

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Université A. Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

# Mémoire de Master

En  
Recherche Opérationnelle  
Option  
Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

## Thème

Propagation de l'Incertainitude Épistémique dans les  
Modèles Stochastiques de Gestion des Stocks

Présenté par :

*Nassima* ITMACENE

*Massiva* ROUDJANE

Devant le jury composé de :

<b>Présidente</b>	<i>Karima</i>	<i>BOUIBED</i>	<i>MAA</i>	<i>U. Béjaïa.</i>
<b>Promoteur</b>	<i>Karim</i>	<i>ABBAS</i>	<i>MCA</i>	<i>U. Béjaïa.</i>
<b>Examineur</b>	<i>Smail</i>	<i>YOUSFI</i>	<i>MCB</i>	<i>U. Béjaïa.</i>
<b>Examinatrice</b>	<i>Lynda</i>	<i>HARFOUCHE</i>	<i>Doctorante</i>	<i>U. Béjaïa.</i>

Université de Béjaïa : 2015

# *Remerciements*

*On aimerait remercier avant tout, Dieu Tout-Puissant, de nous avoir donné la force et la puissance pour pouvoir mener ce travail à terme.*

*Un grand merci à nos familles pour leur présence, leur préoccupation et encouragement permanents.*

*On remercie particulièrement M. **K. Abbas**, notre promoteur pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction du présent mémoire. On tient également à remercier M. **S. Ouazine** et Mme. **K. Bachi** pour leurs précieux conseils et orientations.*

*On remercie les membres du Jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.*

*Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

# *Dédicaces*

*A la mémoire de mon père ;*

*A ma très chère mère ;*

*A tous les miens...*

*Je dédie ce travail.*

*Massiva.*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce travail  
A mes très chers parents ;  
A tous les miens...*

*Nassima.*

# Table des matières

<b>Table des Matières</b>	<b>i</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notion de gestion des stocks</b>	<b>4</b>
1.1 Généralités . . . . .	5
1.1.1 Définition d'un stock . . . . .	5
1.1.2 Types de stock . . . . .	5
1.1.3 Fonctions de stock . . . . .	6
1.1.4 Avantages et inconvénients du stock . . . . .	6
1.2 Gestion des stocks . . . . .	7
1.2.1 Objectifs de la gestion des stocks . . . . .	7
1.2.2 Coûts liés à la gestion des stocks . . . . .	8
1.2.3 Classification des modèles de gestion de stocks . . . . .	10
<b>2 Formules des développements en séries de Taylor</b>	<b>17</b>
2.1 Formule Taylor classique . . . . .	17
2.1.1 Formules de Taylor d'une fonction réelle à une variable réelle . . . . .	17
2.1.2 Formules de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles . . . . .	20
2.2 Formule de Taylor pour les chaînes de Markov . . . . .	21
2.2.1 Revue sur les études réalisées . . . . .	21
<b>3 Propagation analytique de l'incertitude épistémique dans les modèles stochastiques de gestion de stocks</b>	<b>24</b>
3.1 Modèle de gestion de stocks $(R, s, S)$ . . . . .	24

3.1.1	Nouveau modèle . . . . .	27
3.1.2	Développement en séries de Taylor . . . . .	29
3.1.3	Simulation . . . . .	35
3.1.4	Discussion des résultats . . . . .	36
3.2	Modèle de gestion de stocks $(Q, r)$ avec retours . . . . .	37
3.2.1	Nouveau modèle . . . . .	39
3.2.2	Développement en série de Taylor . . . . .	40
3.2.3	Simulation Monte-Carlo . . . . .	45
	<b>Conclusion générale</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>v</b>

# Liste des tableaux

3.1	Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche directe.	32
3.2	Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche directe.	32
3.3	Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche Pdf.	35
3.4	Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche pdf.	35
3.5	Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par la simulation.	36
3.6	Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par la simulation.	36
3.7	Comparaison des résultats obtenus pour l'espérance du vecteur de distribution stationnaire.	36
3.8	Comparaison des résultats obtenus pour la variance du vecteur de distribution stationnaire.	37
3.9	Les résultats de la simulation du vecteur de distribution stationnaire.	46

# Table des figures

1.1	Schéma représentatif d'un stock. . . . .	7
1.2	Modèles de gestion des stocks. . . . .	10
1.3	Evolution des stocks et modèle de Wilson. . . . .	12
1.4	Evolution des coûts de gestion des stocks en fonction de $Q$ . . . . .	13
1.5	Système à point de commande. . . . .	14
1.6	Organisation calendaire à niveau de rechargement. . . . .	15
2.1	Revue sur les études réalisées . . . . .	23
3.1	Le modèle $(R, s, S)$ avec délais de livraison nul. . . . .	25
3.2	Simulation de la variable aléatoire $\lambda$ . . . . .	28
3.3	Estimation de la densité de probabilité de $\pi_0$ . . . . .	33
3.4	Estimation de la densité de probabilité de $\pi_1$ . . . . .	34
3.5	Estimation de la densité de probabilité de $\pi_2$ . . . . .	34
3.6	Estimation de la densité de probabilité de $\pi_3$ . . . . .	34
3.7	Système de gestion des stocks mono échelon. . . . .	38
3.8	La chaîne de Markov décrivant le modèle $(Q, r)$ avec retours. . . . .	38
3.9	Simulation de la variable aléatoire $\lambda$ . . . . .	40
3.10	Simulation de la variable aléatoire $\mu$ . . . . .	40
3.11	Allure de l'espérance de $\pi_i$ , $i = 0, 1$ , en fonction du coefficient de corrélation $\rho$ . . .	43
3.12	Allure de l'espérance de $\pi_i$ , $i = 2, 3$ , en fonction du coefficient de corrélation $\rho$ . . .	44
3.13	Allure de la variance de $\pi_i$ , $i = 0, 1$ , en fonction du coefficient de corrélation $\rho$ . . .	44
3.14	Allure de la variance de $\pi_i$ , $i = 2, 3$ , en fonction du coefficient de corrélation $\rho$ . . .	45

# Introduction générale

*"The greatest enemy of knowledge is not IGNORANCE, it is the ILLUSION of knowledge."*

Stephen Hawking.

La recherche opérationnelle est en fait née lors de la deuxième Guerre mondiale des efforts conjugués d'un groupe d'éminents mathématiciens (dont Von Neuman, Metropolis, Wald, Wiener, Dantzing Bellamn) de contribuer à leur manière à la victoire alliée. C'est ainsi qu'il a été créé une nouvelle méthodologie quantitative d'aide à la décision pouvant être caractérisée par les mots-clés modélisation, simulation et optimisation. Rapidement, la recherche opérationnelle s'étend à la modélisation et à l'optimisation des systèmes dans des domaines les plus divers, allant de la gestion stratégique d'investissement à l'exploitation des systèmes techniques complexes (réseaux de communication, systèmes informatiques), de la gestion stratégique d'investissements à celle de la chaîne logistique (transports, production, stocks).

Souvent, on ne saurait se cantonner aux seuls modèles statiques pour décrire et optimiser ces systèmes. Or, on s'est vite aperçu que l'incertain était un élément incontournable dans toutes ces applications, d'où la place importante qu'y occupent aujourd'hui les processus stochastiques.

Les plus classiques, plus simples et certainement plus importants des processus stochastiques sont les "*chaînes de Markov*". Ce terme est apparu pour la première fois en 1926 dans le travail de Bernstein [12]. Actuellement, la théorie des chaînes et des processus de Markov s'est largement répandue et a trouvé des applications dans de nombreux domaines, en particulier dans la gestion des stocks et la modélisation des systèmes de production. Malgré la simplicité apparente de l'hypothèse Markovienne, un grand nombre de systèmes réels peuvent être modélisés par les processus de Markov et grâce aux résultats déjà établis dans cette théorie, divers outils ont été conçus pour l'analyse du modèle et la résolution des problèmes.

Les problèmes de la gestion des stocks sont généralement caractérisés par une variabilité natu-

relle, dont la description mathématique (modèle probabiliste) est souvent bien établie. Cependant, la connaissance sur les paramètres de la loi probabiliste est limitée pour des raisons de coûts, d'échelle d'étude voire de délais d'étude. Ainsi, le modèle probabiliste conçu pour formuler ce type de problème est donc "paramétrique imprécis" ou à "paramètres incertains". Ceci implique que les métriques de performance à calculer du modèle en question sont aussi incertaines. La notion d'incertitude paramétrique se résume dans l'incapacité à donner une valeur unique à un paramètre à un instant donné. Plus spécifiquement, on distingue deux catégories d'incertitudes :

- Les incertitudes à caractère épistémique, qui traduisent essentiellement un manque de connaissance.
- Les incertitudes à caractère stochastique, qui traduisent essentiellement une variabilité intrinsèque de la grandeur concernée.

La différence essentielle porte sur la capacité à réduire l'incertitude attachée à la grandeur :

- △ On peut espérer réduire les incertitudes épistémiques par une meilleure connaissance du paramètre.
- △ On ne peut qu'espérer mieux décrire l'incertitude stochastique d'un paramètre en ayant plus de mesures de ce paramètre.

Pour une aide à la décision efficace, le décideur alors doit avoir en mains un outil simple synthétisant les deux sources d'incertitudes (aléatoire et épistémique). Par conséquent, la quantification de cette incertitude est primordiale dans le cadre de l'évaluation des performances des modèles étudiés. Il est donc impératif de gérer cette incertitude lors de l'analyse de ces modèles. Or, l'évaluation de l'incertitude n'est pas une pratique systématique. Dans ce sens, il existe plusieurs méthodes de gestion d'incertitude appliquées dans la littérature sur les modèles stochastiques pouvant être modélisés par les chaînes de Markov. La méthode statistique de simulation Monte-Carlo est la plus répandue pour suivre la propagation de l'incertitude des paramètres à travers les calculs. Elle consiste à calculer des milliers de fois la valeur dont on veut évaluer l'incertitude avec des paramètres variant aléatoirement d'une fois à l'autre selon leur distribution de probabilité. On obtient ainsi la densité de probabilité du résultat final. Bien que très utile, cette méthode possède des inconvénients : elle est gourmande en puissance de calcul et il peut être difficile de déterminer la distribution de probabilité des données. Une autre façon d'évaluer l'incertitude est le développement de Taylor. En posant les hypothèses nécessaires sur les paramètres (distribution log-normale, linéarité et indépendance), on détermine la variance du résultat en fonction de la variance des données et de leur dérivée. Cette méthode analytique permet avec

les mêmes variables de calculer la sensibilité des données, c'est-à-dire la variation relative induite dans un résultat par la variation relative d'une donnée.

Dans le présent mémoire, nous adapterons les résultats théoriques obtenus par Ouazine et Abbas [28] afin de développer un outil d'évaluation de l'incertitude basé sur la méthode analytique du développement de Taylor. En effet, nous utiliserons une telle approche analytique pour l'analyse de la propagation de l'incertitude épistémique dans les indices de performance relatifs à certains modèles stochastiques de la gestion des stocks, pouvant être régis par des chaînes de Markov. Plus précisément, nous nous intéresserons à :

- ◇ Intégrer analytiquement le calcul de l'incertitude épistémique à travers le développement en séries de Taylor via l'application aux deux modèles de gestion des stocks (R, s, S) et (Q, r);
- ◇ Valider l'approximation en comparant les résultats obtenus avec ceux de la simulation Monte-Carlo;
- ◇ Évaluer la pertinence de la prise en compte de la corrélation entre les paramètres des modèles étudiés.

Ce mémoire est subdivisé en deux chapitres théoriques et une application :

- ◇ Le premier chapitre est consacré à l'exposé des éléments de base de différents modèles déterministes et stochastiques de la "*gestion des stocks*". Leur grande portée économique fait que ces modèles occupent une place privilégiée en recherche opérationnelle.
- ◇ Dans le second, on présentera quelques généralités sur le développement en séries de Taylor. Une attention particulière sera portée sur les chaînes de Markov et particulièrement sur la matrice fondamentale.
- ◇ Dans le troisième chapitre, nous aborderons la partie pratique de notre travail qui s'agit d'une application de ce qui a été présenté lors des deux premiers chapitres, à deux modèles de gestion des stocks qui peuvent être modélisés par des chaînes de Markov. Un exemple illustratif sera présenté tout au long de ce chapitre.

# 1

## Notion de gestion des stocks

C'est en 1913 que Harris [24], alors ingénieur chez Westinghouse, énonce la " formule du lot économique " dans le souci d'équilibrer les effets contradictoires résultant d'un regroupement de petits lots de production en de plus grands. Certainement, il s'agit là d'un des tout premiers modèles mathématiques d'optimisation dans le management donc, en quelque sorte, d'une initiation à la recherche opérationnelle. Généralisée et adaptée à de situations d'une complexité toujours croissante. Cette formule constitue le point de départ des modèles les plus sophistiqués de gestion des stocks développés notamment depuis les années 1950 du siècle passé. Prenant en compte la non-stationnarité des données sous-jacentes, voir leur caractère parfois aléatoire, ces modèles ont conduit à des problèmes mathématiques difficiles ayant suscité l'intérêt d'économistes et de mathématiciens éminents tels que Arrow et al. ([6, 7]), Wagner [34], Dvoretzki et al. ([17, 18, 19]) pour ne citer que ceux la.

Ce chapitre est consacré à rappeler plusieurs modèles classiques, tant déterministes que stochastiques de gestion des stocks.

## 1.1 Généralités

### 1.1.1 Définition d'un stock

**Définition 1.1.1.** [23] *Pour une entreprise, les stocks représentent les biens achetés, transformés ou à vendre à un moment donné. Le stock représente, de manière habituelle, l'ensemble des biens qui intervient dans le cycle d'exploitation de l'entreprise.*

### 1.1.2 Types de stock

Les stocks sont de natures différentes, ils constituent à la fois une nécessité et une lourde contrainte financière. On distingue cinq types de stocks :

**1. Les matières premières :**

Ce sont l'ensemble des articles reçus qui ne sont pas encore rentrés dans le processus de fabrication. Elles incluent les matières, composants et sous-ensembles achetés. Ce stock permet de spéculer et d'anticiper les fluctuations des prix d'achat. Il permet la réduction des coûts d'acquisition pas achats de lots de taille plus importante. Il permet de se protéger contre les défaillances des fournisseurs, les retards de livraison, etc.

**2. Les " encours " :**

C'est-à-dire l'ensemble des articles qui sont rentrés dans le processus de fabrication et qui sont en cours de transformation. Ce stock intervient dans le processus de production comportant des étapes intermédiaires. Il permet d'une part un découpage des divers stades de la production. D'autre part, une protection contre les arrêts de production et les défaillances.

**3. Les produits finis :**

Ce sont l'ensemble des articles sortis du processus de fabrication et qui sont prêts à être expédiés. Ce stock permet d'amortir les fluctuations de nature saisonnière et de nature aléatoire de la demande, de façon à assurer une meilleure utilisation de l'outil de production. Il sert enfin de stock de sécurité face à la production.

**4. Les stocks de distribution (dépôts) :**

Ce sont l'ensemble des produits finis situés dans le système de distribution lui-même.

**5. Les pièces de rechange, de maintenance et les fournitures diverses :**

Il s'agit de l'ensemble des articles utilisés en production, mais qui ne font pas partie des produits et de leur nomenclature. Ils peuvent inclure, les outillages, les outils et les pièces de rechange.

### 1.1.3 Fonctions de stock

Les stocks ont plusieurs fonctions :

– **Fonction de régulation :**

Les stocks permettent le lissage des irrégularités d’approvisionnements et/ou de la production, réduisent les risques de ruptures et favorisent le maintien d’une activité continue.

– **Fonction logistique :**

Les stocks permettent de maintenir les articles à proximité de leur lieu de consommation. Ils limitent considérablement les délais d’attente.

