

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A. MIRA – BEJAIA

Faculté de Technologie

Département d'Hydraulique



Mémoire de fin d'études

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER

en Hydraulique

Option : Hydraulique urbaine

THEME

**RESOLUTION NUMERIQUE DES
EQUATIONS DE SAINT VENANT 1D PAR
LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

Etudiants

M^{elle} BENAMIROUCHE Dalila

M^r MAHDAOUI Hamza

Encadreur

M^r BERREKSI Ali

M^r AMARA Lyes

Jury: President:

Examineur (s):

:

Promotion 2013-2014

Remerciements

« Le difficile c'est ce qui peut être fait tout de suite. L'impossible c'est ce qui prend un peu de temps. »

George Santayana

Nous remercions tous d'abords Allah et clément de nous avoir donné la foie et le courage pour terminer ce projet de fin d'études, pour les efforts qui nous a donné, pour pouvoir réaliser ce modeste travail

*Nous tenons à présenter nous remerciements les plus sincères à notre promoteur Monsieur **BERREKSI.ALI** pour sa générosité, sa gentillesse, sa patience et ses précieux conseils pour l'établissement de ce travail.*

*Nous remercions notre Co-promoteur Monsieur **AMARA LYES** qui n'a pas hésité à mettre à notre disposition ses connaissances et qui nous a également dirigés tout le long de ce travail.*

Nous remercions les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences.

Nous tenons à exprimer encore notre gratitude à tous nos enseignants du département d'hydraulique pour leurs assistances pédagogiques et scientifiques.

Enfin nous remercions tous nos amis pour leurs soutiens.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail, on leurs dis

Merci, Merci, Merci ...

Dédicaces

Aux plus chers des chers,

Aux plus beaux de ce qu'a eu la terre,

A mon père et ma mère.

Aux meilleurs des frères,

Toutou mon exemple de sagesse,

Allaoua qui nous surprend sans cesse,

A mes deux petits frères Said et Kanza les chouchous des Hammas.

A celles qui m'ont toujours soutenue avec leur prières,

A mes grands-mères Faiza et Marbouha et mon grand-père Said,

A la mémoire de mon grand-père Said,

A mon beau-père et ma belle-mère,

A toute ma grande famille,

A mes cousins et cousines.

A tous mes amis (es).

A mon binôme Hamza.

Je dédie ce travail tout spécialement pour mon mari Takfa pour son soutien, sa patience et sa compréhension si importants pour moi.

Dalila

Dédicaces

Aux plus chers des chers,

Aux plus beaux de ce qu'a eu la terre,

A mon père et ma mère.

Aux meilleurs des frères,

Razik et sa femme et leur filles,

Abde nour et sa femme,

Djilali, Samir, Loucif et Bilal,

A ma sœur Linda son mari et leurs enfants,

A ma sœur Nassima,

A la fille de mon frère DORA (Linar) la chouchou de Hammam.

A la mémoire de mes grands-pères et mères,

A toute ma grande famille,

A mes cousins et cousines.

A tous mes amis (es).

A mon binôme Dalila.

Hamza

TABLE DES MATIERES

Introduction générale.....	2
----------------------------	---

Chapitre I : Généralités

I.1. Introduction	5
I.2. Définition de l'écoulement à la surface libre.....	5
I.3. Les canaux.....	5
I.3.1. Définition.....	5
I.3.2. Type de canaux.....	5
I.4. Géométrie des canaux.....	6
I.5. Les types d'écoulements dans les canaux	8
I.5.1. Variabilité dans le temps	9
I.5.2. Variabilité dans l'espace	10
I.6. Régimes d'écoulement	12
I.7. Répartition de vitesse	14
I.8. Répartition de pression.....	15
I.9. Onde de gravité.....	16
I.9.1. Célérité d'onde	16
I.9.2. Ecoulement avec onde	17
I.10. Conclusion	18

Chapitre II: Modélisation mathématique

II.1. Introduction	21
II.2. Hypothèses de base	21
II.3. Les équations du mouvement.....	22
II.3.1. Equation de continuité	22
II.3.2. Equation de la quantité de mouvement.....	24
II.4. Evaluation des variables Q,V et h en fonction du temps pendant une crue.....	26
II.5. Modèles simplifiés.....	28
II.5.1. Modèles à inertie prépondérante et frottements négligeable.....	29
II.5.2. Modèles à frottements prépondérants et inertie négligeable.....	30
II.5.3. L'onde diffusive	31
II.5.4. L'onde cinématique	31
II.6. Conclusion	32

Chapitre III : Résolution numérique

III.1. Introduction	34
III.2. Aperçu sur les différentes méthodes numériques.....	34
III.2.1. Méthode des éléments finis	34
III.2.2. Méthode des volumes finis	35
III.2.3. Méthode des différences finies	35
III.2.3.1. Analyse de l'approximation	37
III.3. Schéma explicite, schéma implicite.....	38

III.4. Modèles numérique couramment utilisée	38
III.4.1. Les schémas aux différences finies implicites fréquemment utilisés.....	38
III.4.2. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés.....	38
III.4.3. Comparaison des schémas explicites et implicites	39
III.5. Résolution du système par un schéma explicite (schéma de Lax)	40
III.5.1. Conditions initiales-conditions aux limites	42
III.5.1.1. Conditions initiales.....	42
III.5.1.2. Conditions aux limites	42
III.5.2. Condition de stabilité : Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)	47
III.6. Organigramme de calcul.....	47
III.7. Conclusion	48

Chapitre IV : Applications

IV.1. Introduction	51
IV.2. Simulation numérique.....	51
IV.2.1. Application I	51
IV.2.2. Application II	54
IV.3. Etude paramétriques.....	60
IV.3.1. Effet de la rugosité (nombre de Manning).....	61
IV.3.2. Effet de la pente de fond du canal (S_0).....	62
IV.3.3. Effet de la hauteur initiale	63
IV.3.4. Effet du nombre de Courant	64
IV.3.5. Effet du nombre de nœuds (N)	65
IV.4. Conclusion	67
 Conclusion générale	 69
Références bibliographiques	70
Annexe	73

NOTATIONS

A :	Section transversale (m^2)
A_m :	Section mouillée (m^2)
a :	Pas de discrétisation des schémas aux différences finies
b :	Largeur en surface du canal (m)
C^+ , C^- :	Courbe caractéristique positive, négative (m)
C :	Célérité d'onde (m/s^2)
C_w :	Célérité d'onde absolue (m/s)
C_f :	Coefficient de frottement
C_r :	Nombre de courant
D_h :	Profondeur hydraulique (m)
f :	Fonction quelconque
F_r :	Nombre de Froude
F_f :	Force de frottement
F_p :	Force de pression
F_{P1} :	Force de pression dirigée vers l'aval
F_{P2} :	Force de pression dirigée vers l'amont à dx
F_{P3} :	Force de pression dirigée vers l'amont à x
g :	Accélération de la pesanteur (m/s^2)
H :	Hauteur d'eau (m)
h :	Profondeur (m)
h_i :	Profondeur de l'écoulement au niveau de la section i
i :	Indice du maillage suivant la direction x ;(pas de variation dans l'espace)
L :	Longueur de canal (m)
N_x :	Paramètre de discrétisation suivant x
n :	Indice de pas de temps pour les grandeurs hydrauliques
P_g :	Force de gravité
P_{gx} :	Composante de la force de gravité suivant x
P_{gy} :	Composante de la force de gravité suivant y
P_m :	Périmètre mouillé (m)
P_p :	Pression

Q :	Débit d'écoulement (m^3/s)
q :	Débit liquide unitaire
q_i :	Débit liquide latéral par unité de longueur (m^3/s)
R_e :	Nombre de Reynolds
R_h :	Rayon hydraulique (m)
S_f :	Pente de la surface libre (m/m)
S_o :	Pente de fond du canal (m/m)
T :	Le temps de translation de l'onde le long du bief
t :	Temps (s)
U :	Composante de la vitesse de l'écoulement suivant la direction x
V :	Vitesse (m/s)
V_i^n :	Vitesse d'écoulement aux pas d'espace i x et au pas de temps n t (m/s)
V_1 :	Volume entrant par face (1) (m^3)
V_2 :	Volume sortant par face (2) (m^3)
$\tilde{V}_x^+, \tilde{V}_x^-$:	Valeurs approchées des dérivées spatiales, prédiction A
\bar{V}_x^+, \bar{V}_x^- :	Valeurs approchées des dérivées spatiales, prédiction B
\hat{V}_x^+, \hat{V}_x^- :	Valeurs approchées des dérivées spatiales, corrigées de A ou B
x :	Coordonnées spatiale longitudinale
α :	Angle d'inclinaison du fond
β_j :	Coefficient d'implication dans les schémas aux différences finies
θ :	Rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$
Θ :	Coefficient de pondération pour l'onde cinématique
θ :	Valeurs propres
+	Valeurs propres positives
-	Valeurs propres négatives
ρ :	La masse volumique du fluide
τ :	Force de frottement par unité du surface
Δx :	Pas de discrétisation spatial
Δt :	Temps d'incrémentation
ΔV :	Variation de volume

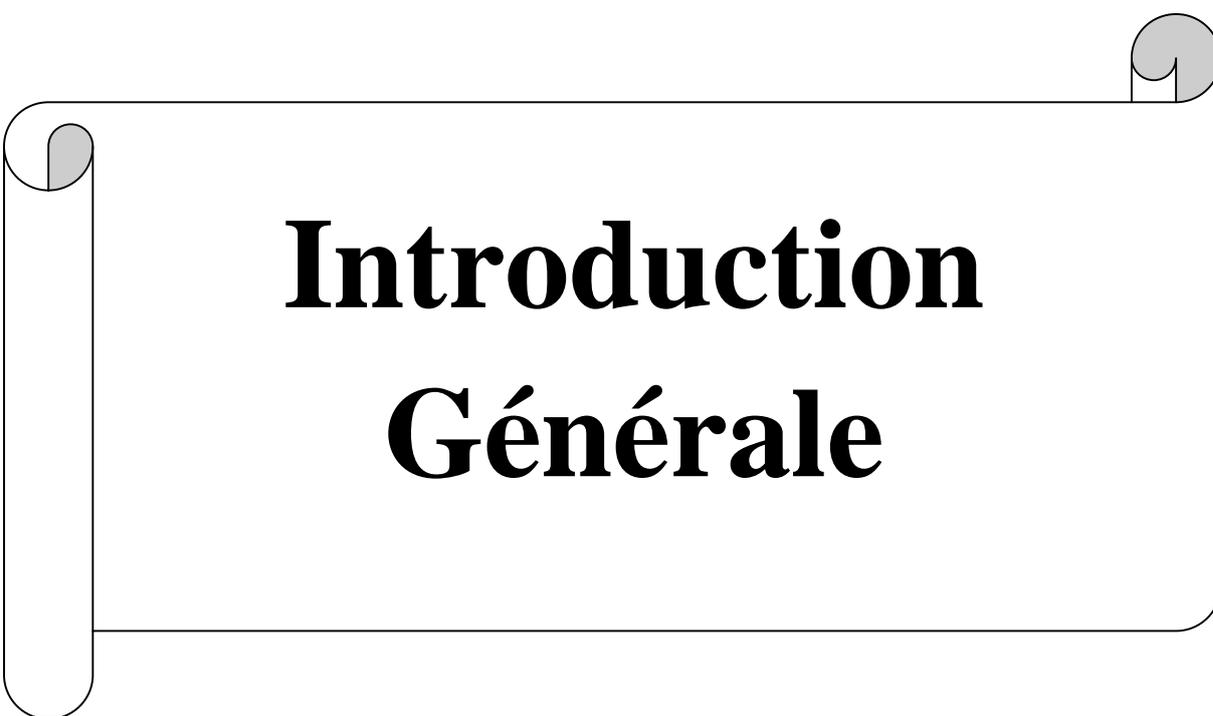
LISTE DES FIGURES

Figure I.1: Section transversale d'un canal naturel	6
Figure I.2: Canaux artificiels	6
Figure I.3: Eléments géométriques d'une section d'un canal.....	7
Figure I.4: Schéma d'un écoulement permanent.....	9
Figure I.5: Schéma d'un écoulement non permanent.....	9
Figure I.6: Schéma d'un écoulement uniforme.....	10
Figure I.7: Schéma d'un écoulement non uniforme	10
Figure I.8: Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés	11
Figure I.9: Schéma des types d'écoulement	12
Figure I.10: Les régimes d'écoulement.....	14
Figure I.11 : Profil logarithmique de la vitesse	14
Figure I.12: Répartition de vitesse	15
Figure I.13 : Ecoulement sur fond concave	16
Figure I.14: Schéma d'une onde dans un canal.....	17
Figure I.15: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas fluvial).....	18
Figure I.16: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas torrentiel)	18
Figure I.17: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas critique).....	18
Figure II.1: Schéma pour l'équation de continuité... ..	22
Figure II.2: Les forces agissant sur un élément fluide	24
Figure II.3: Evolution des variables V, Q et h en fonction du temps (t) au cours d'une Cruée.....	27
Figure II.4: Evolution des variables h et Q en une section donnée au cours d'une crue.....	27
Figure II.5.a : Ondes cinématique vue par un observateur stationnaire.....	28
Figure II.5.b : Ondes dynamique vue par un observateur stationnaire	29

Figure III.1: Natation de grille de calcul	41
Figure III.2: Schéma de résolution explicite	43
Figure III.3: Illustration de la notion de conditions aux frontières	44
Figure III.4 : Application de la méthode des caractéristiques aux frontières du domaine de calcul	44
Figure IV.1: Ecoulement dans un canal à section rectangulaire avec présence de vanne.....	51
Figure IV.2: Profil de la ligne d'eau (dissipation artificielle)	52
Figure IV.3: Profil de la surface d'eau (pas de dissipation artificielle)	53
Figure IV.4: Ecoulement dans un canal rectangulaire après fermeture d'une vanne	53
Figure IV.5: Ecoulement dans un canal à section transversale trapézoïdal avec présence de vanne	55
Figure IV.6: Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 500$ s	56
Figure IV.7: Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 1000$ s	56
Figure IV.8: Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 1500$ s	57
Figure IV.9: Profile longitudinale d'un canal trapézoïdal.....	58
Figure IV.10: Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x = 2500$ m	59
Figure IV.11: Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x = 5000$ m	59
Figure IV.12: Effet de la rugosité (nombre de Manning)	62
Figure IV.13 : Effet de la pente de fond du canal	63
Figure IV.14: Effet de la hauteur initiale	64
Figure IV.15: Effet du nombre de Courant	65
Figure IV.16: Effet du nombre de nœuds N	66
Figure A.1: Représentation dans l'espace (x, t, h) de la propagation d'une onde et de la courbe C^+ correspondante	76
Figure A.2: Propagation d'une onde dans le plan (x, t)	76
Figure A.3: Les conditions de frontière pour une vanne	78

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Eléments géométriques pour différents types des canaux	8
Tableau III.1 : Tableau des coefficients de pondération des schémas aux différences finie..	35
Tableau IV.1 : Données relatives à l'application I	49
Tableau IV.2 : Comparaison des résultats (application I)	51
Tableau IV.3 : Données relatives à l'application II	52
Tableau IV.4 : Comparaison des résultats (application II).....	57
Tableau IV.5 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Manning).....	58
Tableau IV.6 : Données relatives à l'étude paramétrique (la pente de fond du canal)	59
Tableau IV.7 : Données relatives à l'étude paramétrique (la hauteur initiale)	60
Tableau IV.8 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Courant)	61
Tableau IV.9 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de nœuds)	63



Introduction Générale

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté il y a déjà plus de 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre en rivière, en canaux,...etc.

La compréhension et la prévision du comportement de l'écoulement à surface libre à un intérêt stratégique. La prévision des crues et les délinéations ; la conception des ouvrages de protection contre les crues, des évacuateurs de crues et des canaux de déviation et l'évaluation de l'impact de rupture de barrage sont autant de sujets, parmi beaucoup d'autres, qui requièrent de façon cruciale une bonne maîtrise des phénomènes de l'hydraulique et de la mécanique des fluides. Des approches de maîtrise passent d'abord par l'étude de ces phénomènes sur des maquettes et des modèles physiques. Ces derniers, et avec le développement intensif des moyens de calcul, ont progressivement cédé du terrain face à la modélisation numérique. Aujourd'hui, l'ordinateur est un outil incontournable d'investigation numérique sur les modèles physiques, bien qu'il reste indispensable dans quelques domaines clés comme les évacuateurs de crue et la stabilité des digues, il est devenu sur d'autres sujets un outil de validation.

Les écoulements brusquement instationnaires qui ont lieu lors de fermeture brusque d'une vanne, dans le cas d'un canal à ciel ouvert se caractérisent par une surélévation brusque et par une agitation marquée et de grandes pertes d'énergie. Ces écoulements peuvent se manifester de différentes manières compte tenu du nombre de Froude. Leurs caractéristiques hydrauliques commencent à varier très faiblement, ensuite elles s'accroissent jusqu'à générer de petits tourbillons superficiels. Ce phénomène devient pulsatoire et une grande turbulence prend sa valeur maximale soit près du fond soit en surface. Des pulsations donnent naissance à des ondes de période irrégulières et ces ondes peuvent se propager sur de très longues distances entraînant dans leurs sillages des transports de différentes natures, conséquence des contraintes sur le fond exercées par ces écoulements à très grandes vitesses.

Les écoulements instationnaires dans les canaux et rivières regroupent un certain nombre de phénomènes naturels très complexes, en particulier la propagation des ondes qu'elles soient de gravité ou de crues.

Dans la présente étude, l'accent sera mis prioritairement sur le comportement dynamique de l'écoulement dans un canal à surface libre. Le cas particulier des écoulements transitoires sera étudié.

L'intégration numérique des équations aux dérivées partielles gouvernantes nous permettra de mieux comprendre le phénomène étudié.

Ce mémoire regroupe en plus d'une introduction générale, quatre parties rédigées sous forme des chapitres.

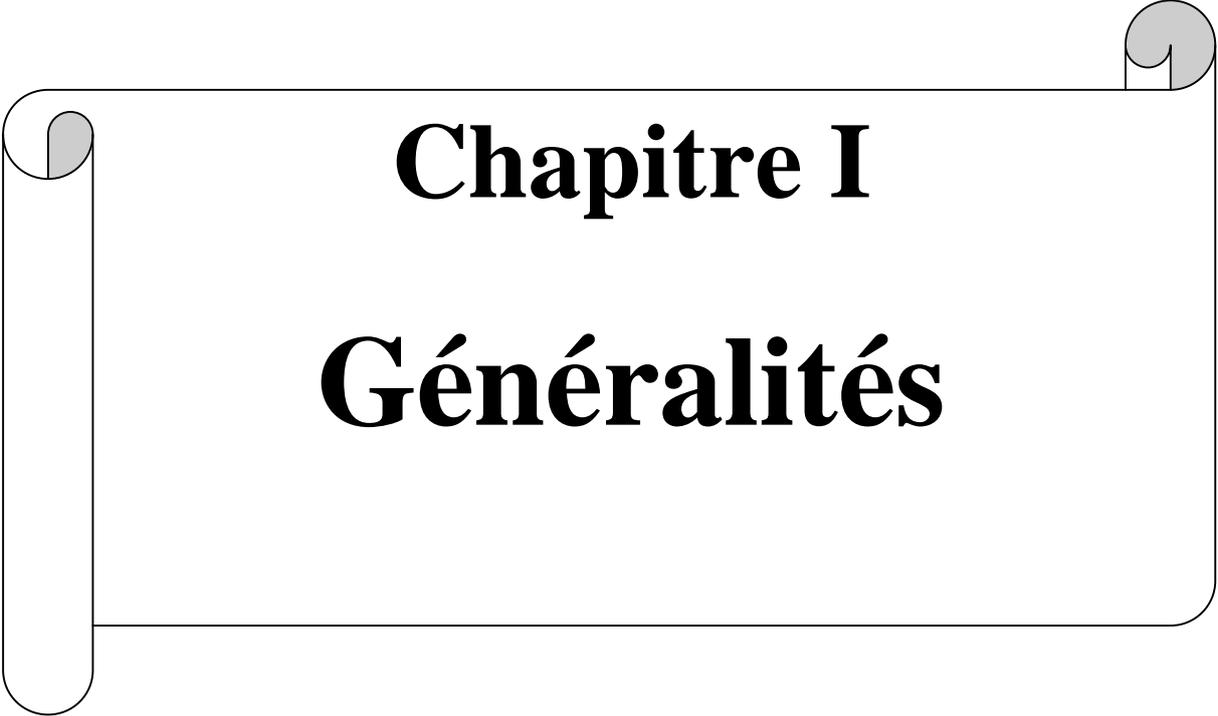
Dans le Chapitre I, nous présentons une généralité sur les différents paramètres caractéristiques de ces écoulements ainsi que la forme et la nature des canaux qui les contient, et en terminera par un aperçu sur la notion d'onde de gravité et les écoulements avec onde.

Dans le Chapitre II, un modèle mathématique a été développé pour décrire l'écoulement des liquides dans les canaux à ciel ouvert. Dans les écoulements à surface libre, le modèle le plus utilisée est celui donné par les équations de Saint-Venant et qui constitue la base de notre étude. Il est obtenu à partir de l'équation de continuité et de la conservation de la masse en utilisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Au Chapitre III, nous allons présenter la discrétisation des équations de Saint-Venant par le schéma de Lax, dans le but de les résoudre en utilisant la méthode des différences finies qui a été utilisés pour d'écrire le problème de ce travail.

Le Chapitre IV, est consacré à l'interprétation des résultats relatifs à une simulation numérique avec le modèle élaboré. Ces résultats concernent les profils des hauteurs obtenues. Cette étude sera suivie d'une étude paramétrique afin de voir l'influence de quelques paramètres hydrauliques et numériques sur l'écoulement, notamment l'effet de la pente de fond, de la rugosité du fond, la hauteur initiale, le nombre de nœuds et du nombre de Courant. Les résultats obtenus feront l'objet d'analyse et de critique.

Nous terminerons par une conclusion générale qui englobera les principaux résultats obtenus dans ce modeste travail.



Chapitre I

Généralités

I.1. Introduction

L'hydraulique est un élément indispensable à la vie. Les observations effectuées sur les écoulements ont produit une somme considérable d'appréciations qualitatives et quantitatives que les progrès de l'informatique ont pu, ces dernières décennies, mettre sous forme numérique.

L'hydraulique traite, entre autre, des écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une surface libre soumise à la pression atmosphérique.

Dans ce chapitre, nous essayons de donner une vue générale sur les différents types de canaux, les caractéristiques et la classification des écoulements à surface libre. Nous abordons notamment quelques notions fondamentales nécessaires à l'étude des écoulements à surface libre, puis nous soulignerons plus spécifiquement les divers types des écoulements.

I.2. Définition de l'écoulement à surface libre

L'écoulement à surface libre fait partie de l'écoulement gazeux-liquides ou liquide-liquide. La modélisation de ce type d'écoulement nécessite un découpage du domaine global de calcul en deux sous domaines non miscibles séparés par une interface bien définie qui présente la surface libre [3, 13].

Le premier est constitué d'un volume d'eau et le deuxième, situé dans la partie supérieure du domaine d'étude, est rempli d'air.

I.3. Les canaux

I.3.1. Définition

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique.

On distingue cependant les canaux prismatiques des canaux non prismatiques. En effet lorsque la section, la pente de fond, et la rugosité d'un canal sont constantes, le canal est dit prismatique, sinon il est non prismatique.

I.3.2. Type des canaux

On distingue deux catégories de canaux suivant les propriétés géométrique et hydraulique :

a. Les canaux naturels

Les canaux naturels sont les cours d'eau qui existent naturellement sur terre, tels que les ruisselets, rivières, fleuves et estuaires. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus moyennant certaines hypothèses (Figure I.1).

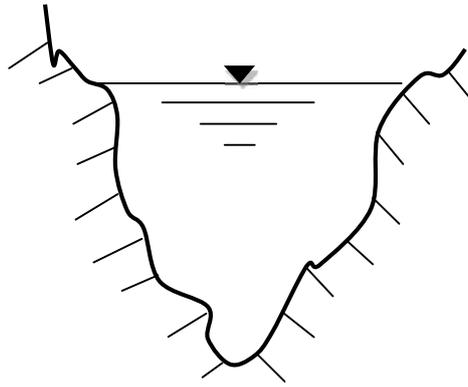


Figure I.1 : Section transversal d'un canal Naturel

b. Les canaux artificiels

Ce sont des cours d'eau réalisés par l'homme tel que les canaux découverts construits ou ras de sol, les galeries, les tuyaux de drainages, ...etc. Autrement dit, la plupart des ouvrages de ce type utilisés dans la pratique hydrotechnique et d'aménagement des eaux. Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne souvent des résultats satisfaisants (Figure I.2).

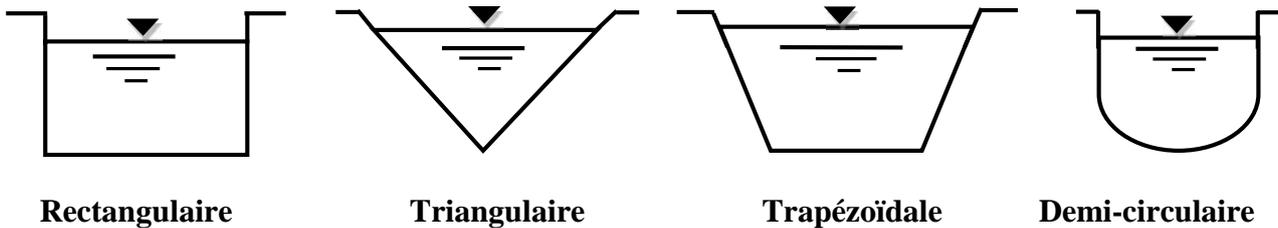


Figure I.2 : Canaux artificiels

I.4. Géométrie des canaux

Un canal à surface libre est composé des éléments géométriques définis dans le tableau (I.1) et la Figure (I.3) ci-dessous [13] :

- La section transversale A .
- La section mouillée A_m .
- Le périmètre mouillée P_m .
- Le rayon hydraulique R_h qui est le rapport de la section mouillée et le périmètre mouillé :

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (I.1)$$

- La largeur en surface du canal, notée B , est la distance séparant les berges opposées (ou point de contact air-liquide).
- La profondeur hydraulique D_h (le rapport de la section mouillée A_m et la largeur en surface B).

$$D_h = \frac{A_r}{B} \quad (I.2)$$

- La profondeur h , appelée aussi hauteur ou tirant d'eau.
- La pente de la surface libre (piézométrique) S_f .
- La pente de fond du canal S_0 .

