} (b_k, b_m)_Y &= (\|T a_k\|_Y^{-1} T a_k, \|T a_m\|_Y^{-1} T a_m) = \|T a_k\|_Y^{-1} \|T a_m\|_Y^{-1} (T a_k, T a_m)_Y \\ &= \lambda_k^{-2} \|a_k\|_Y^{-1} \|a_m\|_Y^{-1} (T^* T a_k, a_m)_Y = \lambda_k^{-2} \lambda_k^2 (a_k, a_m)_X = \begin{cases} 0; & \text{si } k \neq m \\ 1; & \text{si } k = m \end{cases} \end{aligned}$$

\implies

$$(b_k, b_m)_Y = \begin{cases} 0; & \text{si } k \neq m \\ 1; & \text{si } k = m \end{cases}$$

Donc

$$(T^*T + \alpha) (x(\alpha) - x'(\alpha)) = 0 \implies \begin{cases} (T^*T + \alpha) (x(\alpha) - x'(\alpha), a_k) = 0 \\ \forall a_k \neq 0 \end{cases}$$

\implies

$$\begin{aligned}
 (T^*T + \alpha) \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) &= (T^*T \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) + \left(\alpha(x(\alpha) - x'(\alpha)), a_k \right)) \\
 &= \left(x(\alpha) - x'(\alpha), (T^*T)^* a_k + \alpha(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k) \right) \\
 &= \left(x(\alpha) - x'(\alpha), T^*T a_k \right) + \alpha \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) \\
 &= \left(x(\alpha) - x'(\alpha), \lambda_k^2 a_k \right) + \alpha \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) \\
 &= \lambda_k^2 \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) + \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) \\
 tq \ T^*T a_k &= \lambda_k^2 a_k \\
 (\lambda_k^2 + \alpha) \left(x(\alpha) - x'(\alpha), a_k \right) &= 0; \forall a_k \neq 0 \\
 \implies (\lambda_k^2 + \alpha) \left(x(\alpha) - x'(\alpha) \right) &= 0
 \end{aligned}$$

$$T \text{ positif} \implies \begin{cases} \lambda_k > 0 \implies \lambda_k^2 \neq 0 \\ 0 < \alpha \implies \alpha \neq 0 \end{cases} \implies \lambda_k^2 + \alpha \neq 0 \implies x(\alpha) - x'(\alpha) = 0 \implies \text{la solution est} \\
 \text{unique}$$

2.2.4 Choix du paramètre de régularisation

Théorème 2.2.3 Soit R_α une stratégie de régularisation pour l'opérateur compact

$$T : X \longrightarrow Y,$$

où

$$\dim X = \infty.$$

Alors

1/ Les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés i.e il existe une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_j}\|_{L(Y,X)} = \infty.$$

2/ Il n'ya pas de convergence de $(R_\alpha T)$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

La donnée $y \in Y$ n'est pas connue avec exactitude ,il y a toujours un bruit qui vient la perturber .Notons y^δ la donnée perturbé où $\delta > 0$ est le niveau de bruit, c'est-à-dire

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

Notons $x^{\alpha,\delta} := R_\alpha y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Tx = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\|_X \leq \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y - x\| \leq \|R_\alpha\| \|y^\delta - y\| + \|R_\alpha T x - x\|$$

d'où

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\|_X \leq \delta \|R_\alpha\|_{L(Y,X)} + \|R_\alpha T x - x\|_X \quad (2.2.10)$$

Le premier terme de droite de (2.2.10) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Nous avons vu que $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$, donc il est important de ne pas choisir α très petit sinon l'erreur peut être très grande.

Par contre le deuxième terme de droite va tendre vers 0 quand $\alpha \rightarrow 0$ (par définition de R_α).

Nous allons faire tendre le niveau de bruit $\delta \rightarrow 0$ et nous choisissons une stratégie de régularisation de façon à ce que notre solution soit proche de la solution réelle.

Remarque 2.2.1 Une stratégie de régularisation $\delta \mapsto \alpha(\delta)$ est admissible si:

$$\forall x \in X, \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \limsup_{\delta \rightarrow 0, y^\delta \in Y} \{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\|_X, \text{ tel que } \|Tx - y^\delta\|_Y \leq \delta \} = 0$$

2.3 Variantes de Tikhonov

L'estimateur de Tikhonov défini par

$$\begin{cases} \min (\|Tv - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)) \\ v \in X_M \end{cases}$$

(Où $\mu(v) = \|v\|^2$ est la fonction de stabilisation de Tikhonov)

n'est parfois pas suffisant pour garantir une qualité d'estimation convenable, même avec un bon choix de paramètre α . En particulier, nous verrons que les vitesses de convergence produites par cette méthode sont souvent loin d'être optimales pour des solutions très "régulières". Tout cela sera discuté de manière plus rigoureuse dans ce chapitre. Il est cependant possible d'améliorer sensiblement cette méthode.