– **Fonction économique :**

Lorsque le fournisseur accorde des remises importantes pour des achats en grande quantité, le stockage peut s’avérer utile. De même, pour un souci d’optimisation des approvisionnements, la constitution d’un stock est généralement une solution indiquée.

– **Fonction d’anticipation - spéculation :**

Le stockage permet de se mettre à l’abri des hausses de prix des matières ou des produits achetés ou vendus. Il s’agit donc ici de stocks saisonniers.

– **Fonction technique :**

Le stockage peut être lié à un procédé indispensable avant la consommation des articles. C’est le cas par exemple, du séchage du bois, de la maturation des fruits et légumes, de la fermentation des vins.

### 1.1.4 Avantages et inconvénients du stock

#### Avantages

1. Si les matières ou les pièces nécessaires ne sont pas disponibles au moment voulu, la production peut être arrêtée. C’est un gaspillage en termes de main-d’œuvre et de machines et la production prend du retard. Les stocks sont l’une des solutions à ce problème.
2. Le fait de commander des pièces et matières par grande quantité permet de réduire le coût des achats.
3. Les stocks de produits finis permettent de livrer rapidement leur marchandises.
4. Les stocks sont un moyen de faire face à des commandes imprévues, à des demandes urgentes, à la fabrication d’un nombre inhabituel de produits défectueux, à des accidents de production et à toute sorte d’imprévis.

#### Inconvénients

1. Le capital immobilisé dans le financement des stocks de matières et de produits finis ne produit pas d’intérêts.

2. Les stocks occupent de la place et leur gestion coûte cher.
3. Les matières et les produits finis entreposés peuvent se dégrader au point de devenir inutilisables. Il est donc de la plus haute importance de maintenir les stocks à leur niveau optimum.

## 1.2 Gestion des stocks

La gestion des stocks est une discipline très technique, car elle fait appel à de nombreux concepts de gestion, de statistiques et nécessite une bonne vision du fonctionnement de la chaîne logistique de l'entreprise. Elle peut être considérée comme une discipline de gestion, appartenant à la famille des techniques d'organisation logistique (gestion des flux des entreprises) et dont l'enjeu principal consiste à disposer de ressources suffisantes (pour ne pas bloquer les différents processus de production ou de vente), tout en cherchant à la limiter (la ressource) pour des questions de performance économique.

### 1.2.1 Objectifs de la gestion des stocks

La gestion des stocks a pour objectifs :

- D'éviter les ruptures des stocks et d'assurer un approvisionnement régulier de l'entreprise.
- De minimiser le prix d'achat en profitant de certaines remises de prix. Par exemple, en achetant en grande quantité, l'entreprise peut bénéficier d'une réduction de prix ;
- De minimiser le coût de transport : par exemple, dans le cas de la location d'un conteneur, il vaut mieux le charger à sa capacité maximale afin de minimiser le coût unitaire de transport ;
- De minimiser le coût de stockage ;
- D'éviter les surplus de stock que l'entreprise sera obligée de revendre ou de revendre au fournisseur à un prix inférieur au prix d'achat.

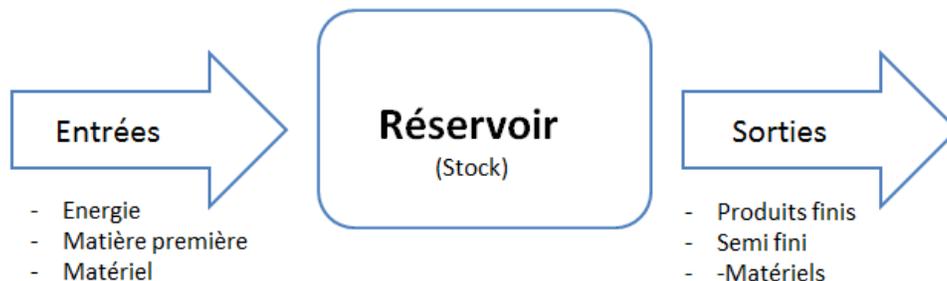


FIGURE 1.1 – Schéma représentatif d'un stock.

Le rôle de la gestion des stocks consiste, entre autres, à réduire le niveau des stocks au minimum sans pour autant provoquer de ruptures de stock.

En fait, ce que nous cherchons dans la gestion des stocks, c'est un équilibre dynamique qui nous permette d'absorber les variations plus au moins grandes dans les arrivages et les livraisons de matériel. Les stocks sont indispensables à l'entreprise dans la mesure où ils évitent les ruptures qui engendrent l'arrêt de production et parfois la perte de certains clients. Mais les stocks coûtent cher, il faut donc les gérer d'une manière rationnelle.

### 1.2.2 Coûts liés à la gestion des stocks

Le plus souvent, les quantités à commander ou à produire sont obtenues en minimisant une fonction de coût associée à la gestion du stock. La structure de cette fonction représente donc un aspect important de la description d'un modèle. Les éléments entrant dans la définition des coûts totaux sont généralement au nombre de quatre [25] :

$$\begin{pmatrix} \text{coûts} \\ \text{total} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coûts} \\ \text{de} \\ \text{possession} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{coûts} \\ \text{de} \\ \text{passation} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{coûts} \\ \text{de} \\ \text{penurie} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{coûts} \\ \text{des} \\ \text{invendus} \end{pmatrix}$$

#### Coût de possession du stock ( $C_P$ )

Le coût de possession du stock est égal à la somme du coût de détention et du coût de stockage physique.

- **Le coût de détention** ( $C_D$ ) : Dans la mesure où il faut acheter les produits qui constituent le stock, ce dernier correspond à une immobilisation des capitaux. En étant orienté vers le stock, un certain volume de liquidités ne rapporte rien, au lieu d'être dirigé vers des emplois rémunérateurs. Il est classique de qualifier ce manque à gagner de "coût d'opportunité" et il est nécessaire de l'évaluer. Concrètement, le taux d'opportunité correspond au taux de rentabilité le plus élevé que l'entreprise aurait pu choisir pour investir au lieu de constituer un stock. Le taux d'opportunité s'applique sur la valeur du stock mais pas n'importe laquelle. En effet, le stock diminue au cours de la période, il faut donc considérer le stock moyen afin de tenir compte de la diminution du stock. Très souvent, on fait l'hypothèse que le stock s'écoule linéairement, ce qui permet de définir le stock moyen comme la demi-somme du stock initial et du stock final.
- **Coût de stockage physique** ( $C_{Sp}$ ) : La détention physique de stock de produits, induit des coûts en termes de loyers d'entrepôts, de chauffage ou réfrigération, d'impôts locaux, de salaires des magasiniers, de polices d'assurance, etc. Bien que certains de ces coûts soient

fixes, et d'autres variables, il est classique de considérer l'ensemble des coûts de stockage physiques comme des coûts variables. Pris globalement, le coût de stockage physique peut être exprimé, soit en unités monétaires par produits stockés et par unité de temps, soit en pourcentage du prix du produit sur une période donnée.

### Coût de passation des commandes ( $C_L$ )

Il s'agit principalement des coûts administratifs forfaitaires occasionnés par le passage d'une commande (établissement des bons de commande, bordereaux d'envoi, réception des marchandises, contrôles et suivis des commandes, etc.). Ces coûts sont considérés comme fixes. Il faudrait aussi ajouter les coûts indirects liés à la mise en fabrication parfois nécessaire : coûts de réglage des machines, coûts des tests, etc. ; là encore, ces coûts sont assimilés à des frais fixes. Enfin, la pratique montre que les frais de transport et de manutention chez le fournisseur sont souvent ajoutés aux coûts de passation. Pour savoir si ces coûts sont fixes ou variables, il faut les traiter cas par cas et des systèmes mixtes peuvent se justifier. De plus, les progrès réalisés dans les domaines de l'informatisation et des télécommunications expliquent fréquemment la baisse considérable des coûts de passation, qui peuvent devenir quasi nuls dans certaines situations (lancements programmés, utilisation de l'EDI ou d'un extranet).

### Coût de rupture ou de pénurie ( $C_R$ )

C'est certainement le coût le plus difficile à évaluer dans la mesure où la rupture de stock peut avoir deux conséquences :

- Soit la vente non réalisée est reportée à la période suivante : le vendeur donne priorité à son client et le sert dès réception de la marchandise. On suppose que ce retard s'évalue financièrement (réponses aux relances de la clientèle, pénalités éventuelles à payer aux clients, faveurs accordées pour se faire pardonner le retard, etc.). En théorie, ce coût est fonction du nombre d'unités manquantes et de la durée de la rupture.
- Soit la vente non réalisée est définitivement perdue : dans ce cas, le coût de rupture correspond au manque à gagner lié à l'article demandé, mais non fourni et à la dépréciation de l'image de l'entreprise.

À ces trois coûts de stockage peut s'ajouter un coût spécifique, uniquement présent lorsqu'il s'agit de stocks à rotation nulle.

### Coût des invendus ( $C_I$ )

Le surdimensionnement d'un stock à rotation nulle conduit l'entreprise, à l'issue de la période de gestion, soit à brader les produits obsolètes ou démodés, soit à les jeter (ou encore à les offrir

à une association humanitaire). Quelle que soit la situation retenue, le sur stockage entraîne une réduction du bénéfice attendu.

Maintenant que les principaux concepts de gestion des stocks sont posés, nous pouvons passer à l'étude des modèles théoriques, sans perdre de vue leur grande utilité à résoudre les problèmes plus ou moins complexes que les entreprises rencontrent dans leurs activités quotidiennes.

### 1.2.3 Classification des modèles de gestion de stocks

De nombreux modèles ont été développés, offrant une prise en compte plus ou moins détaillée et réaliste des caractéristiques des systèmes de gestion des stocks étudiés. Il est possible de classer la plupart des modèles de gestion de stocks proposés dans la littérature en fonction des hypothèses retenues lors de la modélisation.

Le gestionnaire des stocks devra à tout moment répondre aux deux questions suivantes :

- Combien d'unités doit-on commander chaque fois que l'on doit renouveler le stock ?
- A quel moment doit-on décider de renouveler le stock ?

Le tableau suivant offre une vision synthétique des réponses possibles aux deux questions précédentes et positionne le célèbre cas particulier, le modèle de Wilson :

		QUAND ?	
		Période fixe	Période variable
COMBIEN ?	Quantité fixe	Cas particulier : gestion sur seuil en avenir certain – Modèle de Wilson	Gestion sur seuil ou à point de commande
	Quantité variable	Gestion calendaire à niveau de remplètement	Assez rare - Modélisation délicate (simulation)

FIGURE 1.2 – Modèles de gestion des stocks.

#### Modèles déterministes [25]

Les situations les plus faciles à étudier apparaissent lorsque la demande est supposée constante et uniforme au cours du temps. Les modèles construits autour de cette hypothèse sont dits déterministes et statiques et la demande  $y$  est entièrement spécifiée dès que le nombre  $\mu$  d'articles retirés du stock par unité de temps est donné. L'avantage principal d'une telle approche réside dans la simplicité du calcul des politiques optimales de gestion. L'utilisation pratique des résultats obtenus est, cependant, très limitée, car les modèles déterministes et statiques ne permettent

pas de prendre en compte les variations aléatoires de la demande autour de sa valeur moyenne ni les changements du niveau moyen des ventes dans le temps, provoquée, par exemple, par des phénomènes saisonniers. Afin de prendre en compte des variations temporelles des ventes moyennes, il faut recourir à des modèles dynamiques où le temps est découpé en périodes de durée généralement fixe. La demande est alors supposée connue exactement pour chacune des périodes, mais peut prendre des valeurs différentes d'une période à l'autre.

### Modèle de la quantité économique de commande [23]

Le modèle de la quantité économique de commande (EOQ) est le premier modèle de gestion des stocks. Il a été introduit par Harris en 1913 [24]. Il est basé sur des hypothèses simples et peu réalistes, mais il reste largement utilisé en pratique.

#### Modèle de base

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

1. l'entreprise ne se préoccupe que d'un produit à la fois ;
2. la demande de ce produit est certaine et distribuée uniformément tout au long de la période ;
3. le délai de livraison est certain et constant ;
4. la constitution d'un stock de sécurité est inutile ;
5. l'entreprise décide de ne pas envisager une stratégie de rupture de stock ;
6. le prix des produits est constant et ne dépend pas des volumes commandés ;
7. le stock d'alertes constant, de période en période, est déterminé sur la base de la consommation (connue) pendant le délai de livraison (connu) ;
8. il ne peut y avoir de produit invendu ;
9. le réapprovisionnement du stock s'effectue en une seule fois.

#### Paramètres

- le coût de passation d'une commande, ou coût de lancement unitaire, est noté  $C_L$  ;
- le coût de possession :
  - ◇ lorsqu'il est exprimé en unités monétaires, est noté  $C_P$  et correspond au coût d'un produit pendant une unité de temps ;
  - ◇ lorsqu'il est exprimé en pourcentage du prix du produit, est noté  $T_P$  (on parlera alors du taux de possession) ;
- la quantité demandée en volume sur la période est notée  $D$  ;
- le prix unitaire d'un produit est noté  $P$  ;
- le nombre d'unités de temps dans la période est noté  $\theta$ .

**Remarque 1.2.1.** Il est important de noter que l'on peut alternativement utiliser  $C_P$  ou  $T_P$  sans que cela ne modifie en rien le raisonnement ; d'ailleurs, on doit avoir :  $C_P(\theta) = P \times T_P$ .

Graphiquement, ce modèle peut se traduire de la façon suivante :

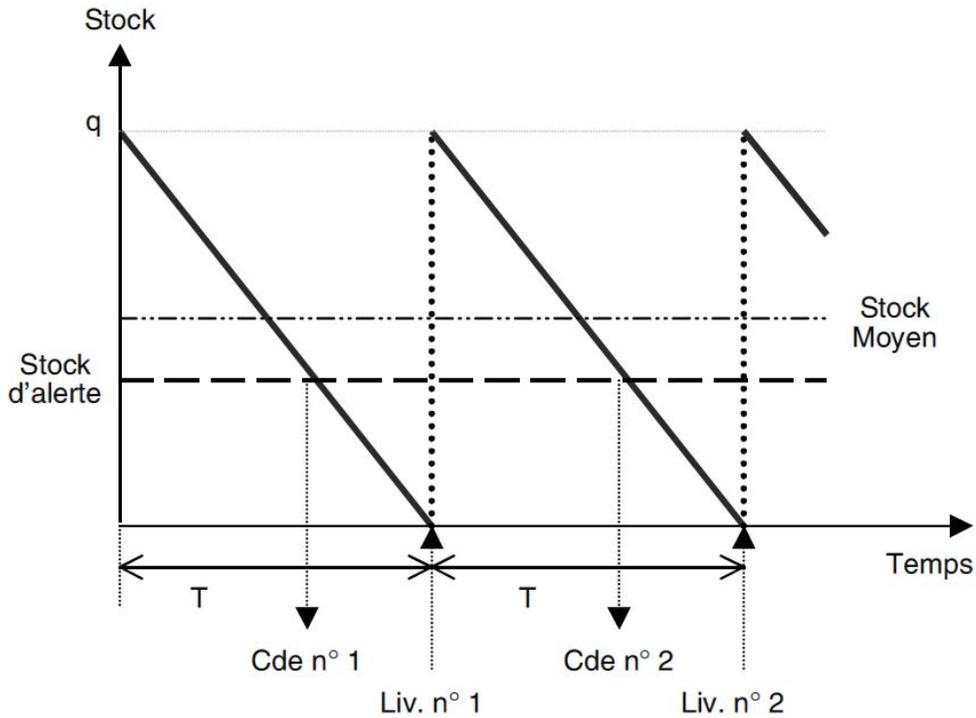


FIGURE 1.3 – Evolution des stocks et modèle de Wilson.

