

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A. Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

En

Recherche Opérationnelle

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Étude comparative de quelques techniques de troncature

des chaînes de Markov :

Application à un réseau de files d'attente de type

”overflow”

Présenté par : Titouah Abdelhafid

Soutenu le 28 juin 2012 devant le jury composé de :

Présidente	M ^{me} S. Hakmi	M. A. B	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteur	M ^r K. Abbas	M. C. B	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteur	M ^{me} K. Adel	M. A. A	U. A/Mira Béjaïa.
Examinatrice	M ^{me} O. Iamouchene	M. C. B	U. A/Mira Béjaïa.
Examinatrice	M ^{elle} S. Hocine	M. A. B	U. A/Mira Béjaïa.

Remerciements

J'aimerais remercier avant tout, Dieu Tout-Puissant, de m'avoir donné la force et la puissance de pouvoir mener ce travail à terme.

Un grand merci à ma famille pour sa présence, sa préoccupation et son souci qu'il se fait pour moi, son encouragement et son suivi, avec patience, du déroulement de mon projet.

Je tiens également à remercier *M^r* **K. Abbas**, mon promoteur, et *M^{me}* **K. Adel**, mon co-promoteur pour l'honneur qu'ils m'ont fait en assurant la direction du présent mémoire. Je les remercie pour leurs précieux conseils et orientations.

Je remercie les membres du Jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes parents.

A mes frères et soeurs.

A mes amis.

A mes enseignants.

A mes amis de la R.O.

Table des matières

Liste des figures	VI
Liste des tableaux	VII
Introduction générale	1
1 Concepts des chaînes de Markov	4
1.1 Processus stochastiques	4
1.1.1 Définitions	5
1.1.2 Processus Markoviens	5
1.2 Chaînes de Markov à temps discret	5
1.2.1 Définitions et propriétés	5
1.3 Exemples	6
1.3.1 File d'attente en temps discret	6
1.3.2 Gestion de stocks	6
1.4 Chaînes de Markov discrètes	7
1.4.1 Classification des états d'une chaîne de Markov	7
1.4.2 Classification des chaînes de Markov discrètes	8
1.5 Comportement asymptotique des chaînes irréductibles	11
1.5.1 Régime transitoire	11
1.5.2 Régime permanent	11
1.5.3 Existence d'une distribution limite	11
1.5.4 Distribution invariante	12
1.5.5 Comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques	13
1.5.6 Notion d'ergodicité	13
2 Réseaux et systèmes de files d'attente	15
2.1 Description d'une file simple	16

2.1.1	Étude mathématique d'un système d'attente	18
2.2	Files d'attente markoviennes	19
2.2.1	File d'attente $M/M/1$	19
2.2.2	File d'attente $M/M/1/K$	22
2.2.3	File d'attente $M/M/C$	24
2.2.4	File d'attente $M/M/\infty$	26
2.3	Méthodes d'analyse des systèmes non markoviens	27
2.4	Réseaux de files d'attente	28
2.4.1	Réseaux ouverts	28
2.4.2	Réseaux fermés	30
2.4.3	Réseaux multiclassés	30
2.4.4	Réseaux de files d'attente à capacité limitée	31
2.4.5	Réseaux de files d'attente ouverts à contrainte de population	31
2.5	Réseaux de files d'attente à forme produit	31
2.5.1	Réseaux mono-classes ouverts markoviens	32
2.5.2	Réseaux mono-classes fermés markoviens	35
2.6	Stabilité des systèmes et réseaux de files d'attente	36
2.6.1	Méthode des fonctions tests	37
2.6.2	Méthode métrique	37
2.6.3	Méthode de renouvellement	37
2.6.4	Méthode de convergence faible	37
2.6.5	Méthode de stabilité forte	37
2.6.6	Méthode de stabilité uniforme	38
3	Troncature de l'espace d'états des chaînes de Markov infinies	39
3.1	Principe de la troncature des chaînes de Markov	40
3.2	Principales techniques de la troncature	40
3.2.1	Augmentation linéaire	40
3.2.2	Renormalisation	41
3.3	Convergence de la distribution stationnaire π_Q vers la distribution π	42
3.4	Distance uniforme	44
3.5	Distance entre les distributions stationnaires	44
3.6	Vitesse de convergence	45
3.7	Exemple illustratif sur les techniques de troncature	48
3.7.1	Techniques de l'augmentation linéaire	49
3.7.2	Technique de la renormalisation	52