2.3.1 Première variante de Tikhonov

Une première variante consiste à utiliser un contrôle différent pour la solution. Pour tout entier a , introduisons $L^a = (TT^*)^{-a}$. Au lieu de s'intéresser à la norme de l'approximation $\|v\|^2$ on va plutôt chercher à contrôler la norme de $L^a v$ pour un entier a donné. L'opérateur L^a est en quelque sorte un opérateur différentiel. La quantité a peut être vue comme un a priori que l'on placerait sur la régularité de la solution. L'estimateur de Tikhonov avec régularité a priori est donc défini par

$$\begin{cases} \min (\|Tv - y\|_Y^2 + \alpha \|L^a v\|^2) \\ v \in X_M \end{cases} \quad (2.3.1)$$

La solution de problème (2.3.1) peut être écrite sous la forme $x^\alpha = R_\alpha(y)$ telle que:

$$R_\alpha = (T^*T + \alpha(L^a)^*L^a)^{-1}$$

2.3.2 deuxième variante de Tikhonov

Une deuxième variante de la méthode de Tikhonov utilise des itérations. Fixons $R_\alpha^0 = 0$. Pour tout entier $j > 1$, et étant donnée R_α^{j-1} , l'estimateur R_α^j est défini comme la solution de l'équation:

$$(T^*T + \alpha I)R_\alpha^j = T^*y + \alpha R_\alpha^{j-1}$$

Dans cette situation, α joue toujours le rôle du paramètre de régularisation. Le nombre d'itérations j permet en quelque sorte d'élargir le champ d'action de l'estimateur de Tikhonov. Plus le nombre d'itérations sera important, plus il sera possible d'estimer des fonctions très régulières. D'un point de vue pratique, cette méthode ne requiert pas plus

de temps de calcul que la procédure classique. L'opérateur inverse $(T^*T + \alpha I)^{-1}$ peut être réutilisé à chaque étape sans calcul supplémentaire.

3.1 Première application

La méthode de régularisation de Tikhonov est une des méthodes les plus employées pour résoudre les problèmes mal posés. Par exemple elle est utilisée avec succès pour inverser les matrices mal conditionnées. Cependant le choix de la norme au carré comme opérateur de régularisation n'est pas toujours efficace car, il faut sélectionner l'opérateur de régularisation en fonction de ce que l'on cherche à obtenir. Dans exemples numériques qui vont suivre on verra que le choix de l'opérateur de régularisation conduit à des solutions radicalement différentes.

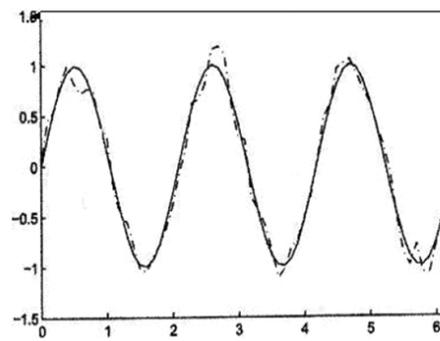
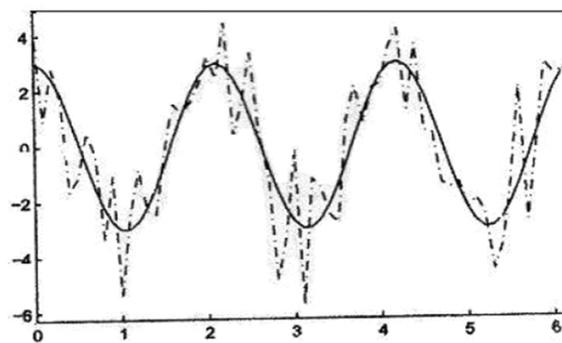
3.1.1 Position du Problème

Le problème du calcul numérique de la dérivée d'une fonction que l'on mesure est un problème mal posé. Pour voir cela on considère l'espace de Banach X des fonctions C^∞ définies sur $[0; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme.

On définit l'opérateur linéaire $I : X \longrightarrow X$ par:

$$If(t) = \int_0^t f(s)ds, \forall f \in X$$

Le problème direct consiste donc à calculer la primitive de $f \in X$ qui vaut 0 en 0, ce problème est clairement bien posé. Pour résoudre le problème inverse il faut, connaissant

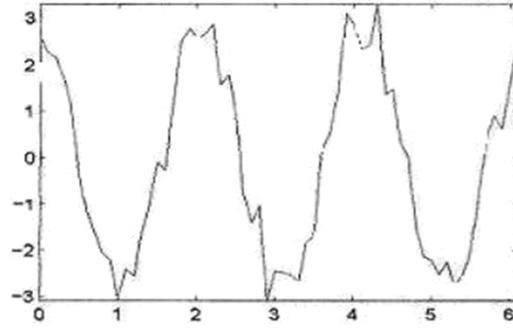
Figure (1) : $t \rightarrow F(t)$ Figure (2) : $t \rightarrow F'(t)$

$F \in X$ calculer sa dérivée $f \in X$. Le problème inverse est mal posé. En effet, nous savons qu'il existe une dérivée unique de $F \in X$ mais, l'opérateur de dérivation n'est pas continu de X dans lui-même. La Figure (1) permet d'observer cette instabilité, nous avons calculé la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(3t) + g(t)$ où la fonction g est une petite perturbation. On observe une grande déviation entre la dérivée de la fonction F et celle de la fonction perturbée.