La valeur de la pente de fond dépend essentiellement de la topographie et de la constitution du terrain. Cette pente généralement faible, peut être exprimée par :

$$S_0 = \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \quad (I.3)$$

α : L'inclinaison de la paroi du fond.

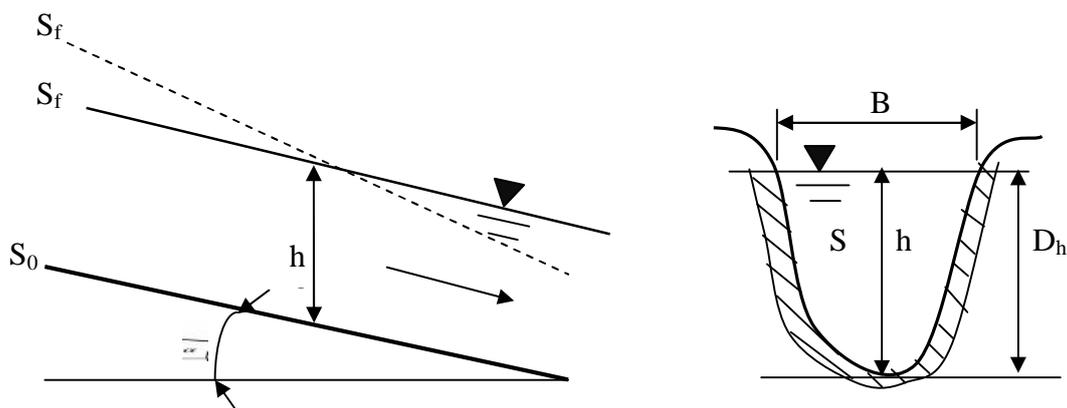
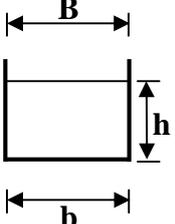
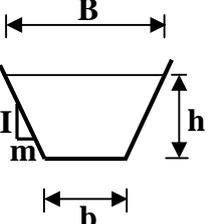
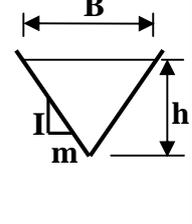
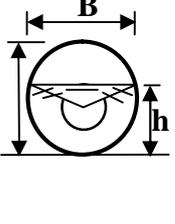
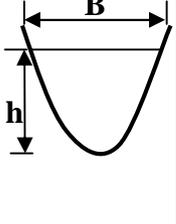


Figure I.3: Eléments géométriques d'une section d'un canal

Tableau I.1 : Eléments géométriques pour différentes types de canaux

					
	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
Surface A_m (m ²)	$b h$	$(b + m h) h$	$m h^2$	$\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)D_h^2$	$\frac{2}{3}B h$
Périmètre Mouillé P_m (m)	$b + 2h$	$b + 2h\sqrt{1 + \frac{m^2}{}}$	$2h\sqrt{1 + \frac{m^2}{}}$	$\frac{1}{2} \theta D_h$	$B + \frac{1}{8} \frac{B^2}{h}$
Rayon Hydraulique R_h (m)	$\frac{b h}{b + 2h}$	$\frac{(b + m h) h}{b 2h\sqrt{1 + \frac{m^2}{}}}$	$\frac{m h}{2\sqrt{1 + \frac{m^2}{}}}$	$\frac{1}{4} \left[1 - \frac{\sin\theta}{\theta} \right] \frac{2B}{3B^2}$	$\frac{2B^2 h}{3 B^2 + 8h^2}$
Largeur de surface B (m)	b	$b + 2m h$	$2mh$	$\frac{(\sin\theta/2) D_h}{2\sqrt{h (D_h - h)}}$	$\frac{3 A_m}{2 h}$
Profondeur Hydraulique D_h (m)	h	$\frac{(b + m h) h}{b + 2mh}$	$\frac{1}{2} h$	$\left[\frac{\theta - \sin\theta}{8} \right] \frac{D_h}{h}$	$\frac{2}{3} h$

I.5. Les types d'écoulements dans les canaux

L'écoulement de l'eau dans un lit ouvert est appelé à surface libre, il a lieu sous l'action des forces de gravité et est caractérisé par une présence obligatoire d'une surface libre du courant.

Il faut souligner que l'écoulement de l'eau libre est un phénomène beaucoup plus complexe que l'écoulement en charge parce qu'une telle surface entraîne des variations des sections liquides suivant la longueur du courant même en présence d'obstacles insignifiants. Les écoulements peuvent être répartis suivant plusieurs paramètres comme le temps, l'espace, la viscosité,...etc. Cette répartition donne les différents types suivants [8, 15] :

- Permanent ou non permanent si le paramètre est le temps.
- Uniforme ou non uniforme si le paramètre est l'espace.

- Torrentiel ou fluvial selon Froude.
- Laminaire ou turbulent selon Reynolds.

On s'intéressera aux paramètres temps et espace dans la suite de notre étude.

I.5.1. Variabilité dans le temps

a. *Écoulement permanent*

Le mouvement est permanent si les vitesses moyennes V est ponctuelle, v , ainsi que la profondeur h ou D_h restent invariables dans le temps en grandeur et en direction (Figure I.4). Par conséquent, le débit est constant ($Q = VA_m$) [13].

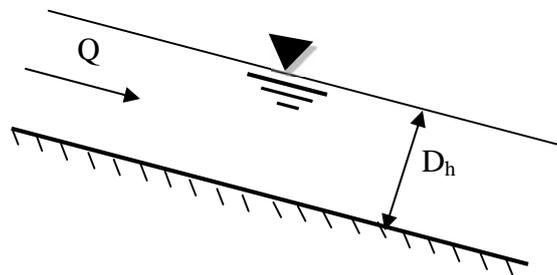


Figure I.4 : Schéma d'un écoulement permanent

b. *Écoulement non permanent*

Le mouvement est non permanent si la profondeur, $D_h(t)$, ainsi que les autres paramètres varient avec le temps. Le débit n'est pas constant (Figure I.5). Si les variations sont assez lentes et progressives, l'écoulement de l'eau est graduellement varié, dans le cas contraire, l'écoulement de l'eau est rapidement varié.

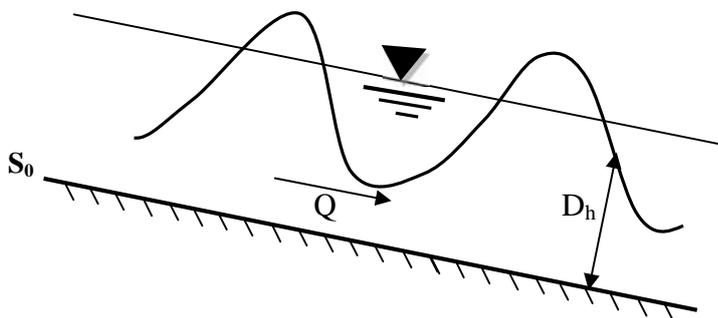


Figure I.5 : Schéma d'un écoulement non permanent

I.5.2. Variabilité dans l'espace

a. Écoulement uniforme

Le mouvement est uniforme si la profondeur, D_h , ainsi que les autres paramètres restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a : $S_f = S_0$. On le rencontre généralement dans les canaux artificiels (Figure I.6) [4, 13].

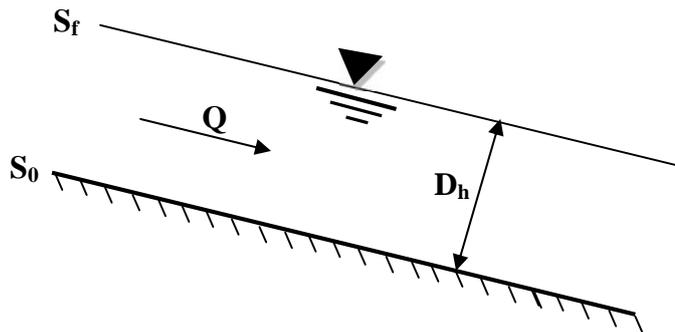


Figure I.6: Schéma d'un écoulement uniforme

b. Écoulement non uniforme ou varié

Le mouvement est non uniforme ou varié, si la profondeur D_h , ainsi que les autres paramètres changent d'une section à une autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre $S_0 \neq S_f$. Il peut être permanent, non permanent, accéléré, ou décéléré, suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement (Figure I.7) [4, 13].

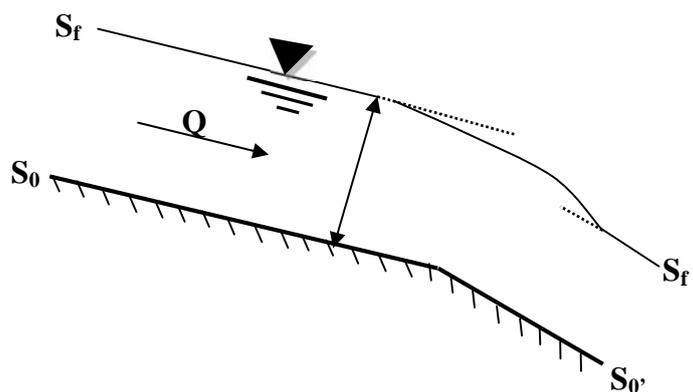


Figure I.7 : Schéma d'un écoulement non uniforme

Dans les lits non prismatiques, nous avons toujours un écoulement non uniforme, alors que la variation de l'aire de la section du courant liquide en longueur n'est due qu'à la variation de la largeur du lit ou aux dépend de la variation simultanée de la largeur du lit et la profondeur de remplissage.

Dans les lits prismatiques, l'écoulement non uniforme n'a lieu qu'à la variation de la profondeur de remplissage en longueur du lit. Par conséquent, l'écoulement non uniforme dans les lits prismatiques n'apparaît qu'aux moments où l'écoulement uniforme se trouve perturbé par quelques facteurs dans les principaux sont les suivants (Figure I.8) :

1. Le remous de l'eau dû aux obstacles naturels ou artificiels (Ouvrages hydrotechniques).
2. La décrue de l'eau en présence des ouvrages déversoirs de type chutes et coursiers.
3. Une brusque variation de la rugosité du lit en sa longueur.
4. Un brusque changement de la pente du lit.

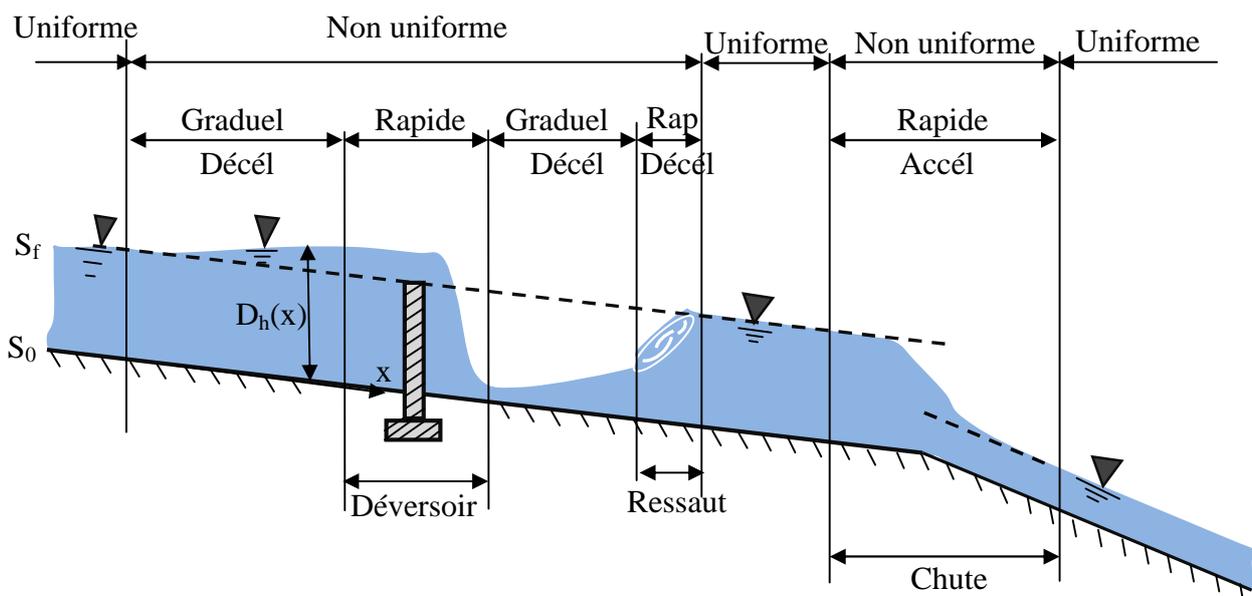


Figure I.8 : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés

Ainsi, les types d'écoulement qu'on peut rencontrer en hydraulique peuvent être résumés comme suit [13] :

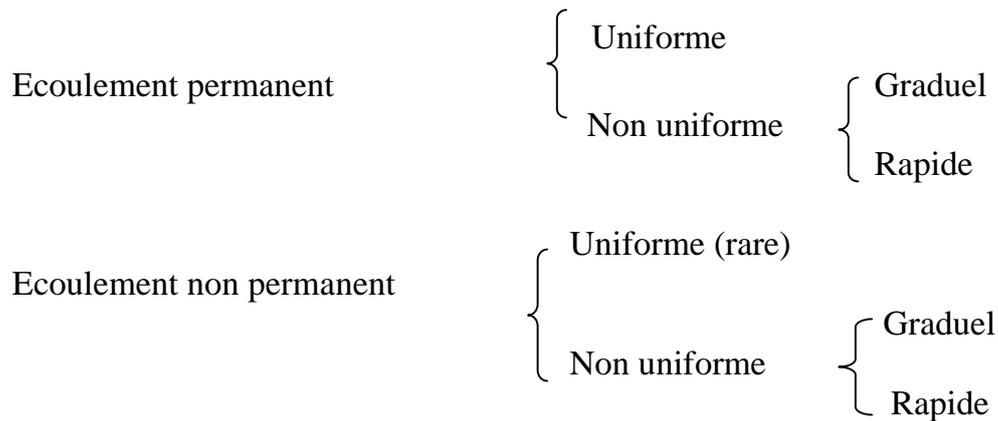


Figure I.9 : Schéma des types d'écoulement

I.6. Régimes d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes [13] :

- Forces d'inertie.
- Forces de gravité.
- Forces de frottement (viscosité et rugosité).

Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients ou nombres adimensionnels suivants:

- Le nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité ou [13]:

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gL_c}} \quad (I.4)$$

Le rôle de nombre de Froude est de permettre le classement des écoulements comme suit :

- Écoulement fluvial $Fr < 1$,
- Écoulement torrentiel $Fr > 1$,
- Écoulement critique $Fr = Fr_c = 1$.

Dans la pratique, on peut rencontrer ces trois types d'écoulement.

- Le nombre de Reynolds, qui est le rapport entre les forces d'inertie et celles viscosité ou [13]:

$$\text{Re} = \frac{V_C L_C}{\nu} \quad (\text{I.5})$$

Le rôle de nombre de Reynolds est de permettre le classement des écoulements comme suit:

- Ecoulement laminaire $\text{Re} < 500$.
- Ecoulement turbulent $\text{Re} > 2000$
- Transition $500 < \text{Re} < 2000$.

Les expériences avec différents canaux artificiels montrent que l'écoulement est turbulent dès que le nombre de Reynolds, Re , atteint des valeurs de deux mille (2000).

Dans la pratique, on ne rencontre en général que des écoulements turbulents, souvent rugueux.

Par conséquent, les effets du nombre de Reynolds, Re , et de nombre de Froude, Fr donnent quatre régimes d'écoulements :

- Fluvial - laminaire $\text{Fr} < 1, \text{Re} < 500$
- Fluvial- turbulent $\text{Fr} < 1, \text{Re} > 2000$
- Torrentiel - laminaire $\text{Fr} > 1, \text{Re} < 500$
- Torrentiel-turbulent $\text{Fr} > 1, \text{Re} > 2000$

Une relation profondeur / vitesse, tirée d'expériences par Robertson et Rouse, est donnée dans (Figure I.10) pour des canaux rectangulaires très larges [13].

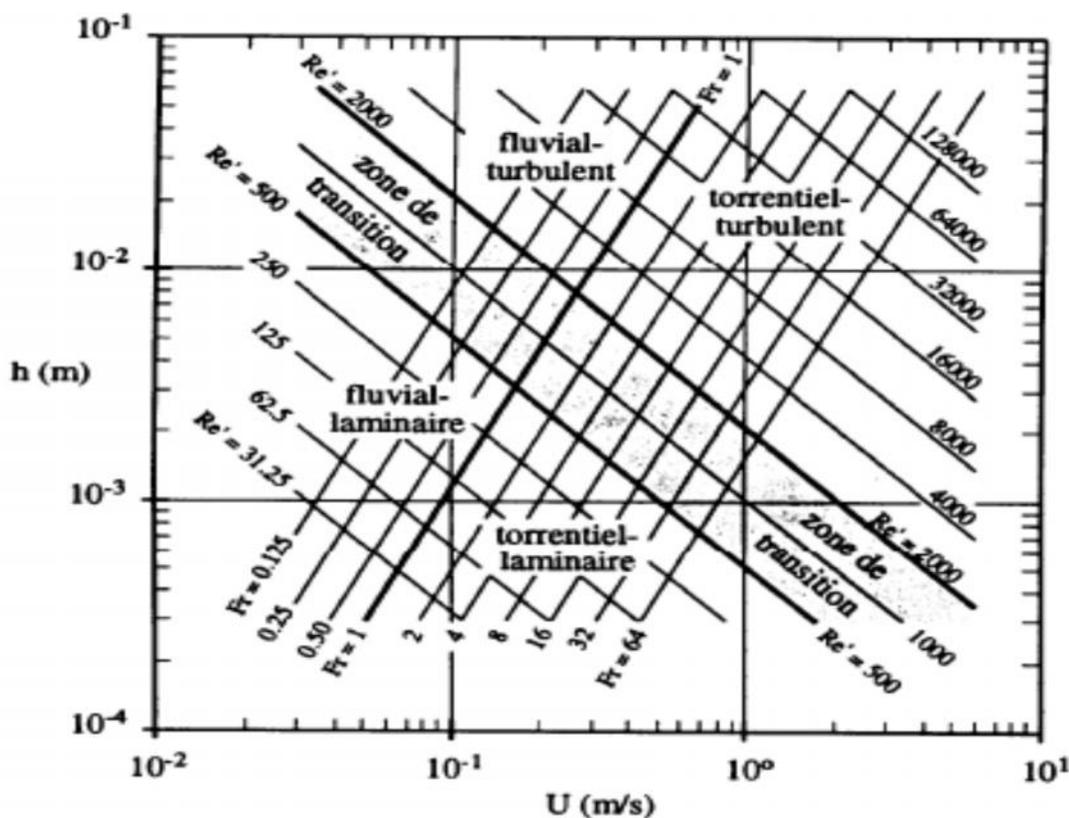


Figure I.10 : Les régimes d'écoulement [13]

I.7. Répartition de vitesse

Dans un écoulement le long d'une paroi, il y a répartition de vitesse. Nulle à la paroi, la vitesse ponctuelle, v , croît rapidement lorsqu'on s'en éloigne; la valeur maximum est souvent atteinte un peu en dessous de la surface libre. Le profil de vitesse est approximativement logarithmique (figure I.11) [13].

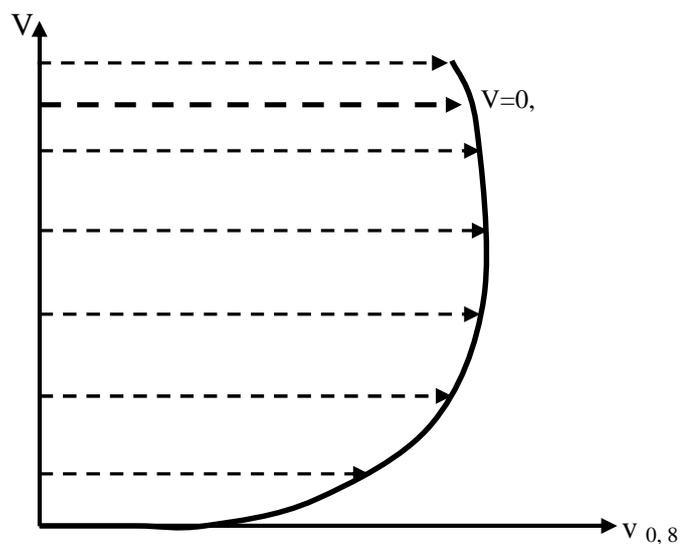


Figure I.11 : Profil logarithmique de la vitesse

Un écoulement permanent dépend généralement de trois variables, x , y et z ; on l'appelle écoulement tridimensionnel.

Dans les canaux de géométrie simple, on rencontre généralement que des écoulements turbulents où la vitesse ponctuelle, $v(x, z)$, diffère très peu de la vitesse moyenne, $V(x)$. En régime permanent, cette hypothèse permet de considérer ces écoulements comme unidimensionnels.

Pour déterminer la vitesse moyenne, V , dans une section, on donne les relations approximatives suivantes (Figure. I.12) [13] :

$$\begin{aligned} V &= (0.8 \text{ à } 0.9) v_s \text{ (Formule de Prony)} \\ V &= 0.5 (v_{0.2} + v_{0.8}) \text{ (Formule de l'USGS)} \\ V &= v_{0.4} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Où : $v_{0.2}$, $v_{0.8}$, $v_{0.4}$ et v sont les vitesses à l'endroit donné.

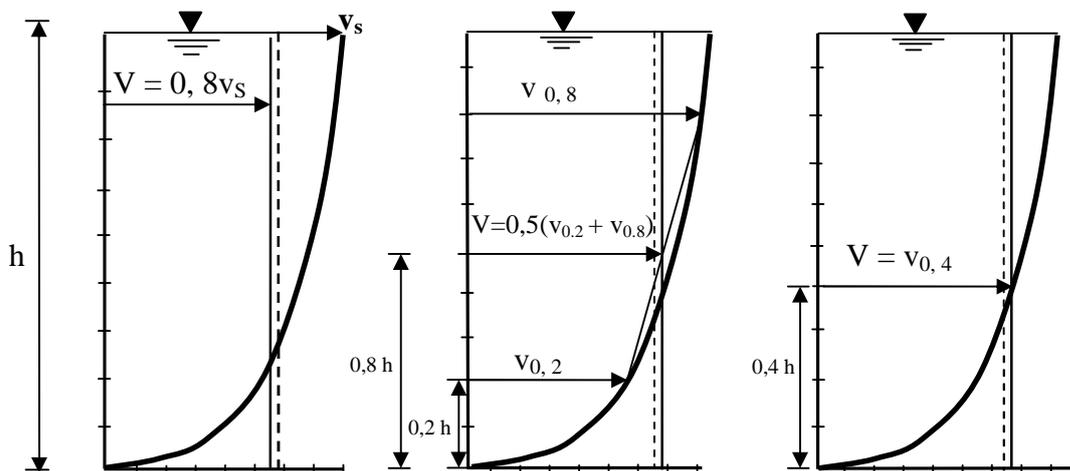


Figure I.12 : Répartition de vitesse

I.8. Répartition de pression

L'écoulement intrinsèque du mouvement permanent d'un fluide incompressible (Figure I.13), selon la composante normale ($n = z$), s'écrit [13] :

$$V \left(\frac{V^2}{r} \right) = - \frac{1}{\dots} \frac{\partial}{\partial n} (p + \gamma z) \quad (\text{I.7})$$

Où (V^2 / r) est l'accélération centrifuge d'une masse qui se déplace selon une ligne courbe de rayon r . En admettant que V et r restent sensiblement constants et après intégration de l'équation (I.7), on écrit:

$$(p + \rho z') = - \int_0^z \frac{\rho V^2}{r} dn + \text{cte} = - \frac{\rho V^2}{r} z + \text{cte} \quad (\text{I.8})$$

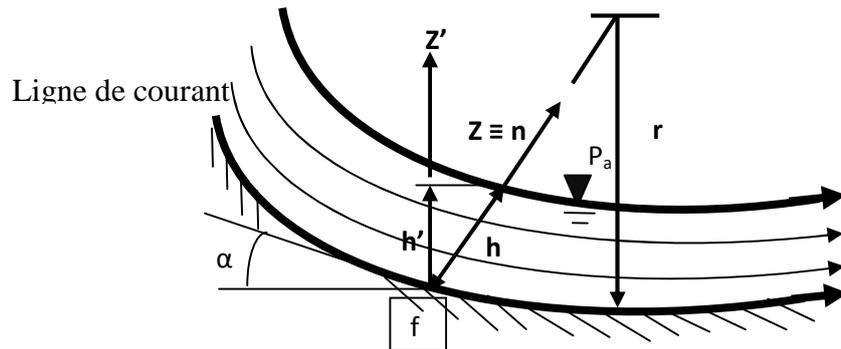


Figure I.13 : Écoulement sur fond concave

Pour un point au fond du canal et un point à la surface libre, on écrit respectivement:

$$\text{Pour } z = 0 \text{ (} z' = 0 \text{)} : p = p_f \quad \text{d'où : } p_f = \text{Cste}$$

$$\text{Pour } z = h \text{ (} z' = h \text{)} : p = p_a \quad \text{d'où : } p_a + \rho h' = - \frac{\rho V^2}{r} h + \text{Cste}$$

Une expression pour la pression relative (par rapport à la pression atmosphérique) sur le fond est donnée par:

$$p_f = \rho h' + \frac{\rho V^2}{r} h + p_a = 0 \quad (\text{I.9})$$

Avec des contributions hydrostatiques et accélératrices.

I.9. Onde de gravité

Les écoulements non permanents se manifestent par des ondes de gravité à leur surface, c'est une caractéristique des écoulements variables dans le temps.

I.9.1. Célérité d'onde

La célérité d'onde est la vitesse de l'onde par rapport au niveau normal du liquide dans le canal.

Dans un canal avec un écoulement non uniforme dans le temps se manifeste par une onde gravitée à la surface libre (Figure I.14). La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude, donne pour la vitesse apparente de propagation, également appelée célérité d'une intumescence [13] :

$$C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tan h \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (\text{I.10})$$

Où : h est la profondeur d'eau, la célérité ne dépend pas de la hauteur d'onde h . Cette formule dépend de :

- Pour les ondes courtes ou ondes de grande profondeur ($L/H \gg 1$), on a : $C^2 = \frac{gL}{2\pi}$.
- Pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur ($L/H \ll 1$), on a : $C^2 = gh$.
- Pour une section quelconque, on a : $C^2 = gD_h$; selon cette expression de C , la célérité peut avoir deux valeurs égales en valeur absolue. Cela indique tout simplement que la propagation de l'onde peut s'effectuer dans deux directions opposées X^- et X^+ .

