République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Bejaia

Faculté de Technologie
Département d'**Hydraulique**
Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :
MOHELLEBI Massilva

MIMECHE Omar

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **Ouvrages et Aménagements Hydrauliques**

INTITULE :

MODELISATION DU BALLOTTEMENT DES LIQUIDES DANS UN RESERVOIR

Soutenu le **29 /06 /2015** devant le jury composé de :

- Président : **Mr. LABIOD Chouaib**
- Promoteur (s) : **Mr. SEGHIR Abdelghani**
- Examinateur (s) : **Mr. HAMMOUCHE Abderrahmane**

Mr. BRREKSI Ali

Année Universitaire : 2014/2015

Remerciements

Le présent mémoire est le fruit de quelques mois de recherches qui n'auraient sans doute jamais vu le jour sans la contribution ni le soutien d'un certain nombre de personnes que on tient à remercier ici.

On tient à remercier chaleureusement tout d’abord M.Dr SEGHIR Abdelghani pour la confiance qu’il nous a accordée en nous proposant ce sujet de recherche passionnant, très riche, on admire vraiment son savoir-faire , il est pour nous un exemple à suivre. On remercie le jury qui a accepté d’examiner et de juger cette thèse, leurs remarques avisées nous ont permis de mieux clarifier certains points et nous ont apporté plus de recul sur le travail effectué.

On tient aussi à adresser un grand merci à ceux qui ne sont certainement pas les derniers à devoir être remerciés, à savoir nous très chères parents qui nous ont tout donné et qui nous ont permis d'arriver jusqu'ici, ils ont tout fait pour financier nous études et ils ont veillés pour notre réussite, on remercie aussi tous nos amis un par un.

Pour nous avoir permis de réussir et de rencontrer toutes ces personnes et pour bien d'autres choses, on remercie le bon Dieu.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire pour :

Mes très ches parents

Mes frères :Massi, Younes et Amine

Pour toutes mes tantes et tous mes oncles

Pour toutes mes cousines et tous mes cousins

Pour tous mes ami(e)s

Melle M.Massilva

Liste des figures

Figure (2.1) Modèle équivalent simplifié de Housner : Source (Housner, 1963) *:a : représente la déformation en surface pour le premier mode de ballotement ;b : représente la modélisation simplifiée à l'aide de masses et ressorts.* 13

Figure (2.2) Réservoir rempli de liquide modélisé par des systèmes généralisés seul degré de liberté. source : (Malhotra, Norwood, & Wieland, 2000) 18

Figure (2.3) comparaisons du déplacement de la surface libre en x = L/2 dans un réservoir horizontalement excité entre les résultats de la solution analytique (a) et la solution numériques (b). 21

Figure (2.4) comparaisons du déplacement de la surface libre en x = L/2 dans un réservoir horizontalement excité entre les résultats de la solution analytique (a) et la solution numériques (b) 22

Figure (2.5) la représentation graphique de la solution fréquentielle $h_{max}=f(\omega)$ 23

Figure(3.1) Formulation d'un problème physique..... *31*

Figure (4.1) Réservoir de liquide en deux dimension L(m) et H(m)..... 43

Figure (4.2) Déscritisation du domaine..... 45

Figure (4.3) Comparaison des élévations de la surface libre obtenues par le modèle mouving mesh, Le modèle Laplace et La solution analytique de Feltinsen..... 46

Figure (4.4) Effet de la viscosité du liquide sur les élévations de la surface libre..... 47

Figure (4.5) Effet de la taille du maillage sur *les élévations de la surface libre*..... 48

Figure (4.6) Effet du maillage mobile sur les élévations de la surface libre..... 49

Figure (4.7) Effet du type de maillage mobile sur les fluctuations de la surface libre..... 50

Figure (4.8) Influence du rapport L/H sur les fluctuations de la surface libre..... 51

Figure (4.9) Formes des quatre premiers modes propres de ballottement..... 53

Figure (4.10) Représentation de l'excitation utilisée : accélération constante sur 1s 54

Figure (4.11) Fluctuations de la surface libre suite une accélération constante d'une durée 1s : (a) solveur BDF, (b) solveur α-généralisé..... 54

Figure (4.12) réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre. ……56
Figure (4.13) réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre. modélisation avec l'équation de Laplace…….57
Figure (4.14) réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre. Modélisation avec Equations de Navier-Stockes+Mouving Mesh $\mu = 0.001 Pa.s$…….57
Figure (4.15) réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre Mu=1. Modélisation avec Equations de Navier-Stockes+Mouving Mesh $\mu = 1 Pa.s$……..58
Figure (4.16) réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre Mu=1..58
Figure (4.17) Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre pour différentes fréquences d'excitation.……59
Figure (4.18) Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre pour différentes hauteurs d'eau dans le réservoir……..59
Figure (4.19) la distribution des pressions est champ de vitesse.……60

Liste des tableaux

Tableau (2-1) les valeurs de calcul recommandée pour les premiers modes de vibrations impulsifs et convectifs en fonction de la hauteur du réservoir à rayon rapport (H / R). Source :(Malhotra et all) 18

Tableau (2-2) tableau des périodes est fréquence modale de ballottement. 22

Tableau (3-1) Modes de l'interpolation polynomial pour des triangles..... 34

Tableau (4-1) Les paramètres de calcul……...42

Tableau (4-2) : les expressions des vecteurs forces.……43

Tableau (4-3) : les fréquences propres de ballottement……52

Tableau (4-4) Période des cycles de vibrations libre suite à une accélération constante appliquée sur une durée de 1s – Solveur BDF……...55

Tableau (4-5) Période des cycles de vibrations libre suite à une accélération constante appliquée sur une durée de 1s – Solveur α-généralisé……..55

Liste des symboles

CFD : Computation fluid dynamic.

MEF : Méthode des éléments finis.

MFN : Mécanique des fluides numériques.

O, X, Y : Cordonnée cartésiennes.

A : Amplitude de vitesse. (m/s)

b : Amplitude de déplacement. (m)

g : L'accélération du gravité. (m/s^2)

H : Hauteur d'eau dans le réservoir. (m)

I : La matrice unitaire.

i, j, k : Notation indicielle.

L : Langueur du réservoir rectangulaire. (m)

M : La masse de fluide. (Kg)

p : Pression. (Pa)

R : Rayon du réservoir circulaire. (m)

T : La période de vibration. (s)

t : Le temps. (s)

U : La vitesse. (m/s)

x : Le déplacement horizontal du réservoir. (m)

y : L'oscillation de la surface libre sur la paroi de réservoir. (m)

∇ : Opérateur divergence.

$\emptyset$: Le potentiel de vitesse.

μ : La viscosité dynamique. (pa.s)

ρ : La masse volumique du fluide. (kg/m^3)

ω : La pulsation de vibration. (rad/s)

a : L'accélération du sol. (m/s)

Table des matières

1 Recherche bibliographique 2
1.1 Introduction : 2
1.2 Etudes générales réalisées sur le ballottement des liquides dans les réservoirs : 2
1.3 Quelques recherches menées sur les réservoirs à toit flottant : 10
1.4 Conclusion : 11

2 Modèles et solutions simplifiées 12
2.1 Introduction 12
2.1.1 Théorie d'onde linéaire 12
2.1.2 Modèle mécanique équivalent 12
2.1.3 Les Méthodes de CFD 12
2.2 Le modèle de Housner 13
2.3 La solution de Westergaard 15
2.4 La Procédure simplifiée d'analyse sismique de Malhotra et all 17
2.5 La solution analytique de Feltinsen 20
2.5.1 La période Lamb ou Abramson (1966) 20
2.5.2 Le ballottement d'un liquide soumis à une excitation horizontale 21
2.6 Conclusion 23

3 Mis en équations et déscritisation par éléments finis 24
3.1 Introduction 24
3.2 Méthodologie 24
3.3 Equation régissant l'écoulement d'un fluide 25
3.3.1 Conservation de la masse 25
3.3.2 Conservation de la quantité de mouvement 25
3.3.3 Les équations de Navier stocks 26
3.3.4 Equation de Laplace 27

3.4 Maillage 28
3.4.1 Maillage structuré 28
3.4.2 Maillage non structuré 28
3.5 Maillage mobile 29
3.5.1 Approche pseudo élastique 29
3.5.2 Conditions cinématiques à la surface libre 29
3.6 Présentation de la méthode des éléments finis 30
3.6.1 Introduction 30
3.6.2 Les grandes lignes de la méthode 30
3.6.3 Formulations variationnelles 30
3.6.4 Discrétisation du domaine 32
3.6.5 Approximation sur l'élément 32
3.6.6 Assemblage 35
3.6.7 La résolution 35
3.7 Forme intégrale de l'équation de Laplace 35
3.7.1 Méthode de Galerkine 36
3.7.2 Utilisation du théorème de Green (divergence) 37
3.7.3 Formulation en pression 38
3.7.4 Discrétisation des conditions aux limites. 39
3.8 Conclusion 40

4 La modélisation 41
4.1 Introduction 41
4.2 Présentation du logiciel 41
4.3 Présentation du modèle 42
4.3.1 Les paramètres de calcul 42
4.3.2 La géométrie 42
4.3.1 Equation du domaine 43
4.3.2 Conditions aux limites 43
4.4 Validation du modèle 44
4.5 Etude de l'influence des paramètres physiques et géométriques 46
4.5.1 L'influence de la viscosité dynamique 46
4.5.2 L'influence de la taille du maillage 47

4.5.3 Apport de mouving mesh…….48
4.5.4 L'influence du rapport L/H…….....50
4.6 Analyse d'un exemple de réservoir…….51
4.6.1 Détermination des modes propres……52
4.6.2 Etude de la réponse fréquentielle de la surface libre…….....55
4.6.3 Influence de la hauteur d'eau……...59
4.6.4 Distribution des Pressions et des champs des vitesses……59
4.7 Conclusion……..60
Conclusion générale……...61

Introduction générale

Les réservoirs de stockage des liquides sont des structures très répandues dans le domaine de l'industrie et des équipements publiques. Ces installations sont couramment utilisées dans de nombreuses applications industrielles et d'ingénieries telles que le stockage de pétrole, l'approvisionnement en eau, de l'industrie nucléaire, etc. Lorsque ces réservoirs sont soumis à des excitations extérieures, le liquide contenu a tendance à osciller, ce qui donne naissance à des oscillations se propageant à la surface du liquide, elles se réfléchissent sur les parois et forment des ondes stationnaires, qui peuvent être une source potentielle de perturbations dans ces conteneurs, ce mouvement s'appelle "ballottement". Dans la phase de leur conception, il est primordial que ces réservoirs soient préservés, et la prévention de leur stabilité et de leur résistance sont des préoccupations d'importance capitale, par but d'éviter qu'ils ne répandent leur précieux contenu, entrainant ainsi plus de dégâts que l'excitation elle-même. Afin de préserver et de mieux comprendre le comportement dynamique de ces structures, de nombreuses études ont été réalisées à partir des années 50. L'intérêt porté à ces études s'est accru au cours de ces dernières années, leur motivation est de nature très diverse : modélisations, études théoriques, résultats qualitatifs, études numériques...etc. L'analyse dynamique de ce type de structures en utilisant des méthodes numériques nécessite un modèle capable de prendre en compte les effets de ballottement du fluide contenu et l'interaction fluide-structure qui peut considérablement modifier les caractéristiques dynamiques d'un réservoir souple et peut également amplifier la réponse dynamique de grands réservoirs de stockage.

L'objectif de la présente étude est de proposer et de valider un modèle de simulation numérique de la dynamique des fluides incompressibles, non-visqueux, dans un réservoir rectangulaire 2D présentant des surfaces libres. Le fluide est initialement au repos. Le mouvement de la surface libre est entraîné par une excitation harmonique horizontale engendrée par le vecteur des accélérations dans la direction de x.

Ce manuscrit s'articule sur quatre chapitres principaux, une introduction générale, conclusion et perspectives. Le premier chapitre fournit une revue bibliographique des études majeures qui ont été réalisées sur le ballottement au sein des réservoirs.

Des méthodes simplifiées et raffinées de résolution du problème de ballottement, on trouve dans le deuxième chapitre un développement de ces méthodes.

Le troisième chapitre établit les équations régissant le phénomène, et donne une présentation sur la méthode des éléments finis.

Les résultats obtenus sur les cas étudiés sont présentés dans le quatrième chapitre. Et enfin, une conclusion générale et les perspectives de cette étude sont dégagées en fin du manuscrit.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'introduire d'une manière globale la dynamique du ballottement des fluides dans les réservoirs. Le contenu examine quelques études antérieures réalisées sur le comportement dynamique des réservoirs excités sismiquement ainsi les cas linéaires et non-linéaire des ondes de surface.

Pour une revue historique détaillée des études portant sur le ballottement des fluides, on pourra se référer au livre de (Ibrahim, 2005) dont on trouve l'analyse de la théorie linéaire et non-linéaire, ainsi que l'interaction du ballottement d'un fluide avec les structures élastiques et supportées, et la dynamique d'un fluide dans des réservoirs en rotation.

1.2 Etudes générales réalisées sur le ballottement des liquides dans les réservoirs

Le problème du ballottement s'est posé très tôt aux domaines de l'aérospatiale, de génie civil, de génie nucléaire, de la navigation pétrolière, de physique et des mathématiques.

Pour étudier le comportement du ballottement, des expériences sont la plupart du temps employées mais exigent beaucoup de moyens et du temps. La simulation numérique 'modélisation' est une voie économique et efficace qui permet de prévoir et d'analyser diverses

situations. La simulation numérique du ballottement est difficile, principalement pour les deux raisons suivantes. La première est qu'on doit résoudre exactement et efficacement les équations de Navier-Stocks incompressibles, les termes convectifs non linéaires et les termes de pression présentent des difficultés pendant le calcul. La deuxième difficulté est que la position de la surface libre n'est pas connue à priori et doit être déterminée à tout moment, de ce fait l'équation de Navier-Stocks ne peut pas être directement utilisée pour décrire les surfaces libres, et une technique supplémentaire est donc nécessaire.

Les outils de calcul de l'époque ne permettaient qu'une modélisation simplifiée où les efforts de la structure sur le fluide étaient modélisés au préalable de l'étude de la vibration de la structure. C'est avec le développement des outils de calcul numérique en parallèle avec l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs que les algorithmes de couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure se sont développés aux années 70. Ces algorithmes étaient tributaires de l'efficacité des schémas de résolution des équations de la structure d'une part, et de ceux du fluide d'autre part. Ces schémas n'ont cessé de connaître des améliorations qui sont pour une grande partie encore du domaine de la recherche.

Lorsqu'un réservoir est partiellement rempli de liquide, la surface libre est présente. L'accélération de corps rigide du réservoir produit un mouvement de ballottement, son amplitude, en générale, dépend de la nature de l'amplitude et de la fréquence du mouvement du réservoir. Elle dépend aussi de la hauteur de remplissage, des propriétés du liquide et de la géométrie du réservoir. Le ballottement n'est pas un phénomène facile, c'est un problème aux valeurs propres classique de la mécanique des fluides, même à des excitations de très faibles amplitudes ce mouvement peut devenir non-linéaire.

Le mouvement de la surface libre dans un réservoir a été initialement étudié par (Poisson, 1831) et (Rayleigh, 1876), en examinant le mouvement d'un liquide dans les réservoirs cylindriques et rectangulaires rigides de profondeur uniforme, avec des conditions aux limites linéarisées.

Lors du dimensionnement para-sismique de structures telles que les réservoirs ou les barrages, l'évaluation des forces hydrodynamiques est une étape cruciale. L'un des premiers à avoir fourni une solution à ce problème fut (Westergaard, 1933) en déterminant les pressions hydrodynamiques sur un barrage poids rectangulaire rigide soumis à une accélération horizontale à l'aide d'une méthode analytique simplifiée utilisant des masses d'eau ajoutées à celle du barrage.

En ce qui concerne le comportement dynamique des réservoirs de stockage, les premiers en ce domaine, furent (Hoskin; Jacobsen, 1934) qui, en se basant sur le travail de Westergaard, conduisirent des études théoriques et expérimentales pour évaluer les pressions hydrodynamiques développées dans les réservoirs rectangulaires soumis à une excitation sismique. L'un des premiers chercheurs à s'être intéressé aux châteaux d'eau est (Ruge, 1938), il étudia de manière expérimentale des effets d'un séisme sur les réservoirs surélevés, et mit en évidence le couplage et le système réservoir-support élevé.

Par la suite, (Werner & Sundquist, 1949) étendirent le travail de Jacobsen aux réservoirs de forme rectangulaires, semi-circulaire, triangulaires, et sphériques. (Jacobsen,1949) Et (Jacobsen & Ayre) étudièrent, de manière expérimentale et analytique, la réponse dynamique de réservoirs cylindrique rigides. (Graham & Rodriquez, 1952) fournirent une analyse détaillée des pressions hydrodynamiques convectives, liées au ballottement du fluide, et impulsives dans les réservoirs rectangulaires.

Vers la fin des années 1950 et le début des années 1960, Housner publia deux travaux (Housner G,1957) et (Housner G,1963) dans lesquels il formula la méthode analytique simplifiée encore employée de nos jours par les ingénieurs de la pratique. Elle permet d'estimer la réponse d'un fluide dans des réservoirs rectangulaires ou cylindriques rigides, soumis à une excitation sismique. Cette méthode utilise la décomposition de la pression hydrodynamique en pression impulsive et convective. La pression impulsive est modélisée par une masse rigidement connectée aux parois du réservoir, et la pression convective est modélisée par une série de masses liées aux parois par des ressorts, avec des tailles décroissantes représentant les différents modes fondamentaux de ballottement.

Jusque dans les années 1960, la flexibilité des réservoirs était négligée dans l'évaluation de la réponse sismique qui se focalisait alors uniquement sur le comportement dynamique du fluide. Cependant, les dommages sévères constatés sur les réservoirs de stockages lors des séismes de **Chili** 1960 décrits dans le travail de (Steinbrugge & Flores, 1963), d'***Alaska*** 1964 et ***Niigata*** 1964 décrits par (Rine, 1967) et (Hanson, 1973), poussèrent les chercheurs de l'époque à s'intéresser aux propriétés vibratoires des réservoirs.

Abramson (1966) fournit une revue assez complète et une discussion des études analytique et expérimentales de ballottement de liquide, qui ont eu lieu avant 1966. La maturation des techniques de calcul pour les problèmes de la dynamique des fluides ont permis une nouvelle approche du ballottement.

(Moiseev & Petrov, 1968) ont fourni une revue exhaustive de travaux réalisés sur la théorie linéaire. Ils montrent que la plupart des applications peuvent être traitées en utilisant la théorie des perturbations qui s'avère très efficace. Ils rappellent aussi que même les cas linéaires font appel au numérique. Les cas non-linéaire ne sont pas traités car les méthodes et les outils numériques n'étaient pas assez développés. L'avènement des calculateurs de grande puissance a permis aux chercheurs de faire des grands progrès dans le traitement des problèmes de ballottement. La motivation est toujours entrainée par les problèmes technologiques découlant du mouvement souvent violent du fluide dans les réservoirs partiellement remplis.

La théorie des ondes linéaires a été utilisée comme base pour évaluer la performance sismique des réservoirs remplis de liquide. Toutefois, l'utilisation de la théorie linéaire est limitée dans la simulation du comportement réel de ballottement. Elle conduit éventuellement à la sous-estimation des pressions hydrodynamiques et les élévations de la surface libre du liquide. Diverses tentatives pour tenir compte du comportement de ballottement non-linéaire ont été faites en utilisant des méthodes de perturbations, méthodes des éléments finis et les méthodes des éléments de frontières.

A la même époque, la naissance de l'ère informatique, permet le développement des premières méthodes numériques assistées par ordinateur. Edwards (1969) est le premier à avoir employé l'outil informatique pour évaluer la réponse dynamique d'un réservoir cylindrique flexible encastré. Dans la même lignée, Shaaban (1975) et Balendra (1978) déterminèrent la réponse sismique de réservoirs cylindriques flexibles sans et avec toit respectivement, en utilisant la méthode des éléments finis. L'une des premières méthodes analytique prenant en compte la flexibilité du réservoir fut proposée par (Veletsos, A.S, 1974). Cette méthode est une extension de la méthode de (Chopra, 1967)**,** (Chopra, A. K, 1968)**,** (Chopra, A. K, 1970) utilisée dans le calcul sismique des barrages poids. Les pressions hydrodynamiques au sein du réservoir sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace à l'aide des conditions aux frontières. Feltinsen (1974) suggère une méthode analytique non linéaire pour la simulation de ballottement, qui satisfait les conditions aux limites non linéarisées de la surface libre.

Plus tard, (Veletsos, A.S; Yang, J.Y, 1976) présentent des formules simplifiées permettant de calculer les fréquences naturelles fondamentales couplées de la structure et du liquide à l'aide de la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz. (Epstein, 1976) présenta des formules et des courbes de dimensionnement basées sur le modèle de **Housner**, pouvant être utilisées pour estimer les moments de flexion et de renversement dans les réservoirs rectangulaires et cylindriques soumis

à une excitation sismique ainsi pour estimer le maximum en déplacement de la surface libre due au ballottement.

Vers la fin des années 1970, **Clough** conduisit une série d'expérimentations (Clough D. , 1977), (Clough & Clough, 1978), (Clough, Niwa, & Clough, 1978), sur les réservoirs cylindriques en aluminium de taille réduite (échelle 1/3 avec H/D<1) excités sismiquement. Il fit varier les conditions d'ancrage et les conditions à la surface des réservoirs (surface libre, avec toit fixe, avec toit flottant).

Le ballottement se caractérise par un mouvement fluide fortement non-linéaire. Si l'intérieur du réservoir est lisse, la viscosité du fluide joue un rôle mineur. Cela rend possible la solution en utilisant le potentiel des vitesses dans les réservoirs rigides. (Feltinsen, O.M, 1987) propose une approche qui consiste à résoudre le problème dans le domaine temporel avec des conditions complètements non-linéaires de la surface libre.