### Objectif

L'objectif consiste à déterminer soit le volume  $Q^*$  d'une commande, soit le nombre  $n^*$  de commandes, qui minimise le coût total de gestion du stock.

Il est maintenant possible d'explicitier la fonction de coût, notée  $CT$ , somme du coût total de passation et du coût total de possession. Comme nous le précisons dans la section précédente, le coût de possession doit s'appliquer sur le stock moyen et non sur la quantité approvisionnée. Suivant la variable recherchée en priorité, cette fonction pourra dépendre de  $Q$  ou de  $n$ . De même, l'usage de  $C_P$  ou de  $T_P$  est lié aux circonstances. Nous poserons arbitrairement ici :

$$CT(Q) = \left[ \frac{D}{Q} C_L \right] + \left[ \frac{Q}{2} \theta C_P \right]. \quad (1.1)$$

L'extremum de cette fonction s'obtient aisément par annulation de la dérivée (condition du 1er ordre) :

$$\frac{\partial CT}{\partial Q}(Q) = 0 \Leftrightarrow \left[ -\frac{D}{Q^2} C_L \right] + \left[ \frac{1}{2} \theta C_P \right] = 0.$$

Finalement, après simplification, on retient la seule valeur positive :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_L D}{\theta C_P}}. \quad (1.2)$$

Il est possible de vérifier que pour  $Q^*$ , la dérivée seconde de la fonction de coût est positive. L'extremum est donc un minimum (condition du 2<sup>ème</sup> ordre) ; on peut ajouter que  $CT(Q)$  est une fonction convexe et  $Q^*$  un minimum global. Cette quantité optimale sera appelée " quantité économique ", quantité de Wilson, ou souvent *EOQ* (Economic Order Quantity ). L'évolution des différents coûts en fonction de  $Q$  est représentée dans la figure suivante :

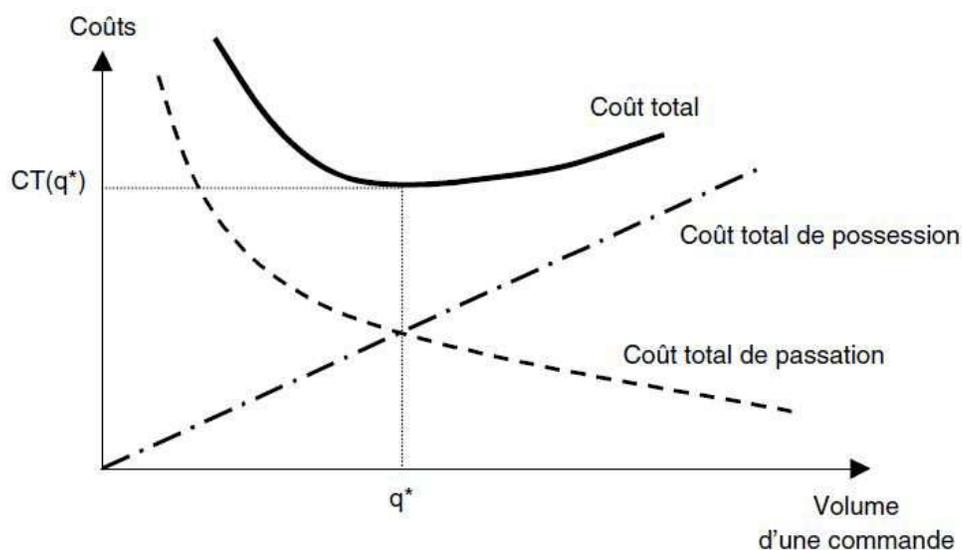


FIGURE 1.4 – Evolution des coûts de gestion des stocks en fonction de  $Q$ .

Une fois qu'on a obtenu la valeur optimale  $Q^*$ , il est aisé de calculer :

- le nombre optimal de commandes :  $n^* = D/Q^*$  ;
- le coût total minimum, en reportant la valeur numérique de  $Q^*$  dans l'égalité (1.1) ;
- la durée de la période de réapprovisionnement :  $T^* = \theta/n^*$ .

### Modèles stochastiques [25]

Un plus haut de grès de réalisme est atteint pour les modèles stochastiques ou probabilistes, où la demande est représentée par des variables aléatoires. Ces dernières peuvent être continues ou discrètes et sont alors spécifiées par leur fonction de densité ou par leur loi de probabilités. Lorsque les ventes pendant des périodes différentes sont indépendantes et identiquement distribuées, le modèle est dit stationnaire. La prise en compte de dépendances temporelles et de variations dans la demande requiert l'utilisation de modèles reposant sur des processus stochastiques non

stationnaires dont l'analyse est généralement très difficile. Notons que si la distinction entre modèles déterministes et stochastiques fait, le plus souvent, référence à la modélisation de la demande, cette dernière n'est pas le seul élément pouvant présenter des variations aléatoires. Ainsi, les coûts, les délais de livraison, les quantités effectivement reçues ou produites sont autant d'aspects d'un système où des phénomènes aléatoires et non contrôlés peuvent apparaître.

### Systèmes à point de commande [23]

Une commande est déclenchée dès que le niveau du stock devient inférieur ou égal au stock d'alerte, encore appelé : point de commande, ou selon la terminologie anglo-saxonne ROP pour recorder point. En règle générale, le volume des commandes successives est fixe et déterminé à l'aide du modèle de la quantité économique, que nous avons étudié précédemment. Ce système est fréquemment utilisé par les entreprises et possède même des applications dans la vie courante.

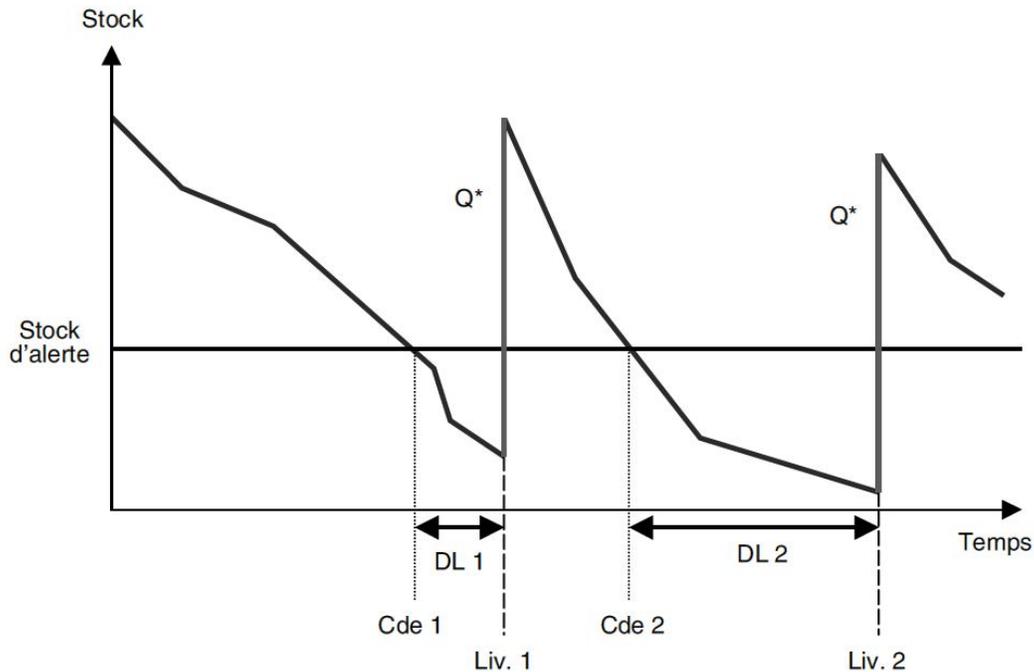


FIGURE 1.5 – Système à point de commande.

On peut calculer le stock d'alerte comme suit :

$$S_A = (D_M \times D_{LM}) + S_S.$$

Sachant que :

- $S_A$  : stock d'alerte,
- $D_M$  : demande moyenne par unité de temps,

- $D_{LM}$  : délai de livraison moyen en unité de temps,
- $S_S$  : stock de sécurité.

On cite quelques systèmes les plus connus, aussi appelés systèmes à revue continue :

- Politique  $(s, S)$  : cette politique est caractérisée par les paramètres de contrôle  $s$  et  $S$ . quand le niveau du stock est inférieur ou égale à  $s$ , une commande est immédiatement placée. La quantité commandée est telle que le niveau du stock devient  $S$ .
- Politique  $(S, S)$  : C'est un cas particulier de la politique  $(s, S)$ . Suivant cette politique, chaque demande d'article par les clients entraîne le lancement d'une commande. Elle est utilisée essentiellement dans les systèmes de gestion des stocks d'éléments réparables (éléments chers à faible demande).
- Politique  $(s, nQ)$  : Suivant cette politique, lorsque le niveau des stocks, noté  $x$ , chute au-dessous du niveau  $s$  (point de commande), une commande  $nQ$  articles est lancée où,  $Q$  est la quantité de commande de base et  $n$  est le plus petit entier vérifiant  $x + nQ > s$ .

### Le système de gestion calendaire à niveau de remplètement [23]

La gestion calendaire suppose l'examen du stock à intervalles de temps réguliers, par exemple, le début ou la fin du mois. À ces dates fixes, il faudra passer une commande d'un volume égal à ce qui a été consommé pendant la période précédente.

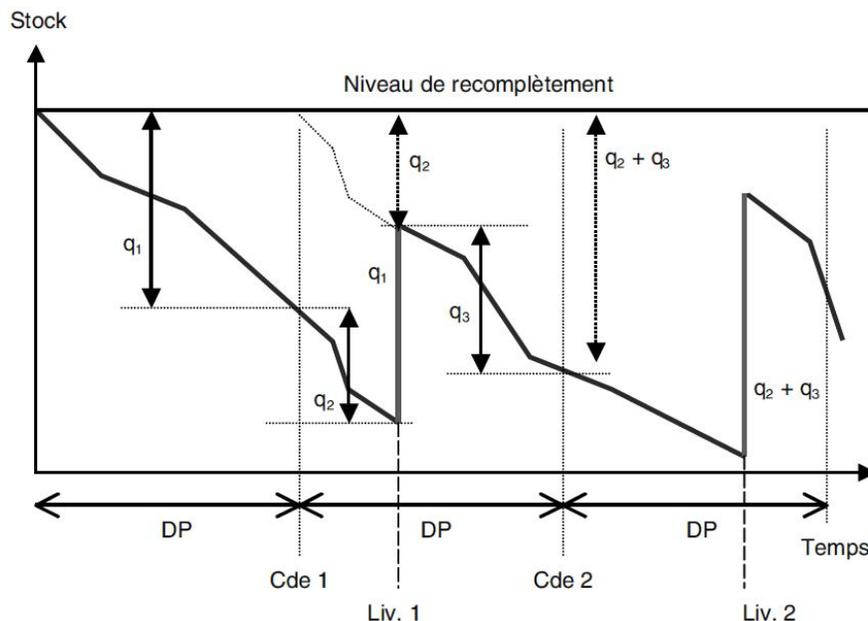


FIGURE 1.6 – Organisation calendaire à niveau de remplètement.

Ainsi, comme le montre la figure ci-dessus, la quantité commandée à l'instant  $t_0$  correspond

au niveau de rechargement auquel on a soustrait le stock disponible à l'instant  $t_0$ . La principale difficulté réside dans la fixation du niveau de rechargement (noté NR) :

$$NR = D_M(D_P + D_{LM}) + S_S,$$

Avec  $D_{LM}$ ,  $D_M$  et  $S_S$  ont déjà été définis ;

$D_P$  étant la durée d'une période en unités de temps.

Voici quelques exemples de ces systèmes, aussi dits "à revue périodique" :

- Politique  $(R, s, S)$  : Cette politique est équivalente à la politique  $(s, S)$  pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque  $R$  unités de temps, et si la quantité en stock est inférieure ou égale à  $s$ , on commande suffisamment d'articles pour atteindre le niveau  $S$ .
- Politique  $(R, S)$  : Suivant cette politique, le système est examiné chaque  $R$  unités de temps et une commande est lancée pour atteindre le niveau  $S$ . Notons qu'il s'agit d'un cas particulier de la politique  $(R, s, S)$ , avec  $s = S$ .
- Politique  $(R, s, nQ)$  : C'est l'équivalent de la politique  $(s, nQ)$  pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque  $R$  unités de temps et les commandes sont lancées aux moments de la revue si la quantité en stock est inférieure ou égale à  $s$ .

Il existe plusieurs variantes de ces politiques de commande. Toutefois, elles sont rarement utilisées en pratique.

## Conclusion

L'entreprise devra donc effectuer un arbitrage délicat entre ces différents types de coûts, sachant que le principe des vases communicants s'applique de façon complexe :

- Stocker de grandes quantités à la fois permet de limiter le coût total de passation, mais conduit à des frais de possession élevés et selon la nature du produit, à des risques d'inventures ;
- Stocker de petites quantités à la fois permet de contenir le coût de possession, mais provoque un accroissement des frais de passation, ainsi qu'une augmentation des risques de rupture.

La décision de l'entreprise est très délicate et décisive. Elle consiste en tout à choisir la quantité à commander et le moment opportun pour faire cette commande, et ce en se basant sur les différents modèles que nous avons exposés dans ce chapitre.

# 2

## Formules des développements en séries de Taylor

En (1715-1717), le mathématicien Brook Taylor a publié son traité sur le développement en série des fonctions : *Methodus incrementorum directa et inversa* [32], qui donne une approximation polynomiale pour une fonction suffisamment dérivable au voisinage d'un point. Ce développement a réglé un problème dans l'analyse et le calcul des limites " formes indéterminées ", et aussi simplifié l'étude d'une fonction compliquée. Dans ce chapitre, nous présentons les différentes versions de développement en séries de Taylor. En particulier, nous focaliserons à la présentation de développement de Taylor des chaînes de Markov.

### 2.1 Formule Taylor classique

#### 2.1.1 Formules de Taylor d'une fonction réelle à une variable réelle

##### 2.1.1.1. Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle ouvert, on dit que  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{I}$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1, si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{I}$  et  $f^{(n)}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{I}$ , pour tout  $n$ .

- On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si toutes les dérivées de  $f$  existent et définies sur  $\mathbb{I}$ .

- On note par  $\mathcal{C}^n(\mathbb{I})$  l'espace vectoriel des fonctions  $n$  fois continûment dérivables sur  $\mathbb{I}$  respectivement ( $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{I})$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{I}$ ).

**Exemple 2.1.1.**  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  et  $\exp(x)$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

### 2.1.1.2. Formule de Taylor

**Théorème 2.1.1.** [8] Si une fonction  $y = f(x)$  est définie et continue sur  $\mathbb{I} = [a, b]$ , ainsi que ses  $n$  premières dérivées, alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(b), \quad (2.1)$$

avec  $R_n(b)$  est le reste du développement de Taylor.

**Exemple 2.1.2.** Considérons :  $f(x) = \sin(x)$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ .

Cette fonction est continue et indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,

et on a :

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = \cos(0) = 1, \quad \sin''(0) = -\sin(0) = 0, \dots$$

Plus généralement, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  nous avons :

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le développement de Taylor au voisinage de 0 sur cette fonction, on obtient :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = 0.$$

Le reste  $R_n(x)$  varie suivant les conditions de dérivabilité imposées à  $f$ . De ce fait, il existe plusieurs formules du reste qui en découlent parmi lesquels on peut citer :

#### 1. Formule de Taylor avec reste généralisé

**Théorème 2.1.2.** [9]

Soient les deux fonctions  $f, g : \mathbb{I} = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

1.  $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$  et  $f^{(n)}$  dérivable sur  $]a, b[$ ;

2.  $g \in \mathcal{C}([a, b])$  et  $g'$  dérivable sur  $]a, b[$ ,

tel que  $\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$ .