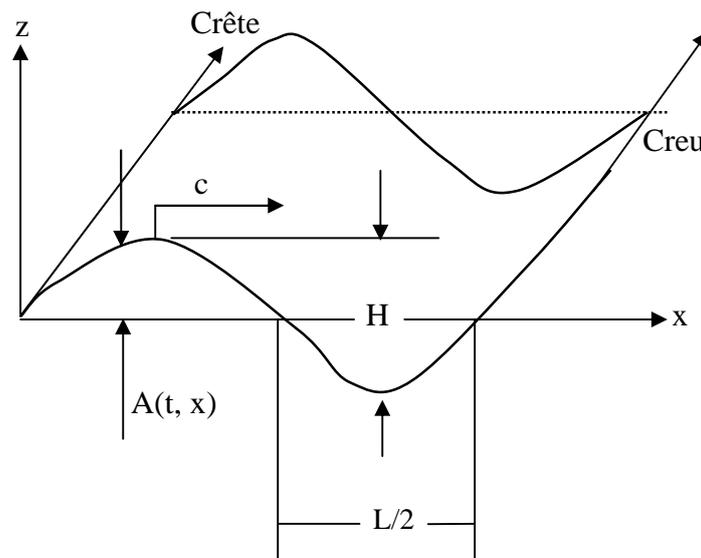


Figure I.14 : Schéma d'une onde dans un canal

I.9.2. Ecoulement avec onde

La relation $C^2 = gD_h$ a été démontrée par Lagrange pour un canal rempli d'eau au repos. Elle reste cependant valable même dans le cas où l'eau est en mouvement ; l'onde qui se superpose à ce courant est donnée par $C_w = V + C$ appelée célérité absolue.

La célérité absolue C_w représentant la vitesse par rapport au fond du canal valeurs qui sont :

$$C'_w = V + \sqrt{gD_h} \quad (\text{I.11})$$

$$C''_w = V - \sqrt{gD_h} \quad (\text{I.12})$$

V : vitesse moyenne d'écoulement dans le canal, on distingue trois cas :

- **1^{er} cas** : $V < C$ où l'onde avec la célérité C'_w se propage vers l'aval et avec C''_w se propage vers l'amont. C'est le régime fluvial (Figure I.15).

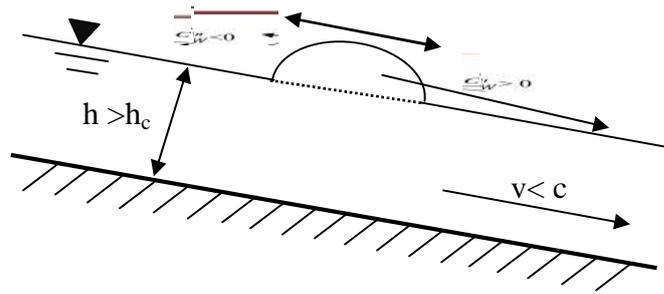


Figure I.15 : Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas fluvial)

- **2^{ème} cas** : $V > C$, où l'onde avec C'_W se propage vers l'aval et celle avec C''_W se propage aussi vers l'aval : c'est le régime torrentiel (Figure I.16).

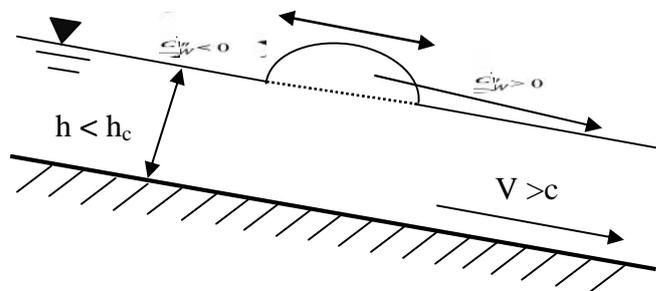


Figure I.16: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas torrentiel)

- **3^{ème} cas** : $V = C$ où l'onde avec la célérité C'_W se propage vers l'aval et ou celle avec C''_W reste stationnaire : c'est le régime critique $h_c \equiv h$ (Figure I.17)

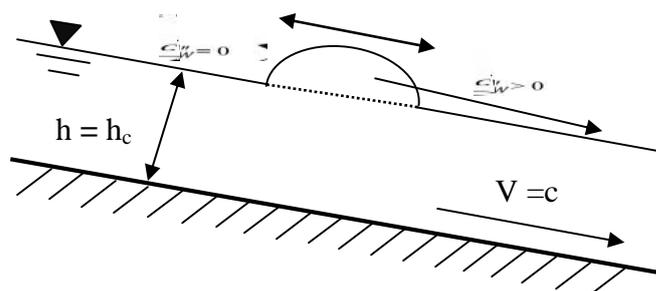
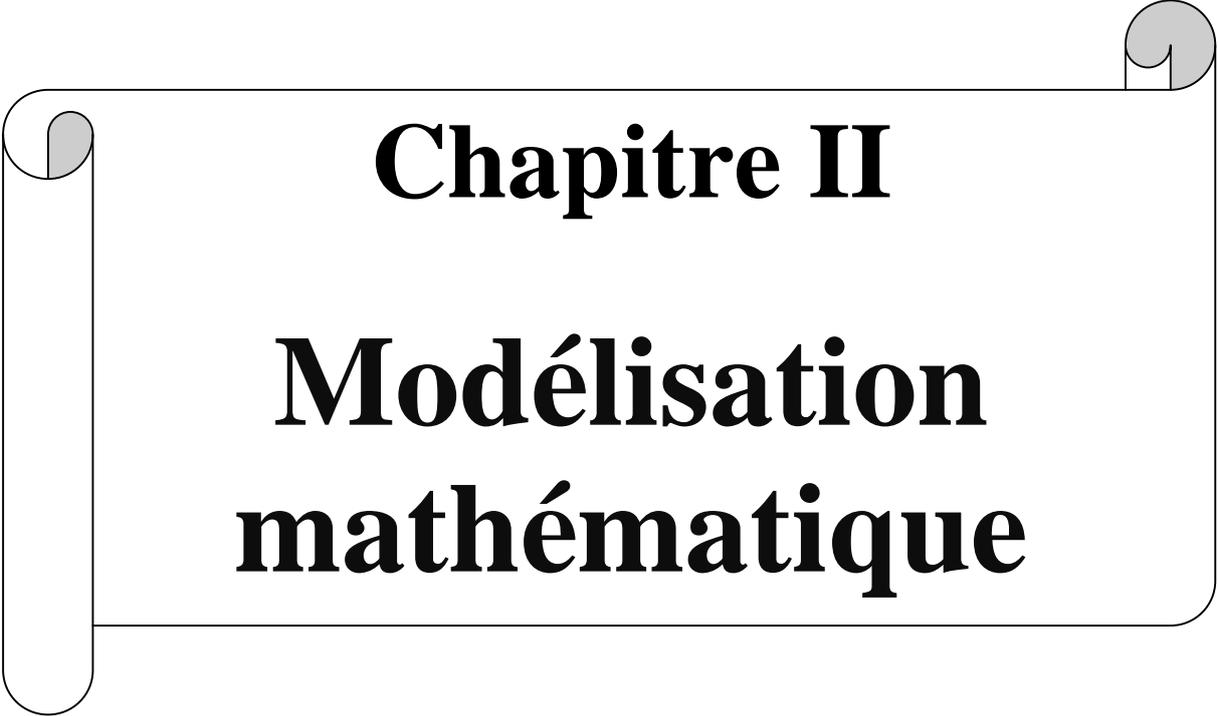


Figure I.17: Représentation schématique des deux valeurs de l'onde (Le cas critique)

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions sur les caractéristiques et la classification des écoulements à surface libre pour différents types des canaux, ainsi que la répartition des vitesses, la répartition des pressions, et les ondes.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is unrolled, with the top and bottom edges curving inward. The text is centered within the scroll.

Chapitre II

**Modélisation
mathématique**

II.1. Introduction

La circulation des fluides et en particulier des liquides s'effectuent soit au moyen des canaux ou des conduites organisés selon des réseaux plus ou moins complexes. C'est le cas des circuits naturels : réseaux hydrographiques, système sanguin et réseaux capillaires, c'est aussi le cas des systèmes ou circuit fait par l'homme : réseaux de distribution de fluide, canaux d'irrigation,...etc.

L'écoulement filaire c'est tout écoulement auquel s'adapte un modèle ou un système d'équations unidimensionnel spatialement, ne faisant intervenir que des variables globales telles que : Q , V , h ,...etc.

Les écoulements filaires à surface libre peuvent être non permanents, permanents, supercritiques, critiques ou subcritiques et qui sont gouvernés par les équations de Saint-Venant unidimensionnelles. Ces équations sont obtenues par application des deux principes de la dynamique qui sont le principe de continuité et le principe de conservation de quantité de mouvement.

II.2. Hypothèses de base

Les formulations mathématiques, étant une schématisation de la réalité qui permet de calculer les grandeurs qui l'intéressent, ne peuvent avoir lieu qu'après avoir fixé auparavant un certain nombre d'hypothèses [1, 18].

Les divers éléments d'un modèle mathématique sont :

- Un domaine de l'espace où l'on va calculer des écoulements et une représentation de la topographie des fonds.
- Un système d'équations à résoudre dans ce domaine accompagné de conditions aux limites qui représentent l'interaction entre domaine modélisé et l'extérieur à ce domaine (amont-aval).
- Une discrétisation et une méthode de résolution.

Les principales hypothèses simplificatrices sont :

- Liquide incompressible.
- Ecoulement unidimensionnel.
- La pente du canal est faible telle que $\sin \theta \approx \tan \theta$ et $\cos \theta \approx 1$.
- Le canal est à section transversale rectangulaire.
- Distribution hydrostatique des pressions, ceci est valable si l'accélération verticale est faible, c'est-à-dire, si la variation de la surface de l'eau avec la distance est graduelle.
- Répartition uniforme des vitesses transversales.
- Les pertes de charge par frottement d'un écoulement non permanent peuvent être calculées en utilisant les formules d'un écoulement permanent uniforme.
- Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes.

II.3. Les équations du mouvement

Rappelons que les équations de Barré de Saint-Venant proviennent de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes [13].

II.3.1. Equation de continuité

C'est l'équation qui traduit le principe de la conservation de la masse. Ce dernier permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements indépendamment des causes qui les provoquent, Ainsi, la masse fluide reste constante tout au cours de l'écoulement, autrement dit il n'y a ni apport extérieur, ni prélèvement de masse [5].

On suit le mouvement d'une masse liquide dans un canal à surface libre, et on calcule ses variations, entre deux sections (1) et (2) (Figure II.1).

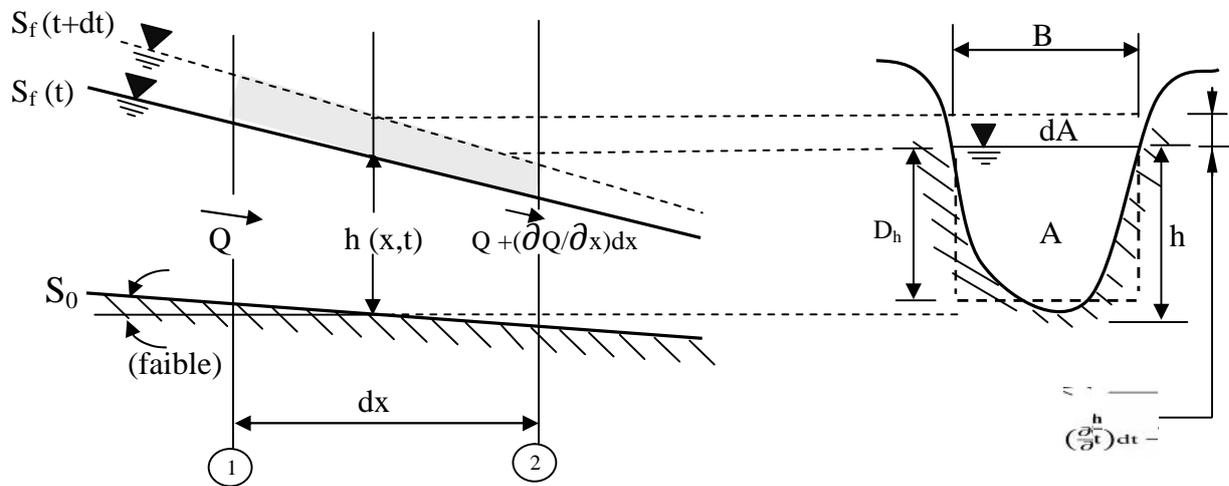


Figure II.1 : Schéma pour l'équation de continuité

- A la section 1 : $t = dt$

$$V_1 = Q dt \quad (\text{II.1})$$

- A la section 2 : $t = t + dt$

$$V_2 = [Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx] dt \quad (\text{II.2})$$

- La variation de volume entre ces deux sections pendant le temps dt , n'est autre que la différence entre le volume entrant et celui sortant.

$$V = -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx dt \quad (\text{II.3})$$

- Cette variation de volume est le résultat d'une modification de la surface libre entre les deux sections pendant le temps dt $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$. Ce qui correspond à :

$$A_m = (B dx) \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{II.4})$$

Où $B(h)$ est la largeur de la surface libre et $h(x, t)$ la profondeur d'eau.

On obtient de (II.3) et (II.4) que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A_m}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Où : $dA = B dh$

On peut écrire la relation suivante pour une section donnée :

$$Q = V A_m$$

Où V : la vitesse moyenne dans la section, A . L'équation (II.5) devient alors :

$$\frac{\partial(VA_m)}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = A_m \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A_m}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Avec la profondeur hydraulique, $D_h = \frac{A_m}{B}$, on peut aussi écrire :

$$D_h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial D_h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Les équations ci-dessous représentent différentes formes de l'équation de continuité, valable pour les canaux prismatiques.

Pour le cas d'un canal rectangulaire, on écrit l'équation (II.6) ainsi :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Où : $q = \frac{Q}{B}$ est le débit unitaire.

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial A_m}{\partial t} = 0$, l'équation (II.5) se réduit à :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Si un débit supplémentaire sort (ou entre) dans le canal entre les deux sections, il faut modifier l'équation (II.5) telle que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A_m}{\partial t} + q_i = 0 \quad (\text{II.10})$$

Où q_i est le débit supplémentaire par unité de longueur.

II.3.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement qui établit une relation entre les caractéristiques du fluide, celle de ses mouvements et les causes qui les produisent, c'est-à-dire les forces [6].

Nous allons étudier l'écoulement d'un fluide dans un canal à surface libre d'une faible pente et on suit ces mouvements suivant un axe X. Ainsi, les forces agissant sont (Figure II.2) :

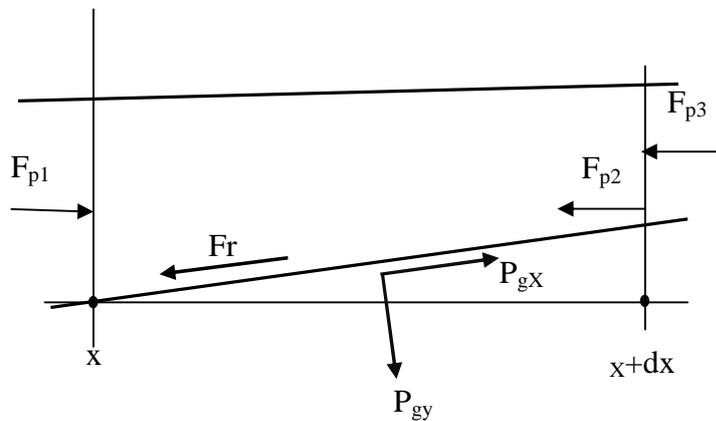


Figure II.2 : Forces agissant sur un élément fluide

a. Force de volume ou d'inertie

$$P_{gx} = + g dx A \sin \quad (\text{II.11})$$

b. Force de pression

$$\text{En } x : F_{p1} = P_p A$$

$$\text{En } x + dx : F_{p2} + F_{p3} = -(P_p + \frac{\partial P_p}{\partial x} dx) A$$

Avec $P_p = \rho g h$: pression hydrostatique, la force de pression totale sera :

$$F_p = - \frac{\partial P_p}{\partial x} dx A \quad (\text{II.12})$$

c. Force frottement

$$F_f = - P_m dx \quad (\text{II.13})$$

Avec P_m : périmètre mouillé.

: force de frottement par unité de surface

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient [6] :

$$F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} = \rho A dx \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.14})$$

$$F_{\text{ext}} = + \rho g dx \sin \alpha - \frac{\partial P_P}{\partial x} dx A - \tau P_m dx \quad (\text{II.15})$$

Des relations (II.14) et (II.15), on tire :

$$\frac{dv}{dt} = + g \sin \alpha - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau P_m}{\rho A} \quad (\text{II.16})$$

La définition de la dérivée particulaire nous permet d'écrire :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

Des équations (II.16) et (II.17) on aura finalement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g \sin \alpha + \frac{\tau P_m}{\rho A_n} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Avec $\sin \alpha$ supposé petit, $\sin \alpha = S_0$: appelé pente de fond du canal qui se calcule par [15] :

$$- \text{ La formule de Darcy : } S_0 = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{II.19})$$

$$- \text{ La formule de Chézy : } S_0 = \frac{8g}{C^2} \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{II.20})$$

L'expression $\frac{\tau P_m}{\rho A_n}$ divisée par g , soit $+\frac{\tau P_m}{\rho A_n g}$ est appelée frottement du fond ou pente énergétique notée S_f . elle est déterminée par les formules empiriques telles que celle de **Manning** donnée :

$$Q = \frac{1}{n} A_m R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (\text{II.21})$$

n : Coefficient de rugosité de Manning.

L'équation (II.18) s'écrit alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (\text{II.22})$$

On divise l'équation (II.22) sur la gravité, on obtient :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f) \quad (\text{II.23})$$

C'est l'équation de la quantité de mouvement ou équation dynamique pour un écoulement non permanent et non uniforme dans un canal découvert.

Les équations (II.6) et (II.22) représentent la paire d'équations S_1 , connues sous le nom du chercheur français Barré de Saint-Venant.

$$\begin{cases} A_m \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A_m}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

- Les équations de Saint –Venant, bien qu'ayant été établies à l'aide de simplifications sont souvent extrêmement compliquées à résoudre.
- Les équations de Saint-Venant ne possèdent pas de solution analytique. Il faut donc le résoudre numériquement.
- Les équations de Saint-Venant constituent un système de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique en x et t , introduisant deux fonctions inconnues, h et V . Il faut choisir des conditions aux limites et initiales pour bien encadrer le problème.

II.4. Evaluation des variables Q , V et h en fonction du temps pendant une crue

Au cours d'une crue, en une section donnée, les variations relatives des variables Q , V , et h en fonction du temps t sont représentées (Figures II.3 et II.4). Dans cette section, on observe successivement (Figure II.3) [2, 13] :

- la vitesse maximum V_{\max} ;
- le débit maximum Q_{\max} ;
- la hauteur maximum h_{\max} .

La largeur de la boucle indique l'importance des termes d'inertie et de pression dans l'équation de l'onde dynamique (Figure II.4). Pour une hauteur h donnée, il existe deux débits Q_1 et Q_2 différents selon que l'on se situe durant la crue ou durant la décrue.

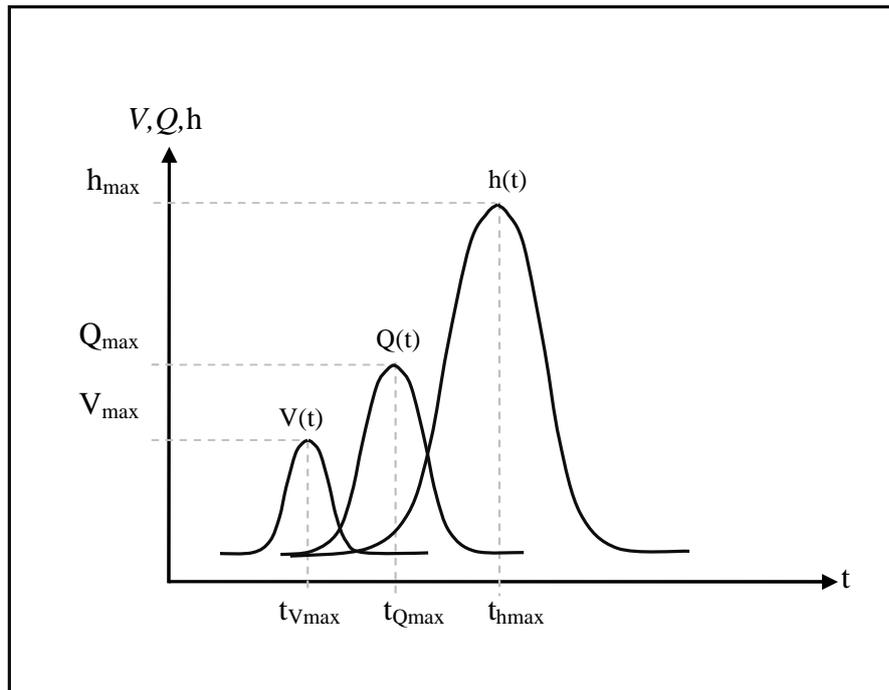


Figure II.3 : Evolution des variables V , Q , et h en fonction du temps (t) au cours d'une crue

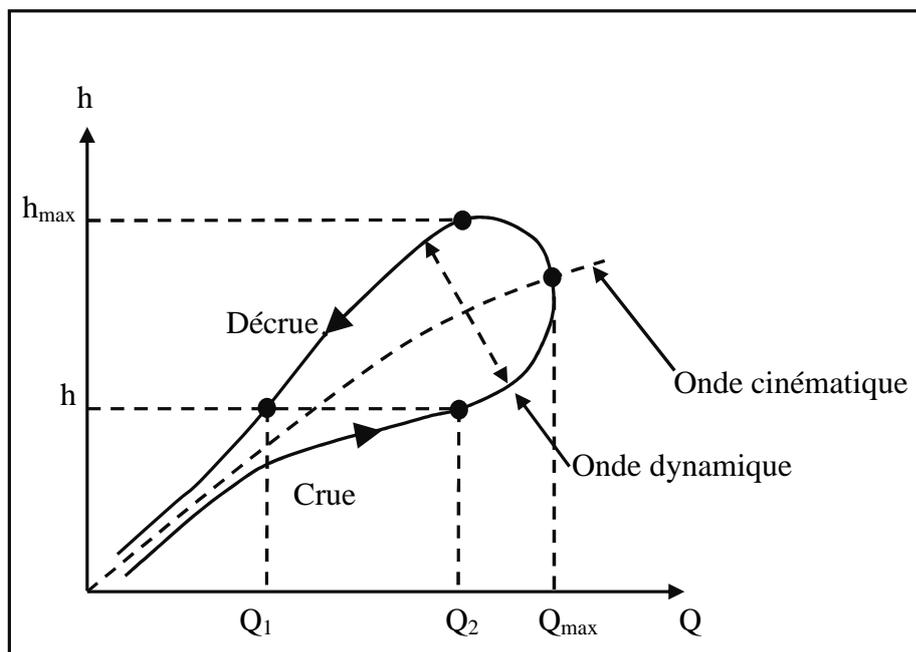
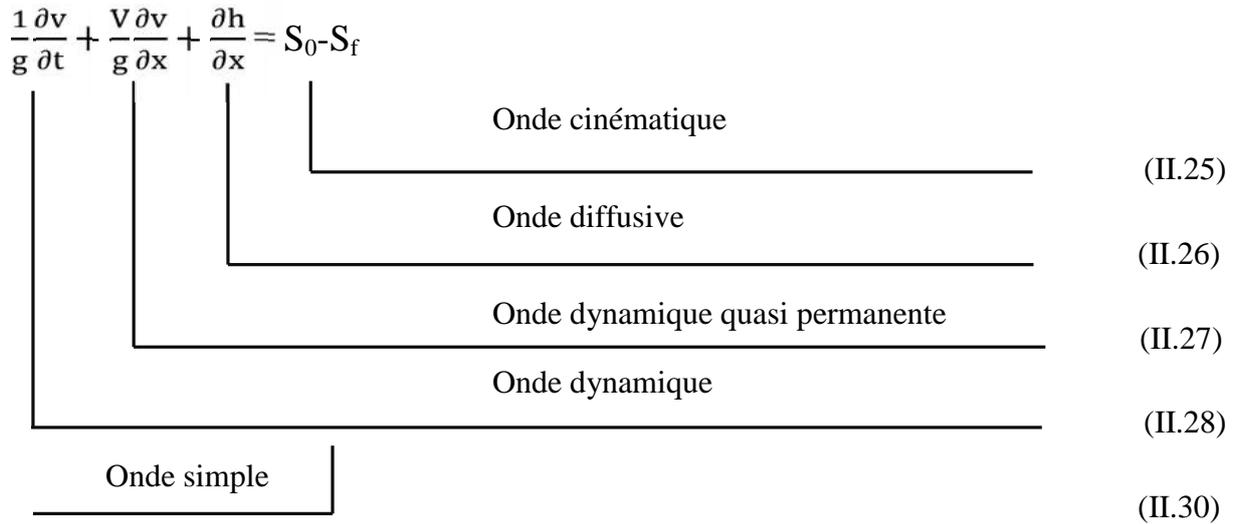


Figure II.4 : Evolution des variables h et Q en une section donnée au cours d'une crue

II.5. Modèles simplifiés

- Il arrive qu'un problème d'écoulement non permanent et permanent et graduellement varié puisse être formulé de façon qu'un ou plusieurs termes de l'équation dynamique puissent être négligés [2, 13].
- En considérant les différents termes dans l'équation dynamique, l'équation (II.23), on distingue habituellement les types d'ondes suivants :



- L'équation de continuité (II.8), reste toujours valable pour chacun de ces types d'ondes.
- Il est intéressant de noter la différence entre une onde cinématique, qui demande le plus de simplifications, et une onde dynamique, qui est la plus complète. Un observateur qui reste stationnaire sur la berge du canal, voit qu'entre deux sections distantes de x (Figures II.5.a et II.5.b) :

- La pente de fond, S_0 et la pente énergétique, $S_f = S_0$, sont parallèles pour l'onde cinématique (Figure II.5.a).
- La pente de fond, S_0 , et la pente énergétique, S_f , ne sont pas parallèles pour l'onde dynamique (Figure II.5.b).