A partir des années 1980, **M.A.Haroun**, avec la collaboration de **G.W.Housner** publie une série de travaux portant sur le comportement dynamique des réservoirs rectangulaires et cylindriques. (Housner & Haroun, 1981).

(Haroun M, 1980) présent une méthode numérique pour déterminer la réponse dynamique des réservoirs cylindriques. Il utilise la méthode des éléments finis pour modéliser les parois du réservoir et traite le liquide comme un milieu continu en résolvant l'équation de Laplace qui le gouverne à l'aide des conditions aux frontières mouvantes. L'équation du mouvement pour des vibrations libres de la coque est déterminée à l'aide du principe d'Hamilton (Goulmot, 2012).

(Haroun, M.A, 1983) mène une série d'expérimentations à **l'Université de *Berkley***. Des tests dynamiques de vibrations ambiantes et forcées sont menés sur des réservoirs à taille réelle. Deux réservoirs sont munis d'une instrumentation permanente dans le but de mesurer la réponse à un éventuel séisme in situ.

(Haroun,M. A, 1984) donne une méthode permettant de déterminer les efforts dans les parois de réservoirs rectangulaires. Il s'agit d'une méthode de simple interaction entre le liquide et la structure. En effet, le liquide est traité comme un milieu continu en résolvant l'équation de Laplace à l'aide des conditions aux frontières du réservoir rigide sollicité sismiquement dans les trois directions. Une fois la pression déterminée, les efforts et déplacements au sein de chaque paroi sont déterminés à l'aide de l'équation de (Timoshenko & Woinowsky, 1959).

L'effet de la composante verticale des excitations sismiques sur la réponse dynamique des réservoirs cylindriques a aussi été traité par plusieurs chercheurs comme (Luft, 1984), (Haroun, 1985) et (Veletsos & Tang, 1985). Le premier s'est intéresse aux réservoirs cylindriques en béton précontraint et propose une méthode analytique basée sur une décomposition du déplacement de chaque point du réservoir dans la base des coordonnées généralisées.

(Park, Koh, & Kim, 1990) fournissent une méthode numérique robuste permettant de calculer la réponse sismique d'un réservoir rectangulaire. La méthode des éléments de frontières (BEM) est utilisée pour calculer les pressions hydrodynamiques en prenant en compte le ballottement, tandis que la méthode des éléments finis (FEM) est employée pour déterminer la réponse de la structure. La méthode permet de faire des analyses temporelles.

Dans la même lignée, (Kim, K, & Kwahk, 1996) présentent une méthode analytique permettant de calculer la réponse dynamique des réservoirs rectangulaires flexibles en trois dimensions soumis à des excitations horizontales et verticales. Sur les quatre murs, deux sont considérés rigides, les deux autres sont flexibles. Deux jeux de conditions aux frontières pour les plaques flexibles sont pris en compte. La pression hydrodynamique est déterminée en résolvant l'équation de Laplace muni des conditions aux frontières. Le déplacement en chaque point des parois flexibles est donné sous la forme d'une décomposition dans des modes généralisés.

Des travaux importants sur la triple interaction fluide-structure-fondation ont été réalisés, on peut notamment citer: (Haroun & Ellaithy, 1985), (Veletsos & Tang, 1990) (Haroun, M. A; Abou-izzedine, W, 1992a), (Haroun, M. A; Abou-izzedine, W, 1992b).

En 2008 (Virella, Carlos, & Godoy, 2008)**.** Ont développés un modèle numérique en utilisant la méthode des éléments finis, ce modèle examine l'influence de la théorie non-linéaire des ondes sur les fréquences propres du ballottement bidimensionnel et la distribution modales de la pression pour les réservoirs rectangulaires. Les périodes et la forme des modes propres sont évaluées et comparées au modèle théorique linéaire et non-linéaire des ondes. Ils ont constaté que la non-linéarité n'a pas d'effet significatif sur les périodes du ballottement. Dans tout les cas étudiés, la théorie linéaire a continuellement estimé l'importance de la distribution de pression, tandis que les surélévations ont été obtenues en utilisant la théorie non-linéaire.

Lors de l'analyse des réservoirs de stockage sollicités par un séisme, l'étude du ballottement est fondamentale. En effet, il faut éviter le débordement du liquide et l'endommagement de la partie supérieure des réservoirs. Le ballottement est un phénomène par nature non-linéaire,

cependant, en faisant l'hypothèse de faibles amplitudes d'oscillation du liquide, il est possible de linéariser la condition à la surface de ballottement. C'est cette condition à la frontière linéaire qui est considérée dans la plupart des études de Génie Civil qui considèrent la pression impulsive. En générale, compte tenu de l'écart fréquentiel entre les modes convectifs de basses fréquences et les modes impulsifs de hautes fréquences, ces deux types de pression sont calculés de manières séparées. La pression convective est calculée en prenant en compte les réservoirs avec les parois rigides. Housner (1957,1963) a donné des méthodes analytiques approximatives permettant de prendre en compte le ballottement à l'aide de modèles masses/ressorts.

(Gupta & Hutchinson, 1991) ont analysé le problème de ballottement non-linéaire à deux dimensions en utilisant la méthode des éléments de frontières pour les cas de mouvements forcés horizontaux, verticaux ou de tangage d'un réservoir rectangulaire. Le problème mathématique a été formulé comme un problème non-linéaire en supposant que le fluide est non visqueux, incompressible et l'écoulement est irrotationnel. Les équations qui régissent le problème, à l'exception de la condition dynamique à la surface libre, ont été transformées en une équation intégrale en appliquant la formule de Green, tandis que l'équation dynamique à la surface libre a été réduite à une équation de résidu pondérée en employant la méthode de Galerkin (Goulmot, 2012).

Gupta et Hutchinson (1991) fournissent une méthode analytique permettant de prendre en compte les deux composantes de la pression hydrodynamique dans les réservoirs cylindriques. Dans leur méthode, les modes couplés liquide-structure sont déterminés à l'aide du quotient de Rayleigh tandis que le problème général entre la structure et le fluide, incluant le ballottement est traité à l'aide des principes vibrationnels de Toupin et d'Hamilton. La méthode prend en compte le couplage entre les deux types de pression impulsive et convective. (Goulmot, 2012)

(Chen, Haroun, & Liu, 1996) s'intéressent au problème non linéaire de ballottement dans les réservoirs rectangulaires sollicité sismiquement. Le problème est résolu numériquement à l'aide de la méthode de différence finis.

(Pall, 1999) a utilisé la technique des éléments finis pour étudier le couplage entre la dynamique du liquide incompressible non visqueux, et l'intérieur des réservoirs cylindriques à parois minces, flexibles, dans le cas des petits déplacements. Les équations du mouvement en éléments finis pour la paroi du réservoir et le domaine du fluide ont été formulées. Les deux systèmes de réservoirs souples et rigides ont été analysés afin de démontrer les effets de la flexibilité sur les caractéristiques du ballottement de réservoir et la réponse structurelle. Un dispositif expérimental

a été réalisé pour étudier les fréquences, les déplacements et la pression hydrodynamique dans le cas du ballottement. Il est constaté que les fréquences du ballottement des liquides dans des réservoirs rigides diminuent avec la diminution de la profondeur du liquide et l'augmentation de la largeur du réservoir.

(Fisher & Rammerstorfer, 1999) fournissent une analyse analytique raffinée montrant l'influence de la flexibilité des parois sur la pression convective dans les réservoirs cylindriques soumis à une excitation sismique. La décomposition des déplacements des parois dans la base des coordonnées généralisées et l'application du principe d'Hamilton sont employés pour déterminer les inconnus du problème.

(Kim, Shin, & Bai, 2002) ont mis en évidence des effets important lors d'un mouvement non-linéaire de la surface libre qui sont les conséquences du ballottement du réservoir partiellement rempli. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis avec une procédure de résolution itérative. (Neilen, 2003) a étudié une variété d'aspects dans un réservoir en ballottement excité. Cette étude, sur le ballottement traite les différences de pressions en fonction de la profondeur. (Koller & Malhotra, 2004) ont examiné la résistance aux excitations séismiques dans les réservoirs de stockage de forme cylindriques en fonction de taux d'élancement et pour différents liquides. Ils ont montré que l'allongement de la fréquence fondamentale peut être un moyen pour réduire le ballottement. (Kukukarslan, Taskin, & Coskun, 2005) ont analysé le comportement transitoire de l'interaction structure-fluide dans le cas d'une excitation brève. Une formulation d'éléments finis a été réalisée pour savoir le changement de pression et les résultats montrent qu'elle diminue avec le temps.

La recherche sur le ballottement est encore active de nos jours (Livaoglu, 2008) et (Kianoush & Ghaemmaghami, 2011). Il a été démontré selon certaines de ces sources que la prise en compte de l'interaction avec la fondation pouvait réduire de manière significative la composante impulsive de la pression, en revanche, il semblerait qu'il n'y ait pas d'effets sur la composante convective.

En 2008 (Virella, J. C; Carlos, A; Godoy, L, 2008) réalisent une comparaison entre la théorie linéaire et non linéaire du ballottement dans les réservoirs rectangulaires en se servant de la méthode des éléments finis. Ils montrent notamment que la distribution des pressions dans les réservoirs rectangulaires sont similaires avec les deux théories. Dans le cas de la théorie non linéaire cependant, les élévations du liquide sont supérieures à celles obtenues à l'aide de la théorie linéaire.

Les toits flottants sont des systèmes principalement employés dans le domaine de l'industrie pétrolière pour couvrir les réservoirs de pétroles. L'objectif de ces systèmes est de minimiser les formations de vapeur d'hydrocarbures afin de limiter les pertes et les risques d'inflammation. Lors de l'étude du comportement sismique de tels réservoirs couverts, l'interaction fluide-toit flottant ne doit pas être négligée.

Par le passé, des cas de ruptures de toits ont été constatés, notamment lors du séisme de ***Kocaeli*** 1999 en *Turquie* et de ***Tokachi-Oki*** 2003 au *Japon*. Dans la plupart des cas cependant, les impacts du toit flottant sur les parois du réservoir endommage la structure et provoque par frottement, l'inflammation du liquide contenu si ce dernier est inflammable. Dans la majorité des cas étudiés, la structure du réservoir à toit flottant est supposée rigide et le toit flexible.

1.3 Quelques recherches menées sur les réservoirs à toit flottant

Il y a encore des références plus récemment (Bauer, 1993) étudie par des méthodes numérique le cas des réservoirs rectangulaires en deux dimensions fermer par un toit en prenant en compte un jeu de conditions aux frontières pour modéliser les connections du toit avec les parois du réservoir. Le toit est modélisé à l'aide d'une poutre ou d'une membrane.

Matsui (2007,2009) fourni une méthode analytique pour l'étude des réservoirs cylindriques à parois rigides et toit flottant simple et single-deck respectivement, soumis à une excitation sismique latérale.

(Nagashima, 2010) Étudie le réservoir cylindrique à toit flottant et parois flexibles à l'aide de la méthode des éléments finis.

1.4 Conclusion

A travers la recherche bibliographique présentée dans ce chapitre, on a montré, même si l'étude est loin d'être tout à fait complète, que le phénomène de ballottement de liquides dans les réservoirs est très complexe. La variété et le nombre de recherches exposées le montrent clairement.

De nombreux développements théoriques, numériques et expérimentaux ont exploré les différents côtés de ce phénomène. D'autre part, la disponibilité des solutions analytiques diminuent avec l'augmentation de la complexité du problème. Le cas des réservoirs de géométrie complexe, ainsi que le comportement non-linéaire de la surface libre ou l'interaction du fluide avec les parois du réservoir et l'effet de la paroi interne sur le ballottement dans un réservoir. L'utilisation des méthodes numériques s'avère alors primordiale dans la plupart des cas rendent impossible l'emploi de ces solutions.

On s'intéressera dans cette étude à quelques modèles simplifiés et raffinés réalisés pour le phénomène du ballottement.

Chapitre 2

2 Modèles et solutions simplifiées

2.1 Introduction

Dans le premier chapitre on s'est intéressé à un ensemble d'études et recherches faites sur le phénomène d'interaction fluide structure qui a lieu dans les réservoirs.

Du point de vue physique-mathématique, ce type de phénomène peut être étudié par des approches différentes, on cite à titre d'exemple celle de : (Nardo, Langella, Mele, & Noviello, 2009)

2.1.1 Théorie d'onde linéaire

Elle est basée sur l'hypothèse d'écoulement irrotational. A partir de l'équation de continuité et les conditions aux limites simplifiées, elle permet d'obtenir une corrélation entre la fréquence, la vitesse et la longueur d'onde. Dans l'application de la théorie des ondes, une distinction doit être faite entre les eaux peu profondes et les eaux profondes.

2.1.2 Modèle mécanique équivalent

Ces systèmes sont décrits avec des séries de systèmes d'amortisseur masse-ressort ou d'un ensemble de pendules simples

Ces deux modèles donnent des informations macroscopiques sur le phénomène et ont une surface d'application limité. Les méthodes les plus exhaustives sont:

2.1.3 La méthode de CFD

Elle permet l'étude des problèmes de la dynamique des fluides par la résolution directe (analytiquement) des équations de Navier-Stokes. Dans le cas des déformations murales

importantes, l'interaction fluide-structure peut s'expliquer par la méthode des éléments finis (**FEM**).

Le ballottement doit être approché comme étant un problème multiphasique, puisque dans un réservoir, partiellement rempli, les phases gazeuses et liquides sont présentes.

Les études réalisées sur les mouvements des liquides dans les réservoirs mènent à construire et développer des modèles simplifiés (équivalents) permettant d'étudier et simuler les mouvements latérales du liquide dans les réservoirs et de traiter le problème d'interaction fluide structure.

La première étude de réservoirs de stockage de liquides est due à Housner (1963) qui a résolu l'équation de Laplace analytiquement pour le mode fondamental des réservoirs rigides rectangulaires et cylindriques reposant sur des fondations rigides, sous une excitation de sol horizontal. L'étude a établi que l'hydrodynamique des liquides dans les réservoirs rigides peut être divisée en deux composantes, une composante impulsive et une composante convective. Le liquide dans la partie supérieure a un mouvement de ballottement avec une longue période de vibration, alors que le reste du fluide se déplace avec le réservoir dans un mode impulsionnel. Il a proposé un système généralisé à deux degrés de liberté pour représenter les modes de vibration impulsif et de ballottement. Après le modèle de Hausner, un nombre considérable d'études et applications de différents modèles numériques ont été publiés par différents auteurs, **Feltensen, Westergrade, Haroun et Housner, malhorta….etc.**

2.2 Le modèle de Housner

Par l'utilisation du principe mass-ressort Housner a modélisé la pression impulsive par une masse $\mathbf{M_0}$ rigidement connectée aux parois du réservoir et la pression convective par une masse $\mathbf{M_1}$ reliée aux parois par un ressort figure (2.1).

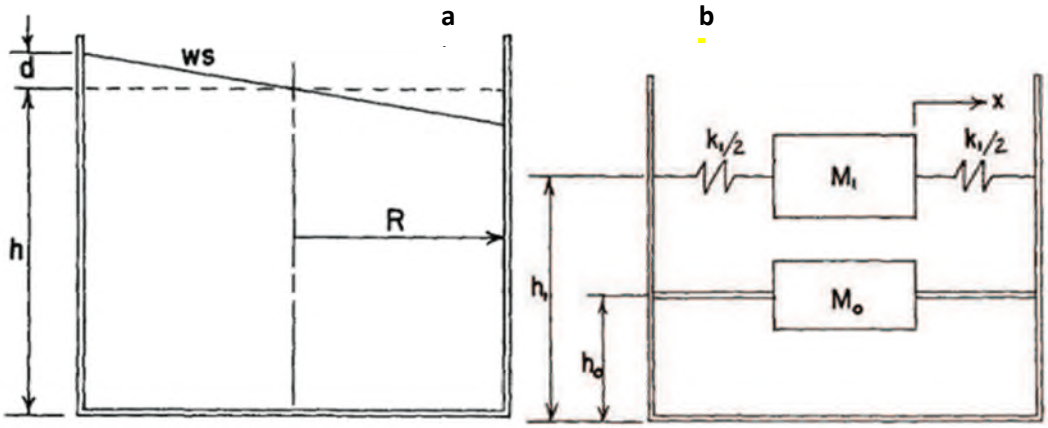


Figure (2.1) *Modèle équivalent simplifié de* **(Housner, 1963)** *:**a** : représente la déformation en surface pour le premier mode de ballotement ;**b** : représente la modélisation simplifiée à l'aide de masses et ressorts.*

M1 correspond au mode de vibration fondamental (1) le mode le plus important pour les problèmes des séismes. Si le système équivalent schématisé dans la figure (2.1.b) est soumis à

une accélération de sol α les forces exercées par M_0 est M_1 sont les mêmes forces exercées par le liquide dans le réservoir de la figure (2.1.a)
M est la masse totale du liquide (la somme de M_1 et M_0) α =1.33 et β=2.0

La période de vibration est donnée comme suit :

$$T_1 = \sqrt{2\pi \frac{M_1}{K_1}} \tag{2-1}$$

- Pour un réservoir cylindrique avec **H** la hauteur d'eau et **R** le rayon de cuve.

$$M_0 = M \frac{\tanh 1.74R/H}{1.7R/H} \tag{2-2}$$

$$M_1 = M \frac{(0.6)tanh 1.8H/R}{1.8h/R} \tag{2-3}$$

$$k_1 = 5.4 \frac{{M_1}^2}{M} \frac{gH}{R^2} \tag{2-4}$$

$$h_0 = \frac{3}{8} H \left\{ 1 + \alpha \left[\frac{M}{M^1} \left(\frac{R}{H} \right)^2 - 1 \right] \right\} \tag{2-5}$$

$$h_1 = H \left[1 - 0.185 \frac{M}{M^1} \left(\frac{R}{H} \right)^2 - 0.56\beta \frac{R}{H} \sqrt{\left(\frac{MR}{3M_1 H} \right)^2 - 1} \right] \tag{2-6}$$

- Pour les réservoirs rectangulaires de longueur *L* est profondeur *H*

$$M_0 = M \frac{tanh 1.7L/(2H)}{1.6L/(2H)} \tag{2-7}$$

$$M_1 = M \frac{(0.83)3.2H/L}{3.2H/L} \tag{2-8}$$

$$K_1 = 3 \frac{{M_1}^2}{M} \frac{gH}{\left(\frac{L}{2^2} \right)} \tag{2-9}$$

$$h_1 = H \left[1 - \frac{1}{3} \frac{M}{M^1} \left(\frac{L}{2H} \right)^2 - 0.63\beta \frac{L}{2H} \sqrt{0.28(\frac{M}{M^1} \left(\frac{L}{2H} \right)^2 - 1} \right] \tag{2-10}$$

Les hauteurs h_0 et h_1 doivent être déterminées sur la base des forces de la dynamique des fluides exercées sur les parois du réservoir uniquement (pas sur le sol), les valeurs de α =0 et β=1 doivent être utilisées pour les réservoirs cylindriques et rectangulaires.

L'oscillation maximale du fluide est en relation avec l'oscillation de la masse *M1*. Si M_1 oscille avec le déplacement $x = A_1 sin\omega t$ la crête de la vague sur la paroi de la cuve va osciller de haut en bas avec un déplacement $\eta = d.sin\ \omega t$

L'amplitude d'oscillation est donnée par

$$\mathrm{A} = \nu \frac{T}{2\pi}$$

d est donné comme suit :

- Pour un réservoir cylindrique

$$\mathrm{d} = \frac{0.63A_1\left(\frac{K_1R}{M_1g}\right)}{1 - 0.85\frac{A_1}{R}\left(\frac{K_1R}{M_1g}\right)} \tag{2-11}$$

- Pour un réservoir rectangulaire

$$d = \frac{0.84A_1\left(\frac{K_1}{M_1}\right)}{1 - \frac{2A_1}{L}\left(\frac{K_1}{M_1}\right)} \tag{2-12}$$

La période de vibration est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{1.58g.\tanh(1.58.a)}} \tag{2-13}$$

Les équations précédentes sont valables pour de faibles amplitudes de vibration et donnent de bons résultats pour $d < 0.1L$ et $d < 0.2H$, bien que pour les plus grandes amplitudes une non-linéarité est observée dans les oscillations.

2.3 La solution de Westergaard

Cette solution simplifiée et efficace s'appuie sur la solution analytique en déplacement du problème de vibrations du réservoir sous hypothèses de barrage infiniment rigide, de réservoir rectangulaire semi-infini et d'excitation sismique harmonique et horizontale d'expression :

$$\ddot{u}_x = a.g.cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad \text{à} \quad x = 0 \tag{2-14}$$

Dans laquelle a est le coefficient d'accélération sismique, un taux d'accélération rapporté à la constante de gravité g, $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation du signal d'excitation et t désigne le temps. La

géométrie du réservoir de hauteur H est rapportée à un repère (Oxy) dont l'axe (Ox) est confondue avec le fond et l'axe (Oy) avec le parement du barrage rigide. La pression hydrodynamique est supposée nulle au niveau de la surface libre et dans tout le domaine loin de l'interface barrage-réservoir. De plus, le fond du réservoir est supposé sans déplacement vertical. Ces conditions s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} p(x, y = H) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} p(x, y) = 0 \\ u_y\,(x, y = 0) = 0 \\ u_x(x = 0, y) = \; -a\; g\; T^2/(4\pi^2)\cos(2\pi t/T) \end{cases} \tag{2-15}$$

La solution du problème donne l'évolution dans le temps des deux composantes du champ des déplacements $u_x(x, y, t)$ et $u_y(x, y, t)$. La pression hydrodynamique est ensuite évaluée à l'aide de la relation de compressibilité linéaire $p= K\,(\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y)$. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$p(x, y, t) = \frac{8a\rho gH}{\pi^2} cos\,\frac{2\pi}{T}t \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2c_n}e^{-x.q_n}\sin\left(n\pi\frac{H-y}{2H}\right)\right) \tag{2-16}$$

q_n et c_n sont définis comme suit :

$$q_n = \frac{\pi c_n}{2H} \qquad ; \qquad c_n = \sqrt{1 - \frac{16H}{n^2c^2T^2}}$$

c =$\sqrt{K/\rho}$ est la célérité des ondes de pressions dans l'eau. La pression au niveau de l'interface barrage-réservoir (x = 0) est maximale lorsque t = kT, (k entier). Elle s'exprime par :

$$p_{max}(y) = p(0, y, KT) = \frac{8a\rho gH}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2c_n}\sin\left(n\pi\frac{H-y\pi^2}{2H}\right)\right) \tag{2-17}$$

Cette expression est de forme sensiblement parabolique. Elle atteint sa valeur maximale au fond et s'annule à la surface. En notant à partir de l'équation (2-16)que la pression possède la même pulsation et la même phase que le signal sismique, Westergaard a proposé de remplacer l'expression (2-17) par une autre plus simple qui donne un effet d'inertie équivalent en considérant une certaine masse d'eau qui vibre d'une manière solidaire avec le parement amont,

d'où l'introduction du concept de masse ajoutée. La largeur b de cette masse varie en fonction de la hauteur comme suit :

$$b = 7/8\sqrt{H(H-h)} \tag{2-18}$$

Le concept de masse ajouté de Westergaard est très utilisé dans les calculs pratiques des problèmes d'interaction fluide-structure. L'expression est d'une grande simplicité, elle permet de prendre en compte l'effet du réservoir sur le comportement dynamique du barrage en ajoutant une masse fictive sans rigidité.