Soit  $x_0 \in [a, b]$ , alors  $\forall x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_0$ , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x_0, x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x_0, x) = 0;$$

où

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n [g(x) - g(x_0)]}{n!g'(c)}, \quad (2.2)$$

et  $c$  est un point strictement compris entre  $x$  et  $x_0$ .

La formule (2.2) de  $R_n(x_0, x)$  est appelée "reste généralisé".

## 2. Formule du reste de Young et de Peano

Le reste de Young est défini par la fonction "petit  $o$ " (Notation relative à Landou). En effet, celui-ci est donnée par :

$$R_n(x_0, x) = o((x-x_0)^2).$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x-x_0)} = 0.$$

- Le plus souvent, le reste de Young s'écrit sous la forme de Peano :

$$R_n(x_0, x) = (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

## 3. Formule du reste de Lagrange

Le reste de Lagrange est défini par :

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

où  $c$  est un point qui dépend de  $x_0$  et  $x$ .

## 4. Formule du reste de Cauchy

Le reste de Cauchy est donné par :

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)(x-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta),$$

où  $0 < \theta < 1$ .

## 5. Formule du reste de Laplace

Une autre forme du reste est celle de Laplace ou le reste intégral. ce reste est donné comme suit :

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

### 2.1.1.3. Formule de Mac-Laurin

Lorsque on pose  $x_0 = 0$  dans les formules de Taylor, on obtient les formules dites Mac-Laurin.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

**Exemple 2.1.3.** Pour  $f(x) = e^x$ , la formule de Mac-Laurin avec s'écrit comme suit :

$$f(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

## 2.1.2 Formules de Taylor d'une fonction réelle à plusieurs variables réelles

**Définition 2.1.1.** [16] *Considérons une boule ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^p$  centrée en  $a$  et  $f$  une fonction à valeurs réelles possédant des dérivées partielles d'ordre  $(n+1)$  continues en chaque point. Alors pour tout  $x \in B$  :*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\partial x^\alpha} (x-x_0)^\alpha + R_n(x_0, x).$$

### Exemple

Soit  $f(x, y) = e^{x+y}$ , le développement en séries de Taylor de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage du point  $(a, b)$  est :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{a+b} + \frac{1}{1!} [e^{a+b}(x-a) + e^{a+b}(y-b)] + \\ &+ \frac{1}{2!} [e^{a+b}(x-a)^2 + 2e^{a+b}(x-a)(y-b) + e^{a+b}(y-b)^2] + \\ &+ \frac{1}{3!} [e^{a+b}(x-a)^3 + 3e^{a+b}(x-a)^2(y-b) + 3e^{a+b}(x-a)(y-b)^2 + e^{a+b}(y-b)^3] + \\ &+ R_n(x, y). \end{aligned}$$

## 2.2 Formule de Taylor pour les chaînes de Markov

Considérons une chaîne de Markov ergodique  $X$ , à temps discret et à espace d'états fini, de matrice de probabilités de transition  $P$ . Celle-ci admet une distribution stationnaire  $\pi$ . Notons le projecteur stationnaire associé à cette chaîne de Markov par  $\Pi$ . Nous supposons que la distribution stationnaire  $\pi$  dépende d'un certain paramètre  $\theta$  de la chaîne de Markov en question. Par la suite, nous considérerons l'analyse fonctionnelle de celle-ci. Pour ce faire, nous utilisons l'approche analytique basée sur les développements en séries de Taylor. Dans ce sens, la distribution stationnaire  $\pi$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\pi(\theta + \Delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta^i}{i!} \pi^{(i)}(\theta),$$

où  $\pi^{(i)}(\theta)$  est la  $i^{\text{ieme}}$  dérivée de la distribution stationnaire  $\pi(\theta)$  par rapport au paramètre  $\theta$ . Cette dérivée est exprimée en fonction de la matrice fondamentale  $Z_\theta$ , définie par [21] :

$$Z_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1},$$

où  $I$  est la matrice identité.

L'expression de la dérivée d'ordre supérieur de la distribution stationnaire en terme de la matrice fondamentale est établi dans [28]. Celle-ci est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.2.1.** [28] *Supposons que toutes les composantes de  $P_\theta$  sont de classe  $C^k$  par rapport à  $\theta$ , où  $\theta$  est point intérieur de l'intervalle  $\Theta$ . Alors, la  $k^{\text{ieme}}$  dérivée de la distribution stationnaire,  $\pi(\theta)$  d'une chaîne de Markov ergodique à capacité finie par rapport à  $\theta$  est donnée par :*

$$\frac{d^k \pi}{d\theta^k}(\theta) = \pi^{(k)}(\theta) = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \pi^{(m)}(\theta) P_\theta^{(k-m)} Z_\theta, \quad (2.3)$$

où  $P_\theta^{(n)}$  (respectivement  $\pi^{(n)}(\theta)$ ) est la matrice (respectivement vecteur) dont ses composantes sont les dérivées  $k^{\text{ieme}}$  des composantes de  $P_\theta$  (respectivement  $\pi(\theta)$ ) par rapport à  $\theta$ .

### 2.2.1 Revue sur les études réalisées

L'utilisation des développements en séries de Taylor dans le cadre de l'évaluation des performances des réseaux stochastiques a été introduite pour la première fois par Zazanis [35] et Gong et Hu [22]. Puis, sont apparus les travaux de Baccelli et Schmidt [11], où ils ont utilisé les développements en séries de Taylor pour l'analyse les réseaux stochastiques. Le développement en série de Taylor pour la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'états fini a été établi par Cao [13]. Plus tard, Heidergott et Hordjik [26] ont développé une nouvelle approche

pour les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov à espace d'états général. Une autre approche basée toujours sur les développements en séries de Taylor pour les chaînes de Markov à espace d'états fini a été développée par Heidergott et al. [27]. Récemment, Abbas et al. [2, 3, 4] se sont intéressés à l'estimation du reste de développement en séries de Taylor, où ils ont obtenu une nouvelle estimation de celui-ci. En outre, les mêmes auteurs ont obtenu une formule récursive pour la dérivée de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov à espace d'états fini et à temps discret. Plus récemment, Ouazine et Abbas [28] ont développé une nouvelle approche de développement de Taylor des chaînes de Markov à espace d'états fini et à temps discret, où les coefficients de ce développement sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale relative à la chaîne de Markov. Abbas et al. [1] ont mis en évidence la relation entre les bornes de perturbation des chaînes de Markov et l'estimation du reste de développement en séries de Taylor de même chaîne pour le cas des perturbations linéaire. Bachi et Abbas [10] ont généralisé les résultats obtenus dans [28] pour les chaînes de Markov à temps continu. Takhedmit et al. [31] ont obtenu de nouveaux coefficients de développement de Taylor pour le cas de perturbation de plusieurs paramètres, et une application de ces résultats au cas de propagation de l'incertitude épistémique dans les performances stationnaires relatives à la chaîne de Markov considérée.

Le schéma suivant représente un récapitulatif sur les études réalisées.

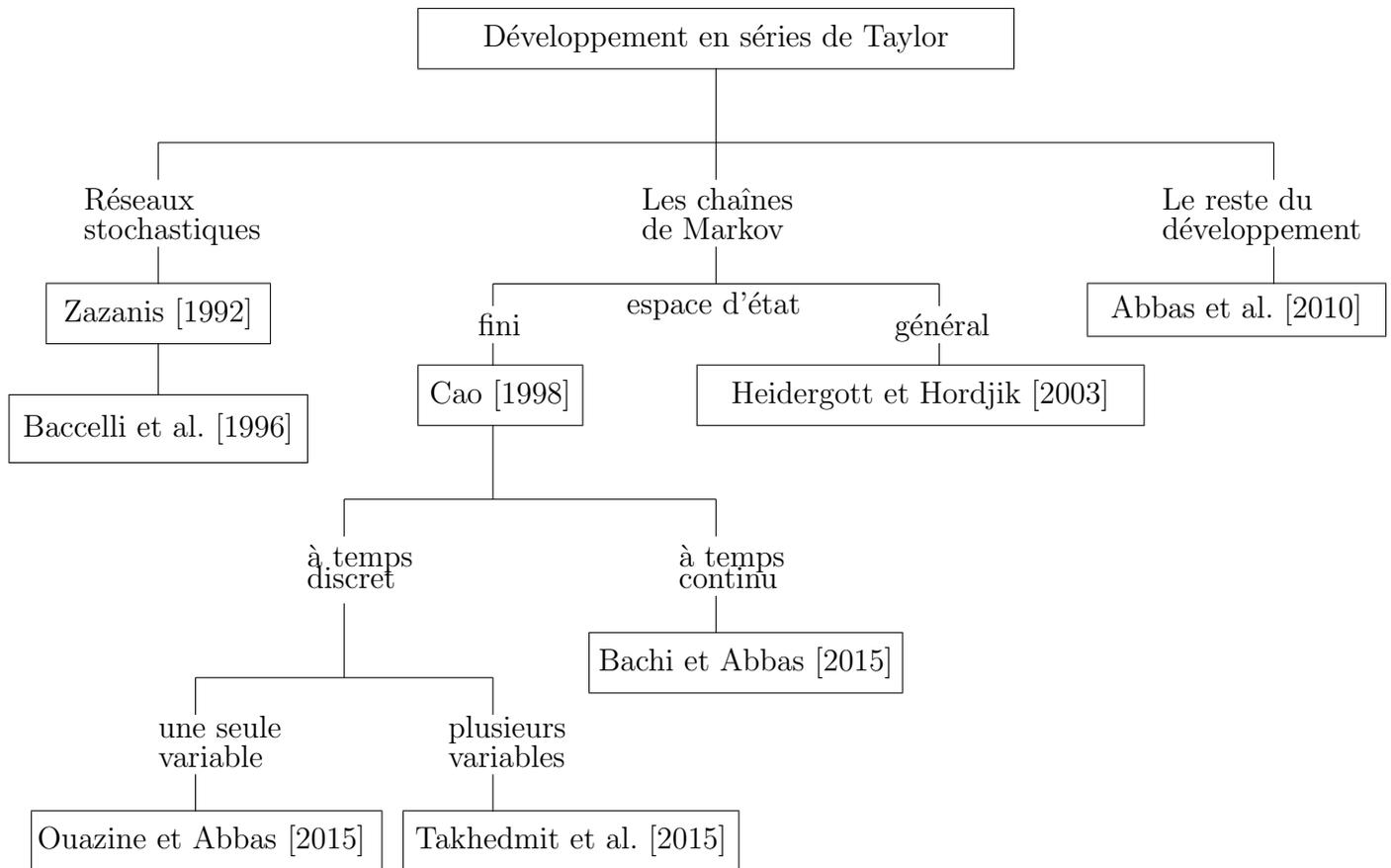


FIGURE 2.1 – Revue sur les études réalisées

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques notions fondamentales sur les développements en séries de Taylor des fonctions réelles à variables réelles, où nous nous sommes focalisés sur les différentes formules caractérisant le reste des développements de Taylor. Une attention particulière est portée sur le cas des développements de Taylor des chaînes de Markov, qui sont utiles pour notre analyse dans le prochain chapitre.

# 3

## Propagation analytique de l'incertitude épistémique dans les modèles stochastiques de gestion de stocks

Dans l'optique d'effectuer une analyse de la propagation de l'incertitude épistémique des paramètres, à travers le calcul de la distribution stationnaire dans certains modèles stochastiques de gestion de stocks, nous envisageons d'appliquer l'approche analytique basée sur les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov [28], et de valider les résultats numériques par la technique de la simulation Monte-Carlo. Spécifiquement, nous considérons deux modèles stochastiques de gestion de stocks, à savoir le modèle  $(R, s, S)$  et le modèle  $(Q, r)$  avec retours.

### 3.1 Modèle de gestion de stocks $(R, s, S)$

Considérons le problème de gestion des stocks à revue périodique mono article et mono échelon de type  $(R, s, S)$ . L'état du stock  $X_n$  est inspecté chaque  $R$  unités de temps aux instants  $t_n = nR$ , ( $n \geq 1$ ). Au début de chaque période le gestionnaire est contraint de répondre aux deux questions suivantes :

- (a) Est-ce qu'il doit ou non commander une quantité spécifique d'articles ?

(b) Si oui, combien commander ?

Suivant la règle de contrôle  $(R, s, S)$ , si le niveau du stock, est inférieur à  $s$ , alors une commande est lancée. La quantité commandée est telle que le niveau du stock est remis à sa valeur initiale  $S$ , la taille de la commande est donc égale à  $Z_n = S - X_n$ . Si ce n'est pas le cas, aucune commande ne sera lancée et l'on attend jusqu'à la prochaine période d'inspection. On suppose que le délai de livraison est nul.

Durant la période  $n, n \geq 1$ , la demande totale est une variable aléatoire discrète  $M_n$  à valeur dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que les variables aléatoires  $(M_n, k \in \mathbb{N}^*)$ , sont indépendantes et équidistribuées de loi de probabilité commune :

$$a_k = \mathbb{P}\{M_1 = k\}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Il est prouvé que, pour de tels problèmes de gestion des stocks, la politique  $(R, s, S)$  est optimale (voir[30, 33]). La figure 3.1 illustre le fonctionnement d'un tel système.

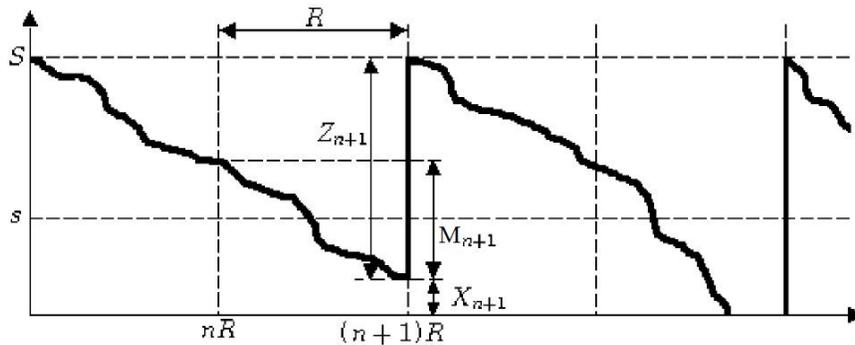


FIGURE 3.1 – Le modèle  $(R, s, S)$  avec délais de livraison nul.

L'état du stock  $X_{n+1}$  à la fin de la période  $n + 1$  est alors donné par :

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - M_{n+1})^+ & \text{Si } X_n > s, \\ (S - M_{n+1})^+ & \text{Si } X_n \leq s. \end{cases}$$

où  $A^+ = \max(A, 0)$ .

La variable aléatoire  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et  $M_{n+1}$ , où  $M_{n+1}$  est indépendante de  $n$  et de l'état du système avant  $t_n$ .  $X$  est donc une chaîne de Markov homogène, à espace d'états  $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, S\}$ .

Supposons qu'à la date  $n, X_n = i$ .