La figure (1) représente la fonction $F(t) = \sin(3t)$ et la même fonction perturbée par un bruit blanc

La Figure (2), représente la dérivée de F et son évaluation numérique.

Nous allons appliquer la méthode de Tikhonov pour résoudre ce problème de la dérivation numérique. Pour cette résolution nous allons nous placer dans l'espace $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$

Figure (3): Dérivée régularisée dans $L^2[0, 2\Pi]$

et nous calculons la dérivée en résolvant le problème

$$\min_{f \in L^2[0, 2\Pi]} \|F_b - If\|_{L^2[0, 2\Pi]}^2 + \alpha \|f\|_{L^2[0, 2\Pi]}^2$$

Où $F_b : [0, 2\Pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont nous voulons calculer la dérivée.

On suppose que cette fonction est une version perturbée de la fonction F et que l'erreur (le niveau de bruit) est

$$\|F - F_b\| = \delta$$

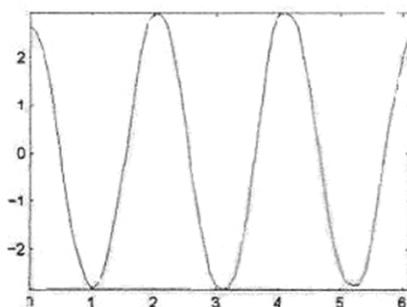
On distingue sur la figure (1), la fonction F et sa version perturbée F_b ; qui nous ont servi pour l'exemple. En utilisant la méthode ci-dessus pour calculer f , nous obtenons la fonction tracée sur la figure (3). Le paramètre de régularisation ayant été choisi convenablement par rapport au niveau de bruit.

On remarque que cette solution n'est pas satisfaisante car la fonction obtenue ne ressemble pas beaucoup à un cosinus comme elle le devrait; cela s'explique par le fait que la minimisation de la norme de f dans $L^2[0, 2\Pi]$ n'oblige pas la fonction obtenue à être régulière. Une alternative pour apporter plus de régularité est d'utiliser la méthode de Tikhonov dans un espace de Sobolev, plutôt que dans $L^2[0, 2\Pi]$.

Calculons donc la solution du problème

$$\min_{f \in H^1[0, 2\Pi]} \|F_b - If\|_{L^2[0, 2\Pi]}^2 + \alpha \|f\|_{H^1[0, 2\Pi]}^2$$

La figure (4) montre la dérivée calculée de cette manière

Figure (4): Dérivée régularisée dans $H^1[0, 2\pi]$

3.1.2 Conclusion

La fonction f est ici bien plus régulière que celle trouvée précédemment, de plus, elle ressemble beaucoup à une fonction cosinus ce qui été le résultat souhaité. Cet exemple montre clairement que pour résoudre un problème inverse, il faut rajouter des hypothèses de manière à obtenir un résultat conforme à nos attentes.

3.2 Deuxième application

Les applications industrielles de mise en forme des matériaux nécessitent dans la plupart des cas la prédiction des phénomènes thermiques, mécaniques et métallurgiques au sein des matériaux traités. La simulation numérique de ces phénomènes est devenue à l'heure actuelle une étape incontournable lors du processus de fabrication de tout produit. Ces phénomènes sont souvent modélisés par des équations différentielles qui font apparaître des paramètres inconnus et inaccessibles aux mesures directes : densité du flux de chaleur sur une frontière, coefficient d'échange avec le milieu extérieur, résistance thermique de contact etc. . . . L'estimation de ces paramètres fait appel donc à la résolution inverse de l'équation de la chaleur. Face à la montée en puissance des capacités de calcul et à la nouvelle technologie offerte par l'informatique, le besoin de méthodes globales basées sur des démarches rigoureuses s'est fait sentir. La méthode inverse de spécification de fonction utilisant la régularisation de Tikhonov constitue sans doute une des approches les plus globales et les plus adaptées à ce genre de problèmes.

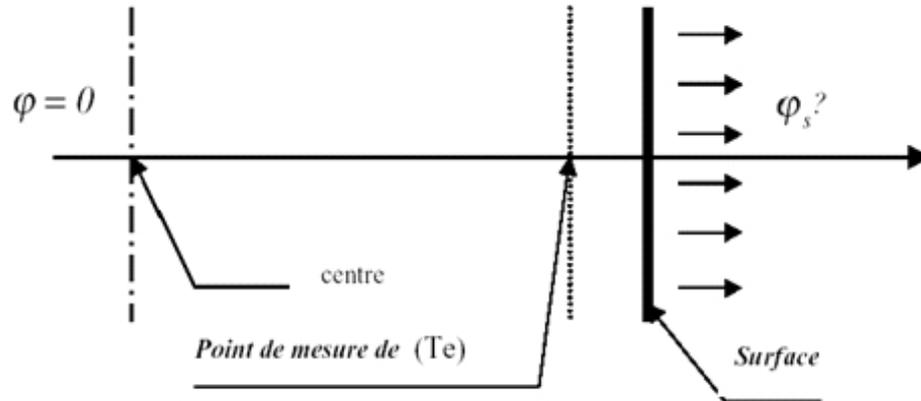


Figure 1: Schéma du problème inverse

Dans ce présent travail nous décrivons une méthode inverse utilisant la régularisation dans la résolution des problèmes inverses de conduction de la chaleur (avec la prise en compte de l'évolution du terme source lié aux transformations de phase).