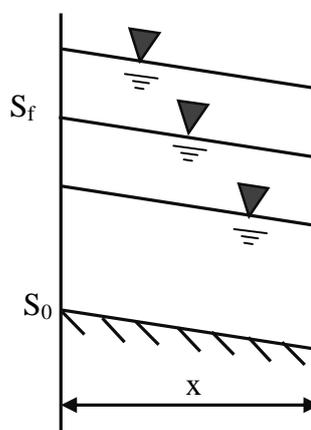


Figure II.5.a : Ondes cinématique vue par un observateur stationnaire

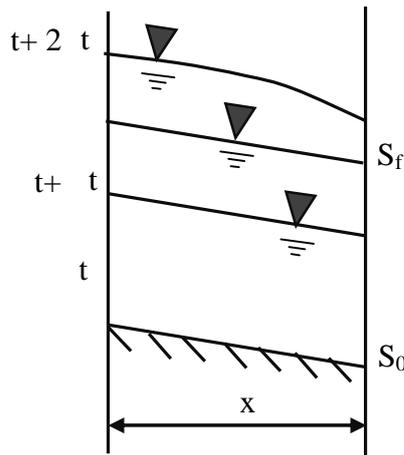


Figure II.5.b : Ondes dynamique vue par un observateur stationnaire

L'équation dynamique (II.22) comprend plusieurs termes numérotés ci-dessous de 1 à 5 :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0$$

(1) (2) (3) (4) (5)

IL correspondent respectivement à :

- (1) Premier terme d'inertie (émergé due à l'accélération).
- (2) Deuxième terme d'inertie.
- (3) Terme de pression, lié à la pente de la surface libre.
- (4) Terme de gravité.
- (5) Terme de frottement, lié aux pertes de charge.

Selon les ordres de grandeur relatifs des différents termes, des simplifications dans l'équation (II.18) sont possibles. En effet, il est rare que tous les termes aient le même ordre de grandeur, en fonction des caractéristiques géométriques et des conditions aux limites. Différentes études théoriques et expérimentales portant sur la propagation d'une crue ont permis de montrer que le terme d'inertie (1) est lié au temps, donc à la vitesse de montée de la crue et que le terme d'accélération convective (2) est lié à la géométrie des canaux. Par exemple, pour les crues en rivières, on a observé que (1) et (2) étaient négligeables devant les autres termes de l'équation. Les termes (4) et (5) de pente et de frottement sont en général du même ordre de grandeur. Il est possible de procéder alors à des simplifications, selon les ordres de grandeur respectifs des différents termes [2].

II.5.1. Modèles à inertie prépondérante et frottements négligeables

Les termes (4) et (5) sont négligés, (équation II.28) d'où :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Le modèle donné par l'équation (II.28) est appelé modèle de l'onde dynamique. En pratique, il correspond à des ondes de haute fréquence (impulsions brèves et rapprochées), ce modèle est très peu employé.

II.5.2. Modèles à frottements prépondérants et inertie négligeable

Les termes (1) et (2) sont négligés. Dans ce cas, on obtient le modèle de l'onde diffusante (L'équation II.26) :

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_o - S_f)$$

Si de plus le terme (3) est négligé (L'équation II.25), on obtient le modèle de l'onde cinématique :

$$g(S_o - S_f) = 0 \quad S_o = S_f$$

Le modèle de l'onde dynamique, généré par les termes d'inertie, et le modèle de l'onde diffusante ne correspondent pas nécessairement à un déplacement de matière, comme dans le cas de la houle par exemple.

A l'inverse, le modèle de l'onde cinématique correspond à un déplacement réel de matière. On distingue ainsi le déplacement réel du fluide à la vitesse V et le déplacement de l'onde de débit à la célérité C .

Ces deux grandeurs permettent de définir le nombre de Froude F par la relation [2, 13] :

$$F_r = \frac{V}{C} \tag{II.31}$$

Si $F_r < 1$, l'écoulement est dit fluvial (ou infracritique), les ondes se déplacent plus vite que le fluide. Elles peuvent se propager vers l'amont ou vers l'aval. Il faut donc, pour résoudre les équations, poser des conditions aux limites amont et aval.

Si $F_r > 1$, l'écoulement est dit torrentiel (ou supercritique), les ondes se déplacent moins vite que le fluide et se propagent toujours vers l'aval. Pour résoudre les équations, une condition à la limite amont est suffisante.

Si $F_r = 1$, l'écoulement est dit critique. Cet état est instable et n'apparaît normalement que de manière transitoire.

La résolution numérique des modèles simplifiés de l'onde diffusante et de l'onde cinématique sera présentée aux chapitres (III).

II.5.3. L'onde diffusive

Le système initial de Barré de Saint-Venant se ramène au cas suivant [2, 13] :

$$(II.32) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_m}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} = S_o - S_f \end{array} \right. \quad (II.33)$$

Si on dérive l'équation (II.32) par rapport à x à t constant et l'équation (II.33) par rapport à t à x constant, on peut éliminer l'une des deux variables h ou Q . Si on choisit d'éliminer h , ce qui permet souvent de simplifier l'expression des conditions aux limites, il reste une équation unique en Q qui s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (II.34)$$

Avec :

- C : Célérité de l'onde, correspondant au déplacement de l'onde de crue (m/s).
- D : Coefficient de diffusion, correspondant à l'atténuation de l'onde de crue (m²/s).

Les variables C et D sont données par les relations suivantes :

$$C = \frac{dQ}{dS} + \frac{D}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - S_f \frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad (II.35)$$

$$D = \frac{Q}{2B S_f} \approx \frac{Q}{2B S_o} \quad (II.36)$$

Avec B la largeur au miroir (m), et en admettant pour D que S_f est voisin de S_o . B est une fonction de la hauteur d'eau h :

$$B = \frac{\partial A_m}{\partial h} \quad (II.37)$$

Les conditions aux limites amont et aval sont du type $Q(t)$. La résolution de l'équation (II.34) demande de calculer C et D . Pour cela, différentes méthodes de calcul existent, que nous verrons ultérieurement (chapitre III).

II.5.4. L'onde cinématique

L'équation de l'onde cinématique correspond à un écoulement où :

- l'énergie due à la crue est négligeable devant les forces de pesanteur ;
- l'aval n'a aucune influence sur l'amont ;
- il existe une relation directe $Q = f(h)$ appelée courbe de jaugeage (ou courbe de tarage ou courbe d'étalonnage). Il existe plusieurs expressions possibles de ce type de relation, par exemple [2, 13] :

$$- \text{ Relation de Chézy } \quad Q = C_h A_m \sqrt{R_h S_f} \quad (\text{II.38})$$

$$- \text{ Relation de Manning-Strickler } \quad Q = \frac{1}{n} A_m R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (\text{II.39})$$

$$- \text{ Autres relations } \quad : \quad Q = a \cdot h^b, \quad a \text{ et } b \text{ coefficients numériques} \quad (\text{II.40})$$

Le système d'équations à résoudre devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_m}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & (\text{II.41}) \\ S_0 = S_f & (\text{II.42}) \end{cases}$$

L'équation (II.42) correspond au fait que la ligne d'eau est supposée parallèle au fond du tronçon d'écoulement.

Si, $S_0 = S_f$, $Q = Q(S)$ car Q ne dépend alors que de la section A_m , $\Rightarrow A_m = A_m(Q)$

Donc :

$$\frac{\partial A_m}{\partial t} = \frac{dA_m}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

On pose $C = \frac{dQ}{dA_m}$ et on peut écrire en substituant dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial A_m}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{C} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Le système d'équations peut donc se réduire à une seule équation :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.43})$$

Avec C la célérité de l'onde.

Si C ne dépend pas du débit Q (donc du temps), on retrouve l'équation de la translation simple et sans déformation de l'onde de crue :

$$Q_s(t + T_0) = Q_e(t) \quad (\text{II.44})$$

Avec :

Q_s : le débit de sortie du bief (m^3/s).

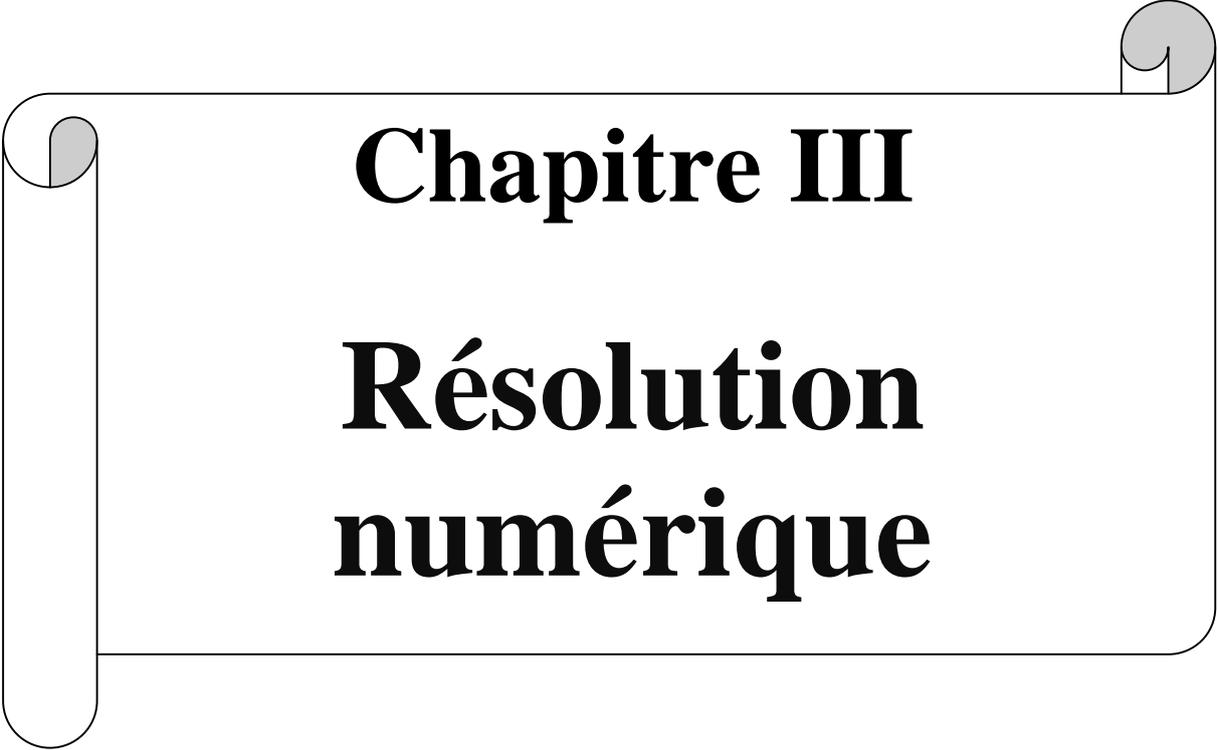
Q_e : le débit d'entrée du bief (m^3/s).

T_0 : le temps de translation (time-offset) de l'onde le long du bief.

Si C dépend du débit, il y a déformation de l'onde de crue.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le système d'équations de Saint-Venant qui est basé sur les deux principes, la conservation de la masse et de mouvement, ces équations différentielle sont souvent extrêmement compliquées à résoudre et qui ne possèdent pas de solution analytique. Il faut donc le résoudre numériquement.



Chapitre III

**Résolution
numérique**

III.1. Introduction

Grâce aux avancées notables des calculateurs et leur implication dans la résolution des équations aux dérivées partielles d'une part, et les progrès de l'analyse mathématique d'autre part, on assiste à un développement dans toutes les branches des sciences physiques englobe le domaine hydraulique.

Diverses méthodes numériques ont été par la suite développées dans ce contexte, et qui sont classées en quatre principales catégories :

- Méthode des éléments finis.
- Méthode des caractéristiques.
- Méthode des éléments intégrables aux frontières.
- Méthode aux différences finies.

Il existe trois approches de méthodes qui permettent à l'hydraulicien de résoudre un problème physique donné :

- L'approche expérimentale.
- L'approche théorique.
- L'approche numérique.

Cette dernière utilise un nombre d'hypothèses et nécessite un ordinateur pour résoudre les équations qui régissent le système physique.

Notons que les limites des méthodes numériques sont liées à la capacité de stockage et à la vitesse d'exécution du ordinateur, cet inconvénient est surmontable avec l'avancée importante des moyens de calcul.

Les méthodes couramment utilisées restent cependant les méthodes des différences finies et des éléments finis. Selon les constats faits par certains chercheurs, la méthode des différences finies est la mieux conseillée quand on traite un problème d'écoulement unidimensionnel.

III.2. Aperçu sur les différentes méthodes numériques

III.2.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet donc l'analyse des structures complexes.

Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure étudiée en sous domaine, de forme relativement simple «éléments finis». L'approximation de la solution concernera l'élément constitutif et non pas la structure totale [18, 20].

III.2.2. Méthode des volumes finis

Il s'agit d'une méthode de formulation intégrale dans l'espace physique des lois de conservation. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes aux différences finies ou aux éléments finis, il est d'usage de la considérer à part, parce qu'elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique [20].

III.2.3. Méthode des différences finies

Les méthodes de résolution par différences finies sont actuellement les plus utilisées. Il existe différentes méthodes de résolution en fonction des schémas numériques mis en œuvre. La méthode de résolution par différences finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs algébriques (basés sur des intervalles de temps et d'espace t et x), établis à partir de développement de série de Tylor, puis on résout le système d'équations algébriques ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et aux limites [2, 10, 13].

On considère une fonction f de deux variables : une variable d'espace x et une variable de temps t : $f = f(x, t)$. Les dérivées partielles par rapport à x s'expriment de la manière suivante. On pose, avec a très faible :

$$f(x + a) = f(x) + a f'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \frac{1}{6} a^3 f'''(x) + \dots \quad (\text{III.1})$$

$$f(x - a) = f(x) - a f'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) - \frac{1}{6} a^3 f'''(x) + \dots \quad (\text{III.2})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, la dérivée est calculée par la relation suivante (schéma centré avec approximation d'ordre 2)

$$f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a} \quad (\text{III.3})$$

On peut également utiliser les relations négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 seulement, ce qui conduit :

Soit à un schéma progressif (ou avancé) avec approximation d'ordre 1 :

$$f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \quad (\text{III.4})$$

Soit à un schéma régressif (ou retardé) avec approximation d'ordre 1 :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-a)}{a} \quad (\text{III.5})$$

Si on remplace par un pas d'espace Δx , il devient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \Delta x} \quad (\text{III.6})$$

Où :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{III.8})$$

Selon le pas de temps avec lequel sont calculées les dérivées partielles par rapport à x , on utilise soit des schémas explicites lorsque toutes les valeurs de f sont calculées au pas de temps n t . Soit des schémas implicites lorsque les valeurs de f sont calculées au pas de temps $(n + 1) t$.

Pour simplifier les écritures nous noterons i l'indice relatif au pas d'espace et n l'indice relatif au pas de temps.

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$f(i, x, n, t) = f_i^n \quad (\text{III.9})$$

Dans le cas le plus général, on peut donc écrire une dérivée partielle par rapport à x sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_1 (f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + (1 - \alpha_1) (f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \alpha_3) \frac{\alpha_2 (f_{i+1}^n - f_i^n) + (1 - \alpha_2) (f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x} \quad (\text{III.10})$$

Selon les différentes pondérations effectuées, on obtient les différents possibles indiqués dans le Tableau (III.1). Il existe ainsi de très nombreuses possibilités de choix de schémas aux différences finies pour les dérivées partielles par rapport à x [2] :

Tableau III.1. Tableau des coefficients de pondération des schémas aux différences finies

$\alpha_3 = 0$		Schéma explicite, ne dépendant que du pas de temps n
$\alpha_3 = 0.5$		Schéma implicite centré dans le temps, dépendant des pas de temps n et $n+1$
$\alpha_3 = 1$		Schéma implicite, ne dépendant que du pas de temps $n+1$
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	Schéma progressif
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.5$	Schéma centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 1$	Schéma régressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	Schéma mixte décentré

D'autre part, la dérivée partielle de f par rapport au temps t est calculée selon le même principe, avec une pondération possible selon que les valeurs de f sont calculées au pas d'espace $i x$ ou $(i + 1) x$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4(f_i^{n+1} - f_i^n) + (1 - \alpha_4)(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n)}{\Delta t} \quad (\text{III.11})$$

Une fois les discrétisations choisies, on substitue leurs expressions dans le système d'équations à résoudre. L'équation différentielle initiale est ainsi remplacée par un système de N équations contenant N inconnues, à résoudre pour chaque pas de temps.

Dans le cas des schémas explicites, les dérivées partielles par rapport à x sont calculées au pas de temps n et seules les dérivées partielles par rapport à t contiennent des termes calculés au pas de temps $(n + 1)$. On peut ainsi calculer explicitement les valeurs f_i^{n+1} à partir des valeurs f_i^n .

Dans le cas des schémas implicites, on ne peut calculer les valeurs de f au pas de temps $(n + 1)$ qu'en résolvant le système formé des N équations linéaires algébriques du schéma.

La méthode des différences finies est plus efficace dans le domaine car :

Elle a une grande simplicité d'écriture par rapport à la méthode des éléments finis (complexité de mise en œuvre).

Un faible coût de calcul (grand coût en temps de calcul et mémoire pour les éléments finis).

Résultats de convergence satisfaisante par rapport à la méthode des volumes finis (peu de résultats de convergence).

III.2.3.1. Analyse de l'approximation

a. Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques [18, 20].

b. La consistance d'un schéma aux différences finies

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement. La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma [18, 20].

c. La stabilité

Un schéma numérique est stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé [18, 20].

d. La convergence

Un schéma est dit convergent quand la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue. Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent [18, 20].

III.3. Schéma explicite, schéma implicite

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution au temps $t + \Delta t$ et au point x donné, est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t en ce même point. Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour tous les points du maillage [1, 9, 12].

Un schéma est implicite, si la valeur approchée en un point au temps $t + \Delta t$, est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et les valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison, entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$, qui se résout globalement.

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques schémas régulièrement utilisés afin d'opter pour le schéma qui sera utilisé comme moyen de résolution des équations du mouvement.

III.4. Modèles numériques couramment utilisés

III.4.1. Les schémas aux différences finies implicites fréquemment utilisés

Dans les méthodes implicites, la dérivée spatiale est remplacée par l'approximation aux différences finies.

Plusieurs Schémas ont été rapportés sur les approximations pas différences finies et l'évaluation des coefficients des équations. Parmi les schémas implicites celui de **Preissman** été très largement utilisé pour analyser des courants de surface libre instables [6, 12, 17].

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{(V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1}) - (V_i^n + V_{i+1}^n)}{2\Delta t} \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha(V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\alpha)(V_{i+1}^n - V_i^n)}{\Delta x} \quad (\text{III.13})$$

$$V(x, t) = \frac{(V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1})}{2} + (1 - \alpha) \frac{(V_{i+1}^n - V_i^n)}{2} \quad (\text{III.14})$$

III.4.2. Les schémas aux différences finies explicites fréquemment utilisés

Plusieurs schémas aux différences finies explicites de second ordre ont été développés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique, qu'on rencontre toujours dans la dynamique des fluides [1, 18].

Un schéma de ce type comporte un algorithme qui permet de donner des valeurs approchées des résultats cherchés, et un autre représentant la solution supposée réelle du problème.

a. Schéma de Gabutti

Le schéma de Gabutti consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de prédiction et une autre de correction [3, 12, 18].

Le but est de calculer les valeurs des variables de l'écoulement au pas de temps $(n + 1)$, sachant que leurs valeurs sont connues au temps n .

Les étapes de ce schéma est comme suit :

➤ Etape de prédiction

Partie A

$$\tilde{V}_x^+ = \frac{V_i^n - V_{(i-1)}^n}{\Delta x} \quad (\text{III.15})$$

$$\tilde{V}_x^- = \frac{V_{(i+1)}^n - V_i^n}{\Delta x} \quad (\text{III.16})$$

Partie B

$$\tilde{V}_x^+ = \frac{V_i^n - V_{(i-1)}^n - V_{(i-2)}^n}{\Delta x} \quad (\text{III.17})$$

$$\tilde{V}_x^- = \frac{-2V_i^n - V_{(i+1)}^n - V_{(i+2)}^n}{\Delta x} \quad (\text{III.18})$$

➤ Etape de correction

$$\hat{V}_x^+ = \frac{\tilde{V}_i - \tilde{V}_{(i-1)}}{\Delta x} \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{V}_x^- = \frac{\tilde{V}_{(i+1)} - \tilde{V}_i}{\Delta x} \quad (\text{III.20})$$

b. Schéma de Lax

C'est un schéma aux différences finies explicite qui est diffusif. L'objectif du présent mémoire est l'utilisation du dit schéma pour la discrétisation des équations de mouvement. Les principales étapes de ce schéma seront détaillées dans le paragraphe (III.5).

III.4.3. Comparaison des schémas explicites et implicites

Une comparaison entre les deux familles de schémas nécessite au préalable une étude comparative. Selon les comparaisons faites par certains chercheurs, on retient les avantages et les inconvénients suivants [6, 18] :

La méthode explicite exige une condition de stabilité sur le pas de temps tandis que la méthode implicite ne nécessite aucune.

La souplesse de programmation offerte par la méthode explicite est beaucoup meilleure que celle offerte par la méthode implicite, surtout lorsque le temps de programmation est limité.

L'économie de calcul est beaucoup plus importante pour un schéma implicite car il n'y a aucune restriction sur le pas de temps.

Etant donné que le pas de temps dépend de chaque itération, les valeurs de cette dernière paraissent souvent très petites de sorte que les précisions sur les calculs sont meilleures.

La méthode explicite est très conseillée dans le cas de problèmes de discontinuité.

Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement au schéma aux différences finies de **Lax**, qui servira à résoudre les équations de Saint-Venant.

III.5. Résolution du système par un schéma explicite (Schéma de Lax)

La méthode explicite remplace les dérivées partielles par les différences finies et fournit un ensemble d'équations qui peuvent être résolues simultanément.

L'espace de solution est discrétisé dans le plan (x, t) de sorte à obtenir en chaque point les variables h et V [6].

Dans ce schéma, les dérivées partielles et les coefficients D_h et S_f des équations étudiées sont estimés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^*}{\Delta t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_i^{n+1} - v_i^*}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (\text{III.21})$$

Tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} h^* = \frac{1}{2} (h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) \\ v^* = \frac{1}{2} (v_{i-1}^n + v_{i+1}^n) \\ D_h^* = \frac{1}{2} (D_{i-1}^n + D_{i+1}^n) \\ S_f^* = \frac{1}{2} (S_{i-1}^n + S_{i+1}^n) \end{array} \right. \quad (\text{III. 22})$$

a. Forme non conservative

En remplaçant les dérivées partielles des équations du mouvement (équations III.23 et III.24) par des approximations de différences finies et le coefficient D_h et la pente S_f par les expressions données dans (III.22) ; on obtient [17] :

$$D_h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial D_h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{III.23}$$

$$D_h^* \left(\frac{D_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) + V^* \left(\frac{D_{i+1}^n - D_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) + \left(\frac{h_i^{n+1} - h^*}{\Delta t} \right) = 0 \tag{III.24}$$

Et par simplification on obtient :

$$h_i^{n+1} = h^* - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} V^* (h_{i+1}^n + h_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} D_h^* (V_{i+1}^n - V_{i-1}^n) \tag{III.25}$$

On substitue ces opérateurs dans l'équation dynamique suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g (s_0 - s_f) = 0 \tag{III.26}$$

$$\frac{V_i^{n+1} - V^*}{\Delta t} + v \left(\frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) + g \left(\frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) - g (S_0 - S_f^*) = 0 \tag{III.27}$$

Par simplification on aura :

$$V_i^{n+1} = V^* - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} V^* (V_{i+1}^n - V_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} g (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) + \Delta t g (S_0 - S_f^*) \tag{III.28}$$

Les équations (III.25) et (III.28) sont utilisées pour calculer les variations de h et V pour les nœuds intérieurs seulement (Figure III.1).

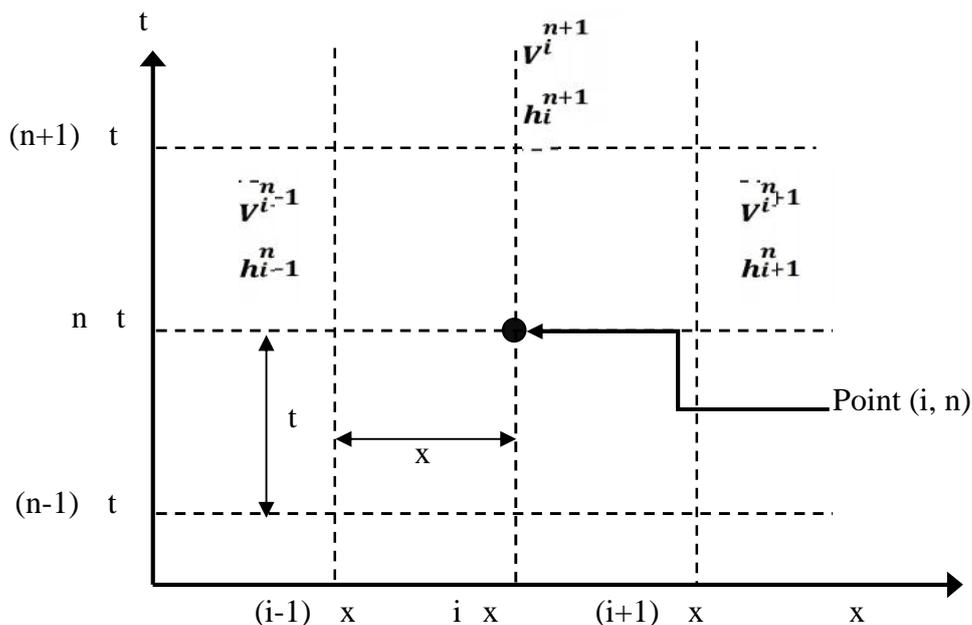


Figure III.1 : Notation de grille de calcul

b. Forme conservative

On peut résoudre le système de Saint-Venant (L'équation III.23 et III.27) avec le schéma explicite de Lax de forme matricielle [6].

$$U_t + F_x + S = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$U = \begin{bmatrix} A \\ VA \end{bmatrix} ; \quad F(U) = \begin{bmatrix} VA \\ V^2 + gA\bar{h} \end{bmatrix} ; \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(So - Sf) \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Avec :

$A\bar{h}$: moment de la section d'écoulement sur la surface libre. Ce moment peut être calculée à partir de $\int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(\eta) d\eta$ dans laquelle σ est la largeur de la surface de l'eau à une profondeur η . Le remplacement des approximations de différences finies de l'équation (III.21) dans l'équation (III.29) donne :

$$U_i^{n+1} = U^* + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) - \tau S^* \quad (\text{III.31})$$

Finalement :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) + \frac{\Delta\tau}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) - \tau S^* \quad (\text{III.32})$$

On utilise cette équation pour déterminer la valeur de h et V .