1. Si  $i > s$ , on a :

$$X_{n+1} = (i - M_{n+1})^+, \text{ donc :}$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \mathbb{P}\{(i - M_{n+1})^+ = j\}$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} a_{i-j} & \text{Si } j = 1, \dots, i ; \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & \text{Si } j = 0 ; \\ 0 & \text{Si } j > i. \end{cases}$$

2. Si  $i \leq s$ , on a alors :

$$X_{n+1} = (S - M_{n+1})^+, \text{ donc :}$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \mathbb{P}\{(S - M_{n+1})^+ = j\}$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{\infty} a_k & \text{Si } j = 0; \\ a_{S-j} & \text{Si } j = 1, \dots, S. \end{cases}$$

Et par suite, on a :

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{\infty} a_k & \text{Si } 0 \leq i \leq s \text{ et } j = 0, \\ a_{S-j} & \text{Si } 0 \leq i \leq s \text{ et } 1 \leq j \leq S, \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \text{ et } j = 0, \\ a_{i-j} & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \text{ et } 1 \leq j \leq i, \\ 0 & \text{Si } s+1 \leq i \leq S \text{ et } j \geq i+1. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de transition de la chaîne de Markov  $X$  est définie par :

	0	1	s	s+1	S
0	$\sum_{k=S}^{\infty} a_k$	$a_{S-1}$	$\cdots$	$a_{S-s}$	$a_{S-s-1} \cdots a_0$
1	$\sum_{k=S}^{\infty} a_k$	$a_{S-1}$	$\cdots$	$a_{S-s}$	$a_{S-s-1} \cdots a_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s	$\sum_{k=S}^{\infty} a_k$	$a_{S-1}$	$\cdots$	$a_{S-s}$	$a_{S-s-1} \cdots a_0$
s+1	$\sum_{k=s+1}^{\infty} a_k$	$a_s$	$\cdots$	$a_1$	$a_0 \quad 0 \quad 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
S	$\sum_{k=S}^{\infty} a_k$	$a_{S-1}$	$\cdots$	$a_{S-s}$	$a_{S-s-1} \cdots a_0$

Il s'agit d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique. Elle possède donc une unique distribution stationnaire. Notons cette distribution stationnaire par  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_S)$ . Celle-ci peut être obtenue par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi P = \pi. \\ \sum_{i=0}^S \pi_i = 1. \end{cases}$$

Cette distribution est indépendante de l'état du départ. Ce qui signifie qu'au bout d'une période de temps suffisamment longue, l'état du stock suit une loi de probabilité indépendante du stock initial.

### 3.1.1 Nouveau modèle

Dans cette partie, nous essayons de changer les hypothèses statistiques relatives au modèle qu'on a introduit précédemment. En effet, associons l'incertitude épistémique infligée pour déterminer le taux  $\lambda$  de la loi Poisson modélisant le processus des arrivées des demandes dans le modèle de gestion de stock (R, s, S). Cela nous permettra d'évaluer les performances d'un tel modèle, tout en prenant en considération le manque d'informations sur la détermination du paramètre  $\lambda$ . En particulier, on s'intéressera à l'analyse fonctionnelle de la distribution stationnaire  $\pi(\lambda)$ , qui est considérée fonction de  $\lambda$ . Ce qui nous ramène à l'évaluation de cette distribution stationnaire sous l'incertitude du paramètre d'entrée  $\lambda$ . Pour ce faire, nous appliquons l'approche de développement en séries de Taylor, permettant de propager l'incertitude en question. Ainsi, nous introduisons le nouveau modèle associé au paramètre incertain  $\lambda$ , défini comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma \varepsilon, \quad \varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.1)$$

où

$\bar{\lambda}$  est la moyenne de la variable aléatoire  $\lambda$ ,

$\sigma$  est l'écart type de la même variable aléatoire  $\lambda$ .

Notons que les deux paramètres  $\bar{\lambda}$  et  $\sigma$  impliqués dans la définition du nouveau modèle (3.1) sont déterminés par l'utilisation des techniques statistiques classiques. Du fait que la variable aléatoire  $\lambda$  est caractérisée par ses réalisations. Soit  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , les  $\lambda_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ , sont des données issues de la pratique. Alors, les deux paramètres  $\bar{\lambda}$  et  $\sigma$  peuvent-être considérés respectivement comme la moyenne et l'écart-type empiriques de la variable aléatoire  $\lambda$  :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda} - \lambda_i)^2.$$

La validation des valeurs des deux paramètres ci-dessus peut se faire par l'utilisation de la règle des trois sigma.

### Règle des trois sigma :

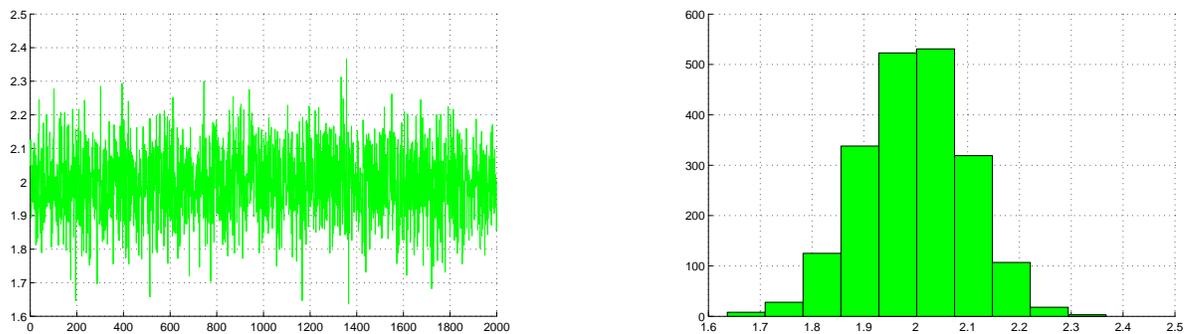
En statistique, la règle 68-95-99.7 (ou règle des trois sigma ou règle empirique) indique que pour une distribution normale, presque toutes les valeurs se situent dans un intervalle centré autour de la moyenne et dont les bornes se situent à 3 écarts-types de part et d'autre. Environ 68,27 % des valeurs se situent à un écart-type de la moyenne. De même, environ 95,45 % des valeurs se situent à 2 écarts-types de la moyenne. La quasi-totalité (99,73 %) des valeurs se situe à moins de 3 écarts-types de la moyenne. En notation mathématique, cela peut-être exprimé comme suit, où  $\lambda$  est une observation d'une distribution normale d'une variable aléatoire,  $\bar{\lambda}$  étant sa moyenne, et  $\sigma$  son écart-type :

$$\mathbb{P}(\bar{\lambda} - \sigma \leq \lambda \leq \bar{\lambda} + \sigma) \approx 0.6827.$$

$$\mathbb{P}(\bar{\lambda} - 2\sigma \leq \lambda \leq \bar{\lambda} + 2\sigma) \approx 0.9545.$$

$$\mathbb{P}(\bar{\lambda} - 3\sigma \leq \lambda \leq \bar{\lambda} + 3\sigma) \approx 0.9973.$$

La simulation d'un échantillon de taille  $n = 2000$  correspondant au modèle introduit dans (3.1), suivant une loi normale de moyenne  $\bar{\lambda} = 2$  et d'écart-type  $\sigma = 0.1$ , nous a permis d'obtenir les résultats numériques illustrés dans la figure 3.2.



a) Courbe représentative de la variable aléatoire  $\lambda$ .    b) Histogramme de la variable aléatoire  $\lambda$ .

FIGURE 3.2 – Simulation de la variable aléatoire  $\lambda$ .

Étant donné que le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson qui régit les demandes est incertain, ceci va affecter toutes les métriques de performance du modèle de gestion des stocks en question. Par conséquent, cette incertitude épistémique va se répercuter (ou se propager) sur les caractéristiques stationnaires du modèle. Par la suite, nous allons nous intéresser, particulièrement, à l'impact de l'incertitude épistémique sur le vecteur de distribution stationnaire.

### 3.1.2 Développement en séries de Taylor

Dans cette partie, nous utilisons l'approche analytique basée sur les développements en séries de Taylor pour propager l'incertitude épistémique infligée à la détermination du taux des arrivées des demandes  $\lambda$ , dans le calcul de la distribution stationnaire du modèle de gestion de stocks de type (R, s, S). Par conséquent, la distribution stationnaire  $\pi$  est considérée comme fonction du paramètre perturbé  $\lambda$ . La représentation de  $\pi(\lambda)$  par la formule de Taylor au voisinage de la moyenne  $\bar{\lambda}$  est donnée par :

$$\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi^{(i)}(\bar{\lambda})}{i!} \sigma^i \varepsilon^i. \quad (3.2)$$

où  $\pi^{(i)}(\bar{\lambda})$  est la  $i^{\text{ieme}}$  dérivée de la distribution stationnaire  $\pi$ . Cette dérivée est calculée selon la formule (3.3).

$$\pi^{(i)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k \pi^{(k)}(\lambda) P_\lambda^{(i-k)} Z_\lambda \quad (3.3)$$

L'utilisation pratique de la formule (3.2), exige la troncature de la séries infinie. Ce qui nous ramène au problème de la détermination de l'ordre du polynôme de Taylor relatif à la précision du calcul souhaitée. Pour ce faire, il suffit d'estimer la valeur du reste de développement en séries de Taylor. La littérature regorge de restes établis spécifiquement pour la mesure de l'erreur engendrée par l'approche du développement de Taylor. Dans notre application numérique, nous avons opté pour l'utilisation du reste de Peano donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon) &= \frac{\pi^{(n+1)}}{(n+1)!} (\sigma\varepsilon)^{n+1} + \frac{\pi^{(n+2)}}{(n+2)!} (\sigma\varepsilon)^{n+2} + \dots \\ &= (\sigma\varepsilon)^n \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\pi^{(i)}(\bar{\lambda})}{i!} \sigma^{i-n} \varepsilon^{i-n}}_{=h(\sigma\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $h$  est une fonction telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\sigma\varepsilon) = 0.$$

Cependant, du point de vue pratique et afin d'estimer numériquement le reste proposé sous la forme ci-dessus (3.4), nous utilisons l'approche suivie par Abbas et al. [2]. Celle-ci consiste à tronquer la série parut dans (3.4) à ses  $m$  premiers termes. Par conséquent, la formulation du reste de Peano devient alors :

$$R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon) = (\sigma\varepsilon)^n \sum_{i=n+1}^m \frac{\pi^{(i)}(\bar{\lambda})}{i!} \sigma^{i-n} \varepsilon^{i-n}. \quad (3.5)$$

Dans ce qui suit, nous présentons les étapes essentielles de l'algorithme permettant de calculer l'ordre du développement de Taylor  $n$  et d'estimer le reste du développement en question.

---

**Algorithm 1** Le reste dans le cas d'une seule variable

---

**Début**

**Entrées** : la précision  $\xi$ , la moyenne  $\bar{\lambda}$  et l'écart type  $\sigma$ .

**Sorties** : l'ordre du polynôme de Taylor  $n$ , la valeur du reste  $R_n(\bar{\lambda}, \sigma\varepsilon)$ ;

1. Calculer les coefficients du polynôme de Taylor à l'aide de la formule (3.3);

2. Calculer le reste  $R_n(\bar{\lambda}, \sigma\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \frac{\pi_{\bar{\lambda}}^{(k)}}{k!} \sigma^k \varepsilon^k$ ;

3. Calculer  $\|\mathbb{E}(R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)) + \text{Var}(R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon))\|$ ;

**tant que**  $(\|\mathbb{E}(R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)) + \text{Var}(R_n(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon))\| > \xi)$  alors

1. Calculer le reste selon la formule (3.5);

**Fin tant que** ;

**Fin.**

---

Pour une précision du calcul fixée à  $\xi = 10^{-3}$ , la valeur du reste de développement de Taylor obtenue est :

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0004 & 0.0006 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

L'ordre du développement de Taylor relatif à la précision fixée est donc  $n = 3$ . Dans ce cas, la forme de ce développement, pour le cas de la perturbation du paramètre  $\lambda$ , est donnée par la formule suivante :

$$\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon) = \pi(\bar{\lambda}) + \frac{\pi^{(1)}(\bar{\lambda})}{1!} \sigma^1 \varepsilon^1 + \frac{\pi^{(2)}(\bar{\lambda})}{2!} \sigma^2 \varepsilon^2 + \frac{\pi^{(3)}(\bar{\lambda})}{3!} \sigma^3 \varepsilon^3 + R_3(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon). \quad (3.6)$$

Sous la nouvelle hypothèse statistique, consistant à rattacher l'incertitude épistémique au paramètre  $\lambda$ , la distribution stationnaire elle-même  $(\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon))$  deviendra variable aléatoire. Elle s'agit d'une transformée d'une autre variable aléatoire. Afin de caractériser celle-ci, nous allons essayer d'estimer sa densité, son espérance et sa variance avec deux approches.

Dans ce qui suit, nous illustrerons l'application de l'approche de développement en séries de Taylor sur le modèle de gestion de stocks via un exemple numérique, où nous fixons les valeurs des paramètres du modèle comme suit :

$$R = 1, s = 2, S = 4 \text{ et } \bar{\lambda} = 2.$$

Notons que nous garderons les valeurs de ces paramètres au long de toute cette application numérique.

## 1. Approche directe :

Cette approche consiste à estimer la moyenne et la variance de la variable aléatoire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)$  moyennant la formule (3.6). Ainsi, on procède au calcul de l'espérance et de la variance du polynôme de Taylor (3.6). Ces calculs se résument par l'application de l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 2** L'approche directe dans le cas d'une seule variable

---

**Début**

**Entrées** : la moyenne  $\bar{\lambda}$ , l'écart type  $\sigma$  et l'ordre du polynôme de Taylor  $n$ ;

**Sorties** : Espérance  $\mathbb{E}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma))$  et la variance  $\text{Var}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma))$ ;

**Pour**  $k = 1$  à  $n$  faire

**Si**  $k$  est pair

$\mathbb{E}(\varepsilon^k) = (k - 1)!!$ ;

**Sinon**

$\mathbb{E}(\varepsilon^k) = 0$ ;

**Fin si** ;

1. Calculer  $\mathbb{E}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma)) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n \frac{\pi_{\bar{\lambda}}^{(k)}}{k!} \sigma^k \varepsilon^k\right) = \sum_{k=0}^n \frac{\pi_{\bar{\lambda}}^{(k)}}{k!} \sigma^k \mathbb{E}(\varepsilon^k)$ ;

2. Calculer  $\text{Var}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma)) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n \frac{\pi_{\bar{\lambda}}^{(k)}}{k!} \sigma^k \varepsilon^k\right)^2 - \left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n \frac{\pi_{\bar{\lambda}}^{(k)}}{k!} \sigma^k \varepsilon^k\right)\right]^2$  ;

**Fin pour** ;

**Fin.**

---

Notons que la double factorielle de l'entier  $p$  est définie par :

$$(p)!! = p(p-2)(p-4) \dots 4 \times 2.$$

Tenant en compte de la parité de l'entier  $p$ , alors l'espérance de la variable aléatoire  $\varepsilon$  peut aussi être calculée grâce à la formule suivante :

$$\mathbb{E}(\varepsilon^k) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.7)$$

La matrice des probabilités de transition  $P$  de la chaîne de Markov  $X$  décrivant l'état du modèle de gestion de stocks (R, s, S), pour la valeur de  $\bar{\lambda} = 2$ , est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3233 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 \\ 0.3233 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 \\ 0.5940 & 0.2707 & 0.1353 & 0 \\ 0.3233 & 0.2707 & 0.2707 & 0.1353 \end{pmatrix}.$$

La distribution stationnaire  $\pi(\bar{\lambda})$  de la chaîne  $X$  est donnée par :

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.3879 & 0.2707 & 0.2384 & 0.1031 \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale  $Z$  évaluée au point  $\bar{\lambda} = 2$  est :

$$Z = \begin{pmatrix} 0.9432 & 0.0000 & 0.0284 & 0.0284 \\ -0.0568 & 1.0000 & 0.0284 & 0.0284 \\ 0.1816 & 0.0000 & 0.9092 & -0.0908 \\ -0.0568 & 0.0000 & 0.0284 & 1.0284 \end{pmatrix}.$$

Les résultats numériques relatifs au calcul de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)$  par cette approche (Algorithme 2) sont dressés dans les deux tableaux (3.1) et (3.2).

Espérance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. dir.	0.3895	0.2696	0.2375	0.1034

TABLE 3.1 – Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l’approche directe.

Variance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. dir.	0.0037	0.0004	0.0006	0.0003

TABLE 3.2 – Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l’approche directe.