3.3 Position du Problème

Ici, on s'intéresse plus particulièrement à la détermination de l'évolution de la température et du flux de chaleur à l'interface d'échange entre le matériaux traité et le système extérieur en se basant uniquement sur la mesure de la température au sein du solide (Cylindre de rayon R) voir figure (1).

L'équation qui gouverne ce phénomène de transfert est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r, t) = T_0 \quad t = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} |_{r=0} = 0 \quad t > 0 \\ T(r_e, t) = y(t) \quad \text{température mesurée} \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial t} |_{r=R} = \varphi(Ts) \quad \text{flux à déterminer} \end{array} \right.$$

Où

r : long du rayon

T_0 : est la température initiale

λ : est la conductivité thermique

ρ : est la masse volumique

C_p : est la chaleur spécifique

\dot{q} : est l'énergie due à la transformation de phase

φ_s : est la densité du flux de chaleur à la surface du solide.

3.4 Méthode inverse de spécification de fonction avec régularisation

Ici, nous supposons que la courbe du flux de chaleur à estimer est une succession de segments de longueurs Δt .

Ainsi, nous notons par les vecteurs: $\varphi (\varphi^1, \varphi^2, \dots; \varphi^j, \dots, \varphi^n)$ et $y (y_e^1, y_e^2, \dots, y_e^j, \dots, y_e^n)$ le flux de chaleur et la température mesurée au point $r = r_e$ à chaque instant du traitement thermique

On suppose que, jusqu'à un ordre n , les composantes du flux ($\varphi^1, \varphi^2, \dots, \dots, \varphi^n$) sont connues et on cherche à déterminer φ^{n+1} à l'instant t^{n+1}

La méthode la plus intuitive correspond à l'algorithme qui consiste à chercher l'évolution du flux de chaleur à la surface, conduisant à une concordance parfaite entre les températures calculées (T) et celles mesurées (Y) au point $r = r_e$. C'est à dire celui qui minimise à chaque instant la fonctionnelle suivante:

$$F(\varphi^{n+1}) = (y_e^{n+1} - T_e^{n+1})^2$$

Cet algorithme de Stolz [8] serait exact si les solutions exactes du problème étaient connues. Cependant, comme les températures sont calculées à l'aide d'une méthode discrète, les erreurs numériques successives ajoutées aux incertitudes de mesure entraînent une divergence rapide

Ce problème de stabilité de l'algorithme de Stolz a été résolu par la méthode de spécification [1] qui est fondée sur la même idée de base mais introduit le concept des températures futures. Ainsi, la fonctionnelle à minimiser devient:

$$F(\varphi^{n+1}) = \sum_{j=1}^{j=ntf} (y_e^{n+j} - T_e^{n+j})^2$$

Elle représente l'écart quadratique entre la température mesurée et celle calculée par la méthode directe en prenant comme flux à la surface le flux φ^{n+j} . On voit que la minimisation de la fonctionnelle F à l'instant t^{n+1} utilise des « températures futures » de $(n+1)$ à $(n+ntf)$.

« ntf » est le nombre de pas du temps postérieur à l'instant considéré t^n , ou le nombre de températures futures y_e^{n+j} . y_e^{n+j} est la température mesurée au point ($r = r_e$) à l'instant $(n+j)$, T_e^{n+j} est la température calculée en ce point et au même instant.

La régularisation nous amène à introduire un terme correctif (R) tel que:

$$F(\varphi^{n+1}) = \sum_{j=1}^{j=ntf} (y_e^{n+j} - T_e^{n+j})^2 + R$$

Avec

$$R = \alpha \left\{ w_0 \int_{t_0}^{t_n} \varphi(t)^2 dt + w_1 \int_{t_0}^{t_n} \left(\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 dt + w_2 \int_{t_0}^{t_n} \left(\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} \right)^2 + \dots \right\}$$

Où

y_e^{n+j}, T_e^{n+j} sont respectivement la température mesurée et calculée,

$\varphi(t)$ est l'évolution du flux de chaleur désirée

α, w_0, w_1, w_2 ..(constantes positives) représentent les paramètres de régularisation zéro, premier et second ordre. . . Ils sont introduits dans le but de réduire la sensibilité du flux calculé vis à vis aux erreurs de mesure de la température aux erreurs de mesure de la température.