4	Troncature d'espace d'états infini d'un réseau de files d'attente overflow	53
4.1	Préliminaire et notations	54
4.1.1	Borne de stabilité forte	54
4.2	Description du modèle	55
4.2.1	Position du problème	56
4.3	Troncature de l'espace d'états du modèle overflow	57
4.3.1	Augmentation de la première colonne	58
4.3.2	Renormalisation	61
4.3.3	Augmentation uniforme	64
5	Étude comparative de quelques techniques de troncature	67
5.1	Application numérique	68
5.1.1	Environnement MATLAB	68
5.1.2	Algorithme de calcul de la borne de stabilité forte	68
5.1.3	Résultats numériques obtenus par application des trois techniques	70
5.2	Comparaison des résultats	74
	Conclusion générale	75
	Bibliographie	77
	Annexe	81

Table des figures

2.1	Système de files d'attente à un seul serveur.	16
2.2	Graphe représentatif du processus de naissance et de mort.	20
2.3	File d'attente M/M/1/K	22
2.4	Graphe de transition associé à la file M/M/1/K.	22
2.5	File d'attente M/M/C.	24
2.6	Graphe de transition associé à la file M/M/C.	25
2.7	File d'attente M/M/ ∞	26
2.8	Graphe de naissance et de mort associé à la file M/M/ ∞	26
2.9	Réseau de files d'attente ouvert.	29
2.10	Routage vers la file la plus courte.	29
2.11	Routage cyclique.	30
2.12	Réseau de files d'attente fermé.	30
2.13	Réseau de files d'attente à capacité limitée.	31
2.14	Réseau ouvert à contrainte de population.	31
2.15	Réseau de Jackson ouvert.	33
2.16	Un réseau de type Gordon-Newell.	35
4.1	Réseau de files d'attente "overflow".	56
4.2	La perturbation considérée.	56
5.1	Organigramme de l'algorithme	70
5.2	Les deux bornes obtenues par l'augmentation de la première colonne	71
5.3	Les deux bornes obtenues par la renormalisation	72
5.4	Les deux bornes obtenues par l'augmentation uniforme	73

Liste des tableaux

5.1	Résultats obtenus par l'augmentation de la première colonne.	71
5.2	Résultats obtenus par la renormalisation.	72
5.3	Résultats obtenus par l'augmentation uniforme	73

Introduction générale

Depuis le dernier siècle, les systèmes dynamiques déterministes, continus (y compris leurs versions à temps discret) constituent une pierre angulaire des sciences de l'ingénieur et souvent venus enrichir l'économie et les sciences du management. Or on s'est vite aperçu que l'incertain était un élément incontournable dans toutes ces applications, d'où la place importante qu'y occupent aujourd'hui les processus stochastiques [24].

Actuellement, une réelle prise de conscience de la nécessité de cohabiter au mieux avec de l'incertain et de se servir pour y parvenir de tous les outils à disposition et en particulier des mathématiques. Parmi les processus stochastiques les plus importants, on trouve "*les chaînes de Markov*". Ces processus sont à la base de bien des modèles de recherche opérationnelle, en particulier dans la gestion des stocks et la modélisation de systèmes de production. Les chaînes de Markov constituent en outre le point de départ de la "*théorie des files d'attente*". Conçue au début du siècle passé pour modéliser les phénomènes de congestion dans les réseaux téléphoniques, cette théorie connaît un nouvel essor avec ses applications en informatique, en télécommunications et surtout dans le contexte de l'internet [24]. Par conséquent, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outil puissant pour l'analyse et l'optimisation de performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques et les réseaux de communication. L'analyse stochastique (méthodes exactes [6], méthodes d'approximation [41]), et plus récemment, l'analyse opérationnelle [17], donnent une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de files d'attente.

L'approximation d'une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable par des chaînes de Markov à espace d'états fini est toujours considérée comme un axe de recherche très intéressant. Cet axe a récemment attiré l'attention de plusieurs chercheurs du domaine. Généralement, de point de vue technique, lorsqu'on cherche à déterminer la distribution stationnaire, si elle existe, d'une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable, la matrice des probabilités de transition de cette chaîne de Markov doit-être tronquée, dans un certain sens, à une matrice finie. Puis, on calcule la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov à espace d'états fini comme approximation de celle à espace d'états dénombrable. Sous la condition que lorsque le niveau de

la troncature (ou la taille) tend vers l'infini, la solution de la chaîne de Markov finie converge vers celle de la chaîne de Markov à espace d'états dénombrable. Tandis que pour plusieurs problèmes pratiques la justification de la convergence doit-être établie par des significations physiques par rapport aux chaînes de Markov à espace d'états fini ou dénombrable. Cela n'a jamais été facile à justifier formellement.