La solution de Westergaard (2-16) est valable si les valeurs de c_n sont réelles, soit :

$$1 - \frac{16H^2}{n^2c^2T^2} \geq 0$$

Qui donne

$$T > \frac{4H}{n.c} \quad ; \quad \mathrm{n} = 2\mathrm{i} - 1\ ;\ \mathrm{i} = 1, 2, 3\ldots$$

Le terme $T_i = 4\mathrm{H}/(2\mathrm{i} - 1)$ Correspond à la i^{eme} période propre du réservoir. Par conséquent la solution de Westergaard n'est valide que lorsque la période de l'excitation sismique est supérieure à la période fondamentale du réservoir $T_1 = 4H/c$. (Seghir, 2010)

2.4 La Procédure simplifiée d'analyse sismique de Malhotra

En se basant sur les travaux de (Veletsos, 1974) ; et avec certaines simplifications est modifications qui rendent la procédure simple, plus généralement applicable et plus précisément (Malhotra, Norwood, & Wieland, 2000) ont proposés un modèle simplifié pour l'analyse sismique (qui prends en considération le ballottement) des réservoirs. Ces modifications comprennent :

- La Représentation du système réservoir-liquide par les premiers modes convectifs et impulsifs seulement.
- Combinaison de la masse modale plus impulsive avec le premier mode impulsif et la masse modale plus convective avec le premier mode convectif.
- Ajuster les hauteurs impulsives et convectives pour tenir compte de l'effet de renversement des modes supérieurs.
- Généraliser la formule de la période impulsive de sorte qu'elle peut être appliquée aux réservoirs en acier ou en béton de différentes épaisseurs de paroi.

Les propriétés du modèle

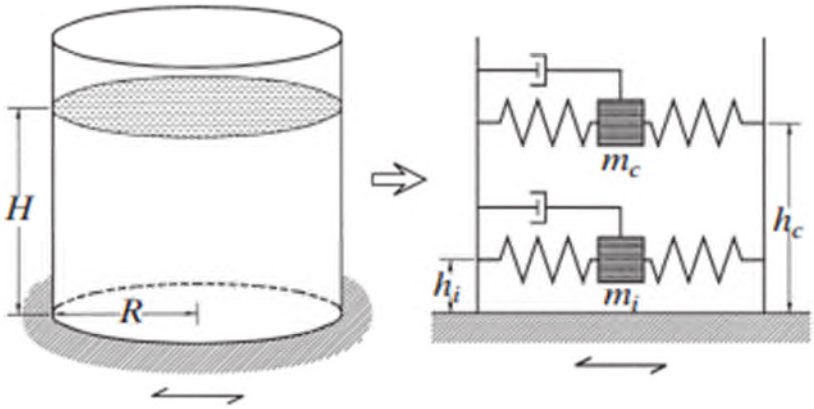


Figure (2.2) *Réservoir rempli de liquide modélisé par des systèmes généralisés seul degré de liberté.* **(Malhotra, Norwood, & Wieland, 2000)**

Les périodes naturelles des réponses, impulsives *(T_{imp})* et convectifs *(T_{con})* sont :

$$\mathrm{T_{imp}} = \mathrm{C_i} = \frac{H\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{h}{R}\sqrt{E}}} \quad ; \quad T_{con} = C_c\sqrt{R} \tag{2-19}$$

Avec h est l'épaisseur équivalente uniforme de la paroi du réservoir, ρ la masse volumique du liquide, et E est le module d'élasticité de la matière du réservoir. Les coefficients C_i et C_c sont obtenus à partir du tableau (2.1). Le coefficient C_i est adimensionnel, tandis que C_c est exprimée en $(s/\sqrt{m})$. Pour les réservoirs d'épaisseur de paroi non uniforme, h peut être calculé en prenant une moyenne pondérée sur la hauteur mouillé de la paroi du réservoir.

Tableau (2-1) : *les valeurs de calcul recommandées pour les premiers modes de vibrations impulsifs et convectifs en fonction de la hauteur au rayon du réservoir (H / R).* **(Malhotra, Norwood, & Wieland, 2000)**

H/R	C_i	$C_c[s/\sqrt{m}]$	m_i/m_l	m_c/m_l	h_i/H	h_c/H	h_i'/H	H_c'/H
0.3	9.28	2.0	0.176	0.824	0.400	0.521	2.640	3.414
0.5	7.74	1.74	0.300	0.700	0.400	0.543	1.460	1.517
0.7	6.97	1.60	0.414	0.586	0.401	0.543	1.009	1.011
1.0	6.36	1.52	0.548	0.452	0.419	0.571	0.721	0.785
1.5	6.06	1.48	0.686	0.314	0.439	0.616	0.555	0.734
2.0	6.21	1.48	0.763	0.237	0.448	0.751	0.500	0.764
2.5	6.56	1.48	0.810	0.190	0.452	0.794	0.480	0.796
3.0	7.03	1.48	0.842	0.158	0.453	0.825	0.472	0.825

Le cisaillement totale en base est donnée par :

$$Q = (m_i + m_w + m_r)S_e(T_{imp}) + m_c S_e(T_{con}) \quad (2\text{-}20)$$

Où m_w est la masse de la paroi du réservoir, m_r la masse du toit du réservoir, $Se\ (T_{imp})$ l'accélération spectrale impulsif, et $Se\ (T_{con})$ l'accélération spectrale convective. Les masses impulsives m_i et convective m_c sont obtenues du tableau (2-1) en fonction de la masse du liquide total m_l.

Le moment de renversement net immédiatement au-dessus de la plaque de base (*M*) est donné par l'équation (2-21), où h_i et h_c sont les hauteurs des centres de gravité des pressions murales hydrodynamiques impulsives et convectives tableau (2-1), et h_w et h_r sont les hauteurs des centres de gravité de la paroi du réservoir et du toit, respectivement.

$$M = (m_i h_i + m_w h_w + m_r h_r)S_e(T_{imp}) + m_c h_c S_e(T_{con}) \quad (2\text{-}21)$$

Le moment de renversement immédiatement en dessous de la plaque de base (*M'*) dépend de la pression hydrodynamique sur la paroi du réservoir ainsi que celle sur la plaque de base. Il est donnée par l'équation (2-22), Où les hauteurs h_c' et h_i' sont obtenus à partir du tableau (2-1).

$$M' = (m_i h'_i + m_w h_w + m_r h_r)S_e(T_{imp}) + m_c h'_c S_e(T_{con}) \quad (2\text{-}22)$$

Si le réservoir est soutenu par une fondation circulaire, *M* devrait être utilisé pour la conception de la paroi du réservoir, l'ancrage de base et la fondation. Si le réservoir est soutenu sur une fondation rectangulaire, *M* devrait être utilisé pour la conception de paroi du réservoir et les ancrages seulement, tandis que *M'* devrait être utilisé pour la conception de la fondation.

Le déplacement vertical de la surface du liquide en raison de ballottement *(η)* est donné par l'équation (2-23), où g est l'accélération due à la gravité.

$$\eta = R\frac{S_e T_{con}}{g} \quad (2\text{-}23)$$

Le modèle est élaboré pour le cas des réservoirs dont (0,3 < (H / R) <3), où la *H* est hauteur d'eau dans le réservoir et *R* le rayon de la cuve.

2.5 La solution analytique de Feltinsen

Pour simuler le ballottement d'un liquide dans un réservoir rectangulaire 2-D horizontalement excité avec une profondeur d'eau H et longueur L. Pour une excitation périodique $u_e = A.\cos\omega t$, où u_e est la vitesse d'excitation du réservoir, $A = b\omega$ l'amplitude de la vitesse avec b étant l'amplitude de déplacement, et ω la fréquence angulaire (pulsation) d'excitation, Faltinsen (1978) a donné la solution analytique linéaire pour la fonction de potentiel de vitesse ϕ.On peut facilement convertir ϕ à un déplacement de la surface libre η par l'utilisation de : (Liu & Pengzhi , 2009)

$$\eta = \frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{z=0}$$

$$\eta = 1/g\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(L+1)\pi}{L}x\right\}\cosh\left\{\frac{(L+1)\pi}{L}h\right\}[-A_n W_n \sin\omega_n t - C_n \sin\omega] - \frac{1}{g}A\omega x\sin\omega t \qquad (2\text{-}24)$$

Où

$$\omega_n{}^2 = g\frac{(L+1)\pi}{L}\tanh\left\{\frac{(2H+1)\pi}{L}H\right\} \qquad C_n = \frac{\omega(K_n)}{\omega_n{}^2 - \omega^2}$$

$$K_n = \frac{W_a}{\cosh\left\{\frac{(2n+1)\pi}{L}.H\right\}}\frac{2}{a}\left[\frac{L}{(2n+1)\pi}\right]^2(-1)^n \qquad A_n = C_n\frac{K_n}{\omega} \qquad (2\text{-}25)$$

ω_n Est la fréquence propre du fluide qui corresponde au mode de vibration *n*. (Chen & Nokes 2005)

La période de vibration est donnée comme suit :

$$T = 2\pi/\omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{g.k_n.\tanh(k_n.H)} \qquad K_n = n.\pi/(H) \qquad (2\text{-}26)$$

Remarque : Il est à noter que l'origine se situe au centre de la cuve et au niveau d'eau immobile.

2.5.1 La période Lamb ou Abramson (1966)

$$T_j = 1/F_j \qquad (2\text{-}27)$$

$$F_j = \frac{9.81s}{4\pi}\tanh(\pi\, Hs) \tag{2-28}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{i}{L}\right)^2 + \left(\frac{j}{H}\right)^2} \tag{2-29}$$

où i et j désignent le nombre de demi-ondes dans la direction X et Y, L et H sont les longueurs des côtés du récipient. (Mitra & Sinhamahapatra, 2008)

2.5.2 Le ballottement d'un liquide soumis à une excitation horizontale

La solution analytique linéaire de Feltinsen (2-24) décrite par (Chen, 2005) nous permet d'exprimer le déplacement de la surface libre (ballottement) d'un liquide dans un réservoir rectangulaire soumis à une excitation harmonique horizontale.

Pour cette application on va utiliser les paramètres H=0.5m, L=1 m, g=9.81m²/s, la fréquence naturelle la plus faible peut se calculer comme $\omega_1=5.314$, le calcule ce fait pour un temps de $t=10s$. Les figure (2.3) et figure (2.4) représente l'élévation temporelle de la surface libre du liquide sur le côté droit du réservoir $(x=a)$ pour deux fréquences d'excitation différentes. On utilise pour la comparaison les résultats numériques de (Liu & Pengzhi , 2009) .

a- Pour la fréquence d'excitation $\omega = 0.5\omega_1$ et $b=0.01m$, les résultats sont affichées dans la figure (2.3).

b- Pour la fréquence d'excitation $\omega = 0.95\omega_1$et b=0.0004m, les résultats sont affichées dans la figure (2.4).

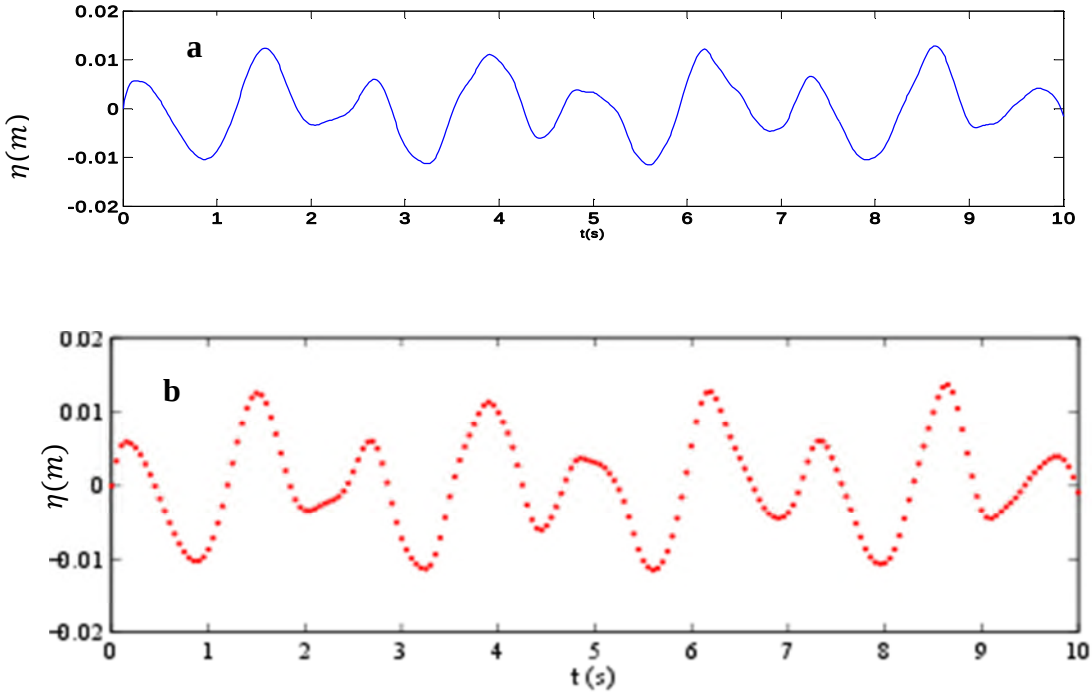


Figure (2.3) *comparaisons du déplacement de la surface libre en x = L/2 dans un réservoir horizontalement excité entre les résultats de la solution analytique* ***(a)*** *et la solution numériques* ***(b)****.*

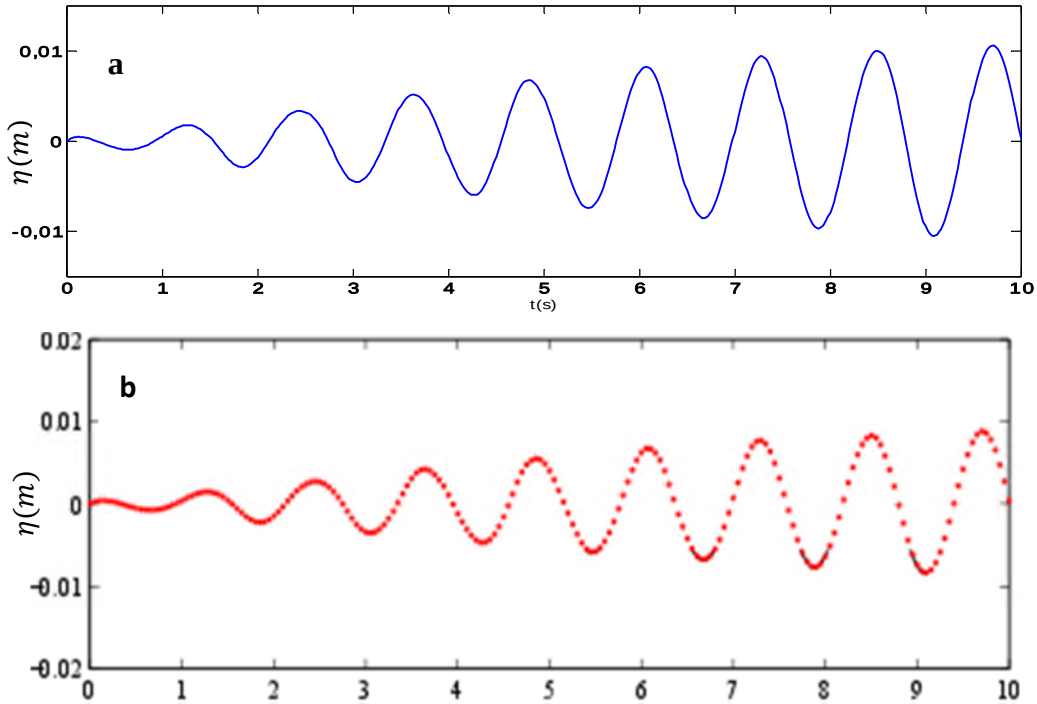


Figure (2.4) *comparaisons du déplacement de la surface libre en x = L/2 dans un réservoir horizontalement excité entre les résultats de la solution analytique (a) et la solution numériques (**b**) .*

D'après la figure (2.3) et la figure (2.4) on constate que La résonance survient pour des fréquences d'excitation confondue avec la fréquence propre du ballottement et les amplitudes de l'onde de ballottement de la surface libre deviennent plus importantes.

2.5.2.1 La représentation graphique de la solution temporelle

Pour les dix premier modes de vibration, les périodes naturelles de ballottement et les fréquences de résonance estimées théoriquement sont représentées dans le tableau 2-2).

La figure (2.5) exprime les hauteurs max *(h_{max})* en fonction des fréquences d'excitation (w)

Tableau (2-2) *tableau des périodes est fréquence modale de ballottement.*

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1.1818	0.8018	0.6535	0.5659	0.5062	0.4621	0.4278	0.4002	0.3773	0.3579
w_n	5.317	7.836	9.615	11.103	12.414	13.598	14.688	15.702	16.655	17.555

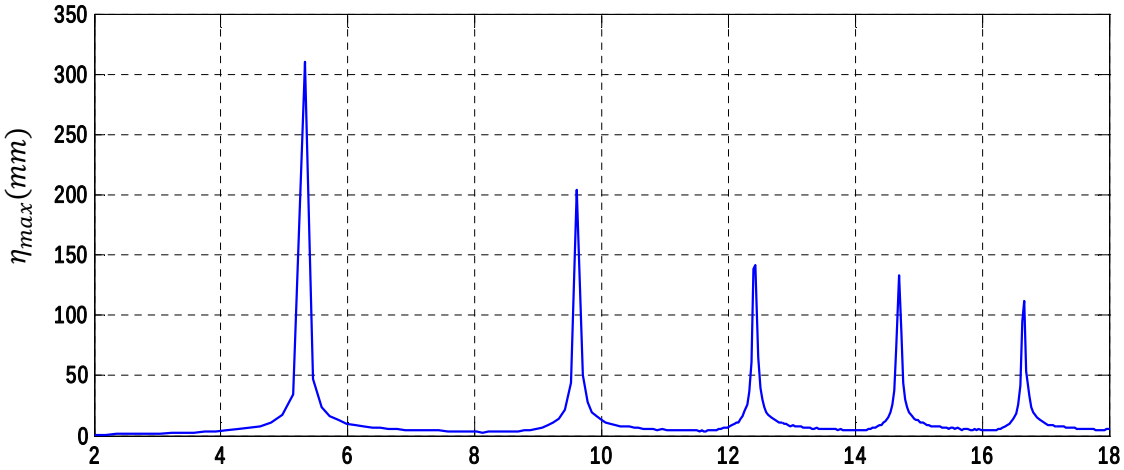


Figure (2.5) *la représentation graphique de la solution fréquentielle* $h_{max}=f(\omega)$

La figure (2.4) représente la réponse fréquentielle (solution temporelle) de la surface libre au point x=a, en examinant ce dernier graphe, on peut vérifier un accord entre les valeurs des fréquences de résonance estimées théoriquement dans le tableau (2-2) et les élévations maximales résultant des calculs numériques. On constate cinq pics consécutifs dont la valeur de l'élévation relative maximale. Chacun d'eux correspond à une fréquence fondamentale de ballottement. Le premier mode étant le plus dangereux on remarque alors que l'élévation relative maximale est la plus importante.

Les fréquences de résonance qui ne participent pas à la solution ne sont pas des solutions pour la solution temporelle et les modes correspondant ne sont pas des modes propres pour la solution analytique.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'étude de quelques modèles traitant le phénomène du ballottement, et qui avec leur simplicité sont utilisés comme références pour représenter la dynamique des liquides à l'intérieur des réservoirs ainsi comme un moyenne de calcule d'ingénierie rapide et efficace. Ces modèles aident à évaluer les masses impulsives et convectives ; ainsi que les périodes de temps des modes de vibration impulsive et convective, la distribution des pressions hydrodynamiques et la hauteur des vagues du ballottement.

Le domaine d'utilisation et de validation de ces modèles est limité on fonction de ces hypothèse simplificatrices et des aspects étudier.

A partir de l'application, nous avons pu déduire que la première fréquence de résonance ainsi que le pic de l'élévation relative maximale sont les plus importants par rapport aux autres.

Chapitre 3

Mise en équations et discrétisation par éléments finis

3.1 Introduction

Ce chapitre constitue la partie classique et académique de la mécanique des fluides. Il s'intéresse à la mécanique des fluides numériques, plus souvent désignée par le terme anglais computational fluid dynamics (CFD), qui consiste à étudier les mouvements d'un fluide, ou leurs effets, par la résolution numérique des équations régissant le fluide. En fonction des approximations choisies et des hypothèses admises, qui sont en général le résultat d'un compromis en termes de besoins de représentation physique par rapport aux ressources de calcul ou de modélisation disponibles, les équations résolues peuvent être les équations d'Euler, les équations de Navier-Stokes Laplace, etc.