La détermination de la solution du problème revient ici à minimiser la fonctionnelle suivante:

$$F(\varphi^{n+1}, \dots, \varphi^{n+j}, \dots, \varphi^{n+ntf}) = \sum_{j=1}^{j=ntf} (y_e^{n+j} - T_e^{n+j})^2 + R$$

$$R = \alpha \left[w_0 \sum_{j=1}^{j=ntf} (\varphi^{n+j})^2 + w_1 \sum_{j=2}^{j=ntf} (\varphi^{n+j} - \varphi^{n+j-1})^2 + w_2 \sum_{j=3}^{j=ntf} (\varphi^{n+j-2} - 2\varphi^{n+j-1} + \varphi^{n+j})^2 \right]$$

Le développement en série de Taylor du terme $T_e^{n+j}(\varphi^{n+j})$ autour φ^n s'écrit :

$$T_e^{n+j} = T_e^{n+j}(\varphi^n) + S_{1j}(\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \dots + S_{kj}(\varphi^{n+k} - \varphi^n) + \dots + S_{jj}(\varphi^{n+j} - \varphi^n)$$

$$T_e^{n+j} = T_e^{n+j}(\varphi^n) + \sum_{k=1}^{k=j} S_{kj}(\varphi^{n+k} - \varphi^n)$$

Avec:

$$S_{ij} = \frac{\partial T^{n+j}(\varphi^{n+j})}{\partial \varphi^{n+i}}$$

représentent les coefficients de sensibilité. Ils sont déterminés par:

$$S_{kj} = \begin{cases} 0 & j \in [1, k] \\ \frac{T_e^{n+j}(\varphi^{n+\delta_\varphi}) - T_e^{n+j}(\varphi^n)}{\delta_\varphi} & j \in [k, ntf] \end{cases}$$

Avec

$$\delta_\varphi = \begin{cases} \varsigma \varphi^n & t \in [t_{n+k-1}, t_{n+k}] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

ς est un nombre petit

En minimisant la fonctionnelle F par rapport à $\varphi^{n+1} \dots \varphi^{n+ntf}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & \{ {}^t[S][S] + \alpha (w_0 {}^t[H_0][H_0] + w_1 {}^t[H_1][H_1] + w_2 {}^t[H_2][H_2]) \cdot [\varphi] \} \\ & = {}^t[S] \{ [y_e] - [T_e^*] + [S][\varphi^*] \} \\ [S] & = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{1ntf} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{ntf,ntf} \end{bmatrix} \quad [H_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[H_{2n}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi^{n+1} \\ \varphi^{n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi^{n+ntf} \end{bmatrix} \quad [T^*] = \begin{bmatrix} T^{n+1}(\varphi^n) \\ T^{n+2}(\varphi^n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T^{n+ntf}(\varphi^n) \end{bmatrix} \quad [y_e] = \begin{bmatrix} y_e^{n+1} \\ y_e^{n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_e^{n+ntf} \end{bmatrix} \quad [y_e] = \begin{bmatrix} \varphi^n \\ \varphi^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi^{n+ntf} \end{bmatrix}$$

Ici $[H_{2n}]$ est telle que: $[H_2] = {}^t [H_{2n}] * [H_{2n}]$

La résolution de ce système permet de calculer $\varphi^{n+1}, \varphi^{n+2} \dots \varphi^{n+ntf}$. Seule la valeur est retenue. On reprend la même procédure pour estimer de proche en proche $\varphi^{n+1}, \varphi^{n+3}$ jusqu'à φ^N

3.5 Modélisation des Transformations de Phases

Ce modèle a été développé au LSG2M par S.Denis et Coll. de manière à décrire les transformations de phases associées à l'évolution thermique continue d'un acier. Le terme source généré pendant les transformations de phase est relié à leurs cinétiques suivant la formule

$$\dot{q} = \sum \nabla H_k \frac{dy_k}{dt}.$$

Où

∇H_k : l'enthalpie de transformation.

y_k : la fraction volumique du constituant k .

Ce terme assure le couplage entre la thermique pure et les transformations de phases. Pendant le chauffage, la cinétique de transformation isotherme est approchée par une loi de Jonson – Mehl - Avrami [5]:

$$y_k = y_{\max k} [1 - \exp(-b_k * t^{n_k})]$$

où

y_k est la fraction volumique du constituant k (perlite ou ferrite) qui s'est transformée en Austénite

$y_{\max k}$ la fraction maximale qui peut être transformée,

n_k et b_k des paramètres dépendants de la température. La progression de la transformation martensitique pendant le refroidissement est décrite par la relation de Koistinen et Marburger [6]:

$$Y_k = 1 - [\exp(-A_m(M_{sk} - T))]$$

où

A_m est le coefficient de Koistinen,

M_{sk} est la température de début de transformation martensitique

T est la température courante.

3.6 Validation Numérique

3.6.1 Procédure de validation

Connaissant l'évolution « fictive » du flux de chaleur $\varphi_s(t)$ imposé à la surface de l'échantillon nous calculons à l'aide de la méthode directe, qui tient compte de la métallurgie, l'évolution de la température en un point à l'intérieur du solide ($e_r = e$). Cette évolution de température $T(e_r, t)$ et en ce point « de mesure » devient la donnée « expérimentale » d'entrée de la méthode inverse pour recalculer l'évolution fictive de la température de surface et du flux de chaleur de départ.