L'étude d'approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov infinie par des chaînes de Markov finies a été initiée par Seneta [43] en 1967. Depuis les travaux de cet auteur à ce jour, plusieurs résultats ont été obtenus. Les issues générales liées à cette problématique sont discutées dans [15]. L'objectif de notre travail est de considérer une analyse numérique afin de comparer quelques bornes de perturbations obtenues lors de l'étude d'un réseau de files d'attente de type "overflow" par application de la méthode de stabilité forte [1], tout en utilisant quelques techniques de troncature. La particularité de cette étude par rapport aux autres étant que leur approximation (d'une chaîne de Markov infinie) est orientée vers le cas d'approximation uniforme de la chaîne initiale, et ce en utilisant la norme poids [33]. A notre connaissance, ce problème n'a été traité que très partiellement dans l'ouvrage de Kalashnikov et Rachev [29] (voir Chapitre 5), tout en utilisant la norme de la variation totale.

Dans ce mémoire, nous considérerons une application numérique sur un modèle de files d'attente à deux dimension pour lequel on ne peut pas exhiber une expression explicite sous forme produit pour la distribution stationnaire. Le calcul numérique est alors exigé afin dévaluer ses mesures de performance, telles que les probabilités stationnaires de son état, le nombre moyen de clients dans le réseau ou le temps moyen de séjour. Vu la taille de ses états qui est infinie, la troncature est ainsi requise. Le modèle considéré dans l'étude de Adel et al. [1] est un réseau de files d'attente de type "overflow". Ce modèle n'a pas de solution sous forme produit pour la distribution stationnaire conjointe de la taille de la file [27]. Le flux "overflow" est connu d'être un modèle hyperexponentiel [50]. En effet, une telle station "overflow" peut-être analysé séparément comme étant le système de file d'attente $GI/M/s$, mais même dans ce cas cela, cependant, nous exige des procédures de calcul très complexes pour des valeurs assez grande de s [16] (voir pp. 270 – 275). Ce même modèle a été considéré par Van Dijk [49], où il a utilisé l'approche de récompensation afin d'estimer l'erreur de la troncature de l'espace d'états associé à la chaîne de Markov décrivant ce modèle.

Un réseau de files d'attente de type "overflow" est composé de deux stations en parallèle, la première station avec perte de clients comporte un seul serveur sans file, et une deuxième station formée d'une file de capacité infinie et d'un unique serveur. L'arrivée d'un client vers le système est assignée pour la station 1 si son serveur est disponible. Sinon, il est acheminé directement vers la station 2.

Dans ce travail, nous réaliserons quelques applications numériques afin de comparer certaines techniques de la troncature de l'espace d'états des chaînes de Markov, à savoir l'augmentation de la première colonne, la renormalisation et l'augmentation uniforme. Cela nous permettra de juger la qualité des bornes de perturbation obtenues par application de la méthode de stabilité forte [1]. Ce mémoire est organisé en cinq chapitres, une conclusion générale, une bibliographie et une annexe.

- ◇ Dans le premier chapitre, on présentera quelques généralités sur les chaînes de Markov. Une attention particulière est portée sur le problème d'existence et de détermination de la solution stationnaire.
- ◇ Le second chapitre comprend une synthèse de quelques résultats concernant les systèmes de files d'attente et notamment ceux relatifs aux réseaux de files d'attente. Ainsi, nous axerons essentiellement notre présentation sur l'aspect stochastique des files d'attente dont les résultats sont importants en pratique, et nous présenterons aussi les différentes approches de stabilité des systèmes et des réseaux de files d'attente.
- ◇ Dans le troisième chapitre, nous aborderons les principales techniques de la troncature et leurs conditions d'applicabilité. Et pour mieux comprendre le concept de la troncature de l'espace d'états des chaînes de Markov un exemple illustratif sera présenté à la fin de ce chapitre.
- ◇ En quatrième chapitre, nous présenterons les principaux résultats théoriques obtenus par Adel et al. [1] dans le cadre d'application de la méthode de stabilité forte afin d'estimer l'erreur commise lors de la troncature de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant le réseau de files d'attente "overflow".
- ◇ Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques obtenus en implémentant sous le logiciel Matlab les algorithmes induits par les résultats théoriques obtenus dans [1]. Une analyse comparative est alors envisagée à ce niveau afin de prédire la meilleure technique de la troncature via la méthode de stabilité forte.