- Approche pdf (Estimation de la fonction de densité de probabilité) :** Cette approche consiste à estimer la fonction de densité de probabilité de la variable  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)$ . Elle est également basée sur le polynôme de Taylor (3.6). Les étapes essentielles de cette approche sont données dans l’algorithme 3.

**Algorithm 3** L'approche pdf dans le cas d'une seule variable**Début**

**Entrées** : la moyenne  $\bar{\lambda}$ , l'écart type  $\sigma$  et l'ordre du polynôme de Taylor  $n$ ;

**Sorties** : Espérance  $\mathbb{E}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma))$  et la variance  $\text{Var}(\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma))$  et la densité de  $\pi(\bar{\lambda} + \varepsilon\sigma)$ ;

**Pour**  $k = 1$  à  $n$  faire

1. Calculer les  $d$  racines réelles de l'équation  $P_t(\lambda) = y$  avec  $y = [0 : 0.001 : 1]$ ;

2. Calculer la dérivée du polynôme de Taylor  $P'_T(\lambda_j) = \sum_{j=0}^n \frac{\pi_\lambda^{(j)}(\lambda)}{(j-1)!} \sigma^j (\varepsilon^{j-1})$ ;

3. Calculer  $f_\pi(y) = \sum_{j=1}^d \frac{f_\varepsilon(\lambda_j)}{|P'_t(\lambda)|}$ ;

4. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}[\pi] = \mathbb{E}\left(\int_0^1 y f_\pi(y) dy\right)$ ;

5. Calculer la variance  $\text{Var}[\pi] = \int_0^1 y^2 f_\pi(y) dy - \left(\int_0^1 y f_\pi(y) dy\right)^2$ ;

**Fin pour** ;

**Fin.**

Les courbes représentatives des fonctions de densité de probabilité (pdf) de chaque composante de la distribution stationnaire sont données en Figures 3.3, 3.4 et 3.5.

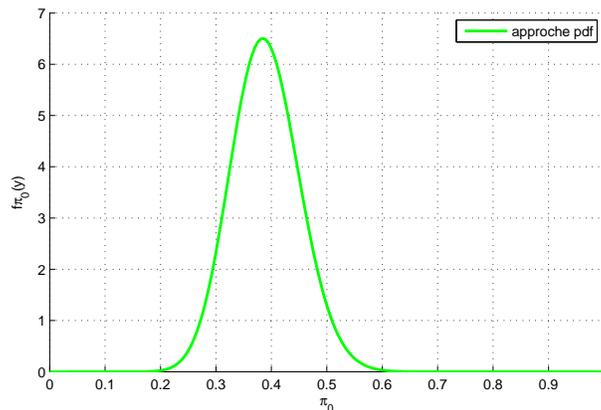
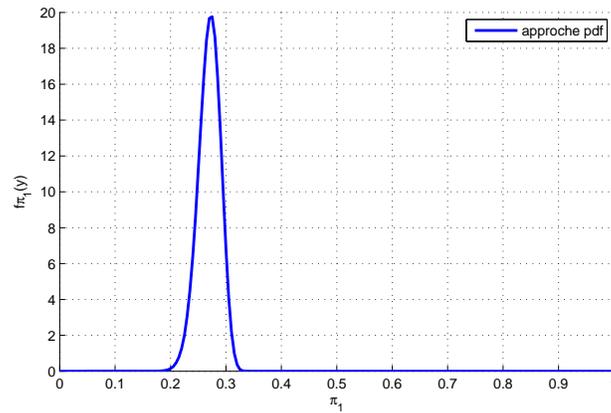
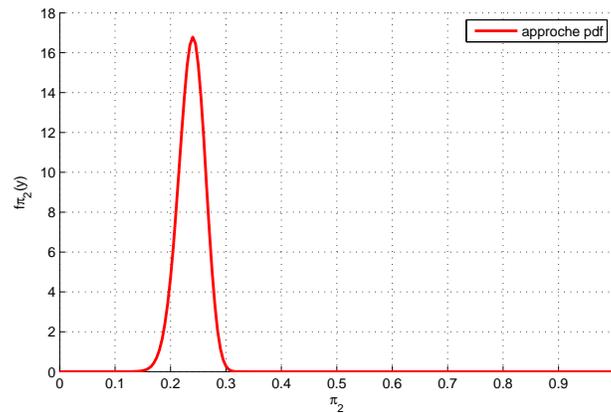
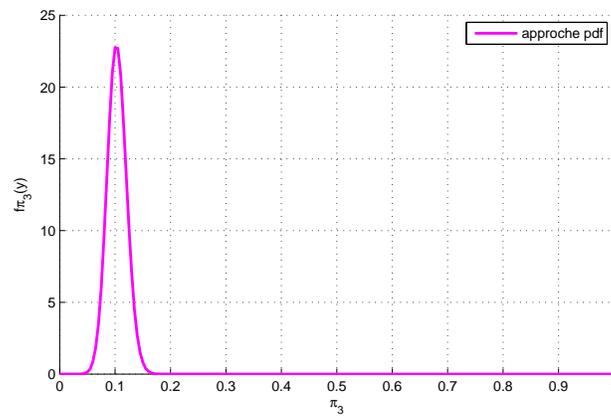


FIGURE 3.3 – Estimation de la densité de probabilité de  $\pi_0$  .

FIGURE 3.4 – Estimation de la densité de probabilité de  $\pi_1$ .FIGURE 3.5 – Estimation de la densité de probabilité de  $\pi_2$ .FIGURE 3.6 – Estimation de la densité de probabilité de  $\pi_3$ .

On remarque que la représentation graphique de la densité estimée des différentes composantes du vecteur de distribution stationnaire a l'allure d'une loi Normale. En utilisant la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire en fonction de la fonction de la densité de probabilité, nous pouvons facilement calculer ces deux métriques. Les résultats associés à ce type de calculs sont donnés dans les tableaux (3.3) et (3.4).

Espérance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. pdf	0.3895	0.2696	0.2375	0.1034

TABLE 3.3 – Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche Pdf.

Variance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. pdf	0.0037	0.0004	0.0006	0.0003

TABLE 3.4 – Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par l'approche pdf.

### 3.1.3 Simulation

Dans cette partie, nous allons simuler les moyennes et les variances des composantes de la distribution stationnaire du modèle de gestion de stocks (R, s, S), tout en utilisant le principe de la simulation Monte-Carlo. Dans cette optique, nous avons conçu l'algorithme 4.

---

**Algorithm 4** Simulation dans le cas d'une seule variable

---

**Début**

**Entrées :** la moyenne ( $\bar{\lambda}$ ), l'écart type ( $\sigma$ ), et ( $n$ ) nombre de réplifications.

**Sorties :**  $\bar{\pi}$  et  $var(\pi)$ ;

**Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire

1. Générer  $\varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$  ;
2. Calculer  $\lambda = \bar{\lambda} + \sigma\varepsilon$  ;
3. Calculer  $\pi$  relative à la  $i^{ieme}$  réplification ;
4. Calculer la moyenne de  $\pi$  correspondante à la  $i^{ieme}$  réplification;

**Fin pour ;**

Calculer la moyenne  $\bar{\pi} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i)$  et la variance  $var(\pi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i)^2 - (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i))^2$ ;

**Fin.**

---

L'exécution de l'algorithme 4 de simulation sous l'environnement Matlab, nous a permis d'obtenir les résultats numériques donnés dans les tableaux (3.5) et (3.6).

Espérance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. simu.	0.3878	0.2703	0.2385	0.1034

TABLE 3.5 – Espérance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par la simulation.

Variance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. simu.	0.0006	0.0000	0.0001	0.0001

TABLE 3.6 – Variance du vecteur de distribution stationnaire obtenue par la simulation.

### 3.1.4 Discussion des résultats

Les résultats obtenus dans cette analyse numérique, relatifs au calcul de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon)$  par les différentes approches utilisées, se résument dans le tableau (3.7).

Espérance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. dir.	0.3895	0.2696	0.2375	0.1034
App. pdf	0.3895	0.2696	0.2375	0.1034
App. simu	0.3878	0.2703	0.2385	0.1034

TABLE 3.7 – Comparaison des résultats obtenus pour l'espérance du vecteur de distribution stationnaire.

D'après ces résultats, on remarque que les valeurs obtenues par les deux premières approches sont approximativement les mêmes. L'utilisation de la simulation Monte-Carlo, nous a permis de confirmer les résultats obtenus avec l'approche de développements en séries de Taylor. On constate également que la somme des composantes de  $\mathbb{E}(\pi(\bar{\lambda} + \sigma\varepsilon))$  est égale à 1. Néanmoins, les valeurs correspondantes au calcul de la moyenne des composantes de la distribution stationnaire dépendent d'une manière directe de la précision de calcul, fixée à l'avance ; c'est-à-dire de l'ordre du polynôme de Taylor  $n$ . Toutefois, le choix d'une précision assez petite, nous permettra de considérer un reste de valeur négligeable. Ce qui signifie une meilleure estimation de la valeur à calculer par le polynôme de Taylor, dans ce cas de degré assez élevé. C'est pour celà que lors de l'application de cette approche, l'estimation du reste de développement demeure encore jusqu'aujourd'hui une question de recherche importante [1, 2].

De même les valeurs correspondantes aux variances de chaque composante de la distribution stationnaire  $\pi$ , calculées par les différentes approches considérées dans notre étude, sont données en tableau (3.8) qui fournit les résultats pour la variance de chaque composante.

Variance	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
App. dir.	0.0037	0.0004	0.0006	0.0003
App. pdf	0.0037	0.0004	0.0006	0.0003
App. simu.	0.0006	0.0000	0.0001	0.0001

TABLE 3.8 – Comparaison des résultats obtenus pour la variance du vecteur de distribution stationnaire.

Dans ce cas, nous remarquons très nettement que les deux valeurs données par l'approche directe et l'approche pdf sont exactement les mêmes. La différence par rapport à la valeur obtenue par l'approche simulation peut être justifiée par les erreurs commises lors du calcul numérique des intégrales. On constate aussi que la variance estimée est proportionnelle à la variation introduite lors de l'introduction de l'incertitude au paramètre du système.

Dans la prochaine section, nous suivrons la même démarche afin d'illustrer l'applicabilité de la méthode de développement en séries de Taylor des chaînes de Markov au cas de la perturbation de plusieurs paramètres. Notre analyse se réduit juste au cas de l'approche directe et à celle de la simulation de Monte-Carlo.

## 3.2 Modèle de gestion de stocks ( $Q, r$ ) avec retours

Considérons un système de gestion des stocks mono article de type  $(Q, r)$ . Nous supposons que les demandes et les retours du produit suivent deux processus de Poisson indépendants de taux  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement. La capacité maximale du stock est  $Q$ . Lorsque le niveau du stock le permet, les demandes sont satisfaites, sinon les clients attendent les prochaines périodes jusqu'à la satisfaction de leurs demandes. Quand le niveau du stock atteint le seuil  $Q$ , tout retour arrivé sera rejeté. Un produit retourné est vérifié puis réparé avant sa remise en stock. En outre, nous supposons que seulement une proportion, disons  $\alpha \times 100\%$ , du produit retourné est réparable et qu'un retour irréparable sera rejeté. On suppose que la période de vérification/réparation d'un produit retourné est négligeable. Pour plus de détails, considérons les notations suivantes liées à la description de ce modèle :

- (i)  $\lambda^{-1}$  : le temps moyen d'inter-arrivées des demandes ;
- (ii)  $\mu^{-1}$  : le temps moyen d'inter-arrivées des retours ;
- (iii)  $\alpha$  : la probabilité qu'un produit retourné soit réparable ;
- (iv)  $Q$  : capacité maximale du stock ;
- (v)  $I$  : coût de gestion des stocks unitaire,

(vi)  $R$  : coût de lancement d'une seule commande.

De plus, nous supposons que le délai de livraison soit nul. Pour simplifier la description, nous supposons aussi que le point de commande  $r = 0$ . Suivant la règle de contrôle  $(Q, 0)$ , une commande de complétude de taille  $Q$  est placée à chaque fois que le niveau du stock est égale à 0. Si le niveau du stock est égal à 0 et il y a une demande arrivant, alors une commande de taille  $(Q + 1)$  est lancée. La quantité commandée est telle que la demande qui vient d'arriver est satisfaite et que le niveau du stock soit remis à sa valeur initiale  $Q$ ; voir la figure 3.7 ([14]). En fait, l'état  $(-1)$  n'existe pas dans la chaîne de Markov; voir par exemple la figure 3.8 ([14]).

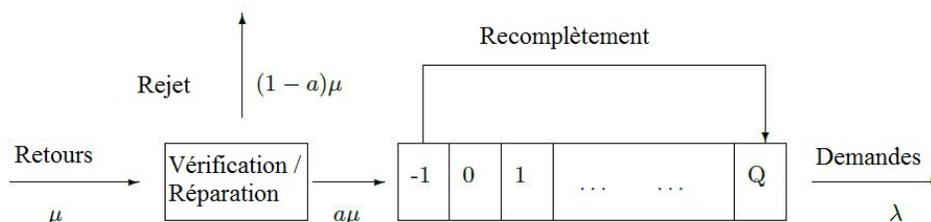


FIGURE 3.7 – Système de gestion des stocks mono échelon.

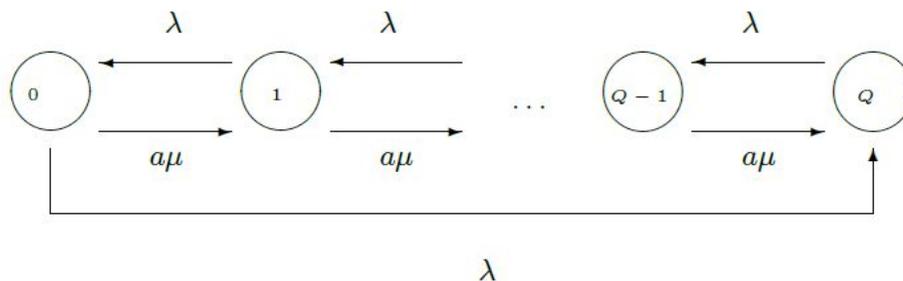


FIGURE 3.8 – La chaîne de Markov décrivant le modèle  $(Q, r)$  avec retours.

La matrice des probabilités de transition associée à la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle de gestion de stocks  $(Q, r)$  avec retours est donnée comme suit :

$$P = Q \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mu/\lambda + \alpha\mu & 0 & \lambda/\lambda + \alpha\mu \\ \lambda/\lambda + \alpha\mu & 0 & \alpha\mu/\lambda + \alpha\mu & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \lambda/\lambda + \alpha\mu & 0 & \alpha\mu/\lambda + \alpha\mu \\ 0 & & & \lambda/\lambda + \alpha\mu & 1 - \lambda/\lambda + \alpha\mu \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire  $\pi$  relative au modèle décrit ci-dessus satisfait :

$$\begin{cases} \pi P = \pi. \\ \pi \mathbf{1} = 1, \end{cases}$$

où  $\mathbf{1}$  est le vecteur unité.

Dans ce qui suit, nous changeons les quelques hypothèses statistiques mentionnées déjà ci-dessus. En effet, nous considérons le même modèle de gestion de stocks (Q, r) avec retours, où les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont déterminés avec incertitude épistémique. Ce nouveau modèle est décortiqué avec plus de détails en sous-section suivante.