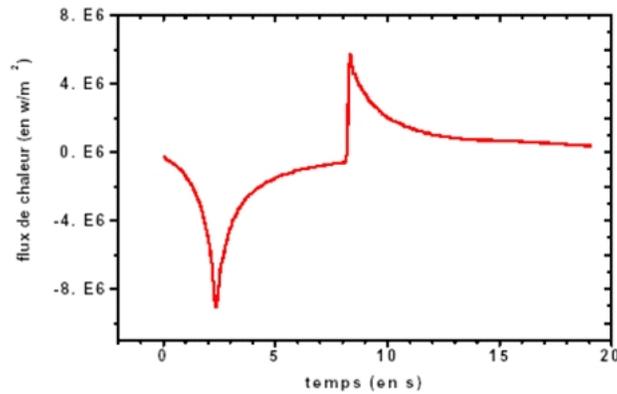


Figure 2 : Cycle thermique subi par l'échantillon

3.6.2 Paramètres nécessaires au calcul

Notre validation numérique portera sur une éprouvette de diamètre 16mm en acier hypoeutectoïde de type XC42, pour le quel nous connaissons toutes les caractéristiques thermiques et métallurgiques au chauffage et au refroidissement. Leurs valeurs sont extraites de la littérature [3]. Elles sont introduites dans le programme sous formes des polynômes de troisième degré.

Le cycle thermique retenu pour cette validation est défini par l'évolution du flux de chaleur et de la température par rapport au temps (figures 2 et 3).

3.6.3 Calcul sans régularisation

Sur la figure (4), nous avons tracé l'évolution de la température en surface, au centre et au point $r = r_e$ fonction du temps. Ces grandeurs sont calculées à la fois par la méthode directe et par la méthode inverse sans régularisation ($\Delta t = 0.035\text{s}$, $\Delta r = 0.1\text{mm}$ et $ntf = 3$). L'évolution du flux à la surface correspondante est représentée sur la figure (5). Il en ressort que le calcul inverse sans régularisation donne d'une part des résultats très stables (pas d'instabilités apparentes) ce qui est normal car nous avons utilisé une évolution lisse

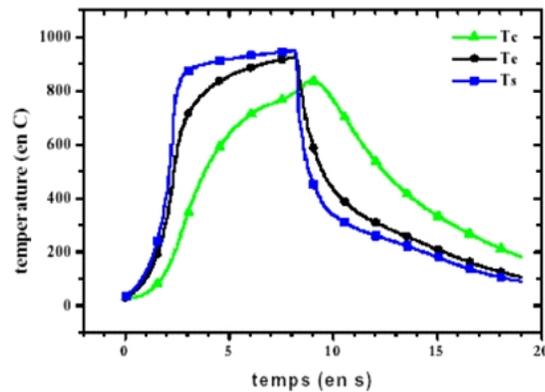


Figure 3: L'évolution de la température en fonction du temps à la surface, au point d'abscisse $r = r_e$ et au centre du solide.

(pas de bruit de mesure) de la température du point $r = r_e$. Et d'autre part des résultats satisfaisant sur toute la partie du chauffage. Après la transition chauffage-refroidissement, ce calcul devient de plus en plus imprécis notamment en fin de refroidissement. Ce décalage entre le calcul inverse sans régularisation et le calcul direct s'amplifie de façon significative quand on s'approche de la surface (gradient thermique très important).

3.6.4 Calcul avec régularisation

Nous avons repris le même calcul avec les mêmes paramètres de maillage mais cette fois avec la régularisation. Les paramètres de la régularisation utilisés sont : $\alpha = 10^1$, $w_0 = 10^9$, $w_1 = 10^{-10}$. Nous avons représenté sur la figure (6) l'évolution des températures et sur la figure (7) l'évolution du flux de surface. Il ressort de ces figures que la régularisation apporte une nette

amélioration des résultats, en effet le mauvais accord observé pendant le refroidissement entre le calcul direct et le calcul inverse est presque annulé. Cette amélioration du calcul est due conjointement à l'effet des termes de premier et de second ordre.

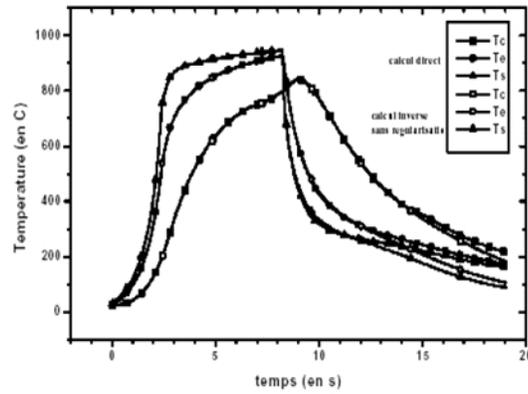


Figure 4 : Comparaison des résultats du calcul de la température par la méthode directe et celle inverse sans régularisation