1

Concepts des chaînes de Markov

Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre une classe de processus stochastiques à temps discret dont la définition est assez élémentaire et qui permettent d'autre part une description mathématique de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique (La physique, la biologie, les sciences sociales ou l'informatique, etc). Ainsi, nous introduisons quelques concepts fondamentaux des chaînes de Markov. En particulier, nous nous focaliserons sur le problème d'existence de la distribution stationnaire.

1.1 Processus stochastiques

Les processus stochastiques décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Les processus stochastiques ont pris un énorme essor, non seulement en finance, dans la fiabilité des systèmes, en mécanique statistique ou encore dans les sciences de la vie, mais également dans les techniques appliquées à des problèmes qui au départ n'ont rien à voir avec les probabilités ou le risque. Tel est le cas des méthodes d'optimisation globale, ou du traitement de certains problèmes de l'analyse numérique.

1.1.1 Définitions

Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.

Un processus stochastique est donc une famille de variables aléatoires (non indépendantes).

On appelle espace des états l'ensemble S où les variables $\{X_t\}$ prennent leurs valeurs. Cet espace peut être discret ou continu. De même, le temps peut être discret ou continu.

Une trajectoire d'un processus est décrit par un couple (espace, temps). Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

- Suite stochastique à espace d'états discret ;
- Suite stochastique à espace d'états continu ;
- Processus continu à espace d'états discret ;
- Processus continu à espace d'états continu.

En particulier, si l'ensemble S est fini ou dénombrable le processus est appelé une chaîne

1.1.2 Processus Markoviens

La notion de processus Markovien repose sur le principe de processus sans post action.

On entend un processus pour lequel la probabilité qu'il se trouve dans un état (ou un ensemble d'états) à l'instant t ne dépend que de son état au dernier instant connu $s < t$. Plus précisément, il est défini comme suit :

Un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans l'espace d'états S est satisfait la propriété de Markov si pour tout instant t , et tout sous ensembles d'états $I \subseteq S$, il est vrai que

$$P[X_{t+\Delta} \in I / X_\mu, 0 \leq \mu \leq t] = P[X_{t+\Delta} \in I / X_t], \quad \forall \Delta \geq 0.$$

Un processus stochastique vérifiant la propriété précédente est appelé processus de Markov ou processus Markovien.

1.2 Chaînes de Markov à temps discret

Les chaînes de Markov sont des processus Markovien à temps discrets.

1.2.1 Définitions et propriétés

Une chaîne de Markov à temps discret $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ définie sur un espace d'états S satisfait la propriété de Markov si pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in S$, il vrai que :

$$P[X_n = i / X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = i / X_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (*)$$

Une chaîne de Markov à temps discret est un processus $\{X_n, n \geq 0\}$ satisfaisant les trois restrictions suivantes [20] :

1. Le processus est à temps discret ;
2. L'espace des états S est fini ou dénombrable ;
3. Le processus satisfait la propriété de Markov (*).

1.3 Exemples

1.3.1 File d'attente en temps discret

On considère une file d'attente qui se forme devant un guichet. Dans ce cas, X_n désigne le nombre de clients dans la file en attente plus le nombre de clients qui sont entrain de se faire servir à l'instant n . Entre les instants n et $n + 1$ arrivent Y_{n+1} clients, et si $X_n > 0$ quittent Z_{n+1} clients. On suppose que $X_0, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, \dots$ sont indépendantes, vérifiant $0 < P(Y_n = 0) < 1$, et les Z_n vérifient $P(Z_n = 1) = p = 1 - P(Z_n = 0)$. C'est-à-dire que :

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \mathbb{I}_{\{X_n > 0\}} Z_{n+1}.$$

1.3.2 Gestion de stocks

Une entreprise doit gérer le stock d'un article dont la demande, à chaque période n , est une variable aléatoire D_n de distribution :

$$P[D_n = k] = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Supposons que ce stock soit géré de la manière suivante [20] :

Au début de la période n , le niveau du stock est observé et un réapprovisionnement, dont le délai de livraison est suffisamment court pour qu'il puisse servir à satisfaire la demande de la période, est décidé selon la règle :

- * Si $X_n < s$, commander $S - X_n$ unités ;
- * Si $X_n \geq s$, ne rien commander.