Pour résoudre complètement le système, il faut fixer des conditions aux limites amont et aval, c'est-à-dire V_0^n et h_0^n à l'amont et V_L^n et h_L^n à l'aval n , et les conditions initiales V_i^0 et $h_i^0 \forall i$.

III.5.1. Conditions initiales-conditions aux limites

Une équation aux dérivées partielles admet d'une manière générale, une infinité de solution. La solution particulière désirée est déterminée à partir de quelques conditions supplémentaires. Dans la majorité des cas, ces conditions portent sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle souvent frontière ou limite.

III.5.1.1. Conditions initiales

La notion de conditions initiales est évidemment liée aux conditions qui correspondent au temps initial $t = 0$. Afin de commencer les calculs à partir de l'état initial de l'écoulement, les deux variables h et V devront être choisies et spécifiées en tout point du domaine de calcul.

III. 5.1.2. Conditions aux limites

La prise en compte des limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats.

Les conditions aux limites sont les plus délicates à fixer : En effet, elles consistent à imposer un certain comportement du domaine de calcul et d'approximer le domaine irrégulier en domaine régulier [6].

Le schéma de Lax se déroule en fonction des conditions initiales et à chaque pas de temps t il prend les résultats précédents comme condition initiale pour continuer les calculs ce qui nous montre la figure (III.2).

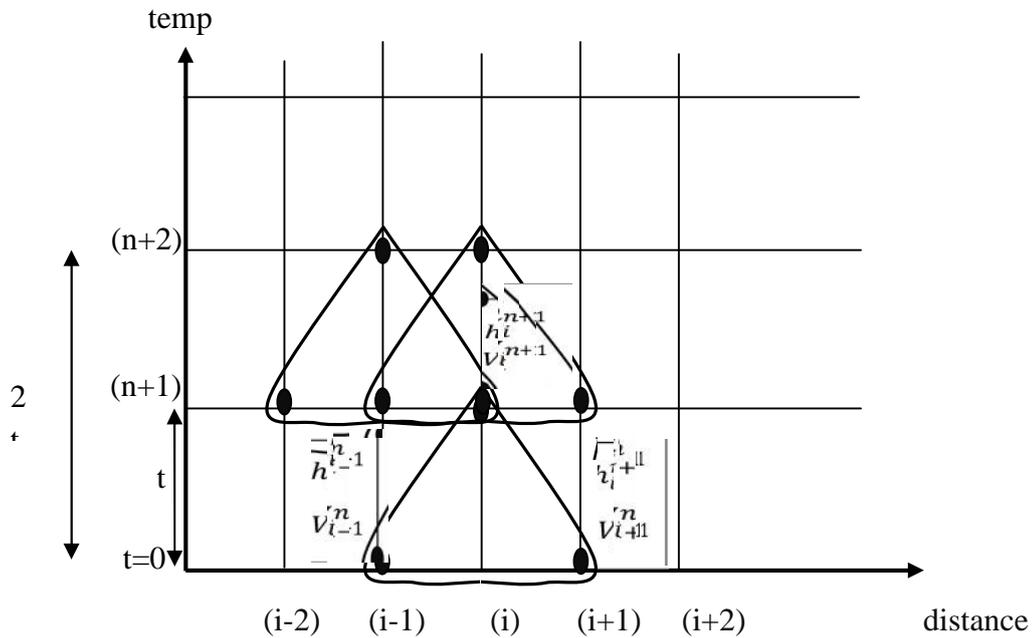


Figure III.2 : Schéma de résolution explicite

Pour calculer la vitesse et la hauteur de point (i) au pas de temps t (n+1) on prend les données à t_0 (n) de (i-1) et (i+1).

a. Les Conditions d'amont et d'aval

Il y a toujours des variables qui ne sont pas définies dans le domaine du schéma de Lax si lorsque le point (i+N) à l'aval et (i-N) à l'amont c'est pour cela on fait appel à la méthode des caractéristiques (Annexe I) à l'amont et à l'aval (Figure III.3 et III.4).

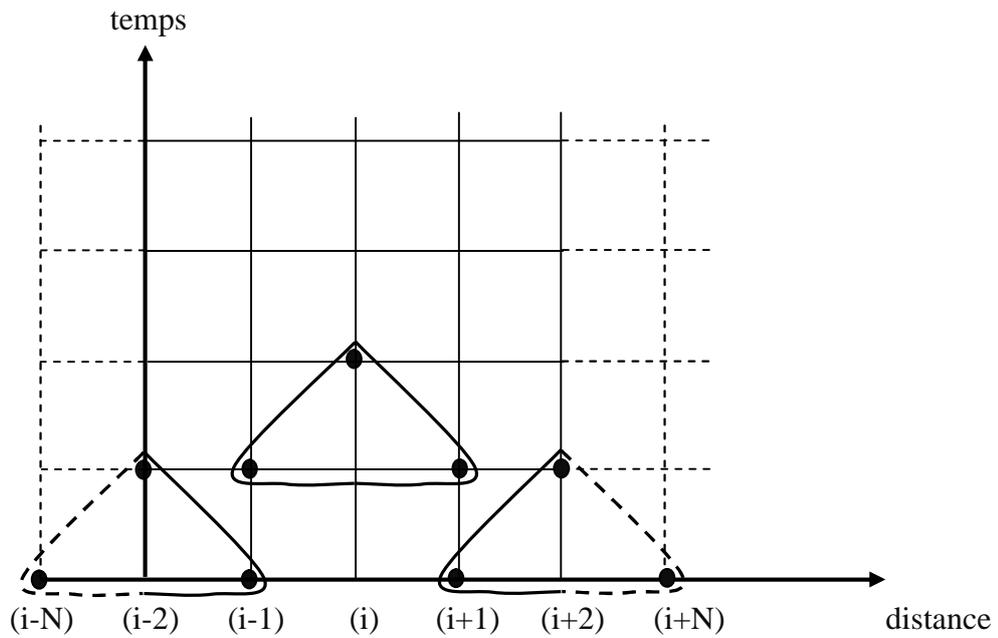


Figure III.3: Illustration de la notion de conditions aux frontières

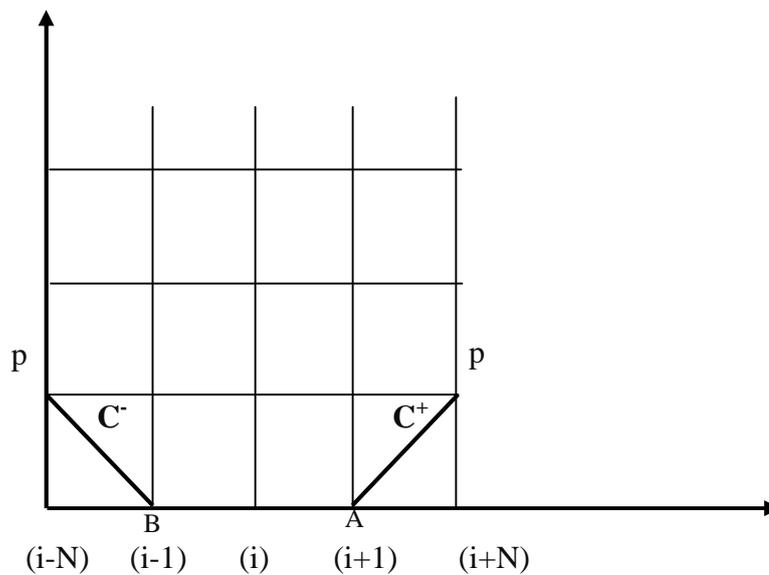


Figure III.4: Application de la méthode des caractéristiques aux frontières du domaine de calcul

Les deux équations (III.23 et III.26) de Saint-Venant pour les canaux prismatiques s'écrivent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + D_h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_0 - S_f)$$

On multiplie ces deux équations (III.23 et III.26) par l'inconnu on obtient en faisant l'adduction :

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \lambda D_h) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(v + \frac{g}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = g (S_0 - S_f) \quad (\text{III.33})$$

D'autre part, on a $V = V(x, t)$ et $h = h(x, t)$, les différentielles totales de la profondeur d'eau h et la vitesse moyenne dv respectivement, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

On remplace l'équation (III.34) dans l'équation (III.33) on obtient :

$$V + D_h \frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda} \quad (\text{III.35})$$

$$\text{Donc : } 1,2 = \pm \sqrt{\frac{g}{D_h}} = \pm \sqrt{\frac{g B}{A_m}} \quad (\text{III.36})$$

On applique alors la méthode de Stokes, qui propose de calculer la célérité de l'onde C par la relation [14] :

$$C = \sqrt{\frac{A_m}{\frac{\partial A_m}{\partial h}}} \quad (\text{III.37})$$

Dans le cas d'un canal prismatique puisque $A = B D_h$, on obtient simplement :

$$C = \sqrt{g D_h} \quad \text{ou} \quad C^2 = g D_h \quad (\text{III.38})$$

On remplace dans l'équation (II.36) on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g}{C} \\ 2 &= \frac{-g}{C} \end{aligned}$$

On remplace la valeur de 1 et 2 dans les équations (III.33) et (III.34) on obtient :

$$\text{Pour : } 1 = \frac{g}{C}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{C} \frac{dh}{dt} = g (S_0 - S_f) \quad (\text{III.38})$$

Avec:

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad (\text{III.39})$$

Et

$$\frac{dv}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (\text{III.40})$$

Avec:

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad (\text{III.41})$$

En multipliant les équations (III.39 et III.40) par dt et on fait l'intégration, on obtient (Figure III.4):

Suivant la courbe C⁺ :

$$\int_A^P dV + \int_A^P \frac{g}{c} dh = g \int_A^P (S_0 - S_f) dt \quad (\text{III.42})$$

Suivant la courbe C⁻ :

$$\int_B^P dV - \int_B^P \frac{g}{c} dh = g \int_B^P (S_0 - S_f) dt \quad (\text{III.43})$$

Dans ses équations on cherche les valeurs V et h qui sont les inconnues en fonction des autres variables, on obtient :

$$V_P + V_A = \left(\frac{g}{c}\right)_A (h_p - h_A) = g(S_0 - S_f)_A t \quad (\text{III.44})$$

$$V_P - V_B = \left(\frac{g}{c}\right)_B (h_p - h_B) = g(S_0 - S_f)_B t \quad (\text{III.45})$$

Ces deux équations peuvent écrites comme suit:

$$V_i^{n+1} = C_P - C_{ai-1} h_i^{n+1} \quad (\text{III.46})$$

Et

$$V_i^{n+1} = C_A - C_{ai+1} h_i^{n+1} \quad (\text{III.47})$$

Dans les quelles :

$$C_P = V_{i-1}^n + C_{ai-1} h_{i-1}^n + g(S_0 - S_f)_{i-1} \Delta t \quad (\text{III.48})$$

$$C_n = V_{i+1}^n + C_{ai+1} h_{i+1}^n + g(S_0 - S_f)_{i+1} \Delta t \quad (\text{III.49})$$

Avec:

$$C_a = \frac{g}{c} \quad (\text{III.50})$$

Les deux équations (III.25 et III.28) sont utilisées pour déterminer les conditions dans les nœuds intérieurs. Aux frontières, toutefois, les conditions aux limites particulières sont développées en résolvant les équations caractéristiques positives ou négatives, ou les deux, en même temps que les conditions imposées par la frontière. L'équation caractéristique positive, l'équation (III.46), est utilisée pour une limite en aval, et l'équation caractéristique négative, équation (III.47), est utilisée pour une limite en amont.

III.5.2. Condition de stabilité : Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Une méthode est dite instable, si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi. Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable.

En mathématique, la condition de stabilité (Courant-Friedrichs-Lewy) ou condition de Courant du nom des auteurs (Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy) est une condition pour résoudre des équations différentielles (équations de Saint-Venant) et vérifier leur convergence. Elle est utilisée en général, pour vérifier que le schéma utilisé pour le calcul est stable et qu'il converge vers la solution recherchée, c'est-à-dire vers la solution du système [6, 13].

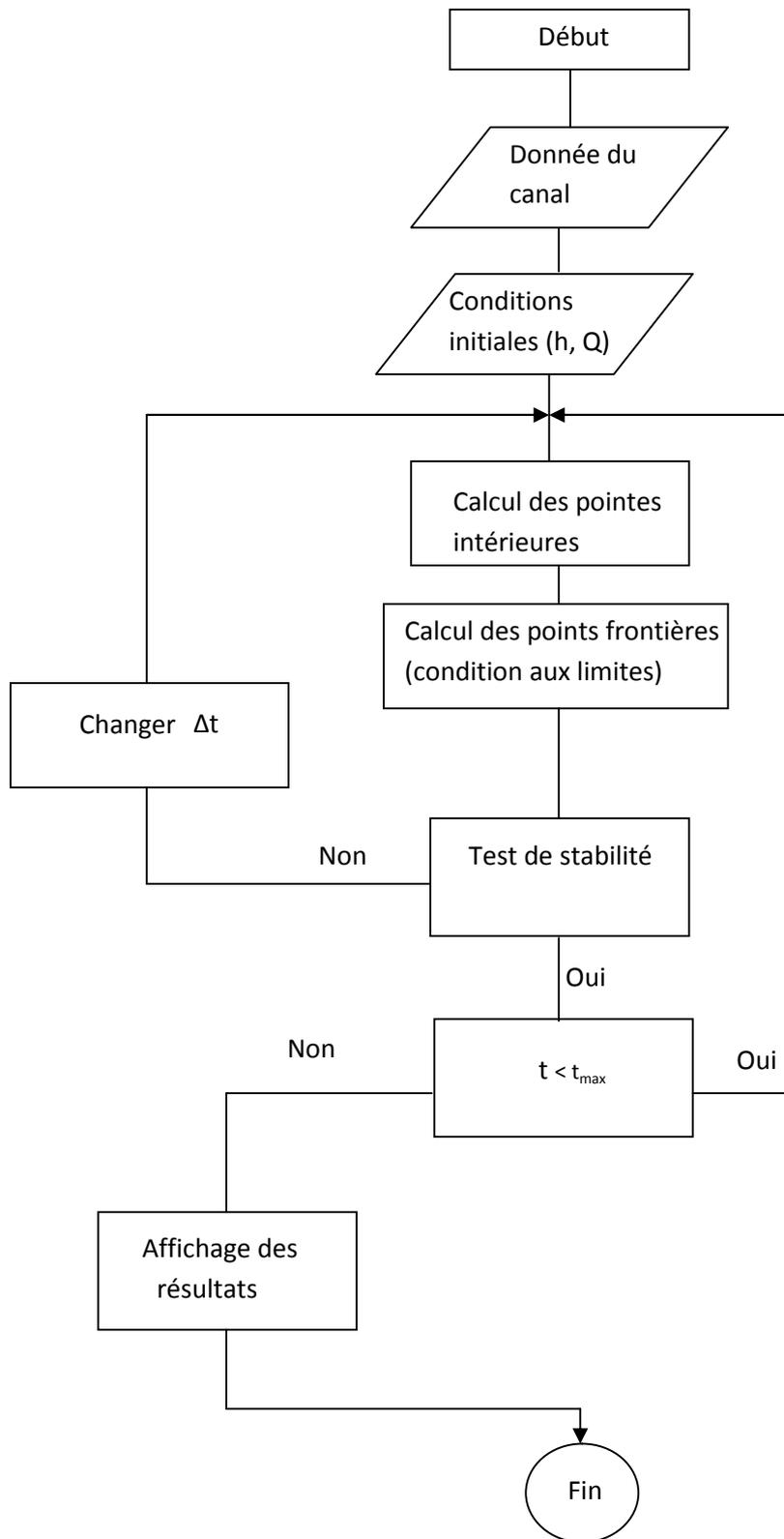
$$C_r = t \frac{\max|V \pm C|}{\Delta x} \quad (\text{III.51})$$

D'où :

$$t = C_r \frac{\Delta x}{\max|V \pm C|} \quad (\text{III.52})$$

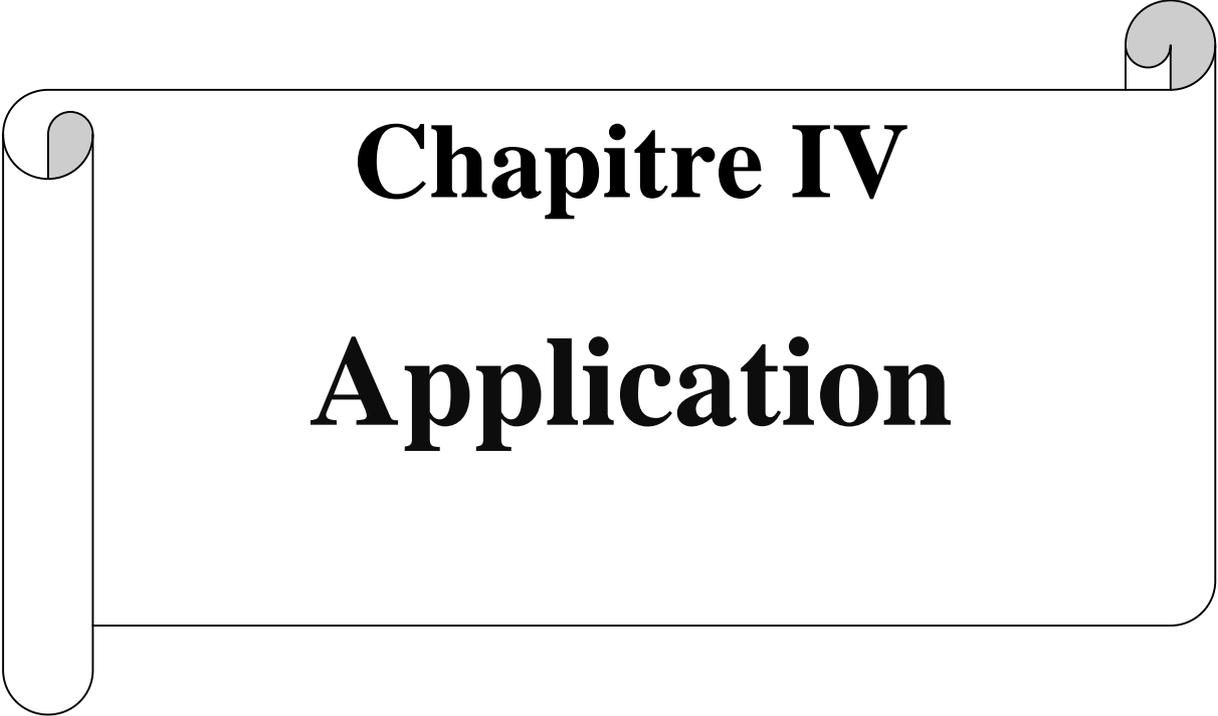
$$\text{Telle que : } C = \sqrt{gD} \quad (\text{III.53})$$

III.6. Organigramme de calcul



III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode différence fini pour la résolution des équations de Barré de Saint-Venant 1D. Afin de permettre le développement d'un schéma numérique de type explicite et un maillage uniforme, nous avons détaillé les discrétisations spatiale et temporelle ainsi que les conditions aux limites. Cette méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par les opérateurs algébriques afin d'établir les expressions des paramètres de l'écoulement (h , V).



Chapitre IV

Application

IV.1. Introduction

Pour l'objectif de la simulation des écoulements à surface libre, on a opté pour la méthode des différences finies avec le schéma diffusif de Lax afin de résoudre le système d'équations de Saint-Venant.

Dans le but de valider le modèle élaboré, on traitera deux applications ; la première concerne un canal de section rectangulaire à pente nulle et un fond lisse, et une deuxième pour un canal trapézoïdal où le calcul numérique s'impose.

On fera dans cette partie une comparaison avec des résultats numériques retrouvés dans la littérature spécialisée dans ce domaine de recherche.

On passera par la suite, à une étude paramétrique, où on analysera l'effet de la variation de quelques paramètres hydrauliques et numériques sur la forme de la surface de l'eau.

IV.2. Simulation numérique

IV.2.1. Application I

Pour valider le modèle numérique que nous avons élaboré en utilisant le schéma de Lax ; nous servirons des travaux effectués par Fennema et Chaudhry [11] et Chaudhry [7]. Dans cette première application, le canal est de forme rectangulaire (Figure VI.1) avec une rugosité $n = 0.013$. Initialement, le canal est traversé par un écoulement uniforme avec un débit $Q = 150 \text{ m}^3/\text{s}$, et une profondeur normale $h = 6 \text{ m}$.

L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée dans la Figure (IV.1).

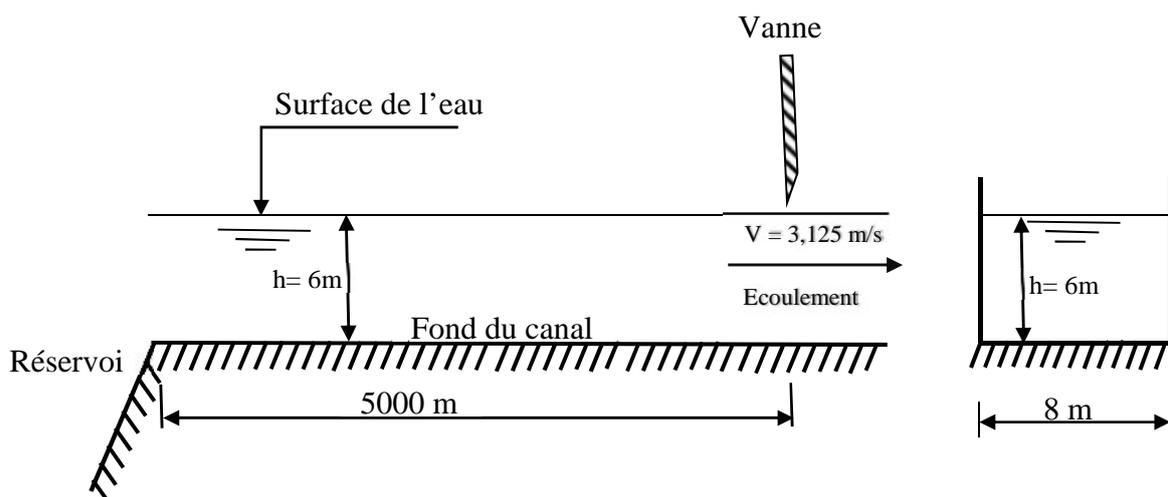


Figure IV.1. Écoulement dans un canal à section rectangulaire avec présence de vanne

Les principales données du canal simulé sont regroupées dans le Tableau (IV.1) suivant:

Tableau IV.1 : Données relatives à l'application I

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	8 m
Débit Q	150 m³/s
La profondeur de l'écoulement h	6 m
Le nombre de nœuds N	100
Rugosité n	0,013
Le nombre du courant C_r	0,95

a. Analyse des résultats :

Les résultats que nous avons obtenus sont représentés sur les figures (IV.2) et (IV.3). Ces deux figures nous montre d'une part, les profils de la surface libre le long du canal, calculés en utilisant le schéma de Lax, et d'autre part, une comparaison avec les résultats analytiques et aux numériques obtenus moyennement le schéma explicite de Gabutti [11].

Les profils représentés sont déterminés avec le schéma explicite de Lax pour un temps, $354 < t < 354 + \Delta t$ et pour un coefficient de Manning $n = 0,013$.