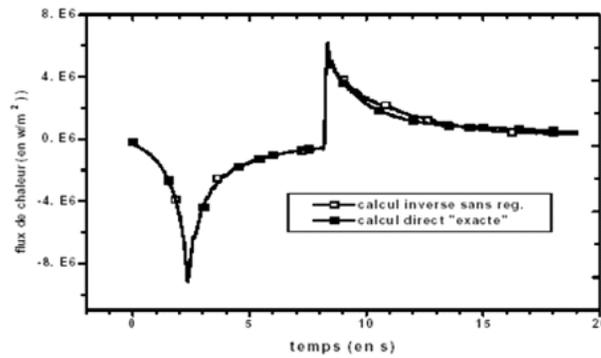


Figure 5 : Comparaison des résultats du calcul du flux de chaleur par la méthode directe et par celle inverse sans régularisation

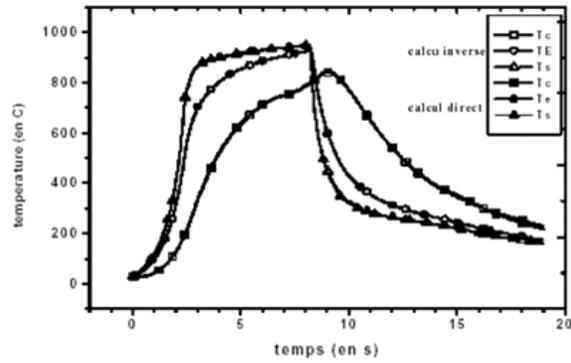


Figure 6 : Comparaison des résultats du calcul de la température par la méthode directe et celle inverse avec régularisation

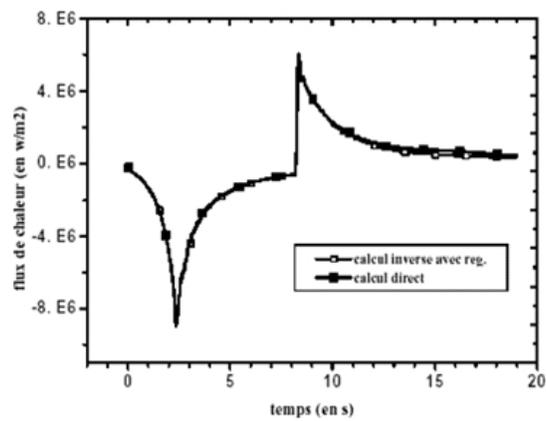


Figure 7 : Comparaison du calcul inverse avec régularisation du flux de la chaleur avec le calcul direct « exact »

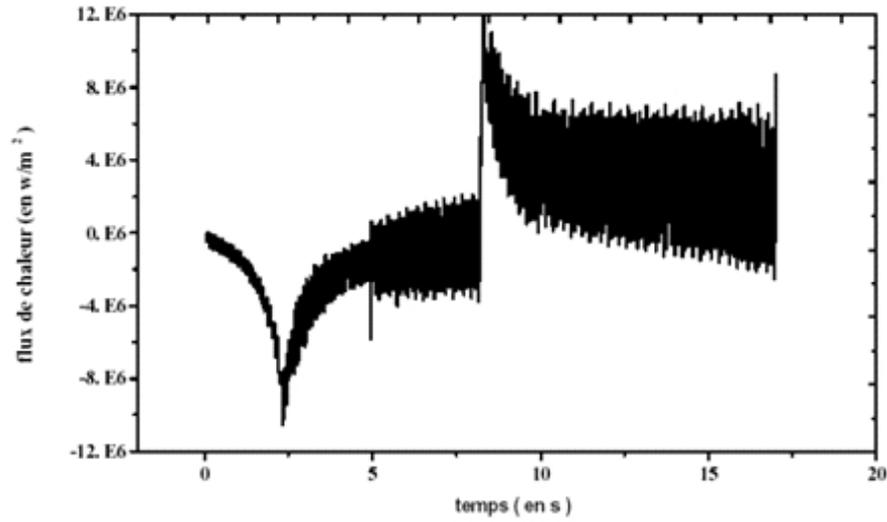


Figure 8 : Calcul du flux de chaleur à partir des données bruitées par la méthode Inverse sans régularisation

3.6.5 Influence du bruit de mesure de la température

En général le succès de toute méthode inverse est mesuré suivant son comportement vis à vis du bruit de mesure de la température au point $r = r_e$. Afin de tester ce comportement, nous avons simulé ce bruit de mesure en ajoutant à l'évolution de température exacte $T(r_e, t)_{exacte}$ (supposée exacte) un bruit généré par une fonction aléatoire. Ainsi la donnée d'entrée $T(r_e, t)$ pour le calcul inverse devient : $T(r_e, t) = T(r_e, t)_{exacte} + \varepsilon \delta_{\max}$ avec ε : variable aléatoire comprise entre -1 et $+1$, δ_{\max} : amplitude maximale du bruit et $T(r_e, t)_{exacte}$: température supposée exacte en $r = r_e$.