### 3.2.1 Nouveau modèle

Dans l'objectif de prendre en considération l'incertitude épistémique infligée à la détermination des deux taux  $\lambda$  et  $\mu$ , impliqués dans la description du modèle de gestion de stocks (Q, r) avec retours, nous proposons une nouvelle forme pour ces deux paramètres qui est la suivante :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1, \quad (3.8)$$

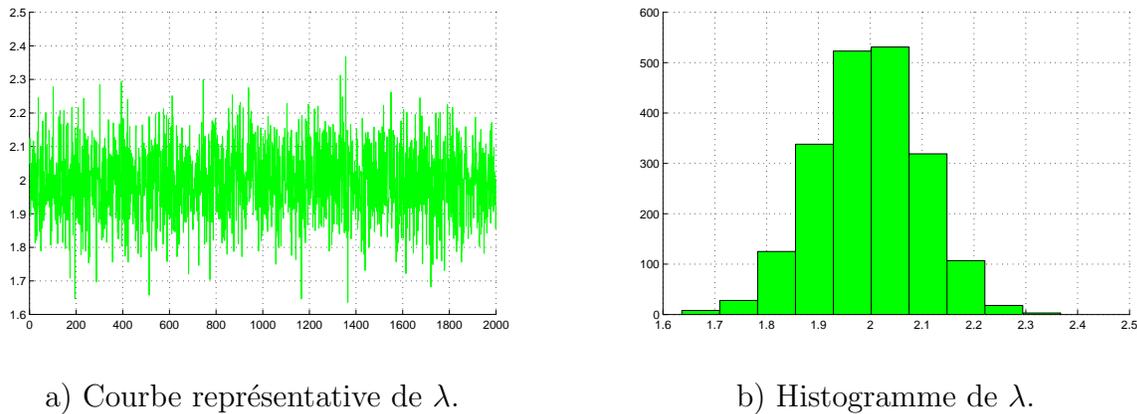
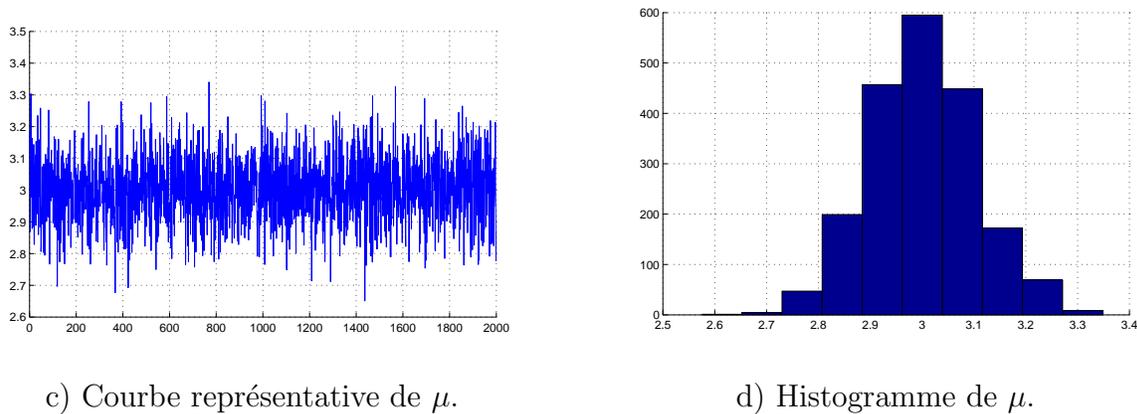
et

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2. \quad (3.9)$$

où  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\mu}$  sont les moyennes des variables aléatoires  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les écarts type relatifs aux deux variables  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement, et  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont deux variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ).

Durant toute l'analyse numérique de ce modèle, nous fixons les valeurs de ses paramètres comme suit :  $\alpha = 0.6$ ,  $\bar{\lambda} = 2$ ,  $\mu = 3$ ,  $Q = 3$ , et  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ .

Les figures suivantes nous montrent les résultats de la simulation des variables aléatoires  $\lambda$  et  $\mu$ .

FIGURE 3.9 – Simulation de la variable aléatoire  $\lambda$ .FIGURE 3.10 – Simulation de la variable aléatoire  $\mu$ .

L'incertitude épistémique infligée sur les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  se propage au niveau de la distribution stationnaire  $\pi$  du modèle en question. Ce qui nous ramène à l'analyse analytique ou fonctionnelle de cette distribution. Et afin, de mener cette analyse à terme, nous proposons de procéder par l'approche basée sur les développements en séries de Taylor développée par Takhedmit et al. [31].

### 3.2.2 Développement en série de Taylor

Dans cette section, nous considérons la généralisation de l'analyse effectuée dans la section précédente pour le cas de la perturbation d'un seul paramètre. En effet, nous utilisons l'approche de développements de Taylor des chaînes de Markov pour la perturbation de plusieurs paramètres établit dans [31]. Cette approche sert comme outil pour mesurer l'impact de l'incertitude épistémique au niveau des deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sur le comportement de la distribution stationnaire. Ainsi, nous posons à nouveau le problème d'évaluation des métriques de performance du modèle étudié sous l'incertitude paramétrique. En particulier, nous nous intéresserons à la propagation

analytique de ce type d'incertitude à travers le calcul de la distribution stationnaire. Pour ce faire, nous considérons le développement de Taylor de la distribution stationnaire au voisinage du point  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ , devenue variable aléatoire, donné par [31] :

$$\pi(\bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1, \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} \pi}{\partial^i \lambda \partial^j \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) (\sigma_1 \varepsilon_1)^i (\sigma_2 \varepsilon_2)^j. \quad (3.10)$$

Du point de vue pratique, afin d'utiliser la formule (3.10) introduite ci-dessus, nous sommes obligés de tronquer cette série infinie. Par conséquent, nous nous limitons à la somme des  $n$  premiers termes de celle-ci, ce qui induit le polynôme de Taylor de degré inférieur ou égal à  $n$ . De ce fait, nous sommes encore confrontés au problème d'estimation du reste de ce développement de Taylor afin de déterminer le degré du polynôme. Dans ce sens, nous proposons la forme du reste donnée par [31] :

$$R(n, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} \pi}{\partial^i \lambda \partial^j \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) (\sigma_1 \varepsilon_1)^i (\sigma_2 \varepsilon_2)^j. \quad (3.11)$$

Dans l'optique de trouver une valeur de l'ordre de développement, nous avons suivi les étapes décrites dans l'algorithme suivant : Si on fixe la précision du calcul à  $\xi = 3 \times 10^{-5}$ , on constate

---

**Algorithm 5** Le reste dans le cas de deux variables

---

**Début**

**Entrées** : la précision  $\xi$ , les moyennes  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  et les écarts types  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ;

**Sorties** : l'ordre  $n$  du polynôme de Taylor, la valeur du reste  $R_n(\lambda, \mu)$ ;

1. Calculer les coefficients du polynôme de Taylor :

$$\frac{\partial^n \pi}{\partial^i \lambda \partial^{n-i} \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{k+l=n} C_i^k C_{n-i}^l \frac{\partial^{(k+l)} \pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\partial \lambda^k \partial \mu^l} \left( \frac{\partial^{n-(k+l)} P_{\lambda, \mu}}{\partial \lambda^{i-k} \partial \mu^{n-i-l}} \right) Z_{\lambda, \mu};$$

2. Calculer le reste à l'aide de la formule 3.11.

3. Calculer  $\|E(R_n(\lambda, \mu)) + Var(R_n(\lambda, \mu))\|$ ;

**tant que**  $\|E(R_n(\lambda, \mu)) + Var(R_n(\lambda, \mu))\| > \xi$  alors

    1. Calculer le reste à l'aide de la formule 3.11.

**Fin tant que** ;

**Fin.**

---

qu'à partir de l'ordre  $n = 3$ , on obtient une valeur correspondante au reste (3.11) qui est inférieure à  $\xi$ . La valeur obtenue de ce reste est :

$$R_3 = \left( 0.1042 \quad 0.1478 \quad 0.1691 \quad 0.2172 \right) \times 10^{-4}.$$

La formule du développement de Taylor pour deux variables à l'ordre  $n = 3$ , peut alors s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}
\pi(\bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1, \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2) &= \pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{\partial \pi}{\partial \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_2 \varepsilon_2 \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda \partial \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1 \varepsilon_1 \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \mu^2}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_2^2 \varepsilon_2^2 \right] \\
&+ \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^3 \pi}{\partial \lambda^3}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^3 \varepsilon_1^3 + 3 \frac{\partial^3 \pi}{\partial \lambda^2 \partial \mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^2 \varepsilon_1^2 \sigma_2 \varepsilon_2 + 3 \frac{\partial^3 \pi}{\partial \lambda \partial \mu^2}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1 \varepsilon_1 \sigma_2^2 \varepsilon_2^2 \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^3 \pi}{\partial \mu^3}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_2^3 \varepsilon_2^3 \right] + R_3(\sigma_1 \varepsilon_1, \sigma_2 \varepsilon_2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Selon les nouvelles hypothèses statistiques introduites ci-dessus, la distribution stationnaire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1, \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2)$  devient alors une variable aléatoire. Par conséquent, pour évaluer celle-ci, nous procédons au calcul de son espérance mathématique et de sa variance, et ce tout en utilisant l'approche des développement de Taylor décrite précédemment, ainsi que la technique de la simulation Monte-Carlo.

1. **Approche directe** : Par cette approche, nous estimons l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1, \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2)$ , et ce en calculant l'espérance et la variance du polynôme de Taylor. Dans notre analyse numérique, nous intégrons la corrélation entre les deux variables aléatoires  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . La procédure de ce calcul est résumé dans l'algorithme 6.

Le déroulement de l'algorithme 6 pour les valeurs suivantes :  $Q = 3$ ,  $r = 0$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\bar{\lambda} = 2$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\bar{\mu} = 3$ ,  $\sigma_2 = 0.1$ , nous a permis d'obtenir les résultats numériques suivants.

La matrice des probabilités de transition évaluée autour du point  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.4737 & 0 & 0.5263 \\ 0.5263 & 0 & 0.4737 & 0 \\ 0 & 0.5263 & 0 & 0.4737 \\ 0 & 0 & 0.5263 & 0.4737 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de distribution stationnaire correspondant aux mêmes valeurs est donné par :

$$\pi = (0.1105 \quad 0.2100 \quad 0.2995 \quad 0.3800)$$

**Algorithm 6** L'approche directe à deux variables**Début**

**Entrées** : la précision  $\xi$ , les moyennes  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  et les écarts types  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$   
et l'ordre du polynôme de Taylor  $n$ ;

**Sorties** : Espérance  $\mathbb{E}(\pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}))$  et la variance  $\text{Var}(\pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}))$ ;

**Pour**  $\rho = [-1 : 0.1 : 1]$  faire

1. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(\pi(\lambda, \mu)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\pi}{\partial^i\lambda\partial^j\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^i \sigma_2^j \mathbb{E}(\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j)$ ;

avec  $\mathbb{E}(\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j) = \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left(\frac{\varepsilon_1^2 - 2\rho\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}{2}\right)}$ ;

1. Calculer la variance

$$\text{Var}(\pi(\lambda, \mu)) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\pi}{\partial^i\lambda\partial^j\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^i \sigma_2^j (\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j) \right)^2 - \left[ \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\pi}{\partial^i\lambda\partial^j\mu}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \sigma_1^i \sigma_2^j (\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j) \right) \right]^2$$

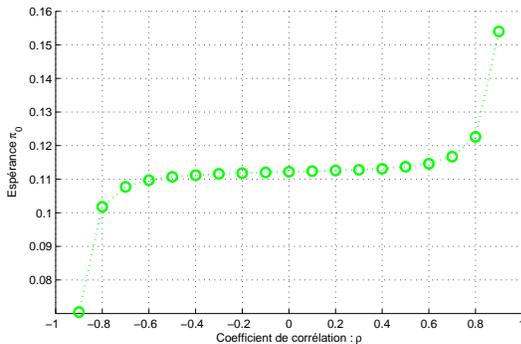
**Fin pour** ;

**Fin.**

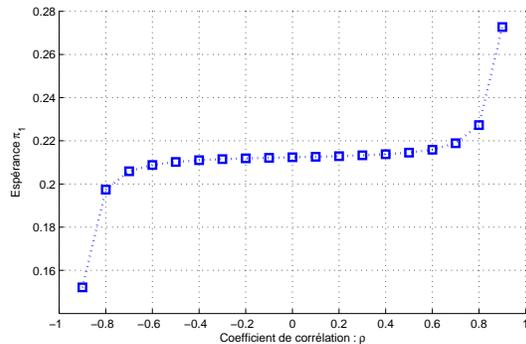
La matrice fondamentale relative à la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle en question est donnée par :

$$Z = \begin{pmatrix} 0.9675 & 0.1483 & -0.1901 & 0.0743 \\ 0.3985 & 0.9671 & -0.0222 & -0.3435 \\ -0.0004 & 0.2092 & 0.7967 & -0.0055 \\ -0.2104 & -0.1898 & 0.2277 & 1.1725 \end{pmatrix}$$

Les autres résultats numériques obtenus relatifs à la moyenne et à la variance de la variable aléatoire  $\pi(\bar{\lambda} + \sigma_1\varepsilon_1, \bar{\mu} + \sigma_2\varepsilon_2)$  sont illustrés dans les figures ci-dessous.

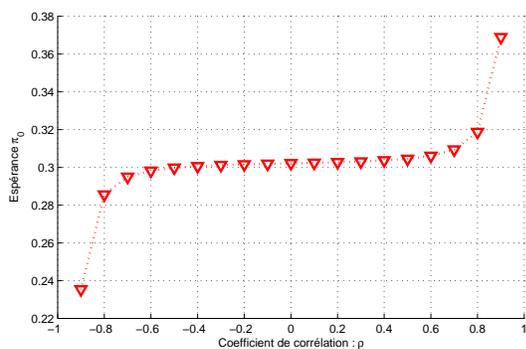


(a) Estimation de l'espérance pour  $\pi_0$ .

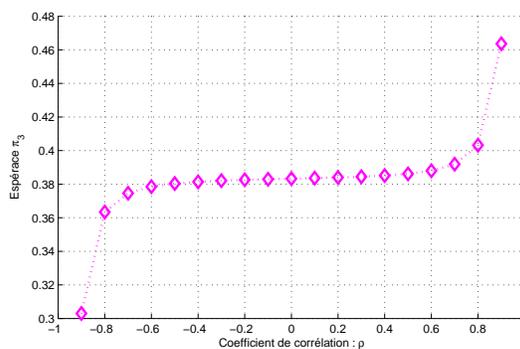


(b) Estimation de l'espérance pour  $\pi_1$ .

FIGURE 3.11 – Allure de l'espérance de  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1$ , en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$ .



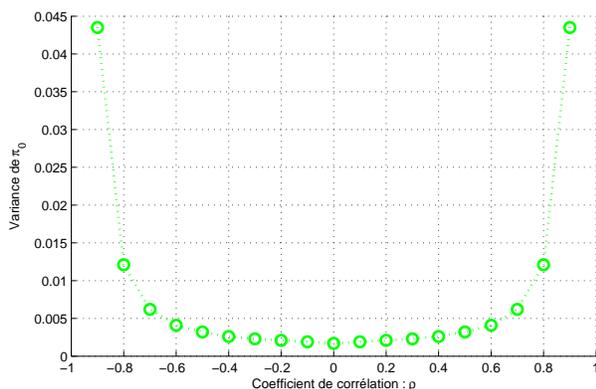
(c) Estimation de l'espérance pour  $\pi_2$ .



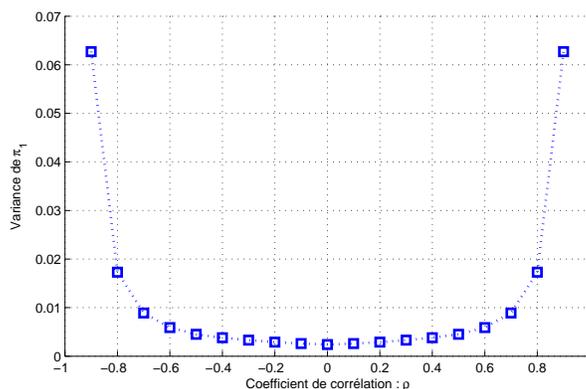
(d) Estimation de l'espérance pour  $\pi_3$ .