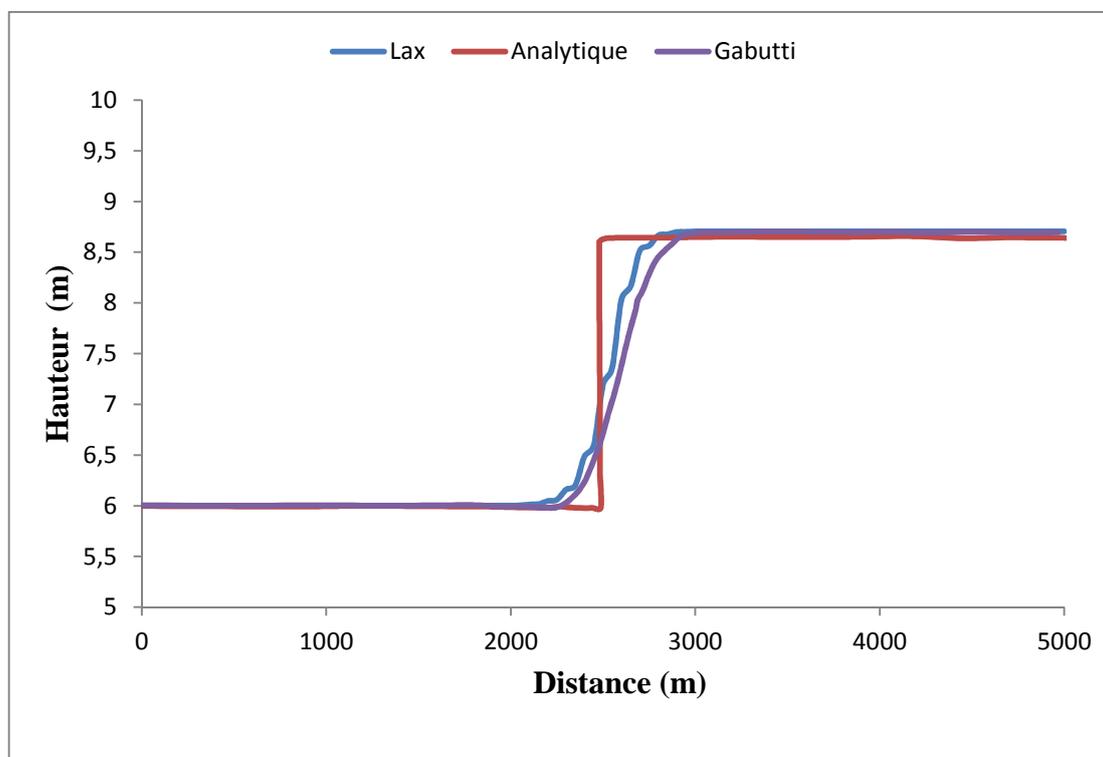


Figure IV.2 : Profils de la ligne d'eau (dissipation artificielle)

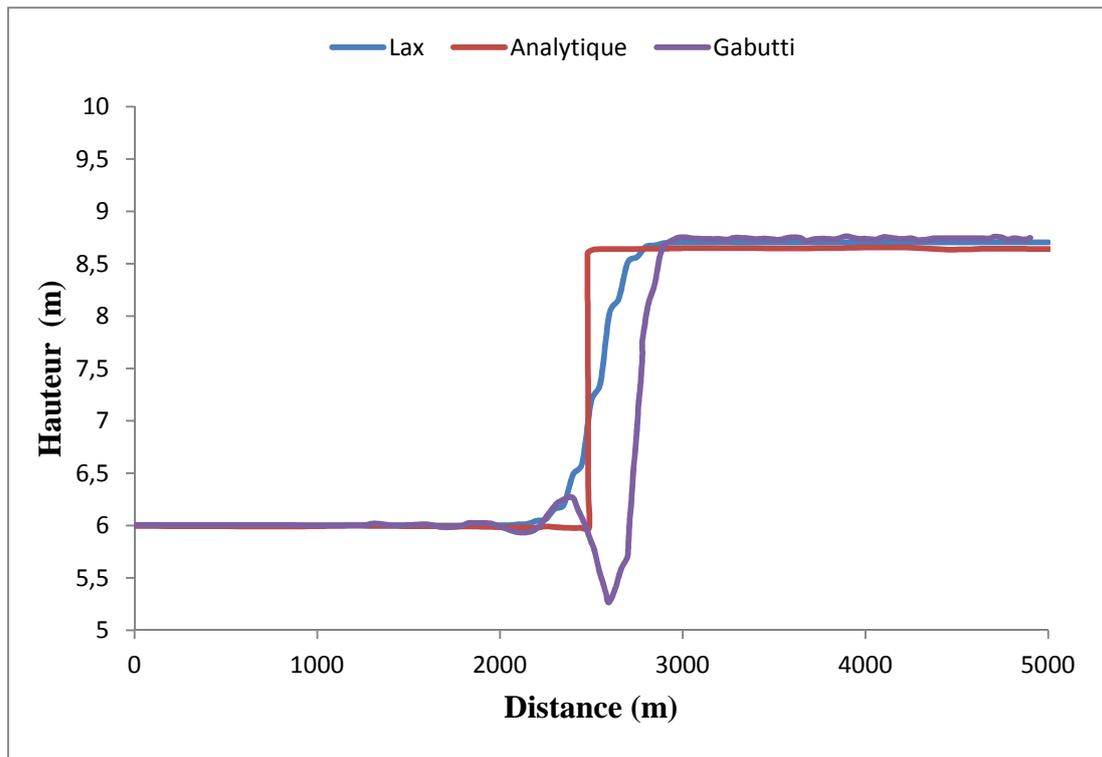


Figure IV.3 : Profils de la surface d'eau (pas de dissipation artificielle)

En analysant ces figures, on peut dire que :

- La valeur de la hauteur reste constante ($h = 6$ m) jusqu'à $x = 2300$ m (Figures IV.2 et IV.3) puis la courbe subit une variation brusque de $x = 2300$ m à $x = 2550$ m, elle se stabilise ensuite à une hauteur constante $h = 8,70$ m.
- Du point de vue hydraulique ; la fermeture de la vanne provoque un choc de l'écoulement d'eau avec la vanne et qui change sont régime permanent, qui vient de réservoir, au non permanent ce qui nous montre la figure (IV.4).

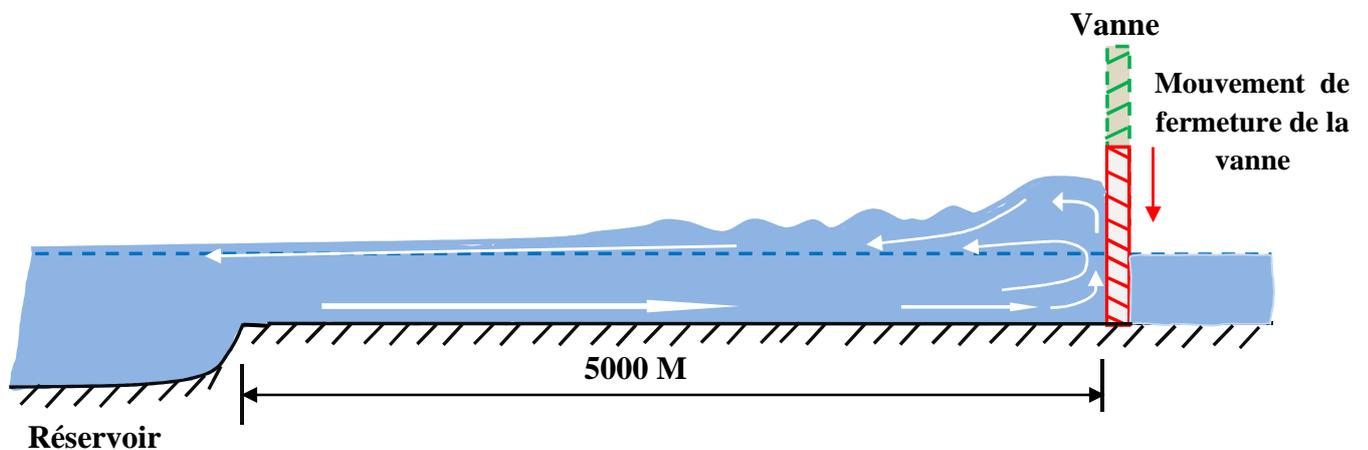


Figure IV.4. Ecoulement dans un canal rectangulaire après fermeture d'une vanne

- La courbe de variation de la hauteur de l'écoulement à surface libre du canal, calculée avec le schéma de Lax est concordante avec la courbe obtenue par le schéma explicite de Gabutti.
- Le modèle élaboré ne manifeste pas d'oscillations parasites, donc il donne de très bons résultats comparativement au schéma explicite de Gabutti, cela revient à la précision du premier ordre du schéma mais il présente une allure plus diffuse.
- A partir des résultats obtenus, nous constatons que le modèle présentés approche bien du résultat analytique.

Les valeurs de la hauteur maximale sont reportées dans le Tableau (IV.2).

Tableau IV.2 : Comparaison des résultats, application I

	Solution analytique	Lax	Gabutti
h_{\max} (m)	8,66	8,70	8,70

Le petit décalage entre les résultats obtenu par le schéma explicite de Lax et le résultat analytique et numérique (schéma explicite de Gabutti) [11] revient à certain nombre d'hypothèse posés pour établir et développer les équations mathématiques, les conditions aux limites et la discrétisation des équations ne se font pas sans erreurs.

Son application à l'étude de la propagation d'onde peut donc se faire pourvu que les hypothèses fixées soient respectées. Ce qui permet d'éviter la mise au point onéreuse et délicate de modèles réduits d'étude.

b. Calcul de l'erreur relative du schéma de Lax par rapport à l'analytique :

$$\text{Erreur} = \frac{8,70 - 8,66}{8,66} * 100 = 0,46\%$$

On constate alors que la solution numérique est entachée d'une erreur relative de 0,46%. Résultat très satisfaisant, ce qui démontre une bonne précision de calcul du schéma de Lax.

IV.2.2. Application II

Les données de cette application sont tirées des travaux de Chaudhry [6]. L'application à été réalisée dans un canal trapézoïdal avec fruits des talus $m = 1.5$, une pente longitudinale $S_0 = 0.00008$, et une rugosité de Manning $n = 0.013$.

Initialement, le canal est le siège d'un écoulement uniforme avec un débit $Q = 126 \text{ m}^3/\text{s}$, et la profondeur normale de l'écoulement à l'amont $h = 5.79 \text{ m}$; pour le problème de stabilité on a pris un nombre de courant $C_r = 0,9$.

Les données de l'installation sont celles récapitulées dans le Tableau (IV.3) suivant :

Tableau IV.3 : Données relatives à l'application II

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	6,1 m
Débit Q	126 m³/s
La profondeur de l'écoulement h	5,79 m
Le nombre de nœuds N	100
Pente de fond S₀	0,00008
Nombre de Manning n	0,013

L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée dans la figure (IV.5) ci-dessous.

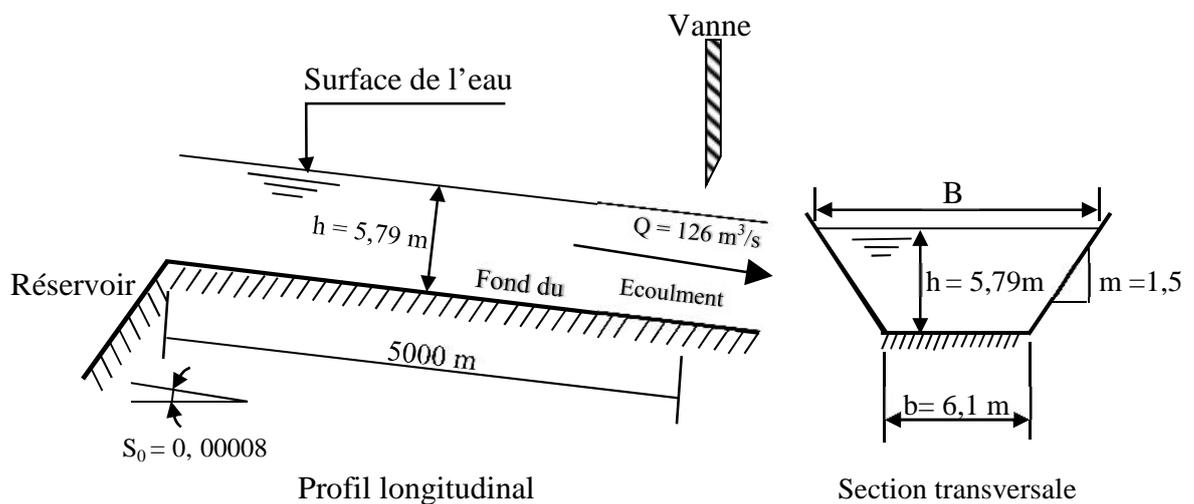


Figure IV.5 : Ecoulement dans un canal à section transversale trapézoïdale avec présence de vanne

a. Analyse des résultats

Les résultats que nous avons obtenus pour le canal trapézoïdal sont représentés dans les figures (IV.7), (IV.8) et (IV.9). Ces dernières nous montrent la variation de la hauteur de la surface libre en fonction de temps calculée en utilisant le schéma de Lax, ainsi que les profils de la ligne d'eau déterminés numériquement par le modèle explicite de Gabutti et implicite de Preissmann selon Chaudhry [6]. Ces profils sont donnés aux différents pas de temps ($t = 500$ s, $t = 1000$ s et $t = 1500$ s) pour un coefficient de Manning $n = 0,013$.

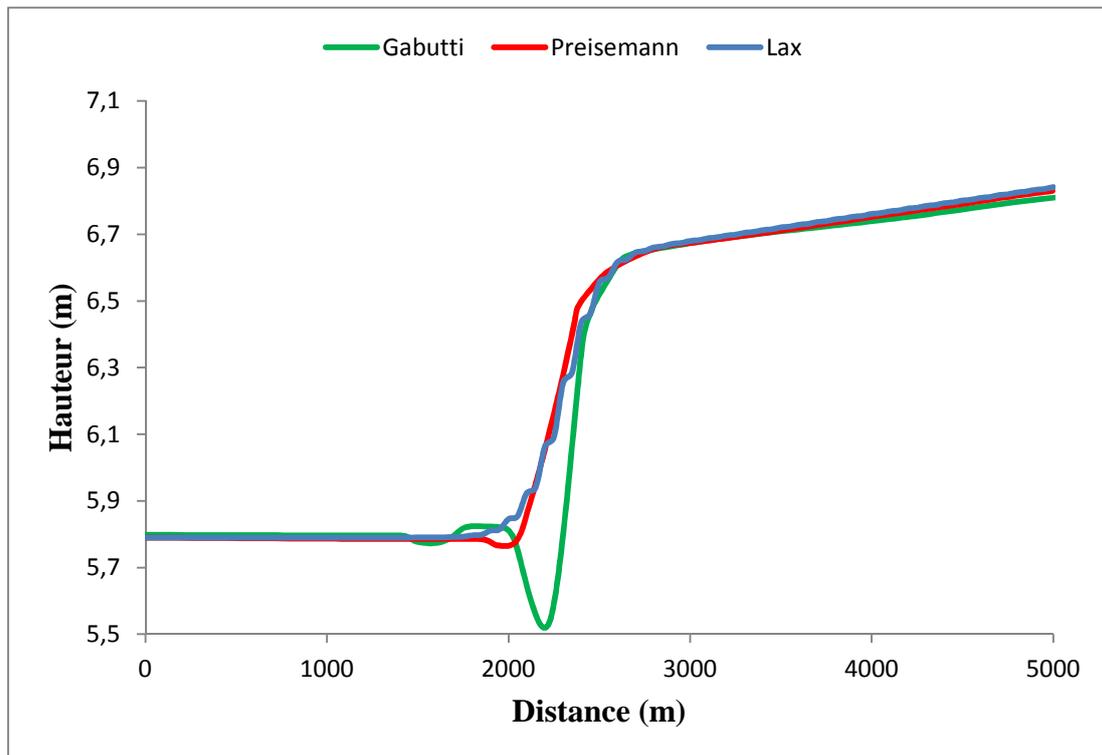


Figure IV.6 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 500s$.

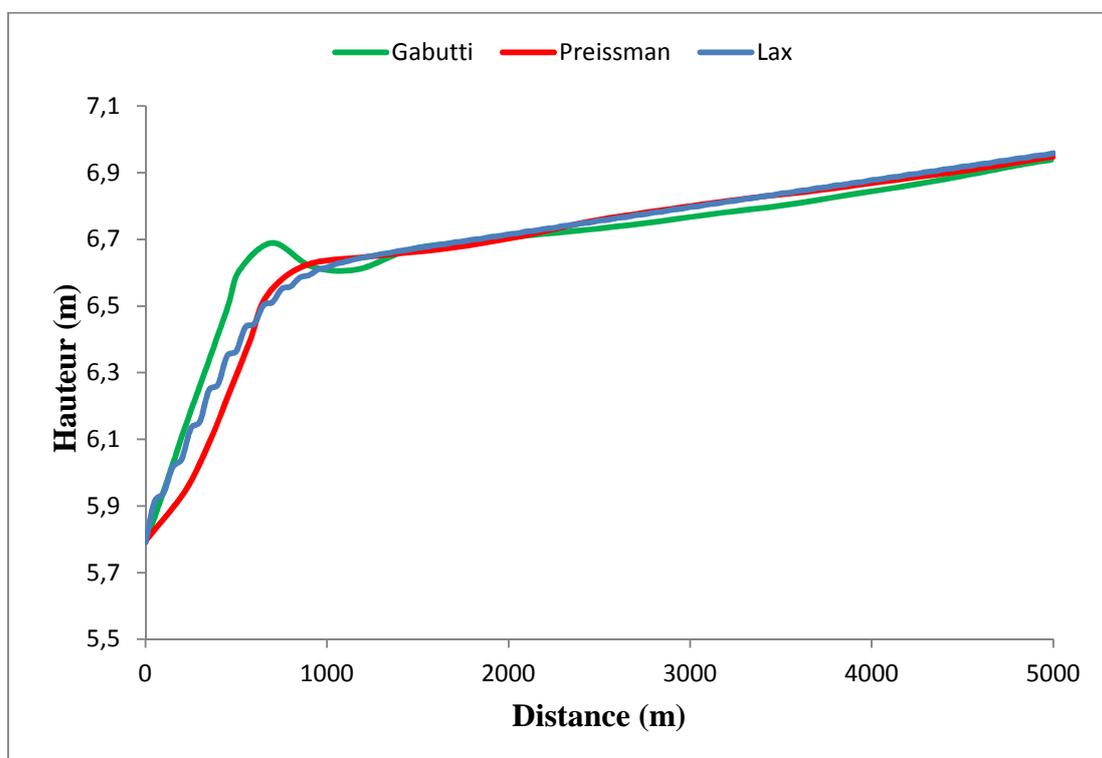


Figure IV.7 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 1000 s$

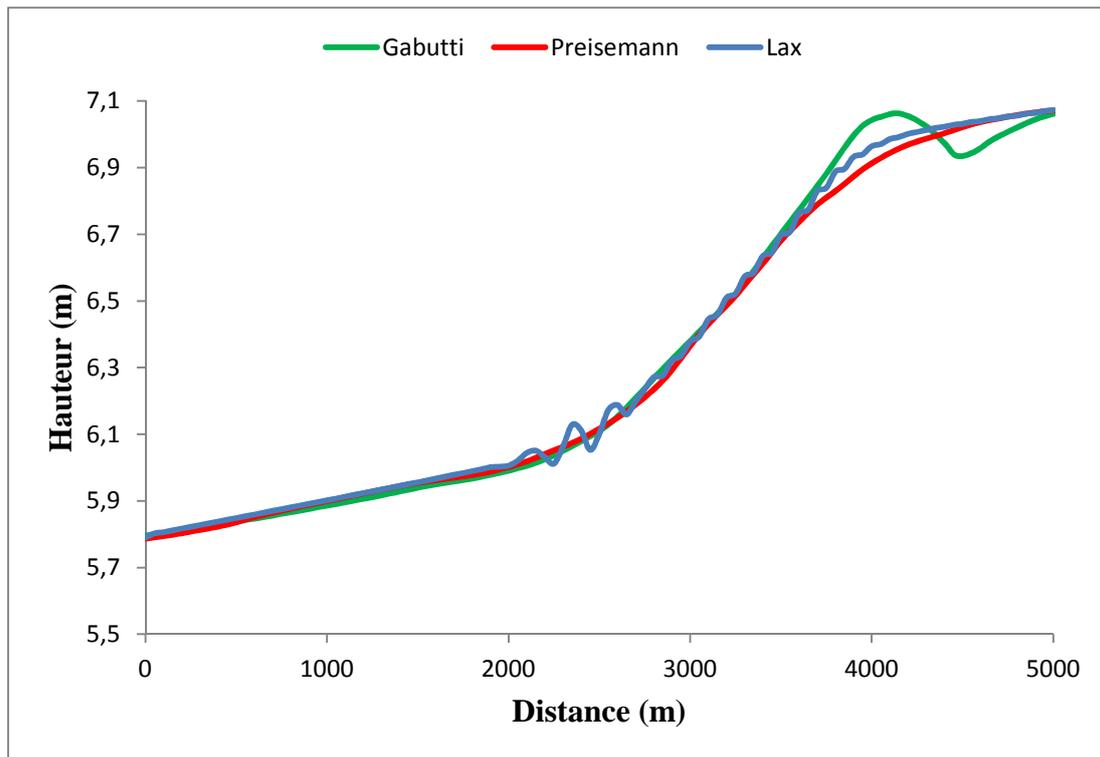


Figure IV.8 : Hauteur d'eau en fonction de la distance pour $t = 1500$ s

- A $t = 0$ s, le niveau d'eau reste constante ($h = 5,79$ m) tout le long du canal. Après la fermeture brusque de la vanne, une surélévation d'eau se produit qui est due au choc de l'onde avec la vanne.
- A $t = 500$ s (Figure IV.6), on observe que le niveau d'eau dans la partie amont du réservoir, reste constant ($h = 5,79$ m) jusqu'à $x = 2000$ m, puis la courbe augmente graduellement ($h = 6,6$ m), puis elle commence à se stabiliser avec une variation légère de la hauteur pour arriver à la valeur de $h = 6,84$ m.

La fermeture de la vanne provoque un choc de l'écoulement d'eau avec la vanne et qui change sont régime de permanent qui vient de réservoir au non permanent qui est le résultat de choc de l'écoulement qui produit des ondes qui s'écoule au sens contraire, ce qui nous montre la figure (IV. 9).

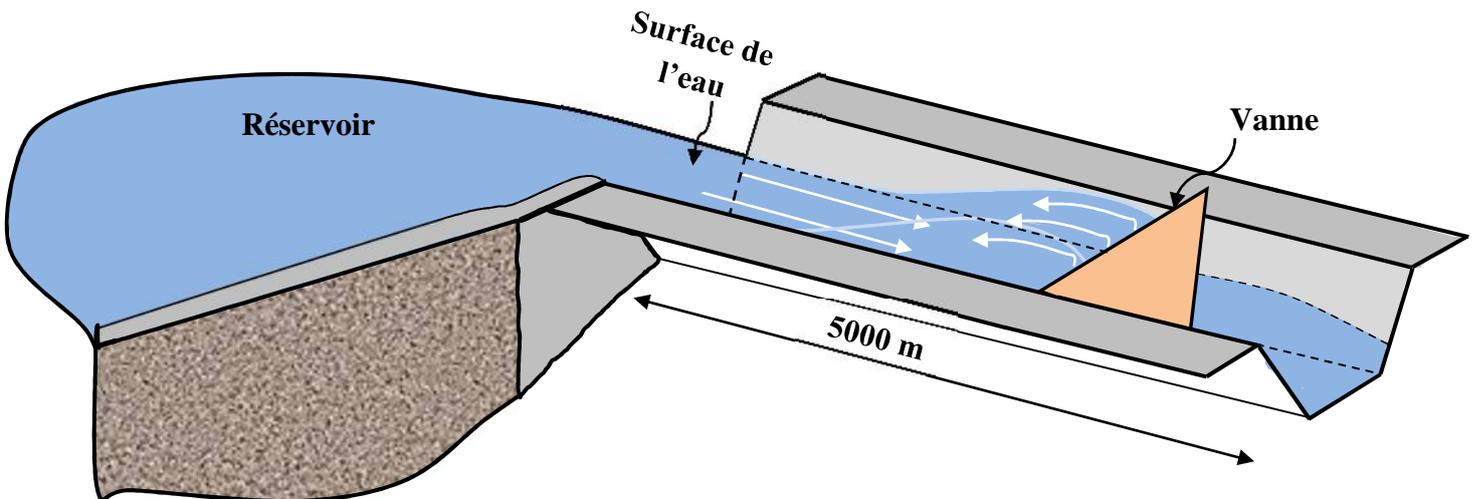


Figure IV.9: Profil longitudinal d'un canal trapézoïdal

A partir de la figure (IV.6) on remarque que les résultats obtenus par le schéma explicite de Lax sont concordants avec ceux calculés par le schéma implicite de Preismann [6].

- A $t = 1000$ s (Figure IV.7) on remarque une surélévation de la hauteur d'eau dans les premiers instants, et à $x = 1000$ s, l'augmentation de la hauteur d'eau est amorcée.

L'onde s'est presque propagée tout le long du canal, ce qui explique la hauteur très élevée sur la partie aval du réservoir ($x = 1000$ s).

- A $t = 1500$ s (figure IV.8) une augmentation graduelle du niveau d'eau ; lors des premiers instants la hauteur d'eau varie légèrement jusqu'à $x = 2000$ m, au-delà la surélévation du niveau d'eau se produit, et à $x = 4000$ m, elle commence à se stabiliser avec une variation légère de la hauteur pour attendre une hauteur maximale $h = 6,95$ m.

Les résultats que nous avons obtenues par le schéma explicite de Lax présente la même allure comparées avec ceux obtenus moyennant les schémas explicite de Gabutti et implicite de Preismann [6].

L'explication qu'on peut donner sur les résultats de la figure (IV.8) est que, après l'arrivée de l'onde au réservoir le niveau d'eau reste constant (la hauteur normale) ce qui amortit l'onde. Après son retour (le niveau d'eau dégrade graduellement), mais le niveau d'eau reste toujours très élevé au voisinage de la vanne cela est due au choc de l'écoulement avec la vanne, ce phénomène va durer un certain temps pour que l'onde va s'amortir complètement après ses aller-retour du réservoir à la vanne.

Une comparaison est présentée dans les figures (IV.10) et (IV.11) pour les sections $x = 2500$ m et $x = 5000$ m.