Sur la figure 8 nous avons tracé l'évolution du flux de chaleur calculée sans régularisation et en utilisant des données bruitées dans $T(r_e, t)_{exacte}$ ($\delta_{\max} = 2^\circ C$). Comme nous pouvons le remarquer sur cette figure, la méthode inverse sans régularisation est très sensible aux bruits de mesure. Instabilités causées peuvent dépasser les 100% ce qui rend dans ces conditions très difficile l'identification du flux de surface. Afin de mettre en évidence l'effet de la régularisation, nous avons repris le même calcul en choisissant les valeurs optimales des termes de régularisation : $\alpha = 10^1$, $w_0 = 10^9$, $w_1 = 10^{-3}$, $w_2 = 0$. Nous avons tracé les résultats trouvés sur la figure (9). Nous remarquons alors que les

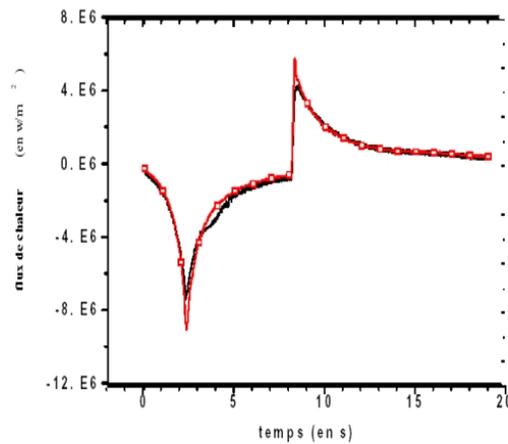


Figure 9 : Calcul du flux de chaleur à partir des données bruitées par la méthode Inverse avec régularisation

instabilités sont significativement atténuées et que les instabilités de hautes fréquences sont contrôlées par le terme du premier ordre. Nous notons aussi que la réduction des instabilités se fait au détriment de la précision. Ceci nous suggère donc à établir une stratégie de calcul qui consiste à définir et à rechercher un compromis entre la précision et la stabilité qui conduira à résultats « acceptables » satisfaisants à la fois les exigences numériques et physiques.

3.7 conclusion

Cette application rentre dans le cadre de la modélisation des phénomènes thermiques de conduction et des transformations de phases mis en jeu lors d'un traitement thermique des aciers. La résolution de ce problème inverse nous a amené à développer la méthode de spécification de fonction avec régularisation qui a pour but de réduire les instabilités et d'augmenter la précision du calcul inverse. Ce travail est achevé par la mise en évidence de l'effet utile de la régularisation sur la stabilisation des résultats du calcul inverse utilisant des données bruitées. La difficulté de cette méthode réside dans la recherche de la valeur optimale de chaque terme de la régularisation pour chaque cycle thermique. L'étude de l'influence de chaque terme de la régularisation sur les résultats du calcul inverse,

et l'élaboration d'un programme informatique automatisant cette recherche pourra faire l'objet des études à venir.

Conclusion générale

Dans la méthode de régularisation de Tikhonov on choisit une classes correctrices X_M pour l'estimation de la stabilité puis on transforme l'équation $Tx = y$ en un problème de minimisation pour trouver le point minimum qui est une solution du problème $Tx = y$

Une difficulté de cette méthode de régularisation concerne le choix de la valeur du paramètre de régularisation. Notre objectif était de présenter la méthode de Tikhonov de façon à exhiber ses avantages ainsi que ses inconvénients. D'autres méthodes de résolutions existent, qui ne font pas appel aux mêmes caractéristiques.

Bibliographie

- [1] Azim A., Archambault P., Denis S., Inverse resolution of heat-transfer equation with internal heat source : application to the quenching steels with transformations, Journal of materials engineering and performance, Vol 6 (2) April 1997.
- [2] BREZIS,Haim.Analyse fonctionnelle:théorie et applications.paris:Dunod,1999,229P(Mathématiques appliquées pour la maîtrise).(2100043145)
- [3] Dardel Y., La transmission de la chaleur au cours de la solidification, du réchauffage et la trempe de l'acier, Edition de la revue de métallurgie, 1964.
- [4] Fernandes F. et Denis S. et Simon A., Prévission de l'évolution thermique et structurale des aciers au cours de leur refroidissement continu, M.E.S - Revue de métallurgie, p.355-366, 1986.
- [5] Jonson W.A. et Mehl R.F., Reaction kinetics in processes of nucleation and growth, Trans. of AIME,135, p. 416 – 458, 1939.
- [6] Koistenen D.F. et Marberger R.E., A general equation prescribing extent of the austenite-martensite transformation in pure Fe-C alloys and plain carbon steels.Acta Metall, 7, p. 59 – 60 , 1959.
- [7] MARTEAU,Clément.recherche d'inégalités oracles pour des problèmes inverses.Mathématiques.provence:université U.F.R.M.I.M,2007,152p

- [8] Stolz G., Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes, Journal of heat transfer 82, 20-26, 1960.
- [9] Tikhonov A.N. et Arsenin V.Y., Solution of III-posed problems, V.H. Winston & Sons, Washington,D.C., 1977