Une telle règle de gestion est connue sous le nom de politique (s, S) où s et S sont deux paramètres donnés.

Au début de la période $n + 1$, le niveau du stock est :

$$X_{n+1} = \begin{cases} S - D_n, & \text{si } X_n < s; \\ X_n - D_n, & \text{si } X_n \geq s. \end{cases}$$

La suite des niveaux de stock $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ définit donc une chaîne de Markov dont l'espace des états est égal à S . De plus, pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i] = \begin{cases} a_k, & \text{si } i < s \text{ et } j = S - k, k = 0, 1, 2, \dots \\ a_k, & \text{si } i \geq s \text{ et } j = i - k, k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{Autrement.} \end{cases}$$

1.4 Chaînes de Markov discrètes

Pour ce type de chaîne de Markov, l'espace des états S est un ensemble dénombrable ou fini.

1.4.1 Classification des états d'une chaîne de Markov

Afin d'aborder le comportement à long terme d'une chaîne de Markov, il nous faut introduire les différents états d'un processus Markovien.

On peut aussi distinguer les états d'une chaîne de Markov par une propriété concernant le renouvellement des états.

- ▷ Un état $j \in S$ est **accessible** à partir d'un état i si la probabilité de transition de i en j en certain nombre d'étapes est positive, i.e. $\exists n > 0$ tel que :

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

- ▷ Si j est accessible à partir de i , et i à partir de j , les états i et j sont dits **communicants**. La communication de i et j sera notée $i \leftrightarrow j$, la relation \leftrightarrow est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence forment une partition de S . Dans ce cas, chaque classe est composée d'états communicants.
- ▷ Une classe est **persistante** si elle correspond à un sommet sans successeur de graphe réduit, dans le cas contraire la classe est **transitoire**.
- ▷ Un état **persistant** s'il appartient à une classe persistante.
- ▷ Un état i est **récurrent** si :

$$F_{ii}(\infty) = 1,$$

où $F_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n f_{ij}(k)$ représente la probabilité pour que la chaîne passant en i atteigne j en moins de $n + 1$ transitions, avec $f_{ij}^{(n)}$ est la probabilité de premier passage. Elle est définie par :

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j).$$

Le temps de premier passage est défini par :

$$T_{ij} = \min\{k > 0 : X_k = j, X_0 = i\}.$$

Les états récurrents eux-mêmes se divisent en deux sous-catégories :

1. **Etats récurrents non nuls :**

Un état i est récurrent non nul si, la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps fini i.e.

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty.$$

2. **Etats récurrents nuls :**

Un état i est récurrent nul si, la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps infini i.e.

$$\mu_i = +\infty.$$

- ▷ Un état i est **transitoire** s'il appartient à une classe transitoire.
- ▷ Un état i est transitoire si, la chaîne partant de i peut ne pas repasser par i ,

$$F_{ii}(+\infty) < 1.$$

Plus précisément :

Il existe trois types d'états : transitoire (on n'y revient pas toujours), récurrents nuls (on y revient toujours, au bout d'un temps moyen infini), ou récurrents positifs (on y revient une infinité de fois, à intervalle de temps finis, en moyenne).

Périodicité d'un état : Un état i est **périodique** de période $d(i)$ si :

$$d(i) = PGCD\{n, p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Si $d(i) = 1$, i est dit **apériodique**,
où *PGCD* est le Plus Grand Commun Diviseur.

Finalement un état est dit **ergodique** s'il est récurrent non nul et apériodique.

- ▷ Un état est **absorbant**, s'il fait à lui seul une classe persistante.

1.4.2 Classification des chaînes de Markov discrètes

1. **Chaînes de Markov homogènes :**

Une chaîne de Markov est homogène (dans le temps) si la probabilité d'effectuer une transition d'un état dans un autre est indépendante de l'instant auquel a lieu cette transition [20]. En d'autres termes, pour toutes paires d'états (i, j) et pour tout instant n

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j / X_{n+k-1} = i], \quad \forall k \geq 0.$$

2. Chaînes de Markov irréductibles :

Les notions de récurrence et d'irréductibilité admettent une caractérisation simple pour les chaînes discrètes.