FIGURE 3.12 – Allure de l'espérance de  $\pi_i$ ,  $i = 2, 3$ . en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$ .

On remarque que la somme des espérances en chaque valeur du coefficient de corrélation  $\rho$  est autour de 1. De même, d'après ces figures, on constate l'effet de la corrélation entre les deux variables aléatoires  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sur la valeur moyenne de chaque composante. Cela est illustré clairement par la variation des valeurs de ces composantes par rapport au changement des valeurs de  $\rho$ .

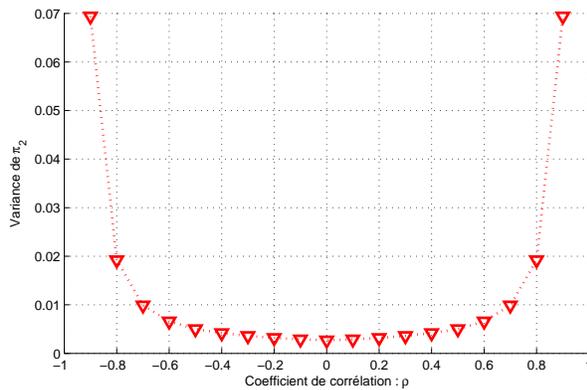
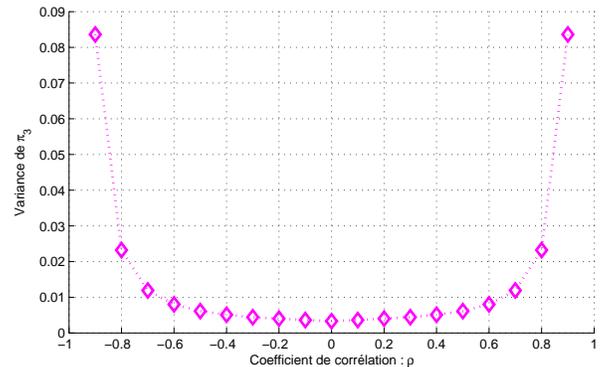


(a) Estimation de la variance pour  $\pi(0)$ .



(b) Estimation de la variance pour  $\pi(1)$ .

FIGURE 3.13 – Allure de la variance de  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1$ . en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$ .

(c) Estimation de la variance pour  $\pi(2)$ .(d) Estimation de la variance pour  $\pi(3)$ .FIGURE 3.14 – Allure de la variance de  $\pi_i$ ,  $i = 2, 3$ , en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$ .

De même, on constate que les valeurs de la variance sont très petites, surtout quand le coefficient de corrélation  $\rho$  est proche de 0. Cela veut dire que l'estimation de chaque composante est meilleure pour le cas de l'indépendance entre les deux variables  $\lambda$  et  $\mu$ .

### 3.2.3 Simulation Monte-Carlo

Afin de valider les résultats obtenus précédemment, nous avons opté à les comparer avec ceux qu'on obtiendra avec la technique de simulation Monte-Carlo. Cependant, nous limiterons cette confrontation des résultats numériques au cas de  $\rho = 0$ , c'est-à-dire au cas de l'indépendance des deux variables aléatoires  $\lambda$  et  $\mu$ .

---

**Algorithm 7** Simulation dans le cas de deux variables (cas d'indépendance)

---

**Début**

**Entrées :** les moyennes ( $\bar{\lambda}$ ) et ( $\bar{\mu}$ ), les écarts type ( $\sigma_1$ ) et ( $\sigma_2$ ), et ( $n$ ) nombre de réplifications.

**Sorties :**  $\bar{\pi}$  et  $var(\pi)$ ;

**Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire

1. Générer  $\varepsilon_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$  ;  $\varepsilon_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$  ;
2. Calculer  $\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_1 \varepsilon_1$  ;  $\mu = \bar{\mu} + \sigma_2 \varepsilon_2$
3. Calculer  $\pi$  relative à la  $i^{ieme}$  réplification ;
4. Calculer la moyenne de  $\pi$  correspondante à la  $i^{ieme}$  réplification;

**Fin pour ;**

Calculer la moyenne  $\bar{\pi} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i)$  et la variance  $var(\pi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i)^2 - (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(i))^2$ ;

**Fin.**

---

Cette simulation est déroulée, selon l'algorithme 7, pour les mêmes valeurs des paramètres mentionnées auparavant. Les résultats obtenus par la simulation sont regroupés dans le tableau (3.9)

Simulation	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
Espérance	0.1104	0.2097	0.2993	0.3806
Variance	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

TABLE 3.9 – Les résultats de la simulation du vecteur de distribution stationnaire.

On constate que ces résultats de simulation confirment ceux obtenus par l'approche de développement de Taylor pour la cas de  $\rho = 0$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à la propagation analytique de l'incertitude épistémique infligée dans la détermination de certains modèles stochastiques de gestion de stocks étudiés. La méthode analytique basée sur les développement en séries de Taylor des chaînes de Markov [28, 31], nous a permis d'effectuer facilement une analyse complète de l'incertitude épistémique. Elle nous a permis de calculer l'incertitude des composantes de la distribution stationnaire, leur sensibilité à la variation des paramètres entrants. La corrélation entre certains paramètres a aussi été prise en considération dans cette analyse numérique. La comparaison entre l'incertitude calculée à l'aide de la méthode analytique et les résultats de la méthode Monte-Carlo a montré que la première est équivalente à la deuxième.

# Conclusion générale

L'incertitude est présente dans tous les domaines. En sciences appliquées, lorsqu'il s'agit de prédire des événements futurs grâce à des modèles, d'autres sources d'incertitude s'ajoutent et cette dernière devient difficilement quantifiable. Connaître le degré de précision d'un modèle n'en demeure pas moins essentiel. L'incertitude est un concept très vaste. Peu d'auteurs prennent le temps de la définir. Pour certains, l'incertitude est l'incapacité à connaître le vrai état d'un système. Quant aux autres, l'interprètent comme l'incomplétude de la connaissance en général due à des difficultés intrinsèques à acquérir de la connaissance. Les deux visions sont compatibles puisque l'incapacité à déterminer un état mène nécessairement à une connaissance incomplète.

Plusieurs sources et types d'incertitudes sont traités dans la revue de littérature. Deux grands types se démarquent : l'incertitude paramétrique et l'incertitude de modélisation. La première est l'incertitude des paramètres entrants d'un modèle souvent exprimée à l'aide d'une distribution statistique ou d'un intervalle de confiance. Il est facile d'évaluer l'incertitude qu'elle génère sur les extrants du modèle en la propageant de façon analytique ou statistique. En revanche, le deuxième type est beaucoup plus difficile à quantifier. Il s'agit de l'erreur introduite par la façon dont le modèle est fait. Les présents travaux portent donc sur l'incertitude paramétrique puisque, bien que l'incertitude de modélisation peut être très importante, cette dernière ne peut pas être propagée par définition comme celle des paramètres.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé une méthode analytique, basée les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov [28, 31], très répandue pour propager l'incertitude épistémique infligée dans la détermination de certains paramètres à travers le calcul de la distribution stationnaire de quelques modèles stochastiques de gestion de stocks. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au problème d'incertitude épistémique associée à un seul paramètre dans le modèle de gestion de stocks de type  $(R, s, S)$ , où nous avons considéré l'incertitude infligée dans la détermination du taux d'arrivée des demandes. Nous avons pu estimer les valeurs de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle étudié, tout en caractérisant son espérance, sa variance et sa densité de probabilité. Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux de la simulation Monte-Carlo. Dans un deuxième temps, nous avons élargi notre analyse au cas

de la perturbation de plusieurs paramètres. Plus précisément, nous avons considéré le modèle de gestion de stocks  $(Q, r)$  avec retours, où nous avons supposé que les deux paramètres, le taux d'arrivée des retours et le taux d'arrivée des demandes, sont incertains. En plus, la corrélation entre les paramètres perturbés a été discuté lors du calcul de la distribution stationnaire par l'approche de Taylor. De même, nous avons pu confirmer les résultats obtenus par cette dernière approche par comparaison à ceux de la simulation Monte-Carlo.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche importantes, entre autres :

- ◇ Élargir l'applicabilité de mêmes approches à l'analyse des autres modèles stochastiques de gestion de stocks ;
- ◇ Analyse de la robustesse de la sensibilité des paramètres entrants procurés par la méthode analytique lors de l'analyse de l'incertitude épistémique ;
- ◇ Considérer le problème de l'optimisation robuste dans l'analyse des modèles de gestion de stocks sous l'incertitude épistémique ;
- ◇ Développement de l'approche d'estimation de la fonction de densité de probabilité, des métriques de performance des modèles étudiés, basée sur la méthode de développements en séries de Taylor pour le cas de la perturbation de plusieurs paramètres.

# Bibliographie

- [1] Abbas, K. Berkhout, J. and Heidergott, B. (**2015**) A critical account of perturbation analysis of markovian systems. Research Memorandum 2015-3, Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
- [2] Abbas, K. Heidergott, B. and Aissani, D. (**2013**) A functional approximation for the M/G/1/N queue. Discrete Event and Dynamic Systems **23** : 93 - 104.
- [3] Abbas, K. Heidergott, B. and Aissani, D. (**2010**) A Taylor series approach to the numerical analysis of the M/D/1/N queue. Procedia Computer Science **1** : 1553 -1560.
- [4] Abbas, K. Heidergott, B and Aissani, D (**2011**) A Taylor series expansion approach to the functional approximation of finite queues. Research Memorandum **49**, Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
- [5] Altman, E. E.Avrachenkov, K. , Núñez-queija, R. (**2004**) Perturbation analysis for denumerable markov chains with application to queueing models. Adv. App. Prob **36** : 839-853.
- [6] Arrow, K. J. Karlin, S. and Scarf, H. (**1951**) Optimal inventory policy. Econometrica **19** : 250-272.
- [7] Arrow, K. J. Karlin, S. and Scarf, H. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford University Press, Stanford, CA, (1958).
- [8] Azoulay, E et Avignant, J. Mathématiques1 Analyse : Cours et Exercices, Bayeusaine, France, (1982).
- [9] Baba-Hamed, C. et Benhabib, K. Analyse 1 : Rappels de Cours et Exercices avec Solutions, Office des Publications Universitaires (OPU), Alger, (1990).
- [10] Bachi K. and Abbas K. (**2015**) Taylor Series Expansion Approach for Epistemic Uncertainty Propagation in Markov Reliability Models. Rapport interne, LaMOS, Université de Bejaia.
- [11] Baccelli, F. and Schmidt, V. (**1996**) Taylor series expansions for poisson-driven (max, +)-linear systems. Ann. Appl. Prob. **6** :138 - 185.
- [12] Bernstein, S. (**1996**) Sur l'extension du théorhème limite du calcul des probabilités. Math. Annalen, Bd. **97** : 1 - 59.

- 
- [13] Cao, X. R. (1998) The Maclaurin series for performance functions of Markov chains. *Advances in Applied Probability* **30** : 676-692.
- [14] Ching, W. Yuen, W. and Loh, A. (2003) An inventory model with returns and lateral transshipments. *Journal of Operational Research Society* **54** :636–641.
- [15] Courtois, A. Pillet, M. et Martin-Bonnefous, C. *Gestion de Production, Organisation*, Paris, (2003).
- [16] Démidovitch, B. *Recueil d'Exercices et de Problèmes d'Analyse Mathématique*, Editions Mir, Union Soviétique, (1977).
- [17] Dvoretzky, A. Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952) The inventory problem I, cases of known distribution of demand. *Econometrica* **20** : 187-222.
- [18] Dvoretzky, A. Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1952) The inventory problem II, cases of unknown distribution of demand . *Econometrica* **20** : 450-466.
- [19] Dvoretzky, A. Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1953) On the optimal character of the (s, S) policy in inventory theory. *Econometrica* **21** : 586-596.
- [20] Faure, R. *Précis de Recherche Opérationnelle : Méthodes et Exercices d'Application*, DUNOD, France, (1996).
- [21] G.Kemeny, J and Snell, J.L. *Finite Markov Chains With a New Appendix "Generalization of a Fundamental Matrix"*, Springer -Verlag, Berlin, (1960).
- [22] Gong, W.-B. and Hu, J.-Q. (1992) The Maclaurin series of the GI/G/1 queue. *J. Appl. Prob* **29** : 176-184.
- [23] Gratacap, A. et Médan, P. *Management de la Production*, DUNOD, Paris, (2009).
- [24] Harris, F. (1913) How many parts to make at once. *Factory (The magazine of management)* **10** : 135-136.
- [25] Hêche, J. Liebling, T. et De Werra, D. *Recherche Opérationnelle pour Ingénieurs 2*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (2003).
- [26] Heidergott, B. Hordijik, A. (2003) Taylor series expansions for stationary Markov chaînes. *Adv Appl Probab* **35** : 1046 - 1070.
- [27] Heidergott, B. Hordijik, A and Van Uitert, M. (2007) Series expansions for finite-state Markov chaînes. *PEIS* **21** : 381-400.
- [28] Ouazine S. and Abbas K. (2015) Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation. Article accepté pour publication.
- [29] Rabta, B. end Aïssani, D. (2005) Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *Intenational journal of production economics* **97** : 159-171.

- [30] Scarf, H. **(1960)** The optimality of (s, S) policies in the dynamic inventory problem. Stanford University Press. 196–202.
- [31] Takhedmit, B. Ouazine, S. and Abbas, K **(2015)** Numerical analysis and optimization of GI/M/1/N queue with vacations. LaMOS, Université de Bejaia. Article soumis pour publication.
- [32] Taylor, B. Methodus incrementorum directa and inversa, Inny, (1717).
- [33] Veinott, A., Wagner, H.**(1965)** Computing optimal (s, S) policies. Management Sciences **11** : 525–552.
- [34] Wagner, Harvey M. Principles of Operations research with Applications to Managerial Decisions. Printice-Hall,New Jersey, (1969) .
- [35] Zazanis, M. **(1992)** Analyticity of poisson-driven stochastic systems. Adv. Appl. Prob **24** : 532-541.

# *Résumé*

Dans ce mémoire, nous avons analysé la propagation analytique, par l'approche basée sur les développements de Taylor, de l'incertitude épistémique infligée à certains paramètres dans la distribution stationnaire de deux modèles stochastiques de gestion de stocks, à savoir le modèle  $(R, s, S)$  et le modèle  $(Q, r)$  avec retours. Une perturbation d'un seul paramètre a été discutée dans le premier modèle et une perturbation de plusieurs paramètres dans le second. En outre, nous avons également analysé l'effet de la corrélation entre les paramètres perturbés. La validation des résultats numériques obtenus a été réalisée, par une comparaison avec ceux obtenus par la technique de simulation Monte-Carlo.

**Mots-clés :** Modèle de gestion de stocks ; Incertitude épistémique ; Chaînes de Markov ; Matrice fondamentale ; Développement de Taylor ; Simulation Monte-Carlo.

# *Abstract*

In this thesis, we have analyzed the analytical propagation via the Taylor series expansion of the epistemic uncertainty inflicted on certain parameters in the stationary distribution of two inventory stochastic models, namely the model  $(R, s, S)$  and the model  $(Q, r)$  with feedback, where a perturbation of a single parameter was discussed in the first model, and the one involving the disruption of several parameters in the second model. In addition, we have also analyzed the effect of the correlation between the perturbed parameters. The validation of the obtained numerical results was performed by comparing with those obtained by the Monte-Carlo simulation technique.

**Keywords :** Inventory model ; Epistemic uncertainty ; Markov chains ; Fundamental matrix ; Taylor series expansion ; Monte-Carlo simulation.