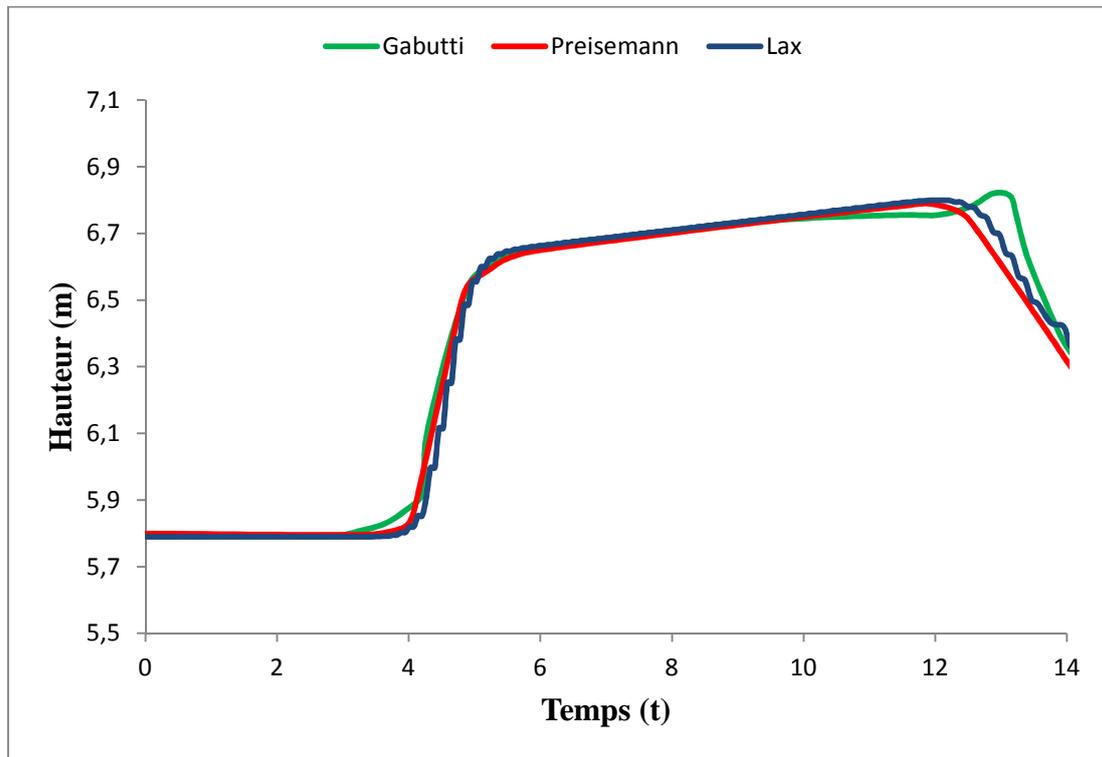


Figure IV.10: Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x = 2500$ m

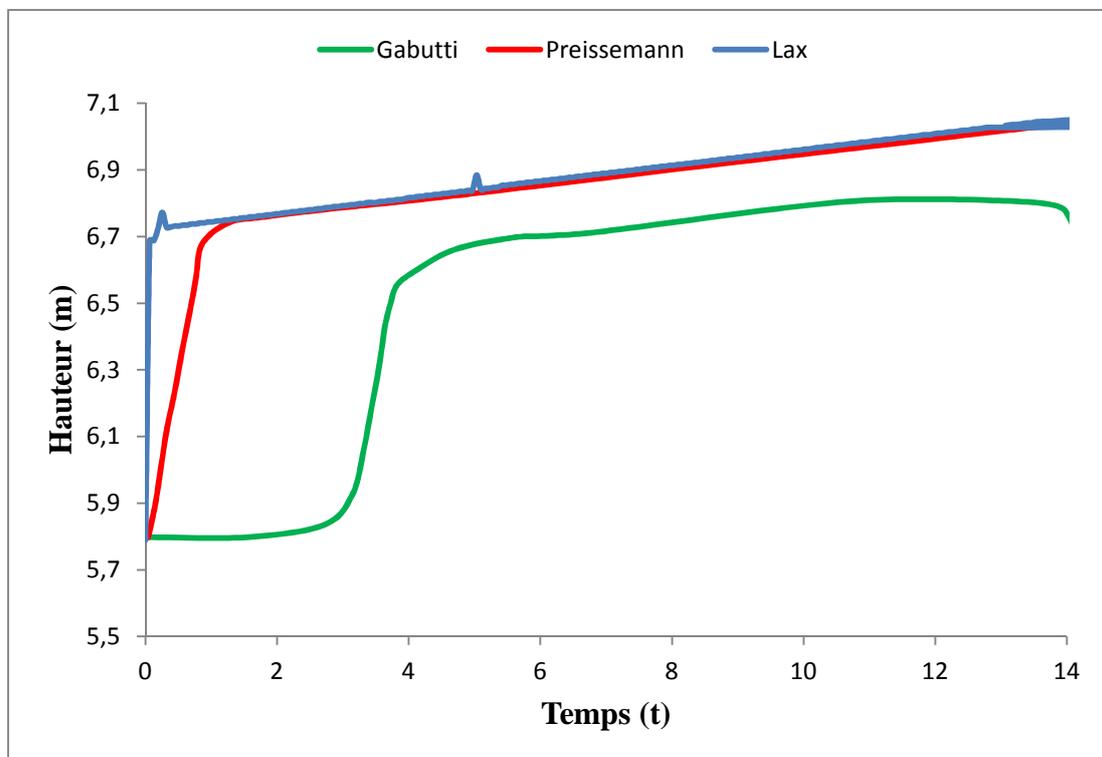


Figure IV.11: Hauteur d'eau en fonction du temps pour $x = 5000$ m

- **A $x = 2500$ m**, Dans la partie amont, le niveau d'eau reste constant pendant 400 s, puis il se produit une surélévation du niveau jusqu'à 600 s, et de 600 s à 1300 s il se stabilise ; après 1300 s on observe une diminution du niveau d'eau (Figure IV.10).

D'après ses résultats, on constate que l'onde s'est propagé dans le canal, son niveau est constant dans les 400 premières secondes a cause de l'écoulement qui sort du réservoir qui amortie l'onde (diminution due la hauteur d'eau).

- **A $x = 5000$ m**, la figure (IV.11) nous montre que le niveau d'eau est toujours très élevé. Au voisinage de la vanne durant le temps utilisé, cela revient à la vanne qui est toujours fermer et leur choc de l'écoulement avec c'elle ci. Les courbes de variations de la hauteur de l'écoulement à surface libre le long du canal, obtenues en utilisant le schéma de Lax présente les même allures que celles obtenues avec e schéma explicite de Gabutti et implicite de Preismann [6].

Ces mêmes courbes de variation de la hauteur recourent de façon encore plus prononcée celles du schéma implicite de Preismann.

b. Commentaire et interprétation des résultats obtenus :

Les valeurs de la hauteur maximale pour les schémas numériques sont reportées dans le Tableau (IV.4) ci-après.

Tableau IV.4 : Comparaison des résultats, application II

h_{\max} (m) \ t (s)	500	1000	1500
Lax	6,84	6,95	7,07
Preissmann	6,83	6,95	7,07
Gabutti	6,82	6,94	7,06

Le résultat obtenus par le schéma explicite de Lax comparé aux résultats explicite de Gabutti et implicite de Pressmann [6], nous montre que la hauteur maximale pour chaque schéma et presque le même, donc le modèle élaboré donne de très bons résultats et une bonne précision.

IV.3. Etude paramétrique

Après avoir validé le modèle proposé, cette étape consiste à étudier l'effet de la variation de quelques paramètres hydrauliques et numériques sur la propagation d'onde.

IV.3.1. Effet de la rugosité (nombre de Manning)

Cette expérience numérique a été réalisée pour un canal trapézoïdal de rugosité de fond différentes. Les valeurs utilisées dans cet exemple sont reportées dans le tableau (IV.5) ci-après.

Tableau IV.5 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Manning)

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	6,1 m
Débit Q	126 m³/s
La profondeur de l'écoulement h	5,79 m
Le nombre de nœuds N	100
Pente de fond S₀	0,00008

Les valeurs utilisées pour la rugosité sont : 0.009, 0.011, **0.013**, 0.015 et 0.017

La figure (IV.12) correspond à l'évolution de la hauteur pour différentes sections choisies. Nous constatons à travers cette figure que la rapidité avec laquelle l'eau se propage dépend de la rugosité de fond du canal. Les pertes de charge sont d'autant plus réduites que la rugosité est faible.

L'interprétation qu'on peut faire est que plus le nombre de Manning est supérieure à 0,013 ($n = 0,015$ et $n = 0,017$) plus le fond devient plus rugueuse, plus les pertes de charge deviennent importantes ce qui freine l'écoulement et amortie rapidement l'onde. La figure (IV. 12) montre que les hauteurs pour les nombres de Manning de 0,015 et 0,017 sont moins importantes que celles de $n = 0,013$.

Par contre, plus le nombre de Manning est inférieur à 0,013 (0,009 et 0,011) plus les pertes de charge diminuent, ceci est due à un écoulement plus rapide ce qui produit une hauteur d'onde plus importante.

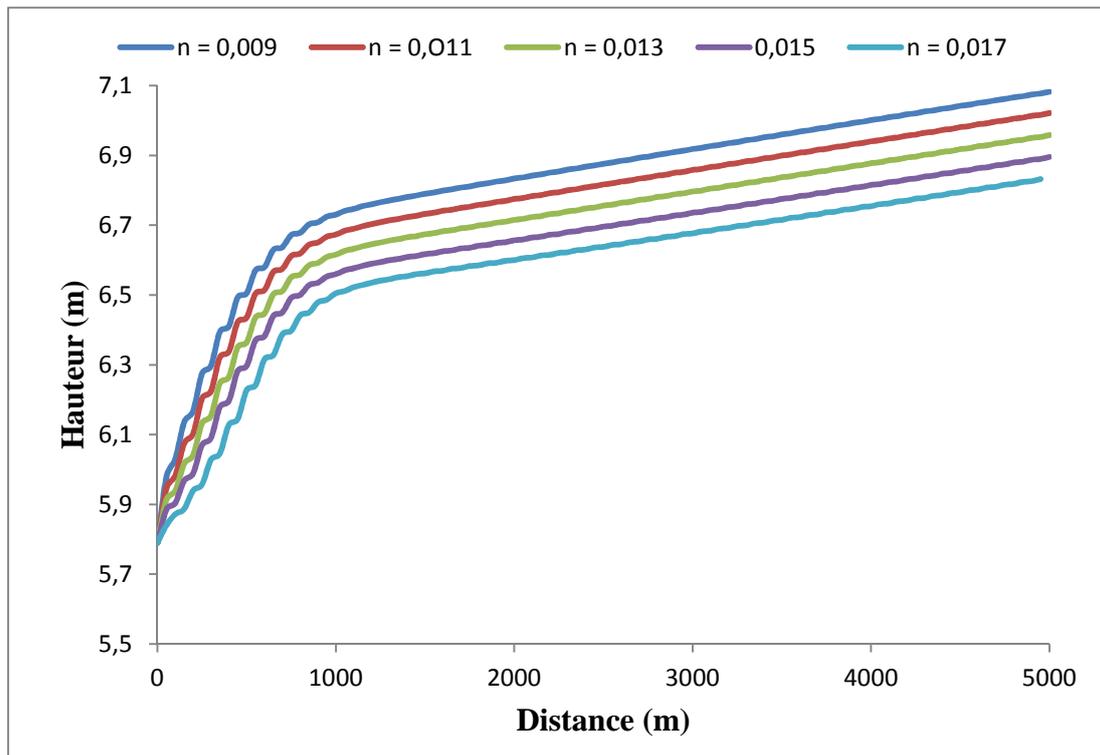


Figure IV.12 : Effet de la rugosité (nombre de Manning)

IV.3.2. Effet de la pente de fond du canal (S_0)

Les données de l'exemple traité dans ce cas sont reportées dans le tableau (IV.6) ci-après.

Tableau IV.6 : Données relatives à l'étude paramétrique (la pente de fond du canal)

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	6,1 m
Débit Q	126 m ³ /s
La profondeur de l'écoulement h	5,79 m
Le nombre des nœuds N	100
Nombre de Manning n	0,013

Les valeurs utilisées pour la pente de fond sont : 0.00001, 0.00004, **0.00008**, 0.00011 et 0.00014.

Les résultats obtenus dans cette application montrent l'impact de la variation de la pente de fond sur la hauteur du niveau d'eau et le temps d'arrivée de l'onde au réservoir.

D'après la figure (IV.13), on constate que l'inclinaison du fond du canal plus elle est faible ($S_0 = 0,00001$ et $S_0 = 0,00004$) plus la hauteur du niveau d'eau est faible et plus le temps d'arrivée de l'onde au réservoir est important ; par contre, pour une inclinaison importante

($S_0 = 0,00011$ et $S_0 = 0,00014$) la hauteur du tirant d'eau est très élevée et le temps de l'onde pour arriver au réservoir sera moins important. Donc la pente du fond de canal joue un rôle très important pour l'amortissement rapide de l'onde, cela est due à la vitesse d'écoulement d'eau qui augmente en fonction de la pente. Ceci est vérifié par les formules empiriques de Chézy et Darcy ($S_0 \rightarrow V$).

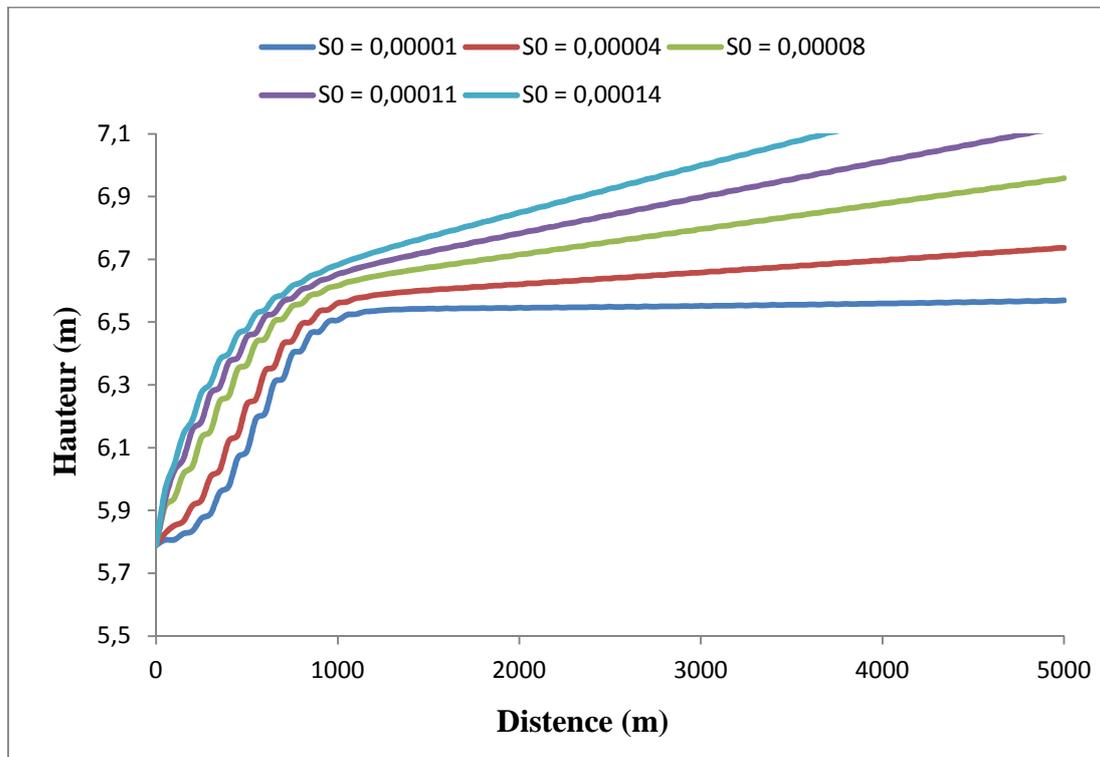


Figure IV.13 : Effet de la pente de fond du canal

IV.3.3. Effet de la hauteur initiale

L'étude faite ici utilise les données regroupées dans le tableau (IV .7) ci-après :

Tableau IV.7 : Données relatives à l'étude paramétrique (La hauteur initiale)

Longueur du canal L	5000 m
Débit Q	126 m ³ /s
Le nombre de nœuds N	100
Pente de fond S_0	0,00008
Nombre de Manning n	0,013
Le nombre de Courant	0,95

Les valeurs utilisées pour la profondeur sont: $h = 5,5 \text{ m}$, $h = 5,7 \text{ m}$, $h = 5,79 \text{ m}$, $h = 6 \text{ m}$ et $h = 6,2 \text{ m}$.

La figure (IV.14) montre l'influence de la variation de la hauteur initiale d'eau sur l'écoulement, les courbes gardent la même allure durant tout le temps maximal de calcul et chaque courbe présente une particularité.

Ceci nous permet d'affirmer tout simplement que si on garde les autres paramètres inchangés, plus la hauteur initiale d'eau est élevée plus l'onde produite sera très importante pour qu'elle s'amortisse. Par ailleurs, si on diminue la hauteur initiale, l'onde va apparaître moins apportant et qui va s'amortir rapidement on peut confirmer ça par la formule de la célérité d'onde : $C^2 = gh$ (donc h , C)

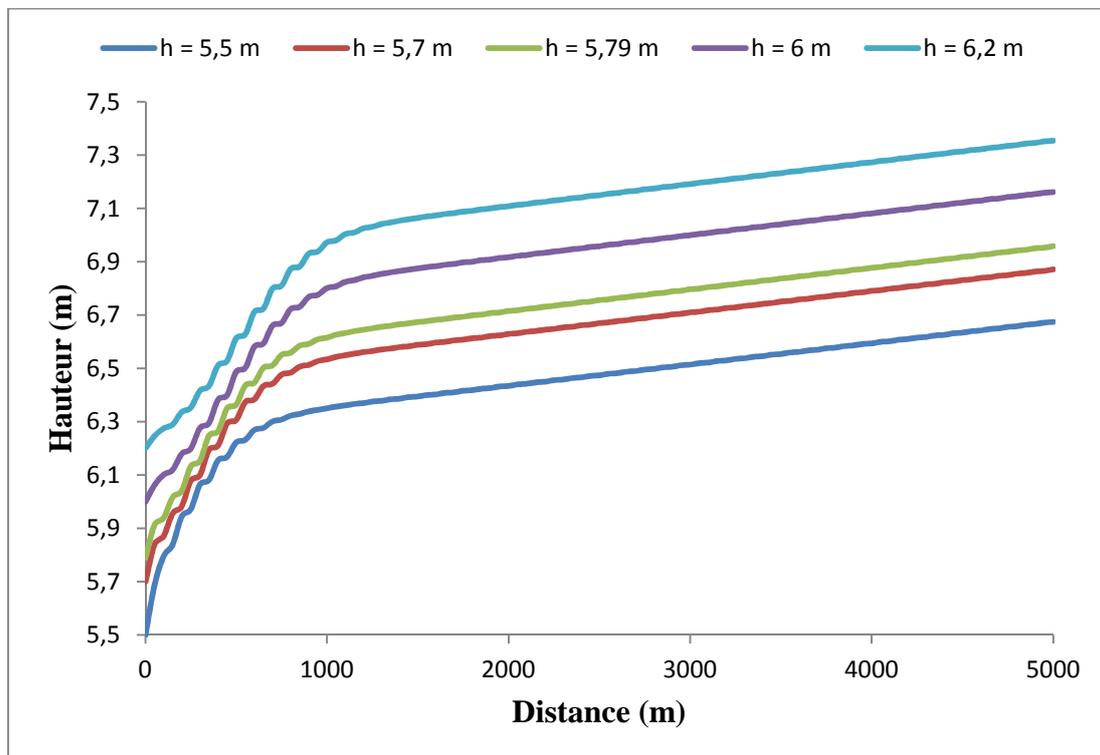


Figure IV.14 : Effet de la hauteur initiale

IV.3.4. Effet du nombre de Courant

Les valeurs utilisées dans cette partie sont reportées dans le tableau (IV.8) ci-après.

Tableau IV.8 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de Courant)

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	6,1 m
Débit Q	126 m ³ /s
La profondeur de l'écoulement h	5,79 m
Le nombre de nœuds N	100
Pente de fond S ₀	0,00008
Nombre de Manning n	0,013

Les valeurs utilisées pour le nombre de Courant sont : 0.7, 0.9, **0.95**, 1 et 1,2

La figure (IV.15) montre que pour un temps donné, plus ce nombre est petit, l'onde apparait avec une forme diffusée. Cependant, si l'on s'approche davantage de l'unité, le front d'onde prend une allure plus raide proche de sa forme physique réelle. Si on le prend supérieur à l'unité (pour objectif de vérification), des instabilités numériques commencent à se faire ressentir, et après quelques temps de simulation la solution diverge complètement suite à l'accumulation d'erreurs.

Ceci est due au fait que ce nombre n'intervient que dans la condition de stabilité. On remarque que plus le nombre de courant est important plus le temps d'amortissement de l'onde est important ; cela est due à la diminution de la vitesse d'écoulement et la célérité de

l'onde ce que nous montre la relation suivante : $Cr = \frac{\Delta t}{V \pm C}$ ($Cr \nearrow \Rightarrow t \searrow \Rightarrow (V + C) \nearrow$)

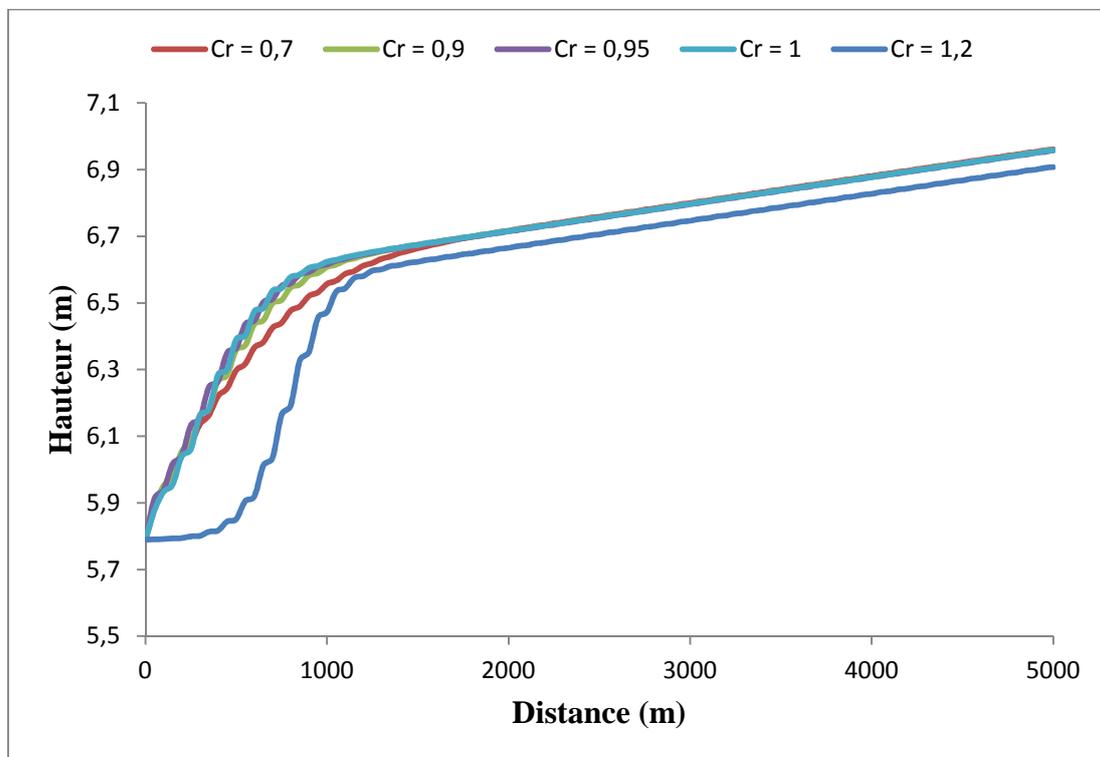


Figure IV.15: Effet du nombre de Courant

IV.3.5. Effet du nombre de nœuds (N)

Dans cette expérience numérique on garde les paramètres de l'application (II), et on change le nombre de nœuds, les valeurs utilisées dans cette étape sont reportées dans le Tableau (IV.9) ci-dessous.

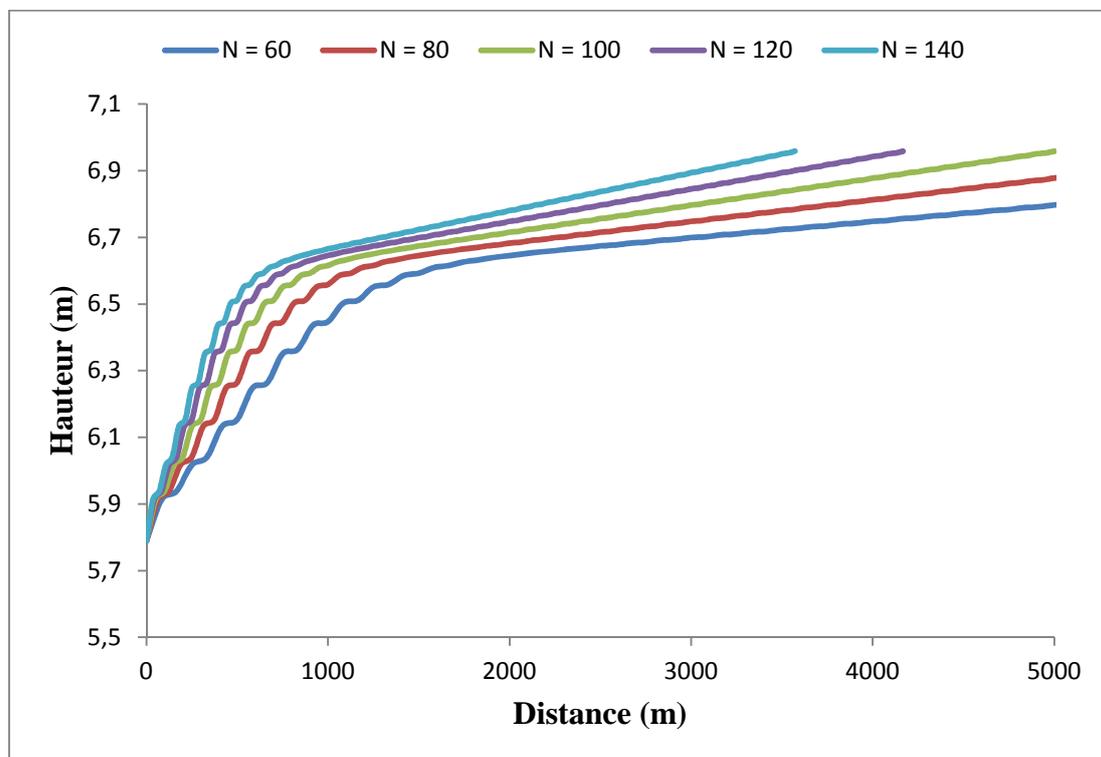
Tableau IV.9 : Données relatives à l'étude paramétrique (nombre de nœuds)

Longueur du canal L	5000 m
Largeur b	6,1 m
Débit Q	126 m³/s
La profondeur de l'écoulement h	5,79 m
Le nombre du Courant Cr	100
Pente de fond S₀	0,00008
Nombre de Manning n	0,013

Les valeurs utilisées pour le nombre des nœuds sont : N = 60, N = 80, **N = 100**, N = 120 et N = 140.

La figure (IV.16) nous montre les différentes courbes de variation de hauteur d'eau en fonction du temps, le changement du nombre de nœuds et on garde même longueur fait appelé aux changements de maillage pour un nombre de nœud très petits, on aura un pas de temps (Δt) et (Δx) très grands. Ce qui conduit à un temps très important pour que l'onde s'amortie et pour un nombre de nœuds supérieur on aura un Δt et Δx très petite, et pour cela on a obtenu des courbes qui n'ont pas continue (pour N = 120 et N = 140) on comparant avec (N = 60, N = 80 et N = 100).

Le choix de Maillage est une condition très importante pour obtenir des bons résultats numériques.

**Figure IV.16** : Effet du nombre de nœuds N

IV.4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats de simulations d'un modèle bâti sur le schéma diffusif de Lax, où nous avons utilisé des approximations numériques basées sur une procédure de calcul récurrente dans le temps.

Les applications traitées concernent le cas de canaux prismatiques à section transversale rectangulaire et trapézoïdal. Les analyses effectuées prouvent la fiabilité du modèle proposé dans cette étude. Après validation, une analyse de l'impact de la variation des différents paramètres sur la forme de la surface a été effectuée.

A travers cette étude, nous déduisons que pour ce modèle, les meilleurs résultats sont obtenus pour un « nombre de Courant » très proche de l'unité. Enfin, notons que le modèle élaboré est d'un large éventail d'applications cependant, et pour chaque cas pratique étudié, les conditions aux limites doivent être revues en fonction du type du problème.

Les écoulements instationnaires brusquement variés dans un canal à surface libre sont l'un des phénomènes les plus compliqués de l'hydraulique, dont la solution analytique des équations est impossible ; dans ces conditions, la simulation numérique représenté le seul moyen de résoudre ce problème.