Définition 1.4.1. *Une chaîne de Markov est irréductible si elle n'est constituée que d'une seule classe d'états communicants.*

On peut aussi faire une classification probabiliste des états d'une chaîne de Markov.

Définissons la probabilité de premier passage :

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j),$$

et le temps de premier passage

$$T_{ij} = \min\{k > 0 : X_k = j; X_0 = i\}.$$

Nous avons alors,

$$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n).$$

Posons :

$$F_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n f_{ij}(k),$$

qui représente la probabilité pour que la chaîne passant en i atteigne j en moins de $(n + 1)$ transitions.

Théorème 1.4.1. [20] *Considérons une chaîne de Markov X_n irréductible. Pour tout $i \in S$:*

$$\tau_i = \inf\{k > 0; X_k = i\}.$$

On voit que τ_i est le temps d'atteindre l'état i , i.e., le temps de premier passage.

Pour tout $i, j \in S$, on a :

$$\mathbb{E}_i(\tau_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(i, j).$$

C'est l'espérance du nombre de passages par j partant de i .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe un état $i \in S$ tel que $\mathbb{E}_i(\tau_i) < +\infty$;
- (b) Pour tout état $i \in S$, $\mathbb{E}_i(\tau_i) < +\infty$;
- (c) La chaîne de Markov possède une probabilité invariante π .

Sous ces conditions, la chaîne est dite récurrente positive et π est la seule probabilité invariante. Pour tout $k \in S$,

$$\pi(k) = \frac{1}{\mathbb{E}_k(\tau_k)},$$

et pour tout $i \in S$,

$$\pi(k) = \frac{1}{\mathbb{E}_i(\tau_i)} \mathbb{E}_i \left(\sum_{n=0}^{\tau_i-1} \mathbb{1}_k(X_n) \right).$$

On dit qu'une suite (X_n) de S tend vers l'infini si pour toute partie finie F de S , X_n n'appartient pas à F pour tout n assez grand.

Définition 1.4.2. *Une chaîne de Markov est irréductible si son graphe représentatif est fortement connexe. Dans le cas contraire la chaîne est réductible.*

Les deux propriétés suivantes qui découlent directement de la définition d'une classe persistante et des états communicants, auraient également pu servir de définition d'une chaîne irréductible.

Propriété 1.4.1. *Une chaîne de Markov est irréductible, si pour tout état i et j , il existe $m \geq 0$ (pouvant dépendre de i et j) tel que :*

$$P_{ij}^{(m)} > 0.$$

Propriété 1.4.2. *Une chaîne de Markov est irréductible si et seulement si toute paire d'états sont communicants.*

Proposition 1.4.1. *Si S est un espace d'états fini, toute chaîne irréductible est récurrente.*

Théorème 1.4.2. *On considère une chaîne de Markov irréductible. Alors, un et un seul des deux cas suivants peut se produire :*

Cas récurrent : *Tous les états sont récurrents et partant de tout point, la chaîne visite une infinité de fois tous les autres, presque sûrement.*

Cas transitoire : *Partant de tout état, X_n tend vers l'infini, presque sûrement.*

3. Chaînes de Markov absorbantes :

Une chaîne de Markov est absorbante si tous ses états persistants sont absorbants, c'est-à-dire si chacune de ses classes persistantes ne comporte qu'un seul état.

Une chaîne possédant des états absorbants n'est pas irréductible (sauf si l'espace des états est réduit à un point).

1.5 Comportement asymptotique des chaînes irréductibles

1.5.1 Régime transitoire

- **Distribution initiale :**

La distribution des états d'une chaîne de Markov après n transition est notée $\pi^{(n)}$.

Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable aléatoire X_n

$$\pi_i^{(n)} = P[X_n = i], \quad \forall i \in S.$$

En l'occurrence, $\pi^{(0)}$ est la distribution initiale.

Remarque 1.5.1. Si l'état initial est connu avec certitude et égal à i , on a simplement $\pi_i^{(0)} = 1$ et $\pi_j^{(0)} = 0$ pour tout $j \neq i$.