3.2 Méthodologie

De manière générale, la résolution d'un problème de mécanique des fluides numérique passe par trois grandes phases :

1. La préparation du problème : ceci passe par la définition d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, du choix des modèles et méthodes numériques employés ;
2. La résolution numérique du problème qui passe par l'exécution d'un programme informatique. Bien des problèmes suscitant un minimum d'intérêt nécessitent des ordinateurs aux très grandes capacités ;

3. L'exploitation des résultats : on vérifie d'abord leur cohérence, puis ils sont examinés afin d'apporter des réponses aux questions posées par le problème de mécanique des fluides numérique de départ.

3.3 Equation régissant l'écoulement d'un fluide

Le but de ce premier titre est d'expliciter les équations de Navier-Stokes. Ces dernières traduisent le principe de conservation pour les différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Le fluide est supposé non visqueux, incompressible et en écoulement irrotationnel.

3.3.1 Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse dit que la variation dans tout domaine Ω est égal au flux de masse à travers sa frontière ∂Ω. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho U.n\, ds = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

Avec n la normale sortante à la frontière ∂Ω .On obtient alors en appliquant la formule de Gauss au second terme :

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}(\rho U) d\Omega = \int_{\partial S} \rho U.n\, ds \qquad (3\text{-}2)$$

Etant donné que le domaine est quelconque, le théorème de l'intégrale nulle permet d'obtenir l'équation locale de conservation de la masse plus connue sous le nom d'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

3.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement provient de la seconde loi de Newton : La variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce système. Soit :

- Les forces volumiques F_i:

$$\int_{\Omega} \rho F_i d\Omega \qquad (3\text{-}4)$$

- les forces surfaciques $T_i = \sigma_{ij} n_j$ (ou traction de surface) dues aux contraintes de cisaillement τ_{ij} et les forces de pression $p.\delta_{ij}$. la somme de ces forces s'écrit comme suit :

$$\int_s T_i ds = \int_s \sigma_{ij} n_j ds = \int_s (\tau_{ij} + p\delta_{ij}) n_j ds \tag{3-5}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \ \ si \ \ i = j; \ \ \delta_{ij} = 0 \ \ si \ \ i \neq j$$

L'équilibre des forces s'écrit :

$$\int_\Omega \rho F_i d\Omega + \int_s T_i ds = \int_\Omega \frac{d}{dt}(\rho U_i) d\Omega \tag{3-6}$$

U_i est la composante de la vitesse dans la direction i.

La formule de Gausse permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume comme suit :

$$\int_s T_i ds = \int_s \sigma_{ij} n_j ds = \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \tag{3-7}$$

Comme $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij}$;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{3-8}$$

et

$$\delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3-9}$$

Finalement le bilan de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_\Omega \left(\rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j \right) d\Omega \tag{3-10}$$

Etant donné Ω est quelconque ; l'équation locale s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3-11}$$

3.3.3 Les équations de Navier stocks

Pour déterminer l'état d'un milieu fluide, il est nécessaire de connaître en chaque point du domaine : la masse volumique ρ, les composantes de la vitesse U, la pression P, le tenseur des contraintes τ_{ij}..

A l'instant t, les équations qui caractérisent le milieu, sont les équations de Navier stocks :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} = \rho F_i - \dfrac{\partial P}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \tag{3-12}$$

3.3.4 Equation de Laplace

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace. Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne, l'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique. Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions harmoniques.

L'équation de continuité à deux dimensions d'un écoulement incompressible s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3-13}$$

où u et v sont les composantes du champs de vitesse.

Si l'écoulement est irrotationnel la vitesse satisfait :

$$Rot\ U = 0 \tag{3-14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3-15}$$

Or tout vecteur U satisfaisant $Rot\ U = 0$ dérive d'un potentiel ϕ telque :

$$U = grad\phi \tag{3-16}$$

$$Rot(grad\phi) = 0 \tag{3-17}$$

Le potentiel de vitesse ϕ décrit un écoulement irrotationnel bidimensionnel où la vitesse U à un point quelconque est donnée par :

$$U = \nabla\phi \tag{3-18}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{3-19}$$

La substitution de (3-19) en (3-13) donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3-20}$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{3-21}$$

3.4 Maillage

Le maillage consiste à découper l'espace en cellules appelées « volumes de contrôle ». Il est souvent plus délicat en mécanique des fluides que pour les éléments finis en résistance des matériaux : il faut mailler tout l'espace vide (la veine fluide), et les détails de surface ont de l'importance (puisqu'ils génèrent des turbulences), on a donc souvent des maillages contenant de nombreuses mailles. Par ailleurs, alors qu'en résistance des matériaux, un maillage hexaédrique de l'espace est une stratégie intéressante (elle permet d'avoir la même qualité de résultats pour un nombre de nœuds plus faibles), en MFN, cela introduit des directions préférentielles qui peut avoir une influence sur le résultat.

Les codes de simulation numérique en mécanique des fluides se rangent dans deux grandes classes. Les deux classes correspondent au type de maillage utilisé pour les simulations, les maillages structurés et les maillages non structurés. Ces deux types de maillage ont chacun des avantages et des inconvénients

3.4.1 Maillage structuré

Un maillage structuré est un maillage où il existe une ligne de maillage par direction d'espace, de telle sorte que chaque nœud du maillage peut être repéré par un doublé (i; j) en deux dimension ou par un triplé (i; j; k) en dimension 3.

Le problème des maillages structurés est qu'ils ne permettent pas de mailler en un seul bloc des géométries complexes. L'intérêt majeur de cette approche est la facilité de repérage des volumes, des nœuds, des interfaces…etc. à l'aide d'un couple (i; j) pour chaque bloc, il s'agit d'un adressage direct des données. De plus, l'utilisation de maillages structurés permet d'aligner les directions du maillage avec les directions privilégiées de l'écoulement.

3.4.2 Maillage non structuré

Un maillage non structuré se construit au minimum avec les éléments suivants :

- le nombre de nœuds du maillage et chaque nœud étant repéré par les coordonnées (x_i; y_i; z_i)
- le nombre de volumes du maillage et chaque volume étant défini par les n sommets de la cellule.

L'intérêt du maillage non structuré est le temps de création de ce maillage. Un maillage non structuré peut généralement être construit sur un ordinateur de bureau en quelques minutes. Par contre, l'obtention d'un maillage de grande qualité (pour le solveur considéré) peut être une action de type essai car l'analyse et la visualisation de l'état des volumes et de leur alignement avec l'écoulement peut vite devenir une tâche très complexe, voire impossible sur des maillages avec beaucoup de volumes de contrôle.

3.5 Maillage mobile

3.5.1 Approche pseudo élastique

Dans le cas d'une configuration arbitrairement Eulérienne Lagrangienne, il est nécessaire de définir le mouvement du maillage. Ce dernier est considéré comme étant un domaine pseudo élastique avec un module de Young arbitraire et un coefficient de poisson nul (R.Belakroun; T.H, Mai; M, Khadja; V, Pavel, 2008). Les déplacements aux nœuds des éléments sont obtenus par la résolution du système élasto-statique suivant :

$$K_m X_m = 0 \qquad dans \quad \Omega \tag{3-22}$$

$$X_m = X_0 \quad sur \quad \Gamma^{libre} \tag{3-23}$$

La matrice de rigidité élémentaire du système pseudo élastique est exprimée comme suit

$$K_m = \sum_e \int_{\Omega e} B^T D B |J|^e {\tau_m}^e d\Omega \tag{3-24}$$

Où B est la matrice dérivée des fonctions de forme, D la matrice constitutive, $|J|^e$ le jacobien de l'élément et ${\tau_m}^e$ le facteur de rigidité élémentaire pour un maillage mobile.

Pour le calcul du facteur ${\tau_m}^e$ on utilise le schéma proposé par [réf], qui est basé sur la taille de l'élément :

$${\tau_m}^e = 1 + \frac{|J_{max}| - |J_{min}|}{|J|^e} \tag{3-25}$$

Où $|J_{max}|$ et $|J_{min}|$ sont respectivement, le jacobien maximum et minimum parmi les éléments du maillage. La méthode consiste essentiellement à augmenter la rigidité des petits éléments afin d'empêcher leurs distorsion.

3.5.2 Conditions cinématiques à la surface libre

A la surface libre les composantes normales des vitesses du maillage et des particules fluides doivent être égales. Cela se traduit par l'expression suivante :

$$U_0 n = U_m n, \;\; sur \;\; \Gamma^{libre} \tag{3-26}$$

Les deux approches standard utilisées pour l'introduction de cette condition sont l'approche lagrangienne locale et la méthode de la fonction d'élévation ou de hauteur. Dans une configuration lagrangienne locale, les nœuds du maillage sont attachés aux particules fluides. Par conséquent nous avons à la surface libre la condition :

$$U_0 - U_m = 0, \;\; sur \;\; \Gamma^{libre} \tag{3-27}$$

La vitesse du maillage est utilisée par la suite pour incrémenter sa position :

$$X_m{}^{n+1} = X_m{}^{n} + U_m{}^{n} \Delta t, \;\; sur \;\; \Gamma^{libre} \tag{3-28}$$

3.6 Présentation de la méthode des éléments finis

3.6.1 Introduction

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par une méthode mathématique, des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur les frontières de ce domaine. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de libertés. A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile sinon impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour pouvoir trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalant ayant un nombre fini de degré de liberté. A cet effet, l'une des méthodes les plus utilisées est la méthode des éléments finis.

3.6.2 Les grandes lignes de la méthode

Les principales étapes de construction d'un modèle avec la méthode des éléments finis sont les suivantes :

- Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.
- Discrétisation du domaine en sous domaines.
- Approximation sur élément.
- Assemblage et application des conditions aux limites.
- Résolution du système globale.

3.6.3 Formulations variationnelles

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très bien répondu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

3.6.3.1 Forme forte

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$A(u) = 0 |\, \Omega \,;\, B(u) = 0 |\, \partial\Omega \tag{3-29}$$

Où A(u) est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et B(u) est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour ɣ figure (3.1). La fonction u peut être un scalaire tel que la température, la pression,…ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse, …

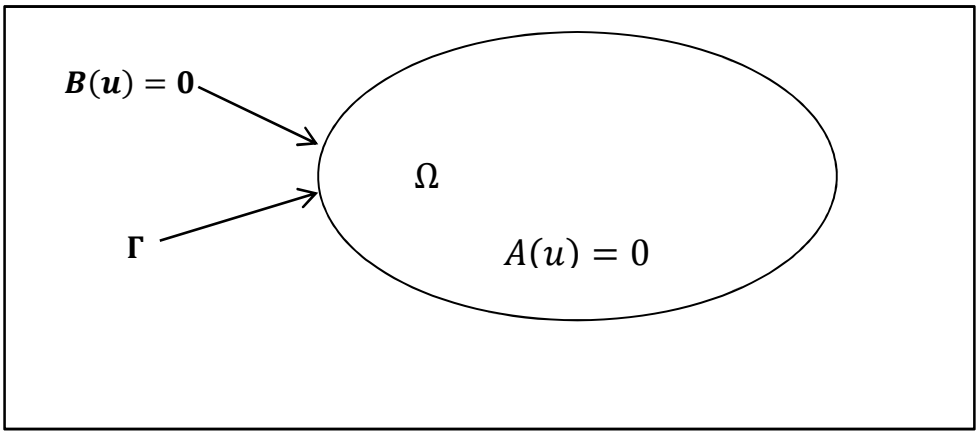


Figure (3.1) *Formulation d'un problème physique.*

Le problème variationnel associé au système (3-28) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall w \in : \int_{\Omega} w\, A(u) d\Omega \tag{3-30}$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle (ou du système d'équation différentielles). Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. En fait la solution de (3-30) a encore plus de portée, on peut affirmer que si elle est satisfaite pour toute fonction poids w, alors l'équation différentielle (3-29) est satisfaite en tout point du domaine Ω.

3.6.3.2 Forme faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder ; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} w\, B(u) d\Gamma = 0 \tag{3-31}$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (3-30) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(w)D(w)d\Omega + \int_{\Gamma} E(w)F(u)d\Gamma = 0 \tag{3-32}$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

Pour obtenir de telle formulation intégrale, nous disposons de deux procédés : le premier est la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelle que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé ; il consiste à choisir $w = \delta u$ fonction de Dirac (une perturbation de la fonction cherché) et d'utilisé l'approximation nodale pour la discrétisation. W s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : "pondéré".

3.6.4 Discrétisation du domaine

La discrétisation du domaine consiste à découper le système étudier en élément élémentaire, cette opération est appelée maillage, chaque élément est définit géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminés et qui occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arrêtes de faces, ils assurent la connexion des éléments les uns aux autres.

3.6.5 Approximation sur l'élément

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en œuvre sur ordinateur.

3.6.5.1 Approximation polynomiale

- Interpolation 1D

Pour un problème linéaire avec un élément à n nœuds, l'approximation polynomiale s'écrit :

$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{3-33}$$

ou encore sous la forme développée :

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{3-34}$$

qu'on peut écrire sous forme vectorielle :

$$u =< 1 \;\; x \;\; x^2 \;\; \ldots \;\; x^n > \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{Bmatrix} = P.a_n \tag{3-35}$$

Avec : P : Vecteur ligne contenant les monômes x^n (cas linéaire)

a_n : Vecteur colonne contenant les facteurs (variables généralisées) du polynôme qui en général n'ont pas de sens physique.

- Interpolation 2D

Dans le cas d'un problème bidimensionnel la fonction approchée sous forme polynomial s'écrit :

$$u(x, y) = \sum a_i x^j y^k \tag{3-36}$$

Si on prend pour exemple un élément rectangulaire à 4 nœuds, l'approximation polynomiale s'écrit :

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \tag{3-37}$$

ou sous forme vectorielle :

$$u =< 1 \;\; x \;\; y \;\; xy > \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = P.a_n \tag{3-38}$$

Il est utile d'utiliser les triangles de pascal ci-dessus, pour déterminer les termes des polynômes d'interpolation pour les différents types d'éléments bidimensionnels. (L & BENDAHMANE , 2006)

Tableau (3-1) : *Modes de L'interpolation polynomial pour des triangles*

Triangle	Degré	Nombre de termes
1	Constant 0	1
x y	Linéaire 1	3
x^2 xy y^2	Quadratique 2	6
x^3 x^2y xy^2 y^3	Cubique 3	10
x^4 x^3y x^2y^2 xy^3 y^4	Quartique 4	15
x^5 x^4y x^3y^2 x^2y3 xy^4 y^5	Quintique 5	21

3.6.5.2 Approximation nodale

On a vu précédemment que l'approximation polynomiale sur un élément s'écrit :

$$u = P.a_n \tag{3-39}$$

Si on exprime la fonction u sur tous les nœuds l'interpolation polynomiale s'écrit :

$u_i =< P_{ij} > \{a_j\}$ pour chaque nœuds ce qui donne pour tous les nœuds :

$$\{u\} = \begin{bmatrix} < P_{ij} > & \cdots & \{a_j\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < P_{in} > & \cdots & \{a_j\} \end{bmatrix} = U_n = P_n.a_n \tag{3-40}$$

où : U_n : vecteur colonne contenant les valeurs aux nœuds.

P_n : matrice contenant les valeurs des polynômes aux nœuds.

on peut tirer les a_n on inversant le système d'équations précèdent :

$$a_n = {P_n}^{-1}.U_n \tag{3-41}$$

En remplaçant a_n dans (3-39) on obtient :

$$u =< P > [P_n]^{-1}.\{U_n\} =< N > \{U_n\} = N.U_n \tag{3-42}$$

Avec :

N : Vecteur ligne contenant des fonctions de x et y éventuellement z appelées fonctions d'interpolation (fonction de forme). Cette interpolation est appelée interpolation nodale puisqu'elle dépend des valeurs aux nœuds de la fonction inconnue u.

3.6.6 Assemblage

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire les matrices globale du domaine (reconstitution du domaine), ainsi que le vecteur global des sollicitations agissant sur celui-ci à partir des matrices et vecteurs élémentaires préalablement calculés.

Afin d'obtenir la solution complète du domaine, il faut que la condition d'équilibre globale soit satisfaite. Pour cela, on doit déterminer les contributions de tous les éléments auxquels un nœuds "i" appartient pour les égalisées avec les excitations extérieures appliquées en se nœud. Autrement dit, on doit situer chaque élément de la matrice élémentaire dans la matrice globale, et le sommer avec la valeur existant qui est le résultat des contributions des autres matrices élémentaires. Cet emplacement dans la matrice globale n'est qu'une localisation de la variable élémentaire dans la variable globale.

3.6.7 La résolution

Dans le cas d'une analyse dynamique, le passage par les étapes décrites dans les sections précédentes, ramène le problème posé en termes d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles équivalent :

$$M\ddot{U} + C\acute{U} + KU = P(t) \tag{3-43}$$

3.7 Forme intégrale de l'équation de Laplace

La résolution de l'équation de Laplace $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0$ revient à la résolution de l'intégrale :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) d\Omega \tag{0-44}$$

Avec : Ω : Domaine de l'écoulement = (surface 2D)
dΩ = dxdy

C'est la forme intégrale forte, elle présente des inconvénients : la satisfaction des conditions aux limites imposées et l'interpolation des dérivées, donc il n'est pas toujours possible de trouver des solutions analytique à ces systèmes d'équations différentielles. Pour cela, il faudrait remplacer le système continu (forme intégrale forte) par un système discret (forme intégrale faible) équivalent dont le comportement décrit par des équations algébriques qu'on peut résoudre par la méthode des éléments finis. Dans le cas des équations différentielle à une seule variable de second ordre et plus, le passage de la forma continue vers la forme discrète se concrétise par une intégration par partie. Cependant, pour les équations similaires à celle de Laplace, la forme intégrale faible est obtenue par l'utilisation des méthodes des résidus pondérés, à titre d'exemple la méthode de Galerkine.

3.7.1 Méthode de Galerkine

La méthode de Galerkine est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés. Elle utilise comme fonction de pondération l'ensemble des variations δu des fonctions approchées U. On considère que les perturbations sur le potentiel $\delta\phi = \delta u = w$.

Soit l'intégrale :

$$\int_{\Omega} \delta u \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) d\Omega \tag{0-45}$$

On a :

$$\mathrm{div}(\delta\phi \; grad\phi) = < \frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial y} > \begin{bmatrix} \delta\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \partial\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{0-46}$$

$$\mathrm{div}(w grad\phi) = < \frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial y} > \begin{bmatrix} w \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ w \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(w \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \tag{0-47}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = w \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \tag{0-48}$$

Implique :

$$\mathrm{div}(w \; grad\phi) = w\Delta\phi + \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{0-49}$$

Finalement :

$$\mathrm{div}(\mathrm{w\ grad}\phi) = \mathrm{w}\Delta(\phi) + \mathrm{grad\ w.grad}\ \phi \tag{0-50}$$

d'où :

$$w\Delta\phi = \mathrm{div}(\mathrm{w\ grad}\phi) - (\mathrm{grad\ w.grad}\phi) \tag{0-51}$$

$$\delta\phi\Delta\phi = \nabla^T(\delta\phi\nabla\phi) - (\nabla w.\nabla\phi) = div(\delta\phi\ grad\ \phi) - (grad\ \delta\phi.grad\ \phi) \tag{0-52}$$

Si on prend l'intégrale sur le domaine Ω, $\int_\Omega\ \delta\phi(\Delta\phi)d\Omega = 0$ on remplace par l'expression précédente on obtient :

$$\int_\Omega \delta\phi(grad\phi)d\Omega - \int_\Omega grad\ \delta\phi.grad\ \phi\ d\Omega = 0 \tag{0-53}$$

Implique :

$$\int_\Omega < \frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y} > \begin{bmatrix} \delta\phi\dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \delta\phi\dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega - \int_\Omega \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\delta\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\delta\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} d\Omega = 0 \tag{0-54}$$

3.7.2 Utilisation du théorème de Green (divergence)

L'intégration des équations aux dérivées partielles décrivant des systèmes physiques fait intervenir non seulement des intégrales sur le domaine Ω mais aussi des intégrales sur la frontière ɣ du domaine. Le théorème de green permet d'évaluer ces intégrales.

$$\int_\Omega \mathrm{div}(V)d\Omega = \int_\Gamma V.n\ \mathrm{d}\Gamma \tag{0-55}$$

Pour $V = \delta\phi\nabla\phi$:

$$\int_\Omega div(\delta\phi\nabla\phi)d\Omega = \int_\Gamma \delta\phi\nabla\phi.n\ d\Gamma \tag{0-56}$$

La forme intégrale s'écrit alors :

$$-\int_\Omega \nabla\delta\phi\nabla\phi d\Omega + \int_\Gamma \delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}d\Gamma = 0 \tag{0-57}$$

3.7.3 Formulation en pression

L'équation de Navier-stockes (3-12)**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** Pour un écoulement irrotationnel et pour un fluide incompressible se réduit à l'expression suivant :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p} \tag{0-58}$$

$$\mathrm{div}U = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{0-59}$$

Selon x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{0-60}$$

Selon y :

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{0-61}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{0-62}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{0-63}$$

On obtient par la somme des deux équations (0-63) et (0-62) l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \tag{0-64}$$

Pour un écoulement incompressible et fluide incompressible l'équation devient :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{0-65}$$

Soit :

$$\Delta p = 0$$

Discrétisation du terme :

$$\int_{\Omega} \nabla \delta p \,.\, \nabla p \ \mathrm{d}\Omega$$

On a

$$p =< N_1 \;\; N_2 \;\; N_2 \ldots >. \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} =< N >. \{P\}$$

De même $\nabla \delta p =< N >^T \{\delta P\}^T =< \delta P > \{N\}$

D'où :

$$\nabla p = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} < N >. \{p\} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} < N >. \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} p_1 + \dfrac{\partial N_2}{\partial x} p_2 + \cdots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} p_1 + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} p_2 + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla \delta p = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \delta p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \delta p}{\partial y} \end{Bmatrix} =< \delta P_1 \; \delta P_2 \ldots > \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix}^T$$

La forme discrète s'écrit finalement comme suit :

$$\int_\Omega < \delta P_1 \; \delta P_2 \ldots > \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots . \\ \ldots \end{Bmatrix} d\,\Omega$$

On note matrice de "rigidité" du fluide le terme :

$$K = \int_\Omega \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \end{bmatrix} d\,\Omega$$

3.7.4 Discrétisation des conditions aux limites

Le terme

$$\int_\Gamma \delta p \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma$$

Est décomposé selon la géométrie et le type de conditions aux limites dont on dispose. Dans le cas de réservoir à surface libre on a deux termes. Un défini sur la surface et un autre défini sur les parois.