Le travail présenté dans ce mémoire, est un modèle traitant les écoulements transitoires unidimensionnels à surface libre, une présentation générale des notions relatives à ce type d'écoulement a fait l'objet du premier chapitre. Sous considération de certaines hypothèses, les équations gouvernant le phénomène ont été établies et ceci par application des deux principes de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement donnant ainsi aux équations du mouvement appelées équations monodimensionnelles de Jean Claude Barré de Saint-Venant.

Le système de Saint-Venant admet rarement de solution théorique, car il comporte des termes aux dérivées partielles temporelles et spatiales. Pour le résoudre, nous avons opté pour la méthode des différences finies moyennant le schéma explicite de Lax. Ce dernier est précis au premier ordre.

La discrétisation des équations doit être traitée avec délicatesse et précision ; car chaque erreur sur un nœud se répercute immédiatement sur les autres nœuds.

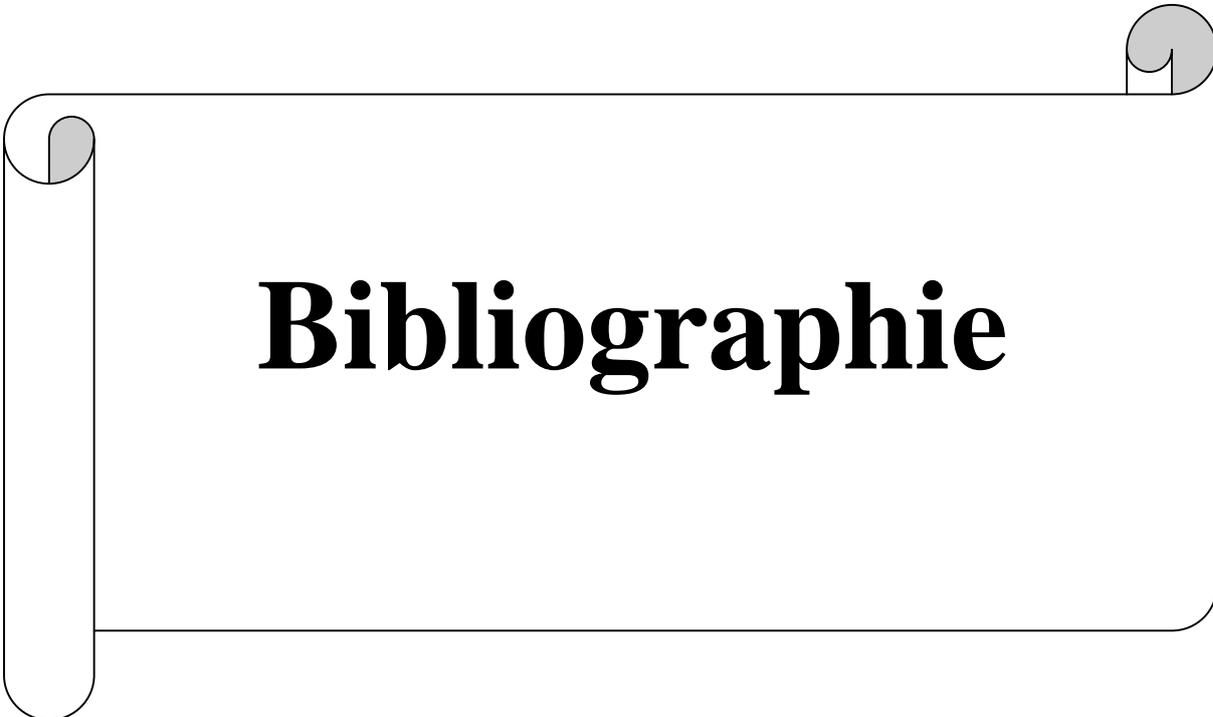
Les limites amont et aval du champ de calcul ont été calculées à partir de la méthode des caractéristiques. L'évaluation du pas de temps a été faite avec la condition de Courant Friedrich Lewy C.F.L . C'est une condition de stabilité du schéma choisi.

L'application du schéma de Lax aux équations de Saint-Venant à donner des résultats très proche de ceux obtenus par d'autres chercheurs pour les problèmes similaires. A côté de la précision satisfaisante obtenue par ce schéma, tant sur le plan quantitatif (hauteur des ondes) que celui qualitatif (forme du front d'onde), on peut affirmer que le schéma de Lax est très adapté pour la simulation des autres écoulements à surface libre rencontrés. Comparativement aux autres schémas, il présente une précision satisfaisante sans dispersion numérique. Cependant, son ordre de précision (premier ordre) fait que le nombre de Courant doit se rapprocher autant que possible de l'unité pour éviter une diffusion excessive inhérente à ce schéma.

Enfin, le modèle présenté dans ce travail n'est qu'un des cas des problèmes complexes liés à l'écoulement dans un canal à ciel ouvert. Son étude nous a permis d'avoir une vision plus large sur les méthodes traitant les problèmes de propagation d'onde. Ceci laisse la voie ouverte à d'autres études avec d'autres schémas numériques explicites et implicites, par exemple schéma de Gabutti, Preissman, ...etc.



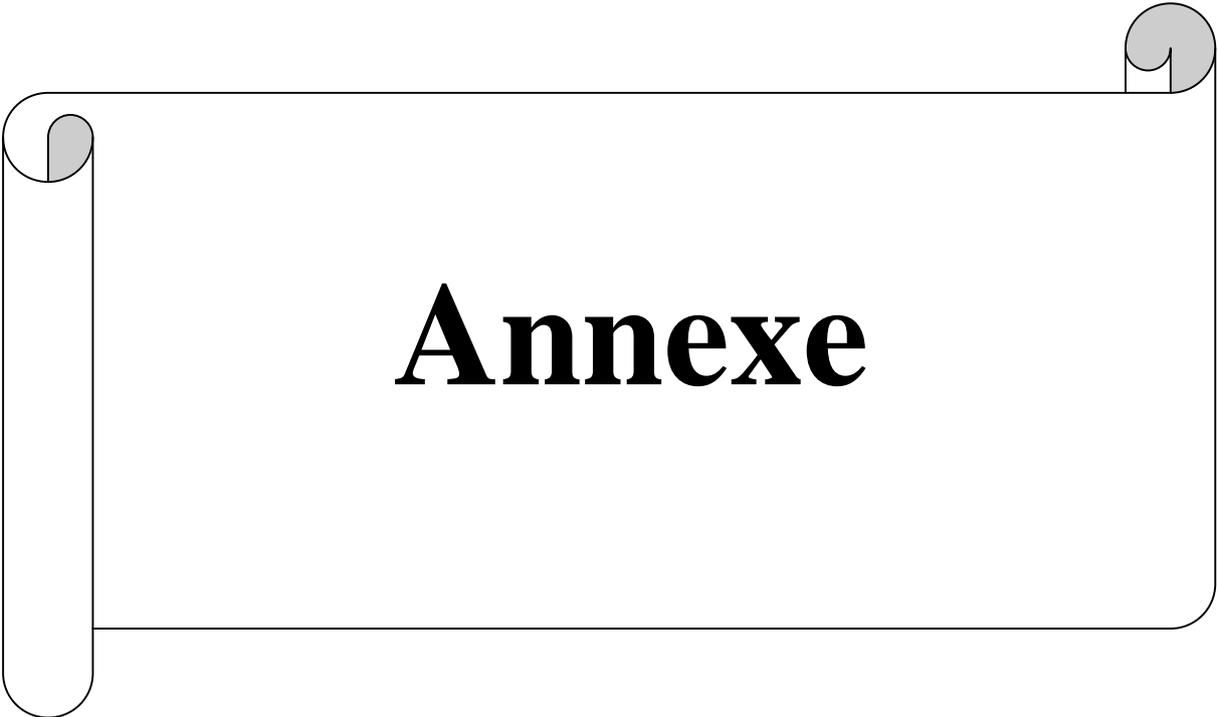
Conclusion générale



Bibliographie

- [1] **BERREKSI, A. et BOUHADJI, A. (1993)**, « Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transitions ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.
- [2] **BERTRAND.KRAJE WSKI. (2006)**, « Modélisation des écoulements en réseau d'assainissement ».
- [3] **CARLIER, M. (1980)**, « Hydraulique générale et appliquées ». Eyrolles éditeur Paris.
- [4] **CHANSON, H. (2004)**, « Environmental Hydraulics of Open Channel Flows», Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [5] **CHANSON, H. (2004)**, « The Hydraulics of Open Channel Flow».
- [6] **CHAUDHRY, M. H. (2008)**, « Open Channels Flow ». Deuxième Edition, Springer.
- [7] **CHAUDHRY, M. H. (2008)**, « Applied hydraulic transients». Deuxième Edition, Springer.
- [8] **CHOW, V.T. (1972)**, « Open-channel hydraulic » Ed, Eyrolles, Paris.
- [9] **COMOLET. R. (1982)**, « Mécanique Expérimentale des fluides », Tome 2. Ed.Masson, PARIS.
- [10] **COULOUVRAT, F. et MARCHIANO, R. (2007)**, « Méthodes numérique en acoustique », Université Pierre et Marie Curie. Paris.
- [11] **FENNEMA, R. J. and CHAUDHRY, M. H. (1986)**, «Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free - Surface Flows with Shocks». Water Resources Research, Vol. 22, N°13, pp. 1923-1930.
- [12] **FENNEMA, R. J. and CHAUDHRY, M. H. (1987)**, «Simulation des écoulements monodimensionnels consécutifs aux ruptures des barrages ». Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, N° 1, pp. 41-50.
- [13] **GRAF, W. H. et ALTINAKAR, M. S. (2000)**, « Hydraulique fluviale, Tome II Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple». Edition. Presses Polytechnique et universitaires Romandes, Lausanne.
- [14] **HUG, M, (1975)**, «Mécanique des fluides appliquée», Edition Eyrolles.
- [15] **LAMAGAT .J. P, Seytoux, H. J. M et ALBERGEL. J** « Analyse de temps de propagation des crues ». Hydro Consult. International.
- [16] **OUKACHA, M. et LECHEHEB, M. (1996)**, « Détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et forte pente ». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.

- [17] **SCHWCIZERISCHE BOUZELTING (1971)**. Calcul de la propagation des crues dans un cours d'eau avec submersion de champ d'inondations ». 89. Juhrgang Heft 24. 17.
- [18] **TRAORE, S. et DIALO, S. (2001)**, «Etude d'un écoulement transitoire à surface libre». Projet de fin d'études, Université A. MIRA de Bejaia.
- [19] **YANN, A. (2004)**, « Simulation d'écoulements à surface libre par une méthode de capture d'interface en formulation totalement couplée ». Thèse de Doctorat. Ecole. centrale de Nantes et l'université de Nantes.
- [20] **ZOUAOUL. D. (2004)**, «Simulation numérique des écoulements à surface libre avec onde». Projet de fin d'études, E. N. Polytechnique d'Alger.



Annexe

LA METHODE DES CARACTECRISTIQUES

On se place dans le plan (x, t) et on cherche les courbes caractéristiques, c'est-à-dire les courbes où il existe une relation entre le temps et l'espace. Cette relation est utilisée pour remplacer les équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles totales. La méthode n'est applicable facilement que sous certaines conditions, notamment le fait que la section d'écoulement soit rectangulaire, de plus, le schéma de résolution n'est pas nécessairement conservatif car on est conduit à assimiler les courbes caractéristiques à des droites [4, 15].

Cette méthode, qui est l'une des premières à avoir été mise en œuvre historiquement pour le calcul notamment des propagations des crues en rivière, est très peu utilisée en pratique. Elle est présentée ici pour résoudre les équations des conditions d'amont et d'aval (Chapitre III).

Le Système d'équation de Saint Venant pour les canaux prismatiques s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

D'autre part, les différentielles totales s'écrivent :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (\text{A.3})$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad (\text{A.4})$$

Les quatre équations (A.1, A.2, A.3 et A.4) ci-dessus comportent quatre inconnues :

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial V}{\partial t}$$

On applique alors la méthode de Stoker, qui propose de calculer la célérité de l'onde C par la relation :

$$C = \sqrt{g \frac{A}{\left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)}} \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas d'un canal rectangulaire, puisque $A = B h$, on obtient simplement que :

$$C = \sqrt{gh} \quad \text{ou} \quad C^2 = g h \quad \text{ou} \quad h = C^2 / g \quad (\text{A.6})$$

Si on différencie cette expression, on obtient une relation simple entre C et h :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

On transforme alors le système d'équations pour l'exprimer uniquement avec les variables V et C :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{C^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial V}{\partial x} + 2V \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2C \frac{\partial C}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

On calcule à présent la somme et la différence des deux équations du système précédent, c'est-à-dire (A.10 + A.11) et (A.10 - A.11), il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (2C + V) + \frac{\partial V}{\partial x} (C + V) + \frac{\partial C}{\partial x} (2V + 2C) = g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (2C - V) + \frac{\partial V}{\partial x} (C - V) + \frac{\partial C}{\partial x} (2V - 2C) = -g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

D'où, après réarrangement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V + C) \frac{\partial}{\partial x} \right) (2C + V) = g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V - C) \frac{\partial}{\partial x} \right) (2C + V) = g(S_0 - S_f) \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Les arguments de gauche peuvent représenter des différentielles totales. En effet, on a :

$$d(V + 2C) = \frac{\partial(V+2C)}{\partial t} dt + \frac{\partial(V+2C)}{\partial x} dx \quad (\text{A.16})$$

Et donc :

$$\frac{d(V+2C)}{dt} = \frac{\partial(V+2C)}{\partial t} + \frac{\partial(V+2C)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{A.17})$$

En substituant dans l'équation (A.14) et dans (A.15), on obtient respectivement :

$$\frac{d(V+2C)}{dt} = g(S_0 - S_f) \text{ Avec } \frac{dx}{dt} = C + V \quad (\text{A.18})$$

Et

$$\frac{d(V-2C)}{dt} = g(S_0 - S_f) \text{ Avec } \frac{dx}{dt} = C - V \quad (\text{A.19})$$

La célérité de l'onde par rapport au sol (ou radier du canal) vaut donc $\frac{dx}{dt} = V \pm C$. Si on a $V + C$, la propagation de l'onde a lieu vers l'aval C^+ ; si on a $V - C$, la propagation de l'onde a lieu vers l'amont C^- .

Si on se place sur les courbes $\frac{dx}{dt} = V \pm C$, les équations se simplifient et deviennent, en faisant l'hypothèse que les frottements sont négligeables, c'est-à-dire en considérant $S_0 = S_f$:

$$V + 2C = \text{Cste sur une courbe } C^+ \text{ définie par } \frac{dx}{dt} = V + C,$$

$$V - 2C = \text{Cste sur une courbe } C^- \text{ définie par } \frac{dx}{dt} = V - C.$$

Il est possible de représenter la propagation de l'onde dans un espace à trois dimensions (x, t, h) comme indique la figure (A.1). Les C^+ et C^- appelées courbes caractéristiques, peuvent être tracées dans le plan (x, t) comme indiqué dans la figure (A.2).

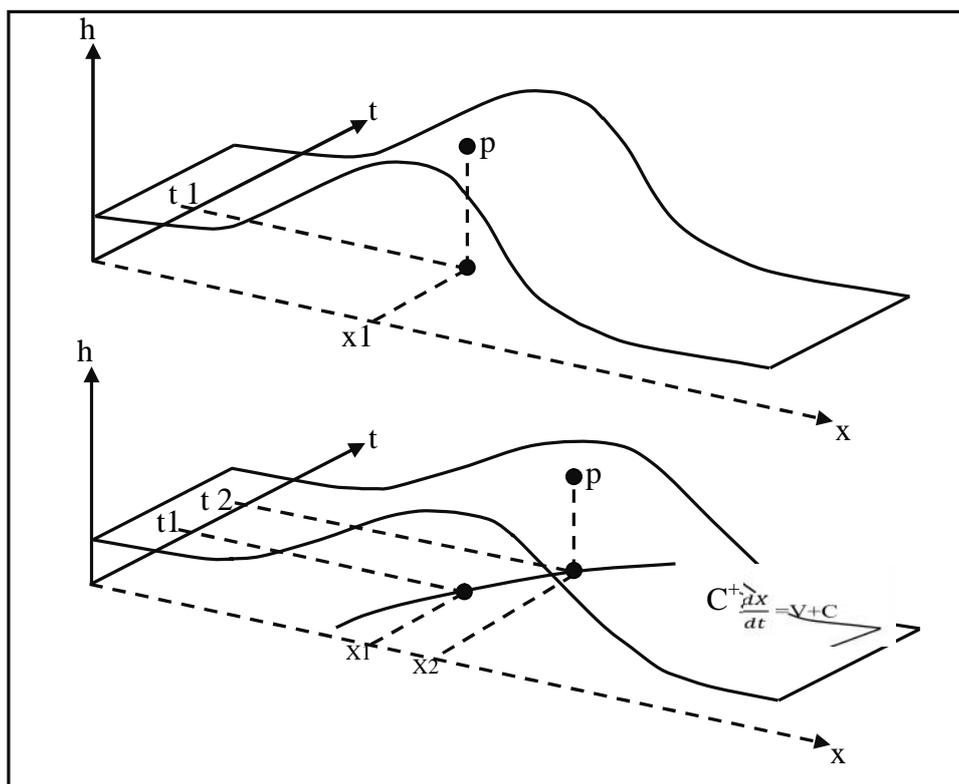


Figure A.1 : Représentation dans l'espace (x, t, h) de la propagation d'une onde et de la courbe C^+ correspondante

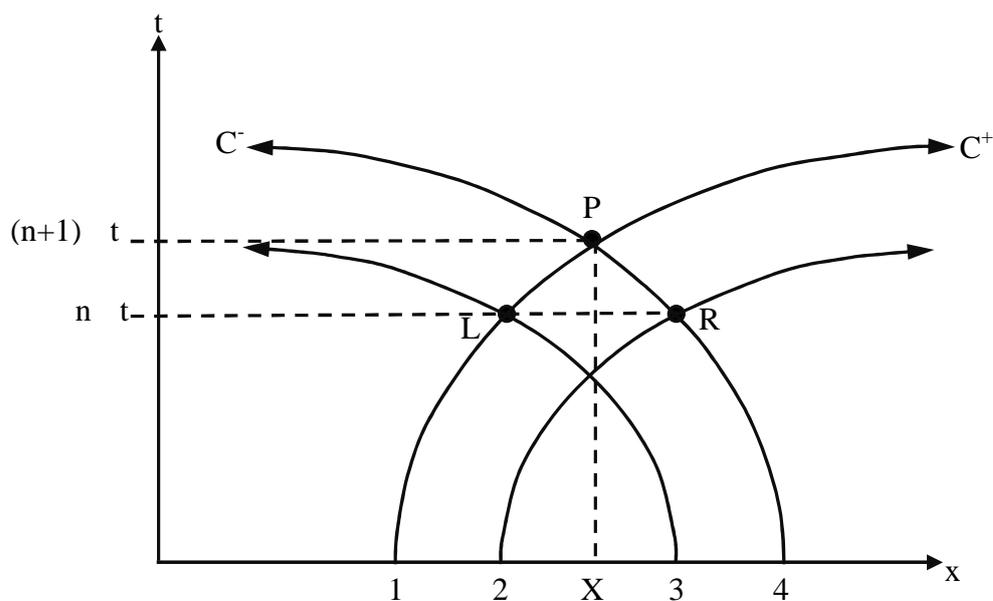


Figure A.2 : Propagation d'une onde dans le plan (x, t)

Sur la figure précédente (Figure A.1), aux points notés L et R, on connaît les vitesses de l'écoulement notées respectivement V_L et V_R , et les hauteurs h_L et h_R . On résout les équations pour V et h au point P en parcourant le plan (x, t) . Pour cela, on résout en remplaçant les différentielles totales par des différences finies qui constituent des approximations d'ordre 1 lorsque l'on assimile les courbes C^+ ou C^- à des segments de droites.

On peut écrire sur la courbe C^+ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_P - V_L) + \sqrt{\frac{g}{h_L}} (h_P - h_L) - (t_P - t_L) (g(S_0 - S_f)) \approx 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_P - x_L) = (V_L + \sqrt{g h_L}) (t_P - t_L) \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

Et sur la courbe C^- :

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_P - V_R) + \sqrt{\frac{g}{h_R}} (h_P - h_R) - (t_P - t_R) (g(S_0 - S_f)) \approx 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_P - x_R) = (V_R + \sqrt{g h_R}) (t_P - t_R) \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

On a ainsi 4 équations et 4 inconnues : x_P , t_P , V_P et V_L . La résolution du système conduit directement à :

$$t_P = \frac{(x_L - x_R) + t_R(V_R + \sqrt{g h_R}) - t_L(V_L + \sqrt{g h_L})}{(V_R - V_L) - (\sqrt{g h_L} + \sqrt{g h_R})} \quad (\text{A.24})$$

$$x_P = x_L + (V_L + \sqrt{g h_L}) (t_P - t_L) \quad (\text{A.25})$$

Ce sont les coordonnées du point P dans le plan (x, t) . D'autre part, on détermine :

$$h_P = \frac{(V_L - V_R) + (\sqrt{g h_L} + \sqrt{g h_R}) + (t_P - t_L) g (S_0 - S_f) - (t_P - t_R) g (S_0 - S_f)}{(\sqrt{g h_L} + \sqrt{g h_R})} \quad (\text{A.26})$$

$$V_P = V_L - \sqrt{\frac{g}{h_L}} (h_P - h_L) + (t_P - t_L) g (S_0 - S_f) \quad (\text{A.27})$$

On a donc une expression explicite de V_P de C^+ et V_P de C^- en tout point du plan (x, t) . Il faut définir des conditions aux limites amont et aval (V et h en $x = 0$ et en $x = L$ longueur du canal) et des conditions initiales (V et h pour $t = 0$).

Il faut par ailleurs vérifier la condition de Courant-Friedrichs- Lewy (CFL):

$$t \leq \frac{\Delta x}{(V+C)} \quad (\text{A.28})$$

En pratique, lorsque l'on discrétise le plan (x, t) avec des pas Δx et Δt , on commet une erreur car les points de calcul L et R ne sont pas nécessairement situés aux intersections du maillage. Cela conduit à faire des approximations supplémentaires par rapport à celle faite en prenant des différences finies à l'ordre 1. Les erreurs de calcul par rapport à la solution exacte augmentent lorsque Δx augmente. Il faut donc choisir Δx suffisamment petit, mais cela conduit souvent à prendre aussi Δt petit et donc à une quantité de calculs importante. De plus, pour des sections non rectangulaires, les calculs deviennent beaucoup plus complexes et des instabilités numériques apparaissent, ce qui contribue au désintérêt actuel pour cette méthode de résolution [15].

Cette méthode est utilisée dans notre cas pour résoudre explicitement la vitesse V et la hauteur h dans les frontières du canal (condition amont et aval) (Figure A.3).

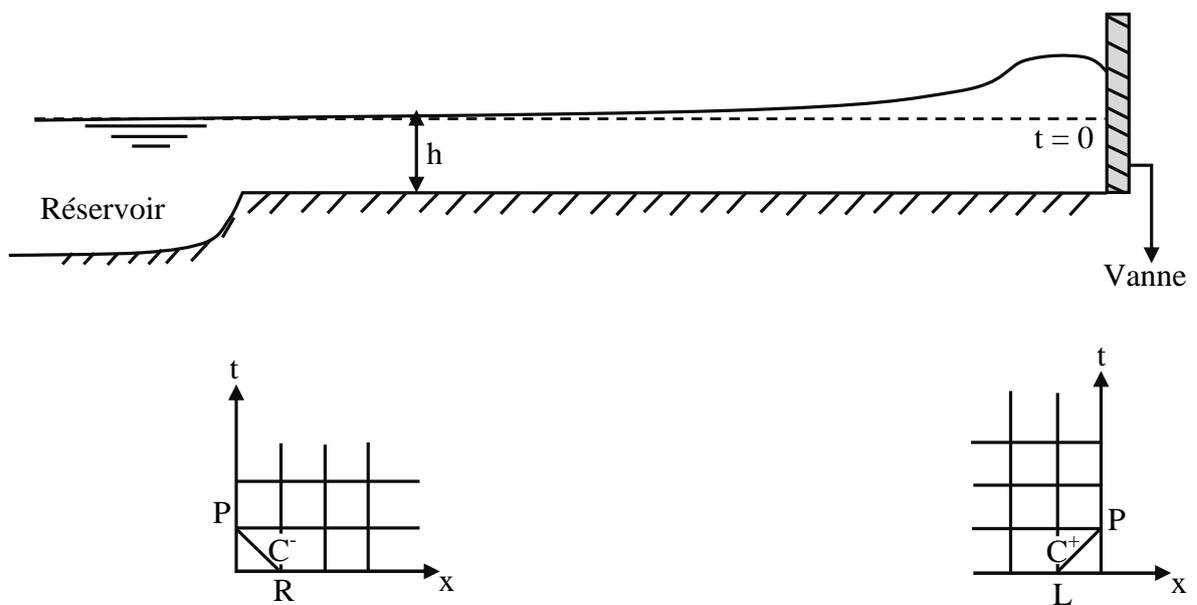


Figure A.3: Les conditions de frontière pour une vanne

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE SAINT VENANT 1D PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la propagation d'onde d'un écoulement non permanent dans un canal à surface libre.

Ces écoulements sont gouvernés par le système d'équation de Saint Venant obtenues en appliquant le principe de conservation de la masse et le théorème de la quantité de mouvement tout en tenant compte de quelques hypothèses simplificatrices dénommées hypothèses classiques de Saint-Venant.

La résolution de ce système d'équations a été faite en utilisant le schéma explicite aux différences finis de Lax.

Les résultats obtenus moyennant le modèle mathématique élaboré comparés à des résultats numérique d'autres chercheurs montrent un accord satisfaisant dans l'ensemble des applications traitées, à savoir écoulement dans un canal rectangulaire et trapézoïdal avec une fermeture brusque d'une vanne placée à l'aval.

Mots-clés

Écoulement à surface libre – Régime non permanent – Saint-Venant – Différence finis – Schéma de Lax.

Abstract

The objective of this work is to study the wave propagation of the unsteady free-surface flow.

The flow in equations is governed by the Saint-Venant equations with are obtained by using the conservation and the momentum laws with some simplifying hypothesis.

This results detained by the mathematical model elaborated compared with other results shows a good agree in the two applications studied here with are the unsteady free surface flow in a rectangular and trapezoidal channel with a valve to place has the downstream.

Key words

Free surface flow – Unsteady flow – Saint-Venant – Finite difference method – Lax scheme.