- **Comportement transitoire :**

Théorème 1.5.1. [20] *Soit P la matrice de probabilités de transition d'une chaîne de Markov et $\pi^{(0)}$ la distribution de son état initial. Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P, \quad \text{et} \quad \pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^n.$$

1.5.2 Régime permanent

L'étude de comportement à long terme d'une chaîne de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que :

- * La distribution $\pi^{(n)}$ converge-t-elle, lorsque $n \rightarrow \infty$?
- * Si la distribution $\pi^{(n)}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$, quelle est la limite π et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$?
- * Si l'état i est persistant, quelle est la proportion du temps passé dans cet état et quel est le nombre moyen de transition entre deux visites successives de cet état ?
- * Si l'état i est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

1.5.3 Existence d'une distribution limite

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = \pi.$$

Indépendamment de la distribution initiale $\pi^{(0)}$ et si π est une distribution de probabilité.

La convergence d'une chaîne de Markov est donc une propriété qui ne dépend que de la matrice de transition P .

Théorème 1.5.2. [42] (*Théorème d'existence des distributions limites*)

Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors

$$\pi^{(n)} = \pi,$$

quelle que soit la distribution initiale $\pi^{(0)}$, et

$$P^n = P^*,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. π est un vecteur de probabilité strictement positif, et P^* une matrice dont toute les lignes sont identiques au vecteur limite π . En plus

$$\pi P^* = \pi.$$

La matrice P^* est appelée le projecteur stationnaire de la chaîne de Markov en question.

1.5.4 Distribution invariante

Une distribution de probabilité discrète $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ est appelée invariante ou stationnaire par rapport à une matrice stochastique P si

$$\pi = \pi P.$$

En particulier, si la loi de X_0 , notée ν_0 , est une probabilité invariante, alors la loi de X_1 est $\nu_1 = \nu_0 P = \nu_0$, et en itérant, on obtient que X_n a la même loi que X_0 . La loi de X_n est donc constante, on dit aussi stationnaire, au cours du temps, d'où le nom de probabilité stationnaire [42].

Propriété 1.5.1. [42] Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$ existe, alors la limite est une distribution invariante.

Théorème 1.5.3. [42] (*Théorème d'existence des distributions stationnaires*)

Une chaîne de Markov possède toujours au moins une distribution invariante, ce qui n'est plus nécessairement vrai si l'espace des états est infini.

Théorème 1.5.4. [42] Une chaîne de Markov possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre 1 de sa matrice de transition.

Théorème 1.5.5. [42] Une chaîne de Markov finie admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente.

Théorème 1.5.6. [42] *La distribution $\pi^{(n)}$ des états d'une chaîne de Markov converge vers une distribution (invariante) π^* indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$, si et seulement si la suite des puissances de la matrice de transition P de la chaîne converge vers une matrice (stochastique) P^* dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, si tel est le cas, chaque ligne de P^* est égale à la distribution limite π^* .*

Théorème 1.5.7. [42] *Si π est la distribution limite d'une chaîne de Markov, alors π est l'unique distribution stationnaire de cette chaîne.*

1.5.5 Comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques

Le théorème suivant résume le comportement asymptotique des chaînes irréductibles et apériodiques.

Théorème 1.5.8. [42]

Soit P la matrice de transition d'une chaîne irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- *La matrice P^n tend vers une matrice stochastique P^* lorsque n tend vers l'infini ;*
- *Les lignes de P^* sont toutes égales entre elles ;*
- *Pour toute distribution initiale $\pi^{(0)}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^*.$$

- *π^* est la solution unique du système :*

$$\begin{cases} \pi P &= \pi ; \\ \pi \mathbb{I} &= 1. \end{cases}$$

- *π^* égal à n'importe quelle ligne de la matrice P^* ;*
- *Pour tout $i \in S$, $\pi_i^* = 1/\mu_i$ où μ_i est l'espérance du nombre de transitions entre deux visites successives de l'état i .*

1.5.6 Notion d'ergodicité

Les propriétés ergodiques d'une chaîne de Markov concerne l'étude de ces comportements à l'infini, soit de la chaîne elle-même, soit de ses probabilités de transition P^n .

Définition 1.5.1. *Une chaîne de Markov est ergodique si $\pi^{(n)}$ converge, indépendamment de π_0 .*

Théorème 1.5.9. [42] (*Théorème ergodique*)

Soit $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ une chaîne de Markov ergodique de distribution stationnaire π^* et f une fonction réelle définie sur l'espace des états S de la chaîne. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(X_k) = \sum_{i \in S} \pi_i^* f(i),$$

presque sûrement.