Sur la surface libre, on suppose que toute élévation ou abaissement se traduit par une surpression au niveau de la surface initiale, qu'on suppose hydrostatique. On note h la surélévation, la pression s'écrit donc $p = \rho g h$. L'équation de mouvement se traduit par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cdot n = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

Or $\frac{\partial V}{\partial t} \cdot n = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$, et comme $h = \frac{p}{\rho g}$ alors $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

Ce qui lie les gradients de pression à ses dérivées secondes au niveau de la surface.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Cette condition est appelée condition d'onde de surface linéarisée. Sa discrétisation donne la matrice "Masse fluide" suivante (en suivant les mêmes étapes que la matrice K)

$$M = \int_{\Gamma_{\text{sutface}}} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \frac{1}{g} < N_1 \; N_2 \; \dots > d\Gamma$$

Au niveau des parois du réservoir, on a

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cdot n = A \cdot n$$

avec A accélérations des points de la paroi. L'équation dynamique lie les accélérations des parois aux gradients des pressions.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = A$$

Sa discrétisation donne le vecteur "Force" suivant

$$F = \int_{\Gamma_{\text{parois}}} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \rho A$$

L'équation algébrique finale se met sous la forme suivante :

$$K\,P + M\ddot{P} = F$$

3.8 Conclusion

La mécanique des fluides numérique a grandi d'une curiosité mathématique pour devenir un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides. Dans le domaine de la recherche, cette approche est l'objet d'un effort important, car elle permet l'accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration) pour chaque point du domaine de calcul.

Les équations gouvernant le mouvement d'une surface libre d'un fluide dans un réservoir de forme géométrique quelconque ont été développées en utilisant l'équation de continuité, de Laplace et l'équation ainsi que les conditions aux limites associées.

Les équations de Navier-stocks sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens dans l'approximation des milieux continus. Elles modélisent de nombreux phénomènes d'écoulement fluide.

Chapitre 4

4 La modélisation

4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la simulation du ballottement dans un réservoir rectangulaire 2D, par la résolution numérique des équations de Navier-stocks avec la méthode des éléments finis. Pour résoudre ce phénomène, différents logiciels peuvent être utilisés, on cite à titre d'exemple ABAQUS, ANSYS, CASTEM…etc. On utilise dans le présent travail le logiciel de simulation *COMSOL Multiphysics*. Le choix s'est basé sur la capacité du logiciel dans la résolution des équations, la modélisation et la simulation des phénomènes multi-physiques à l'aide des méthodes numériques avancées. De plus, *COMSOL Multiphysics* autorise l'utilisateur de définir ses propres systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) soit sous forme différentielle, soit sous forme faible.

4.2 Présentation du logiciel

COMSOL Multiphysics (ancien nom : *Femlab Toolbox 1.0*) permet de coupler des physiques "simples" ou d'étudier des phénomènes complexes comme l'intéraction fluide-structure. Pour étendre les simulations possibles, il comprend plus de 30 modules complémentaires qui offrent des interfaces et des outils spécialisés en génie électrique, mécanique, fluidique et chimique. De plus, des interfaces bidirectionnelles relient les simulations réalisées dans *COMSOL Multiphysics* à des logiciels tiers de calcul, de CAO (**CAD**) et **Matlab** (COMSOL).

COMSOL Multiphysics qui est multiplateforme, peut fonctionner sous Windows, Mac, GNU-Linux etc. Il utilise une interface graphique qui nous permet de travailler en plusieurs dimensions (1D, 2D ou3D) et d'observer les différentes grandeurs (couple, tension, force etc…) visuellement.

Dans le cas de la simulation du ballottement les résultats disponibles à visualiser sont: le profil de la surface libre, le profil des champs des vitesses, les pressions hydrostatiques est hydrodynamiques, le mouvement du maillage s'il est mobile, les modes propres du ballottement…etc.

4.3 Présentation du modèle

Ce modèle 2D a pour objectif de simuler la dynamique de l'écoulement à surface libre à l'aide du module maillage mobile " mouving mesh". Le modèle traite le mouvement du fluide avec les équations de Navier-Stockes incompressibles. Le fluide est initialement au repos dans un réservoir rectangulaire. Le mouvement horizontal est entraîné par le vecteur des accélérations dans la direction de x.

4.3.1 Les paramètres de calcul

Le tableau (4-1) montre les paramètres de calcul physiques et géométriques utilisés dans le modèle.

Tableau (4-1) *Les paramètres de calcul*

Nom	Expression	Description
μ	Fixé par l'utilisateur [Pa*s]	Viscosité dynamique
ρ	Fixé selon le fluide[kg/m^3]	Masse volumique
L	Fixé par l'utilisateur [m]	Largeur du réservoir
H	Fixé par l'utilisateur [m]	Hauteur du fluide
i_mod	Fixé par l'utilisateur	Le numéro du mode
s	i_mod/L	Paramètre pour le calcul de ω_imod
fs	$g_const * s * \tanh(\pi * H * s)/(4 * pi)$	Paramètre pour le calcul de ω_imod
$freq$	sqrt(fs)	Paramètre pour le calcul de ω_imod
$\omega * i_mod$	$2 * \pi * freq$	Pulsation du mode modal
ω	Fixé par l'utilisateur	Pulsation de l'excitation
B	Fixé par l'utilisateur [m]	Amplitude des déplacements
A	$b * \omega^2$	Amplitude des accélérations

4.3.2 La géométrie

La géométrie définissant le réservoir est rectangulaire, de largeur L(m) et une hauteur de colonne d'eau H (m)

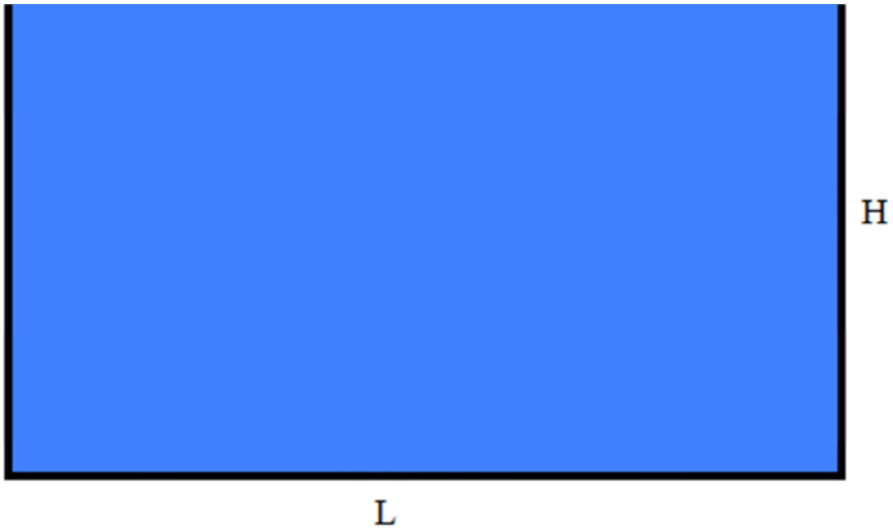


Figure (4.1) *Réservoir de liquide en deux dimension L(m) et H(m)*

4.3.1 Equation du domaine

Ce modèle décrit la dynamique du liquide incompressible avec les équations de Navier-Stokes décrites en détail dans le chapitre 3. Les termes des vecteurs forces sont représentés dans le tableau (4-2) comme suit :

Tableau (4-2) : *les expressions des vecteurs forces.*

Nom	Expression	Description
grav_x	-A*sin(ω*t)	La composent du vecteur gravite selon x
grav_y	-g_const	La composent du vecteur gravite selon y
F_x	grav_x*rho	La composent de vecteur forces de volume selon x
F_y	grav_y*rho	La composent de vecteur forces de volume selon y

4.3.2 Conditions aux limites

La configuration étudiée est représentée sur la figure (4.1). Sur les parois latérales et le fond, nous imposons la condition de glissement :

$$u.n = 0 \;\; ; \;\; T_i = (T_k n_k) n_i \;\; ; \;\; T_i = \mu\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right) n_j$$

A la surface libre, le fluide est libre de se déplacer et l'effet de la tension superficielle est négligé. La condition s'écrit :

$$\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right)\right).n_j = -p_0.n_i \qquad (4\text{-}1)$$

où p_0 est la pression d'entourage (constante).

Afin de pouvoir suivre le mouvement du fluide avec un maillage mobile, il est nécessaire de coupler le mouvement des éléments finis à la normale liquide en mouvement sur la surface libre. La condition aux frontières pour les équations des mailles sur la surface libre est :

$$(x_t, y_t)^T . n = u . n \tag{4-2}$$

où n est la normale à la frontière et u la vitesse de la maille et (x_t, y_t) est la position temporelle des mailles. Sur les parois latérales, les mailles sont libres et se déplacer suivant y mais pas suivant x. Au niveau du fond du réservoir, les mailles sont fixées à la paroi.

4.4 Validation du modèle

Afin de valider la présente approche numérique, nous avons choisi de comparer les résultats des simulations aux résultats de la solution analytique de Feltinsen décrite par Chen *et al.*, (2005). Plusieurs géométries (hauteur et largeur) du réservoir ont été testées. L'excitation horizontale a été prise harmonique de fréquence aussi variable. Cette excitation est imposée à la masse liquide sous forme de forces volumiques $F_x = \rho\, A(t)$ avec

$$A(t) = -b\omega^2 \sin(\omega t) \quad ; \quad \omega = 2\,\pi f$$

b est l'amplitude du mouvement imposé, ω est la pulsation d'excitation et f est la fréquence.

Pour les deux modèles d'éléments finis, la géométrie du réservoir a été discrétisée en utilisant pour le premier cas (2574) éléments triangulaires; pour le deuxième cas (3796); et pour le troisième cas (1306) éléments triangulaires. Le maillage dans le premier cas est montré dans la figure (4.2) suivante. Lorsque les dimensions du réservoir sont augmentées, le nombre des éléments est aussi augmenté afin de garder une taille plus ou moins constante. Autrement des difficultés de convergence de la solution peuvent être rencontrées. Cette convergence dépond aussi du pas de d'intégration temporelle, dans ces exemple le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 0.01s$. Avec ce type de maillage et ce pas de temps, les calculs prennent souvent 30min à 60min en temps d'exécution sur une machine doté d'un double cœur i5 avec 4 GO de RAM.

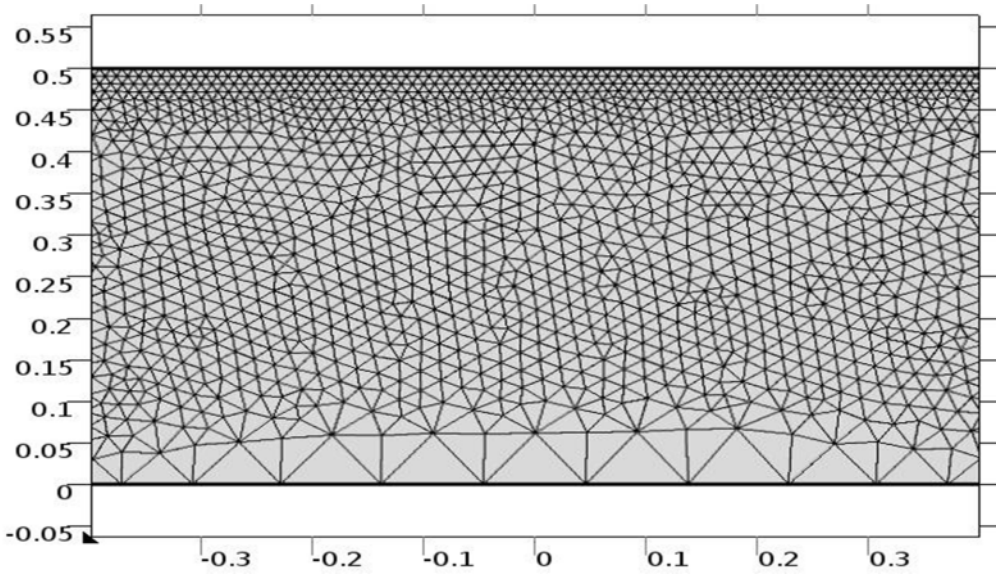
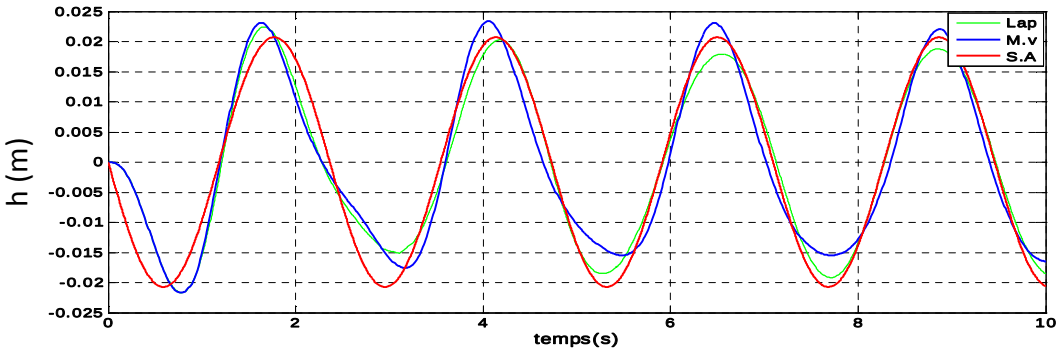
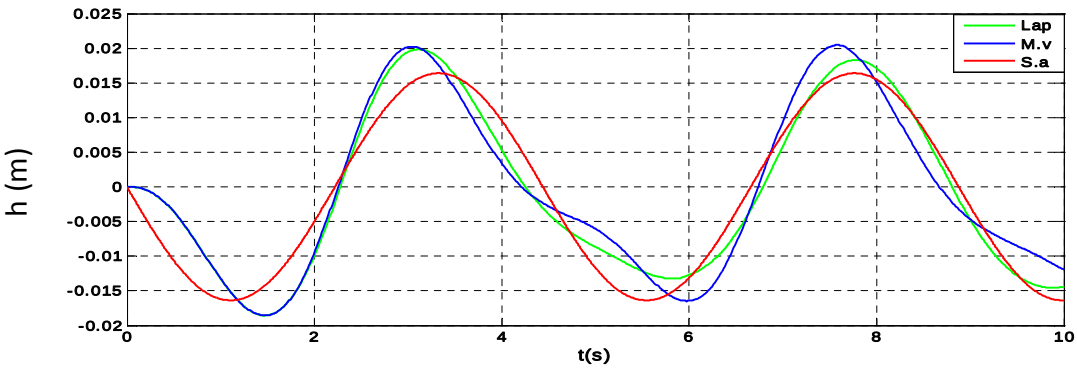


Figure (4.2) *Discrétisation du domaine.*

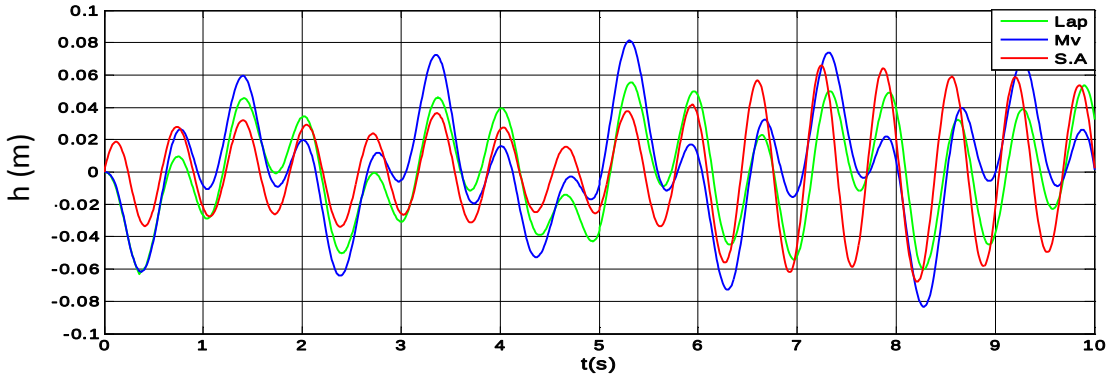
En plus de la solution analytique, le présent modèle est confronté au modèle d'éléments finis classique basé sur la discrétisation de l'équation de Laplace. La figure (4.3) montre les déplacements verticaux de la surface libre au niveau de la paroi droite, obtenus avec ces trois approches : Le présent modèle basé sur l'équation de Navier-Stockes et le Mouving Mesh (courbe en bleu), le modèle basé sur l'équation de Laplace (courbe en vert) et la solution analytique (courbe en rouge). Trois (03) différents cas de géométrie (L, H) et de paramètres d'excitation (fréquences ω et amplitudes a) ont été montrés sur la figure.



(a) Cas N°1 : $L = 1m,\ H = 0.5m,\ b = 0.04m/s^2,\ \omega = 0.5\omega_0,\ \omega_0 = 2.60rad/s$



(b) Cas N°2 : $L = 3m, H = 1m,\ b = 0.04m,\ \omega = 0.5\omega_0\ , \omega_0 = 1.42\ rad/s$



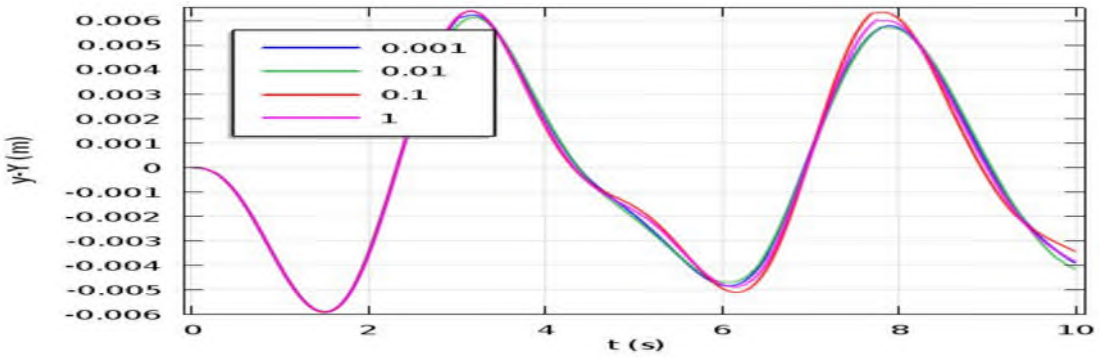
(c) Cas N°3 : $L = 3m\ H = 3m\ b = 0.01m\ ,\ \ \omega = 3\omega_0,\ \omega_0 = 9.60\ rad/s$

Figure (4.3) *Comparaison des élévations de la surface libre obtenues par le modèle mouving mesh, Le modèle Laplace et La solution analytique de Feltinsen.*

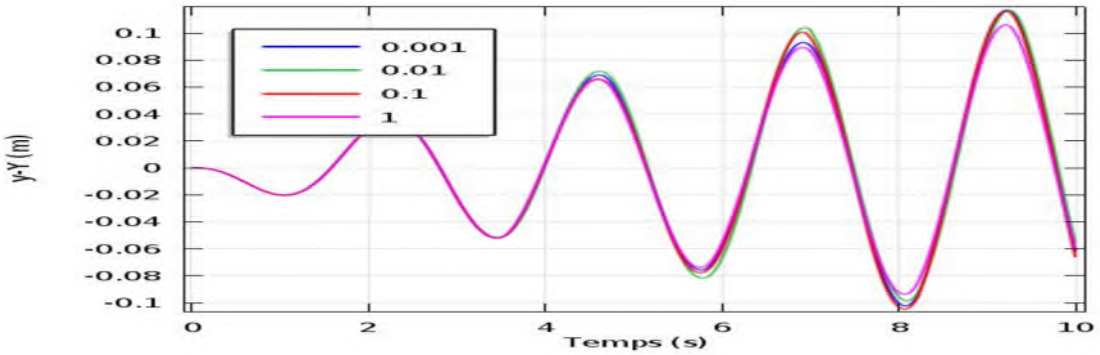
4.5 Etude de l'influence des paramètres physiques et géométriques

4.5.1 L'influence de la viscosité dynamique

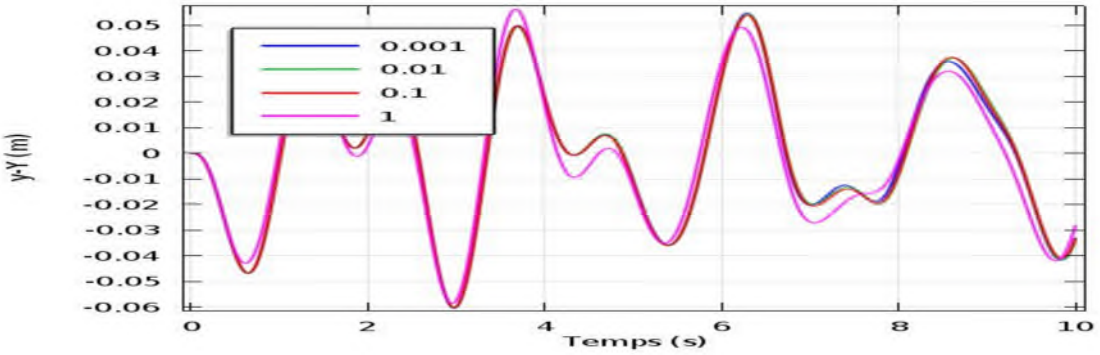
Le présent modèle permet de prendre en compte la viscosité du liquide, il est donc possible d'examiner l'effet de ce paramètre sur les élévations de la surface libre. La figure (4.4) montre l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre de liquides de différentes viscosités dynamiques. Le réservoir rectangulaire est de langueur $L = 4m$ et la hauteur du liquide stocké est $H = 3m$, sa pulsation de vibrations propres est estimée à l'aide de la formule de (4.4) à $\omega_0 = 2.75rad/s$. Le déplacement imposé est $b = 10mm$ et de fréquences varié comme suit : $\omega = 0.5\omega_0 = 1.36rad/s$; $\omega = \omega_0 = 2.75rad/s$ et $= 2\omega_O = 5.50rad/s$. La première La première pulsation sert à représenter le cas des basses fréquences et la deuxième pulsation sert à reproduire le cas de résonnance et la troisième sert à produire plusieurs cycles.



(a) $\omega = 0.5\omega_0 = 1.375 rad/s$



(b) $\omega = \omega_0 = 2.75\, rad/s$



(c) $\omega = 2\omega_0 = 5.50 rad/s$

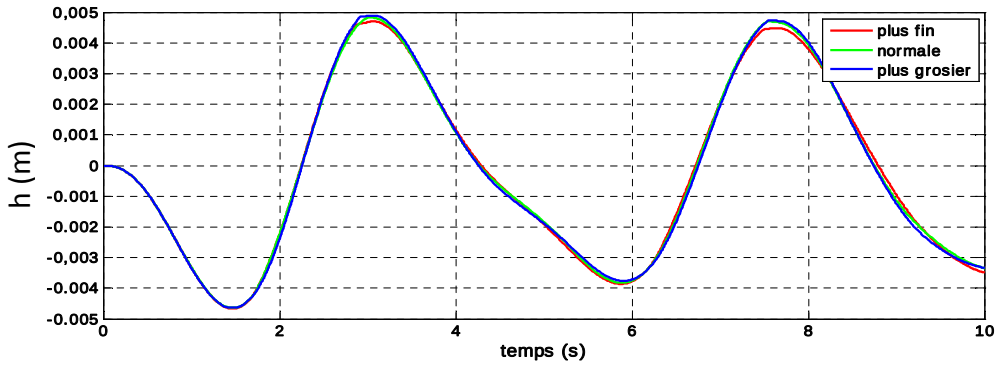
Figure (4.4) *Effet de la viscosité du liquide sur les élévations de la surface libre*

Ces résultats montrent que la viscosité dynamique influe peu sur les élévations de la surface libre notamment dans le cas de résonnance ($\omega = \omega_0$).

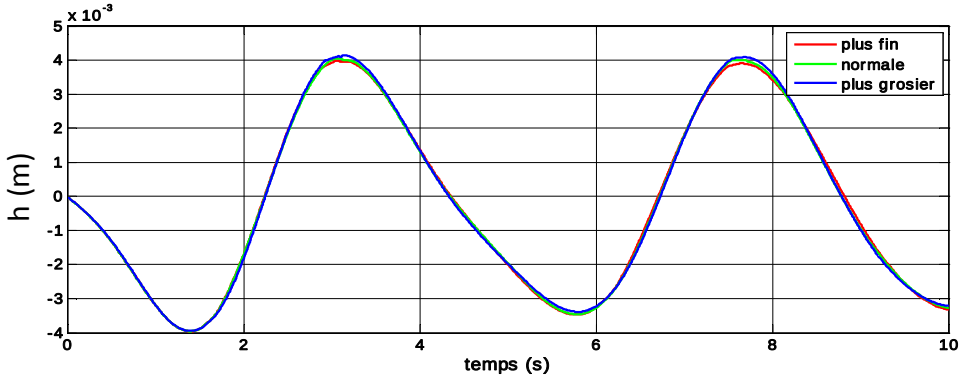
4.5.2 L'influence de la taille du maillage

Pour voir l'effet de la taille du maillage sur les résultats obtenus avec le modèle "Mouving Mesh", on compare les élévations temporelles de la surface libre obtenues pour des maillages de tailles différentes. Les simulations ont été réalisées en utilisant les mêmes paramètres numériques que dans l'étude de l'effet de la viscosité ; une géométrie de $L = 3m$ et $H = 1m$, la

fréquence d'excitation est de $\omega = 0.5\omega_0$ et l'amplitude $b = 0.001m$, $\mu = 0.001$pa.s. Les résultats sont montrés sur la figure 4.8. Ces résultats montrent qu'un maillage de 2433 éléments triangulaires considéré dans COMSOL comme maillage grossier est suffisant pour la discrétisation de la géométrie considérée. Le raffinement en un maillage normal 4131 éléments triangulaires et encore plus en un maillage plus fin 7919 éléments triangulaires n'améliore pas grand-chose dans les résultats.



(a) Solution obtenue avec le modèle Mouving Mesh



(b) Solution obtenue avec le modèle de l'équation de Laplace

Figure (4.5) *Effet de la* taille du maillage sur *les élévations de la surface libre*

4.5.3 Apport de mouving mesh

Lorsqu'on ne dispose pas d'outils de calcul offrant l'option de maillage mobile, il est possible d'estimer grossièrement les surélévations de la surface en prenant les surpressions au fond du réservoir. La différence en termes de charges donne les fluctuations équivalentes de de la surface.

$$h(t) = \frac{1}{\rho g} P_{\text{fond}}(t) - H$$

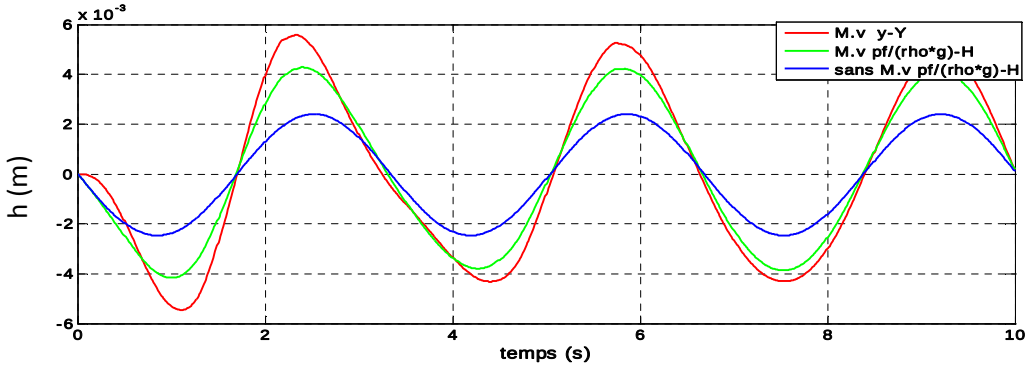
La figure (4.4) montre l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre avec ou sans la prise en compte de maillage mobile. Les paramètres sont choisis comme suit :

$\mu = 1Pa.s$, $b = 0.01m$ $\omega = 0.5\omega_0$, la taille de maillage normale.

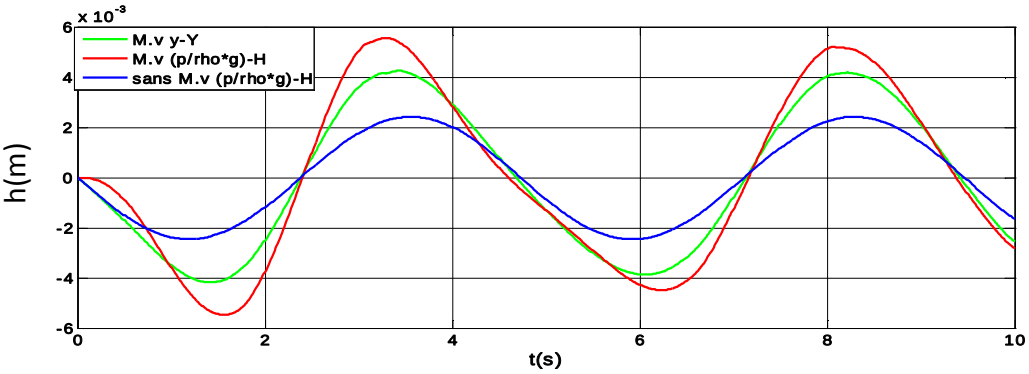
$$\text{Cas N°1} \;\; L = 2(m) H = 1(m) \;\; \omega = 0.5\omega_0 = 1.88\, rad/s$$

$$\text{Cas N°2} \;\; L = 4(m) H = 2(m) \;\; \omega = 0.5\omega_0 = 1.33\, rad/s$$

On voit à partir de cette figure que l'erreur commise si on considère la pression au fond comme indicateur de surélévations de la surface libre n'est pas négligeable. Les pics obtenus dans ce cas sont estimés presque à moitié de ceux évalués avec le modèle basé sur le maillage mobile. Cette figure nous permet aussi de comparer la pression au fond lorsque le maillage est fixe ou libre de se déformer. Les calculs effectués avec un maillage mobile donnent des pressions plus importantes que ceux effectués avec un maillage fixe. Cette différence de pression se répercute sur les efforts qu'exerce le liquide sur les parois du réservoir et peuvent fausser leurs dimensionnement vis-à-vis des excitations dynamique comme le séisme. La prise en compte de la déformabilité du maillage est donc très importante dans le calcul des réservoirs en zones sismiques ou des réservoirs sujets à des excitations dynamiques.



(a) Cas N°1 $L = 2(m) H = 1(m)$



(b) Cas N° $L = 4(m)\; H = 2(m)$

Figure (4.6) *Effet du maillage mobile sur les élévations de la surface libre*

4.5.3.1 L'influence du type de mouving mesh

COMSOL permet de modéliser la déformabilité du maillage avec quatre modèles appelés : "Winslow", "Laplace", "Hyperelastique" et "Yeah". Nous avons testé ces quatre modèles sur le cas d'un réservoir de largeur $L = 3\, m$ et de hauteur $H = 1m$. La viscosité du fluide est fixée à $\mu = 1\, Pa.s$. Les résultats obtenus ont montré que les quatre types de maillage déformables donnent les mêmes résultats comme on le voit sur la figure 4.5. Aucune préférence ne peut être

dégagée pour le problème de ballottement des liquides dans les réservoirs. Des différences peuvent se manifester pour d'autres types de problèmes.

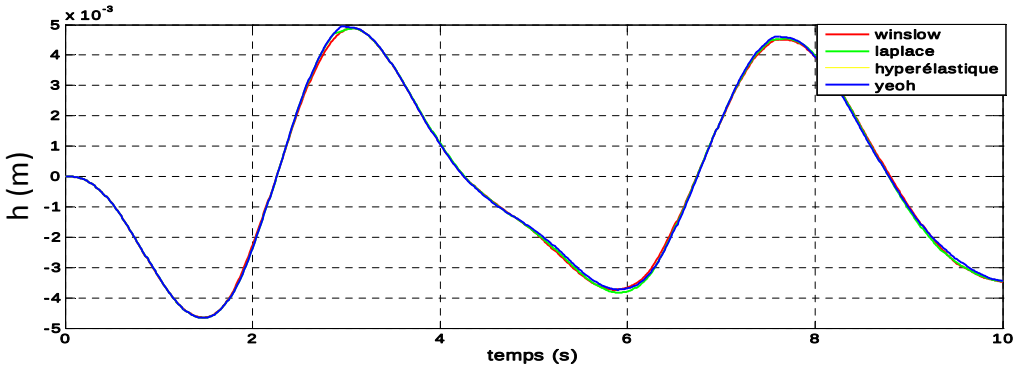


Figure (4.7) *Effet du type de maillage mobile sur les fluctuations de la surface libre*

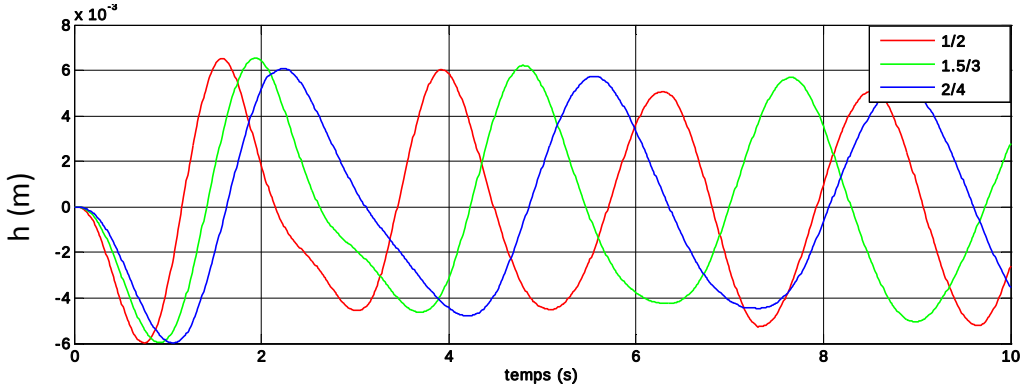
4.5.4 L'influence du rapport L/H

Dans les études précédentes, il a été constaté que la taille du réservoir influe énormément sur les fluctuations de la surface libre. On examine dans cette étude trois cas de rapports L/H sur la réponse temporelle en termes de fluctuations de la surface libre. Chaque rapport *L/H* est représenté par trois cas de géométrie :

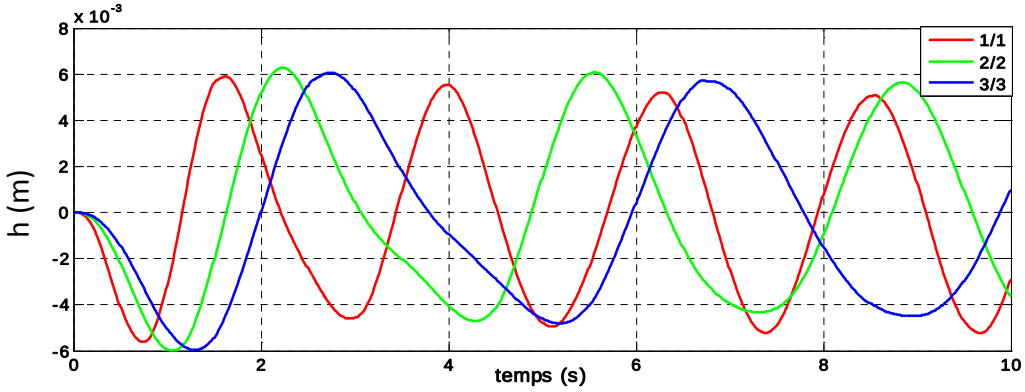
$$\text{Cas N°1} : \frac{L}{H} = 0.5 \ ; \ \frac{L=1}{H=2} \ ; \ \frac{L=1.5}{H=3} \ ; \ \frac{L=2}{H=4}$$

$$\text{Cas N°2} : \frac{L}{H} = 1 \ ; \ \frac{L=1}{H=1} \ ; \ \frac{L=2}{H=2} \ ; \ \frac{L=3}{H=3}$$

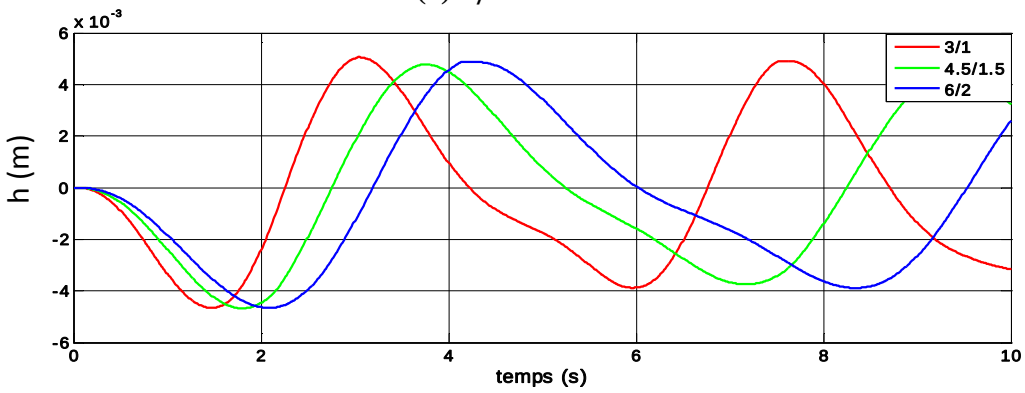
$$\text{Cas N°3} : \frac{L}{H} = 3; \ \frac{L=3}{H=1} \ ; \ \frac{L=4.5}{H=1.5} \ ; \ \frac{L=6}{H=2}$$



(a) $L/H = 0.5$



(b) $L/H = 1$



(c) $L/H = 3$

Figure (4.8) *Influence du rapport L/H sur les fluctuations de la surface libre*

Cette étude montre que les pics des fluctuations de la surface libre ne sont pas influencés par la géométrie du réservoir. Le maximum est de l'ordre de 6mm pour les trois cas de L/H et ne varie pas trop. Par contre la forme de la réponse, son contenu fréquentiel est complètement modifié non seulement par la forme L/H mais aussi par les valeurs que prennent L et H. Cette forme n'est pas sans importance sur le comportement des parois du réservoir qui peuvent. En effets la pression est un chargement pour les parois et la fréquence d'excitation est d'une importance capitale sur la réponse vibratoire.

4.6 Analyse d'un exemple de réservoir

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à la validation du modèle numérique et à l'influence de quelques paramètres de simulation. Dans cette section, nous montrons les résultats d'une étude d'un cas de réservoir de largeur $L = 6m$ retenant de l'eau sur une hauteur $H = 4m$. La première étude consiste à déterminer les modes de vibrations libres et leurs fréquences propres. Ces modes sont intrinsèques au réservoir, indépendants de l'excitation extérieur. Dans une seconde étude, nous allons montrer la réponse fréquentielle qui permet de retrouver les fréquences de résonnances des modes de vibrations libres. L'influence de la fréquence d'excitation sur la réponse est aussi montrée dans cette étude. Ensuite on termine l'étude de cet exemple par l'effet de la hauteur de remplissage et l'affichage des distributions des pressions et des champs de vitesses.

4.6.1 Détermination des modes propres

Pour la détermination des modes propre, nous avons utilisé le modèle basé sur l'équation de Laplace qui fait intervenir la matrice de rigidité qui découle de la discrétisation de l'operateur de Laplace et de la matrice masse qui découle de la discrétisations de la condition de surface libre liant les gradients de pressions aux dérivées seconde par rapport au temps de la pression. Le problème aux valeurs et vecteurs propres est le suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M})\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_{\mathrm{v}}^{T}\, \nabla \mathbf{N}_{\mathbf{v}}\, \mathrm{d}\Omega \quad ; \quad \boldsymbol{M} = \int_{\mathrm{S}_{\mathrm{libre}}} \mathbf{N}_{\boldsymbol{s}}^{T} \frac{1}{g} \mathbf{N}_{\mathbf{s}}\, \mathrm{dS}$$

où $\mathbf{N_v}$ et $\mathbf{N_s}$ désignent les vecteurs des fonctions de forme des éléments volumiques et des éléments surfaciques, respectivement. Les valeurs de ω solutions du problème aux valeurs propres sont les pulsations de ballottements libres de la masse liquide. Pour chaque fréquence correspond un vecteur $\mathbf{\Phi}$ qui est la distribution des pressions dans la masse liquide. Les valeurs de cette pression à la surface libre sont traduites en déformée de cette surface, ce qui permet de visualiser aisément les modes de ballottement.

Les fréquences trouvées par le modèle d'éléments finis sont comparées à celles fournies par la solution analytique de Feltinsen décrite par (Chen, 2005) qui s'écrie pour le $i^{ème}$ mode comme suit

$$\omega_i = 2\pi \sqrt{g\left(\frac{i}{L}\right)\frac{\tanh(\pi H i)}{4\pi K}} \qquad (4\text{-}3)$$

Les valeurs des pulsations des quatre premiers modes sont montrées dans le tableau (4-3) où sont reportées aussi celles de la solution analytique avec les différences relatives. Les formes modales de ces modes sont représentées sur la figure (4.6)

Tableau (4-3) *les fréquences propres de ballottement*

	Solution MEF			Solution de Feltinsen			Déférence (%)		
Mode	ω (rad/s)	f (Hz)	T (s)	ω (rad/s)	f (Hz)	T (s)	ω (rad/s)	f (Hz)	T (s)
1	2,2319	0.3552	2.8153	2,2323	0.3553	2.8147	0.04	0.01	0.06
2	3,2021	0.5099	1.9611	3,2044	0.5100	1.9608	0.23	0.01	0.03
3	3,9231	0.6247	1.6007	3,9255	0.6248	1.6006	0.24	0.01	0.01
4	4,5303	0.7214	1.3861	4,5328	0.7217	1.3862	0.25	0.03	0.01

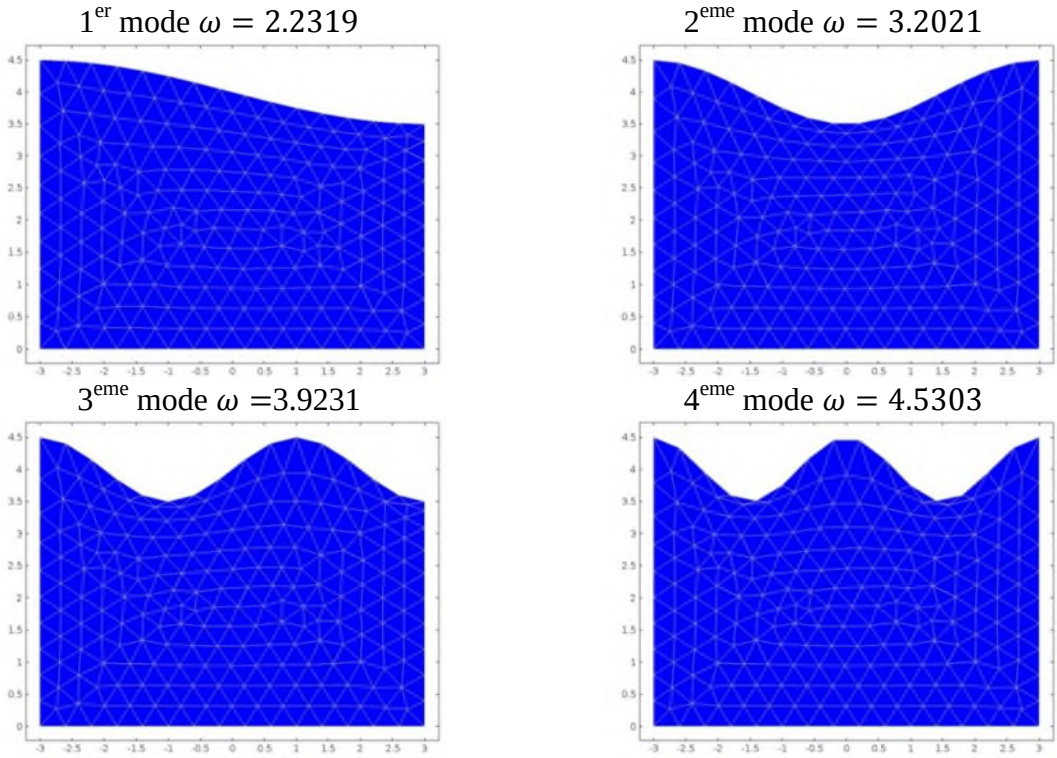


Figure (4.9) *Formes des quatre premiers modes propres de ballottement.*

Le modèle d'éléments finis basé sur les équations de Navier-Stockes avec maillage mobile ne permet pas de calculer directement les modes des vibrations libres avec la résolution d'un problème aux valeurs et vecteurs propres. Il est cependant possible de retrouver ces modes en choisissant judicieusement l'excitation à utiliser. En effet si on soumit la masse liquide à une accélération constante pendant une brève durée, soit 01s, alors elle continue en principe indéfiniment à ballotter selon le premier mode de vibrations libres. Mais à cause de la viscosité et de l'amortissement numérique introduit dans les solveurs, la solution décroit en fonction du temps. La figure (4.10) montre l'excitation utilisée et la figure (4.11) montre la solution obtenue en utilisant la méthode DBF et la méthode α-généralisée. On voit que la solution de la méthode BDF décroît très vite et que l'amortissement numérique est utilisé par cette méthode est important. La solution de la méthode α-généralisée présente des pics de vibrations qui décroissent très lentement d'une manière à peine perceptible. Ces deux solutions permettent de calculer la période de vibration en mesurant les intervalles de temps entre les pics mais en s'éloignant des premières secondes où la solution n'est plus influencée par la perturbation initiale.

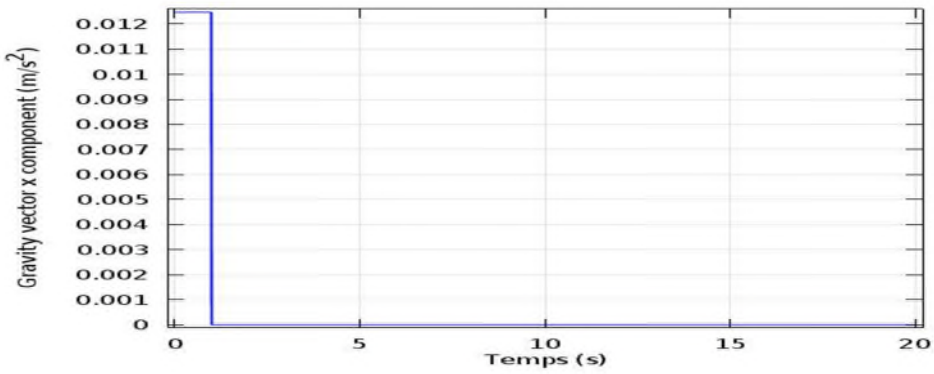
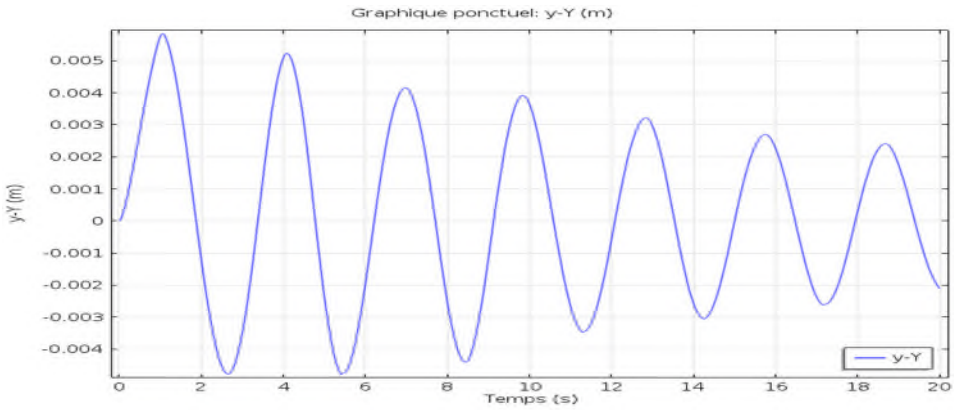
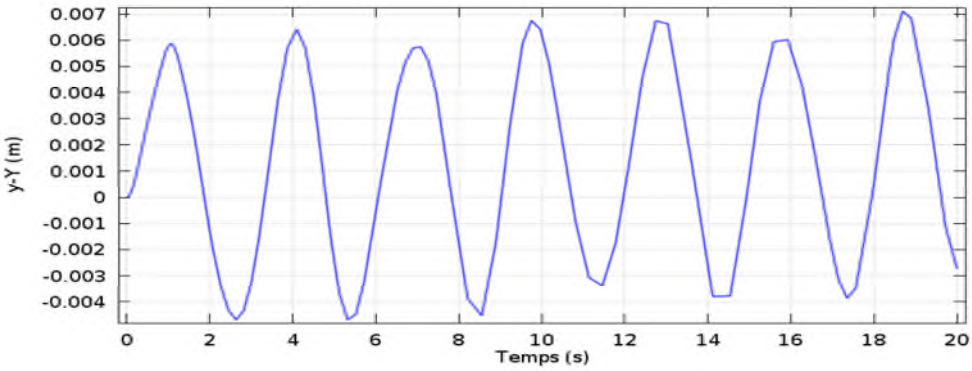


Figure (4.10) *Représentation de l'excitation utilisée : accélération constante sur 1s .*



(a)



(b)

Figure (4.11) *Fluctuations de la surface libre suite une accélération constante d'une durée 1s : (a) solveur BDF, (b) solveur α-généralisé*

Le tableau (4-4) montre les valeurs des pics ainsi que les temps où ils se produisent. Ces valeurs sont extraites de la solution BDF, les différences entre les temps des pics donnent les périodes des cycles de vibrations. La moyenne des périodes est de 2.92 secondes, ce qui correspond à une pulsation de 2.152 rad/s. Comparativement à la pulsation du mode fondamental (1er mode), cette valeur est légèrement plus petite. En réalité, les vibrations libres suivant une perturbation initiale, ont une pulsation amortie notée $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ avec ξ tau d'amortissement critique. La

pulsation trouvée est $\omega_D = 2.152$ rad/s et la pulsation calculée par la résolution du problème aux valeurs propre est $\omega = 2.231$ rad/s, ce qui donne un amortissement visqueux et numérique équivalent très important$\xi = 26.4\%$. La solution évaluée avec la méthode α-généralisée donne la valeur de $\omega_D = 2.169$ rad/s et $\xi = 23.4\%$, d'où un sur amortissement numérique de $\xi_N = 3\%$ induit par le solveur BDF.
Ces valeurs sont très sensibles aux calculs des pulsations, les erreurs induisent sont très importantes. Dans la pratique on évalue le taux d'amortissement ξ à partir des valeurs des pics à l'aide du décrément logarithmique :

$$k\delta = \ln\frac{h_n}{h_{n+k}} = 2\,\pi k\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

Dans le cas où la solution est calculée avec le solveur BDF, les pics donnent un taux d'amortissement moyen $= 2.47\%$, cette valeur chute à $\xi = 1.2\%$ lorsque le solveur α-généralisé est utilisé. Ces valeurs sont plus fiables que celles évaluées à partir du rapport de pulsations qui amplifie les erreurs de calculs des pics.

Tableau (4-4) *Période des cycles de vibrations libre suite à une accélération constante appliquée sur une durée de 1s – Solveur BDF*

Pic N°	Temps (s)	$h_{\max} = (y - Y)_{\max}$ (mm)	Période $T = \Delta t$ (s)
2	4.08	5.234	--
3	6.98	4.157	2.90
4	9.83	3.928	2.85
5	12.88	3.197	3.05
6	15.75	2.698	2.87
7	18.68	2.4078	2.93
			$T_{\text{moy}} = 2.92\ s$ $\omega_{\text{moy}} = 2.152$ rad/s

Tableau (4-5) *Période des cycles de vibrations libre suite à une accélération constante appliquée sur une durée de 1s – Solveur α-généralisé*

Pic N°	Temps (s)	$h_{\max} = (y - Y)_{\max}$ (mm)	Période $T = \Delta t$ (s)
2	4.0960	6.4143	--
3	7.0845	5.7441	--
4	9.7590	6.7495	2.9285
5	12.7460	6.7405	2.6645
6	15.9255	6.0129	2.9945
7	18.6945	1.1092	2.9970
			$T_{\text{moy}} = 2.896\ s$ $\omega_{\text{moy}} = 2.169$ rad/s

4.6.2 Etude de la réponse fréquentielle de la surface libre

Une autre manière de déterminer les pulsations de résonnance consiste à effectuer un calcul de la réponse fréquentielle. A cet effet, le réservoir est soumis à des excitations harmoniques de fréquences variables et d'amplitude fixe. On reporte dans un graphique les maximas des fluctuations en fonction de la pulsation comme montré sur la figure (4.12) où on constate quatre pics consécutifs dont les valeurs d'abscisses sont 2.2 rad/s, 3rad/s, 3.9 rad/s et 5 rad/s. Ces valeurs sont très proches de celles calculées à partir de l'équation aux valeurs propres listées

dans le tableau 4-3. Le modèle basé sur les équations de Navier-Stockes reproduit bien les fréquences de résonnances.

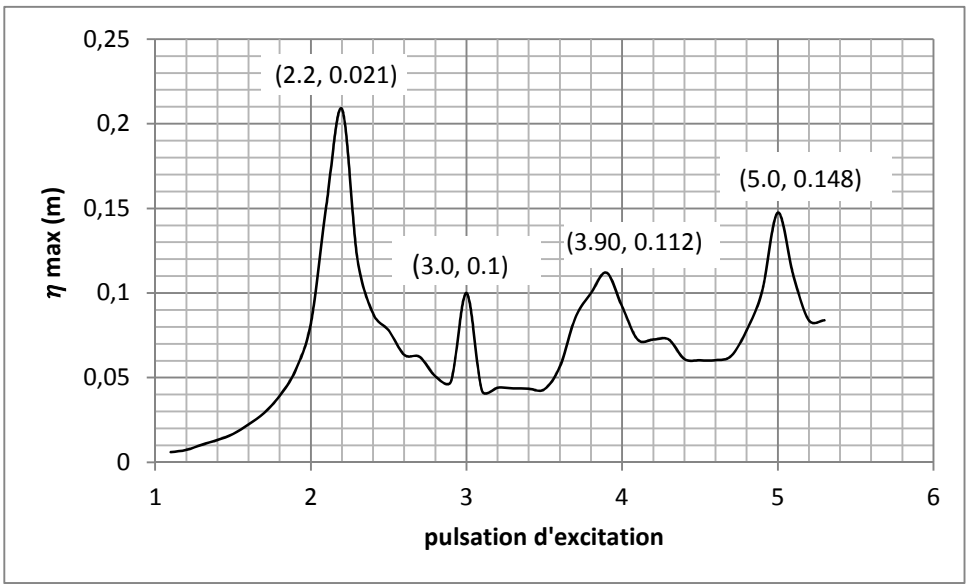


Figure (4.12) *réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre.*

La figure (4.15) montre quelques exemples de réponses temporelles obtenues en faisant varier les fréquences d'excitations au voisinage de ω_0. On voit bien que plus la fréquence d'excitation est proche de la fréquence naturelle ($\omega = 0.9\omega_0$, $\omega = 1.1\omega_0$), plus la réponse est amplifiée par la résonance, même si l'amplitude reste constante fixée à $b = 0.004\, m$. On voit aussi qu'au voisinage de la résonance, un phénomène de battement apparait, la solution s'amplifie jusqu'à atteindre un maximal, puis elle décroit jusqu'à presque s'annuler et ce cycle se répète indéfiniment. Ceci est dû aux réflexions d'ondes entre les parois du réservoir. La période de battement, appelée aussi période de modulations, est donnée par :

$$T_b = 2\pi/|\omega - \omega_0|$$

Soit pour $\omega_0 = 2.2319$ rad/s, $T_b = 28.15$ secondes si $\omega = 0.9\omega_0 = 2.009$ rad/s ou bien $\omega = 1.1\omega_0 = 2.455$ rad/s. Cette valeur de T_b est bien reproduite par le modèle d'éléments finis basé sur l'équation de Laplace comme montré sur la figure (4.13). Par contre, lorsqu'on utilise le modèle d'éléments finis basé sur les équations de Navier-Stockes et Mouvig Mesh, la valeur T_b trouvée avec le solveur α-généralisé peut être complètement différente de 28.15s à cause du décalage de la pulsation ω_d de la réponse sous l'effet de la viscosité. En effet on peut lire sur la figure (4.14), où la viscosité a été fixée à $\mu = 0.001\, Pa.s$, que T_b est de l'ordre de 35 secondes, et sur la figure (4.15) où $\mu = 1 Pa.s$, que $T_b \approx 40\, s$. Cette dernière valeur correspond à la pulsation $\omega_{0d} = 2.169$ rad/s comme reporté dans le tableau (4-5). La période d'excitation étant une donnée : $\omega = 2.009$rad/s ; $T_b = \frac{2\pi}{|2.169-2.009|} = 39.26\, s$

Ce calcul à la résonnance montre mieux l'effet de la viscosité sur les fluctuations de la surface libre que le calcul effectué plus haut où les fréquences d'excitations ont été très différentes de la fréquence propre du réservoir.

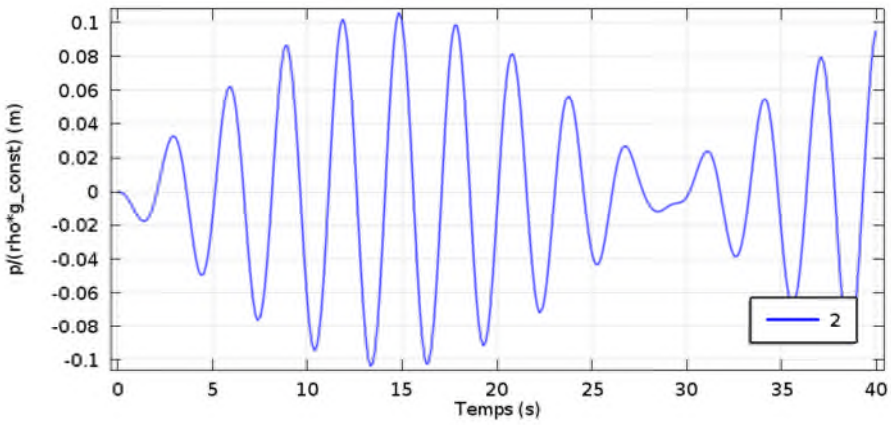


Figure (4.13) *réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre. modélisation avec l'équation de Laplace.*

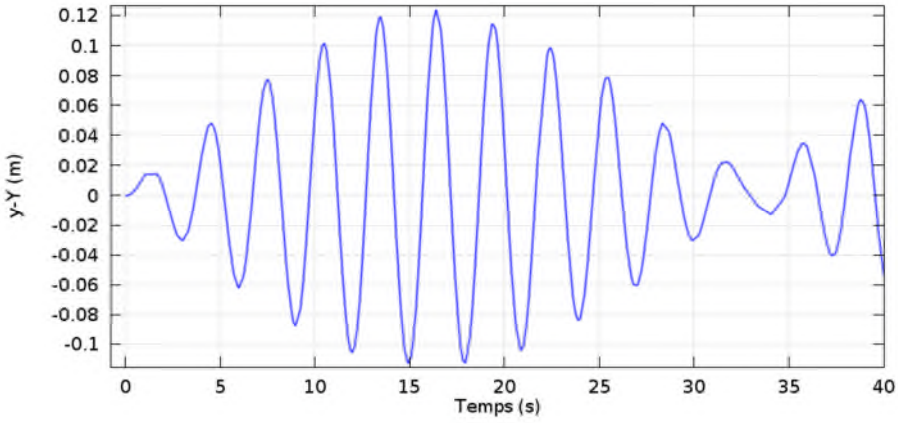


Figure (4.14) *réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre. Modélisation avec Equations de Navier-Stockes+Mouving Mesh* $\boldsymbol{\mu = 0.001 Pa.s}$.

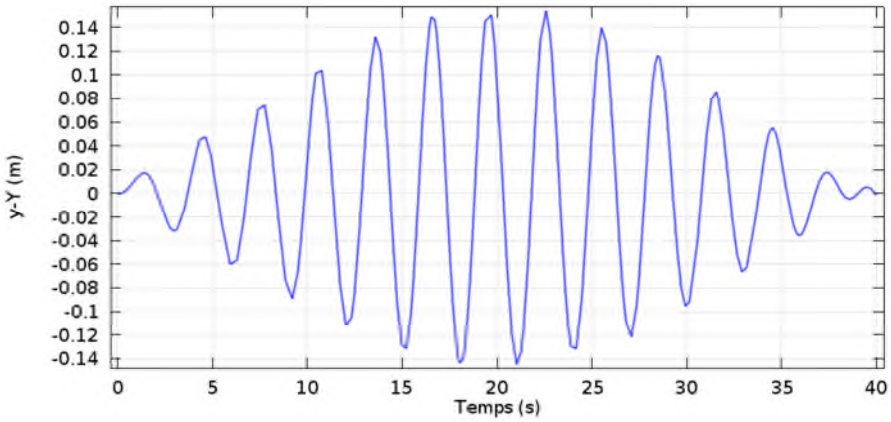


Figure (4.15) *réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre Mu=1. Modélisation avec Equations de Navier-Stockes+Mouving Mesh* $\boldsymbol{\mu = 1Pa.s}$

La figure (4.16) montre la réponse sur 80 secondes afin de visualiser deux cycles de battement complets avec une partie du troisième cycle.

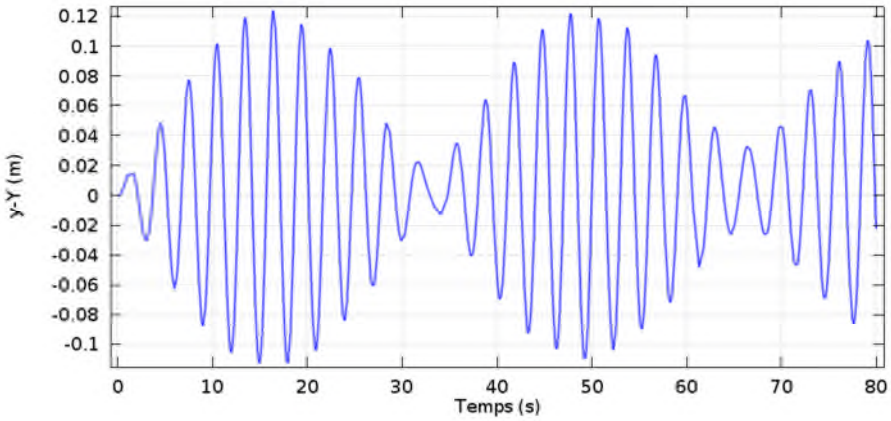


Figure (4.16) *réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre* ***Mu=1.***

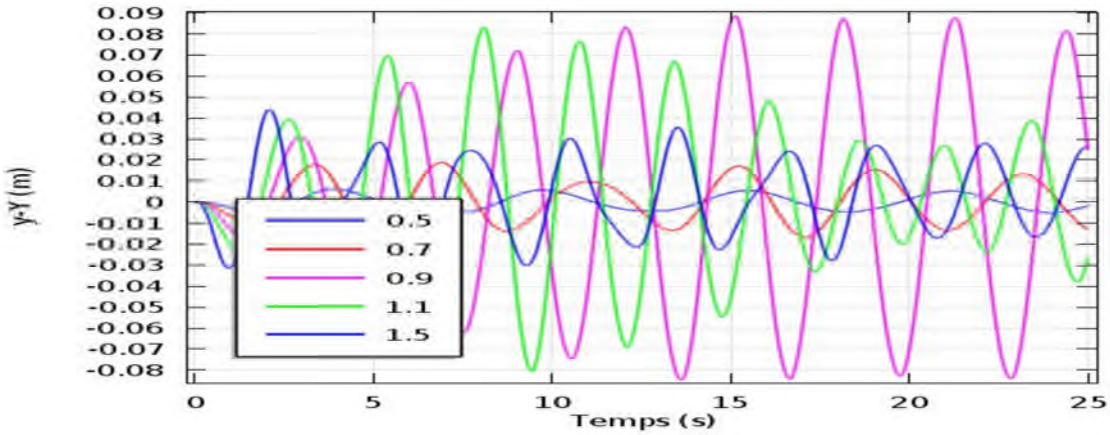


Figure (4.17) *Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre pour différentes fréquences d'excitation.*

4.6.3 Influence de la hauteur d'eau

Dans cette partie de l'investigation numérique nous nous intéressons à l'effet de remplissage du réservoir, en faisant varier la hauteur du liquide, sur les fluctuations de la surface libre. La Figure (4.18) présente ces fluctuations obtenues pour quatre cas de hauteur d'eau : 2m, 2.4m, 2.6m, 3.2 m et 3.6m. La pulsation d'excitation est fixée à $\omega = 3$ rad/s et son amplitude à $b = 0.001$m. Les résultats montre que l'effet de remplissage se manifeste surtout dans le temps, et moins la hauteur est grande moins sont les pics atteints par les fluctuations.

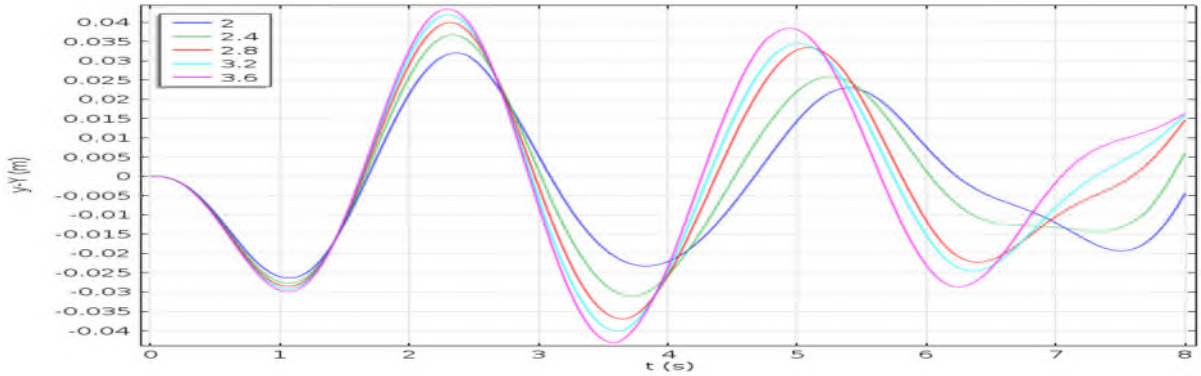


Figure (4.18) *Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre pour différentes hauteurs d'eau dans le réservoir.*

4.6.4 Distribution des Pressions et des champs des vitesses

La figure (4.16) montre la distribution des champs des vitesses et des pressions, sous une excitation horizontale lorsque t =5.5 s. Comme le représente la figure (a) et (b), les vitesses de déplacement de liquide dans la partie supérieure sont maximales, elles diminuent avec la hauteur d'eau et tendent à s'annuler sur le fond du réservoir, cela est dû au fait que c'est seulement les

parties supérieures de la colonne d'eau qui contribuent dans le mouvement de ballottement de la surface libre. Le fond est peu sensible aux excitations horizontales.

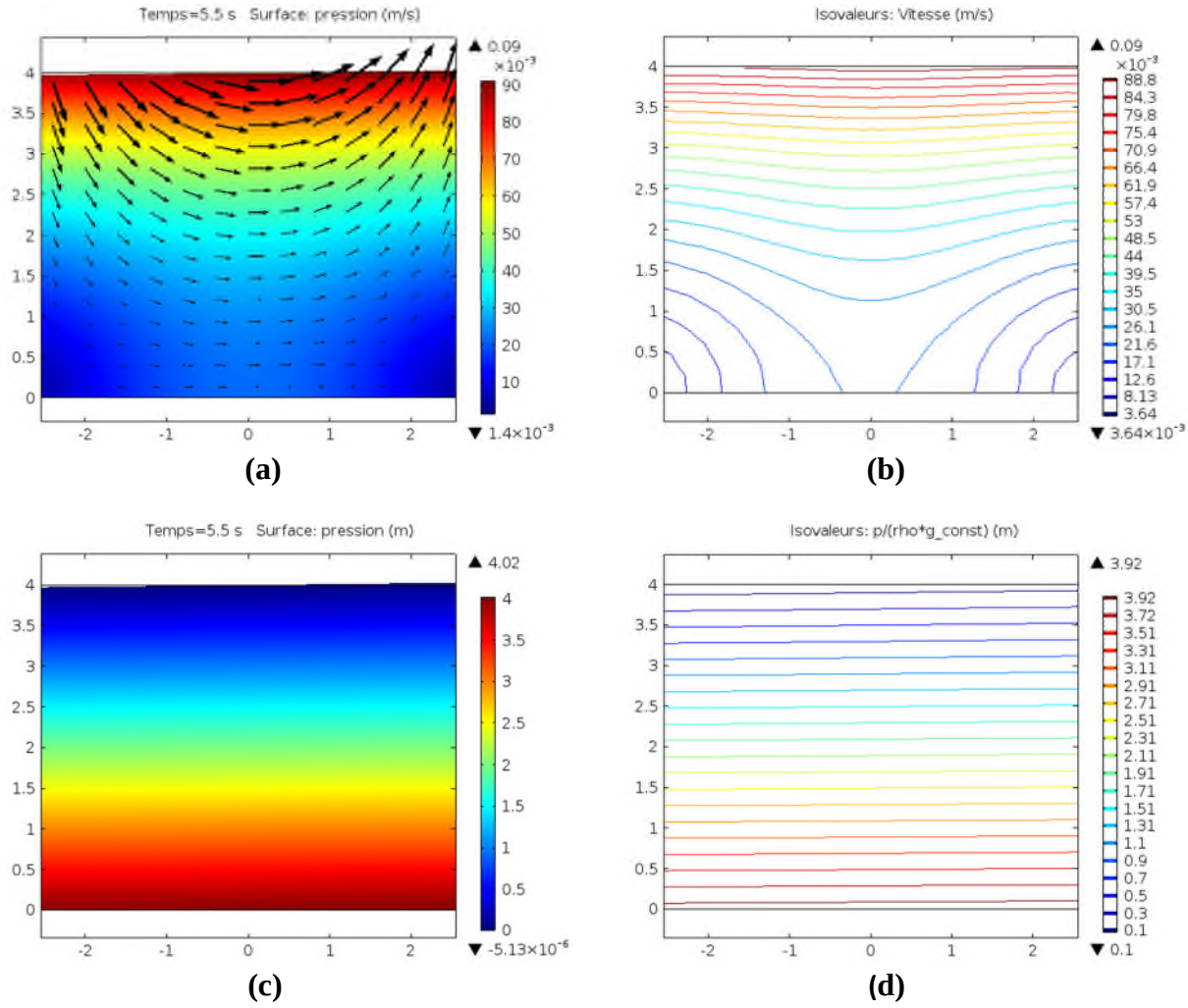


Figure (4.19) *la distribution des pressions est champ de vitesse.*

4.7 Conclusion

En utilisant le logiciel *COMSOL Multiphysique* basé sur la méthode des éléments finis et les équations de Navier stocks, la réponse dynamique d'un réservoir de liquide sous l'influence d'une excitation harmonique horizontale a été étudiée. Pour le cas d'un réservoir rectangulaire, les résultats de la présente approche ont été vérifiés par rapport aux résultats numériques et analytiques trouvés dans la littérature. L'influence de la fréquence d'excitation, de la géométrie, du maillage…etc ont été examinés numériquement.

De telles investigations peuvent s'avérer en pratique très utile à titre d'exemple afin de définir a priori la position optimale d'un système de détection du niveau dans les réservoirs contenant des liquides toxiques ou autres.

Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la simulation numérique du phénomène de ballottement de liquide dans un réservoir rectangulaire 2D, soumis à des accélérations horizontales. Deux modèles numériques ont été mis en œuvre, l'un se base sur l'équation de Laplace pour les fluides incompressibles, non visqueux et l'autre sur les équations de Navier-Stocks qui prend en considération l'effet de la viscosité. Les résultats obtenus ont été confrontés aux solutions analytiques de lorsqu'elles sont applicables. Les fluctuations de la surface libre ont été approchées de deux manières différentes. Dans le modèle basé sur l'équation de Laplace nous avons utilisé la condition d'onde de surface linéarisée et dans le second modèle basé sur l'écoulement laminaire (équation de Navier-stocks) nous avons utilisé un maillage mobile, dont le mouvement est dicté par le champ de vitesse de la masse liquide. Trois types d'études ont été effectués en faisant les paramètres influençant la réponse dynamique. La première concerne la détermination des modes propres ballottement qui s'obtiennent aisément avec le modèle basé sur l'équation de Laplace, l'équation de Laplace s'y prête bien. Ces modes peuvent être retrouvés avec le modèle de l'écoulement laminaire couplé avec mouving mesh en imposant des excitations appropriées. La deuxième étude concerne la réponse fréquentielle qui consiste à appliquer une excitation harmonique de fréquence variable afin de déterminer les fréquences de résonance et de retrouver les modes propres. La troisième étude concerne la réponse temporelle dans laquelle nous nous sommes intéressés aux variations dans le temps des fluctuations de la surface libre. Une attention particulière a été accordée à la réponse aux cas au voisinage de la résonance.
Les résultats obtenus lors du présent travail ont montrés entre autre que :

- Pour des excitations harmoniques et de fréquences loin des fréquences de résonance, les deux modèles d'éléments finis donnent pratiquement les mêmes résultats qui concordent bien avec la solution analytique.
- Dans les cas proches de la résonance les résultats peuvent être complètement différents à cause de l'effet de la viscosité qui n'est prise en compte que dans le modèle d'écoulement laminaire avec mouving mesh.
- La viscosité a pour effet d'amortir le mouvement de ballottement et de décaler les fréquences de la réponse.
- L'apport de mouving mesh dans la simulation de ballottement a été mis en relief à travers de l'étude de la réponse temporelle.

Cette étude nous a été très enrichissante, et nous a permis de toucher à plusieurs aspects de modélisation et de simulation numérique dans le domaine des écoulements et des vibrations. Il serait très intéressant de l'étendre aux cas tridimensionnels, à la prise en compte de la flexibilité des parois du réservoir, l'étude d'autres formes géométriques et la recherche des moyens de réduction des effets du ballottement. Plusieurs aspects tant du point de vue numérique que pratique peuvent être développés.

Bibliographies

Abramson, H. (1966). *dynamic behavior of liquids in moving containers whith application to space vehicule technology.* NASA: SP-106.

Balendra, T. (1978). *Earthquake analysis of a cylindrical liquid storage tank with a dome.* Rapport technique: Departement of civil Engineering, University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts.

Bauer, H. (1993). Frequencies of a hydroelastic rectangular system. *Forschung im Ingenieurwesen-Engineering Research Bd, 59,* 18–28.

Chen, B.-F. (2005). Time-independent finite difference analysis of fully non-linear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank. *Journal of Computational Physics, 209,* 47-81.

Chen, W., Haroun, M. A., & Liu, F. (1996). Large amplitude liquid sloshing in seismically Large amplitude liquid sloshing in seismically. *Earthquake engineering and structural dynamics, 25,* 653–669.

Chopra, A. K. (1968). Earthquake Behavior of Reservoir-Dam Systems. *Journal of the Eng., 94,* 1475–1500.

Chopra, A. K. (1970). Earthquake Response of Concrete Gravity Dams. *Journal of the Eng., 96,* 443–454.

Chopra, A. K. (1967). Reservoir-Dam Interaction During Earthquakes. *Bull. Seismological Soc., 57,* 675–687.

Clough, D. (1977). *Experimental evaluation of seismic design methods for broad cylindrical.* University of California, Earthquake Engineering Research: Rapport technique EERC 77-10.

Clough, D. P., & Clough, R. W. (1978). Earthquake simulator studies of cylindrical tanks. *Nuclear Engrg. And Des.,* 367-380.

Clough, R. W., Niwa, A., & Clough, D. P. (1978). Experimental seismic study of cylindrical tanks. *J. struct. Div. ASCE,* 2565-2590.

Edwards, N. W. (1969). *A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tanks subjected to lateral ground motions.* Thèse de doctorat: University of Michigan.

Epstein, H. I. (1976). Seismic design of life liquid storage tanks. *Journal of the Structural Division,* 1659-1673.

Faltinsen, O. (1978). A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow. *J. Ship Res, 22,* 193–202.

Feltinsen, O. (1974). A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. *Journal of Ship Research, 18, No. 4, Dec,* 224 - 241.

Feltinsen, O.M. (1987). A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow. *J. Ship Res, 22*, 193–202.

Fisher, F., & Rammerstorfer, F. (1999). A refined analysis of sloshing effects in seismically excited thanks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping, 76*, 693–709.

Goulmot, D. (2012). *Nouvelles méthodes numérique pour l'analyse sismique des réservoire de liquid:Effet de l'asymétrie du ballottement en surface libre et de blocs de glace en flottaison.*

Graham, E. W., & Rodriquez, M. (1952). Characteristics of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics. *Journal of Applied Mechanics*.

Gupta, R., & Hutchinson, G. (1991). Effects of wall flexibility on the dynamic response of liquid. *Engineering Structures, 13*, 253–267.

Hanson, R. (1973). *Behavior of storage tanks, the great alaska earthquake of 1964.* Washington, D.C: Proc., National Academy of Science.

Haroun. (1985). Response of tanks to vertical Seismic Excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic, 13*, 583–589.

Haroun, M. (1980). *Dynamic analyses of liquid storage tanks.* EERL80-04, Earthquake Engineering Research Laboratory: California Institute of Technology.

Haroun, M. A., & Ellaithy, H. (1985). Model for flexible tanks undergoing rocking,. *J. Engrg.Mech., ASCE, 111*, 143–157.

Haroun, M. A; Abou-izzedine, W. (1992b). Parametric study of seismic soil-Tank interaction.I: Vertical Excitation,. *Journal of structural Engineering, 118*, 798–811.

Haroun, M.A. (1983). Vibration Studies and Tests of Liquid Storage Tanks. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 11(2)*, 179–206.

Haroun,M. A. (1984). Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads. *Bull. Seismological Soc. Of Am*, 1031-1041.

HOSKIN, L. M. (1993). Water Pressure in a tank caused by a simulated. *Bulletin Seism. Soc. America, 24*, 1–32.

HOSKIN, L. M., & JACOBSEN, L. S. (s.d.).

Hoskin,L.M.;Jacobsen,L.S. (1934). Water Pressure in a tank caused by a simulated earthquake. *Bulletin Seism. Soc. America, 24*, 1-32.

Housner, G. (1957,1963). Dynamic pressures on accelerated. *Bulletin of the seismological society of america 47*, 15-35.

Housner, G. W. (1963). The dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of the Seismological Society of America, 53*(2), 381-387.

Housner, G., & Haroun, M. A. (1981). Seismic design of liquid storage tanks. *Journal of, 107*, 191–207.

Ibrahim, R. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics : Theory And Applications.* Cambridge University.

Jacobsen, L. (1949). Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier. *Bulletin of the Seismological Society of America, 39(3)*, 189–204.

Kianoush, M. R., & Ghaemmaghami, A. R. (2011). The effect of earthquake frequency content on the seismic behavior of concrete rectangular liquid tanks using the finite element method incorporating soil-structure interaction. *Engineering structures, 33*, 2186–2200.

Kim, J. K., Koh, ,. H., & Kwahk, I. J. (1996). Dynamic response of rectangular flexible fluid. *Journal of engineering mechanics, 122*, 807–817.

Kim, J., Shin, Y., & Bai, K. (2002). *A finite element computation for the sloshing motion in LNG thank.* ISOPE 2002 ,Fukuoka: Japan.

Koller, M., & Malhotra, P. (2004). *seismic evaluation of unanchchred cylindrical tanks* . In:13 th World Conference of Eartquake Engineering: Vancounver,Canada ,Paper no .2534.

Kukukarslan, S., Taskin, B., & Coskun, S. (2005). Transient analysis of dam-reservoir interaction including the reservoire battom effects. *jurnal of fluid and structures*, 1073-1084.

Liu, D., & Pengzhi , L. (2009). A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks. *Journal of Computational Physics 227 (2008), 227*, 3921–3939.

Livaoglu, R. (2008). Investigation of seismic behavior of fluid-rectangular tank-soil/ foundation Investigation of seismic behavior of fluid-rectangular tank-soil/ foundation. *Soil dynamics and earthquake engineering, 2008*, 132–146.

Luft, R. W. (1984). Vertical accelerations in prestressed concrete tanks. *J. Struct. Engrg., ASCE,, 110*, 706–714.

Malhotra, P. K., Thomas , W., & Martin , W. (2000). Simple Procedure for Seismic Analysis of Liquid-Storage Tanks. *Structural Engineering International*, 198-201.

Matsui, T. (2007). Sloshing in a cylindrical liquid storage tank with a floating roof under seismi cexcitation. *Journal of pressure vessel technology, 129*, 557–566.

Matsui, T. (2009). Sloshing in a cylindrical liquid storage tank with a single-deck type floating roof under seismic excitation. *Journal of pressure vessel technology, 131*, 1–10.

Mitra, S., & Sinhamahapatra, K. (2008). Dynamics of Liquid Inside A Container In Three Dimensions By Pressure Based Finite Element Method. *International Journal of Dynamics of Fluids, 4*, 43-55.

Moiseev, N., & Petrov, A. (1968). the calculation of free oscilation of free a liquid in a motionless container. *Adv.Appl.Mech, 9*, 1-1564.

Nagashima, T. (2010). Seismic response analysis models of an oil storage tank with a floating roof. *Engineering computations : International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, 28*, 701–716.

Nardo, A. D., Langella, G., Mele, D., & Noviello, C. (2009). SLOSHING PHENOMENON ANALYSIS IN LIQUID FUELS STORAGE TANKS. *internatiopnal journal of heat and technology, 27*, 37-46.

Neilen, B. (2003). *Numirical prediction of gree water loods on ships.* Ph.D.Thesis , Departement of Mecanical Engineering,Technical: University Of Denmark.

Pall, N. (1999). *Coupled slosh dynamics of liquid filled laminated composite containers.* Ph.D.Thesis , Department of Airospace Engineering: I I T Kharagpyr , India.

Park, J. H., Koh, H. M., & Kim, J. (1990). *Fluid-structure interaction analysis by coupled boundary element-finite element method in time domain.* 7th Int. Conf. on Boundary Element Technol. Computational Mechanics Publ: Southampton, England, 89–92.

Poisson, S. (1831). Mémoire sur les Equations Généralesde l'équilibreet Mouvement des Corps Solides Elastiques est des Fluides. *J.de l'école polytechnique, 13,Cahier20*, 1-174.

Rayleigh, L. (1876). on waves. *phil.mag, 1*, 257-276.

Rine, J. E. (1967). The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964, and Aftershocks,. *Governement Printing Office*, 245-252.

Ruge, A. C. (1938). Earthquake Resistance of Elevated Water Towers. *Trans. Am. Soc. Civil, 30*, 889–938.

Seghir, A. (2010). *Contribution à la modélisation numérique de la réponse.* thèse de doctorat: Université de Béjaia, Faculté de Technologie;Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

Shaaban, S. H. (1975). *Finite element analysis of a seismically excited cylindrical storage tank,*. University of Massachussetts.: National Science Foundation.

Steinbrugge, K. V., & Flores, R. (1963). The Chilean earthquakes of May, 1960 : A structural engineering viewpoint. *Bull., Seismological Soc. Of Am.*, 225-307.

Timoshenko, S., & Woinowsky, S. (1959). *Theory of Plates and Shells.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Veletsos, A. S., & Tang, Y. (1985). Dynamics of vertically excited liquid storage tanks. *J.Struct. Engrg., ASCE, 112*, 1228–1246.

Veletsos, A., & Tang, Y. (1990). Soil-structure interaction effects for laterally excited liquid-storage. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn, 19*, 473–496.

Veletsos, A.S. (1974). Seismic effects in flexible liquid storage tanks. *Proc. of Fifth World Conf. on Earthquake Eng*, 630–639.

Veletsos, A.S; Yang, J.Y. (1976). Dynamics of Fixed-Base Liquid Storage Tanks. *US-Japan Seminar for Earthquake Engineering Research, Tokyo, Japan*, 317–341.

Virella, J. C., Carlos, A., & Godoy, L. (2008). Linear and nonlinear 2D finite element Linear and nonlinear 2D finite element Linear and nonlinear 2D finite element. *Journal of Sound and Vibration, 312*, 442–460.

Werner, P. W., & Sundquist, K. (1949). On hydrodynamic Earthquake Effects. *Trans Amer. Geophysical Union, 30*, 636–657.

Westergaard, H. M. (1933). Water Pressures on Dams During Earthquakes. *Transaction,, 98,*, 418–472.

ملخص

تهتم هده الدراسة بالمحاكات الرقمية لتأرجحات الموائع المحتوات في خزانات مستطيلة الشكل ثنائية الأبعاد معرضة لتسارعات أفقية. قد تم اعداد نموذجين رقميين لهدا الغرض. يتركز أولهما على معادلات لا بلاص التي تنطبق على الموائع الغير منضغطة و الغير لزجة. أما الثاني يعتمد على حل معادلات نافيي- ستوكس التي تأخذ بعين الاعتبار لزوجة الموائع و على شبكة تفصيص هندسة الخزان الى عناصر منتهية متحركة. تمت في النهاية المقارنة بين النتائج المحصل عليها كما تمت مطابقتها مع الصيغ الرياضية الدقيقة في الحالات التي يمكن تطبيقها.

كلمات مفتاحية: تأرجحات, شبكة عناصر منتهية متحركة, اهتزازات ذاتية, نموذج رقمي ,خزانات تحزين.

Résumé

Cette étude est consacrée à la simulation numérique du phénomène de ballottement de liquide dans un réservoir rectangulaire 2D, soumis à des accélérations horizontales. Deux modèles numériques ont été mis en œuvre, l’un se base sur l’équation de Laplace pour les fluides incompressibles, non visqueux et l’autre sur les équations de Navier-Stocks qui prend en considération l’effet de la viscosité. Ce dernier est couplé à une discrétisation en maillage mobile. Les résultats obtenus ont été confrontés aux solutions analytiques de lorsqu’elles sont applicables.

Mots clés : ballottement, maillage mobile, modes propres, réservoir, modélisation.

Abstract

This study deals with numerical modeling of liquid sloshing phenomena in two dimensional rectangular tanks subjected to horizontal accelerations. Two models have been implemented to this purpose. The first is based on Laplace’s equation governing incompressible and non-viscous fluids. The second is based on Navier-Stocks equations and takes into account the effects of the fluid viscosity. This model is coupled with mouving mesh discretisation. The obtained results are compared together and confronted to analytical solutions when they are applicable.

Key words: sloshing, mouving mesh, eigenmods, tanks, modelisation.