Théorème 1.5.10. [42] Si X est une chaîne irréductible, il existe une probabilité invariante si et seulement si la chaîne est positive. Dans ce cas, la probabilité invariante est unique et donnée par

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}.$$

Théorème 1.5.11. [42] Une chaîne de Markov irréductible possède au plus une distribution invariante π et alors $\pi_i > 0$ pour tout $i \in S$.

Si S est fini, alors toute chaîne de Markov irréductible possède une et une seule probabilité invariante.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts de base de la théorie des chaînes de Markov, et quelques types des chaînes de Markov telles que les chaînes (irréductibles, récurrentes, ...) qui seront utiles dans notre travail. Ainsi, nous nous sommes attardés sur l'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov, ce qui nous permet de répondre à quelques questions aussi diverses que, la convergence d'une distribution $\pi^{(n)}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2

Réseaux et systèmes de files d'attente

Introduction

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers : guichet de poste, trafic routier, centrale téléphonique, atelier de réparation, etc. On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. Les premiers résultats sur les systèmes de files d'attente ont été proposés par l'ingénieur électricien Erlang au début du vingtième siècle, dans le but de décrire les phénomènes de congestion et d'attente. Puis, ils ont été utilisés dans la modélisation des systèmes de production et des systèmes informatiques [22].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la structure et de calculer les valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances de tels systèmes.

2.1 Description d'une file simple

Une file simple (ou station) est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station. Afin de spécifier complètement une file simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

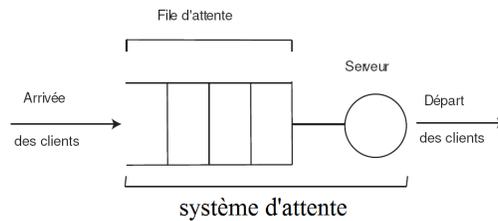


FIGURE 2.1 – Système de files d'attente à un seul serveur.

1) Processus d'arrivée : L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$.

Si A_n désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client dans le système, on aura ainsi : $A_0 = 0$ (par convention) et $A_n = \inf\{t; N(t) = n\}$.

Si T_n désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du $(n-1)^{\text{ième}}$ client et du $n^{\text{ième}}$ client, on a alors : $T_n = A_n - A_{n-1}$.

Définition 2.1.1. *Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement si et seulement si les variables aléatoires T_n sont des variables indépendantes et identiquement distribuées. La loi décrivant le temps d'inter-arrivée suffit alors à caractériser le processus de renouvellement.*

La plupart du temps, l'arrivée des clients à une file simple est supposée décrite par un processus de renouvellement. Le processus d'arrivée le plus simple et le plus couramment employé est le processus de Poisson. C'est un processus de renouvellement qui est tel que les inter-arrivées sont distribuées selon une loi exponentielle.

2) Temps de service : Une suite de réels $\{S_n; n \geq 0\}$ avec S_n est la durée de service requise par le $n^{\text{ième}}$ client.

Nous verrons dans ce cas, si le processus d'arrivée est un processus de Poisson, alors l'évolution de la taille de la file d'attente est une chaîne de Markov.

3) Structure et discipline de la file :

- *Nombre de serveurs*

Une station peut disposer de plusieurs serveurs en parallèle. Soit N_s le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il y a un serveur libre et le client entre instantanément en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente de libération d'un des serveurs.

- *Capacité de la file*

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit N_c la capacité de la file (incluant le ou les clients en service). Une file à capacité illimitée vérifie $N_c = +\infty$. Lorsque la capacité de la file est limitée et qu'un client arrive alors que cette dernière est pleine, le client est perdu.

- *Discipline de service*

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont :

- ◊ **FIFO (First In First Out)** : les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée ;
- ◊ **LIFO (Last In, First Out)** : le dernier client arrivé sera le premier traité ;
- ◊ **RANDOM (aléatoire)** : le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente ;
- ◊ **Round-Robin (cyclique)** : tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum Q de leur temps de service et sont replacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli.

4) Notation de Kendall

Les trois éléments définis précédemment, sont considérés comme les paramètres essentiels du système, Kendall [23] a proposé une normalisation de la description d'une file simple :

$$A/S/N_s/N_c/P/D,$$

- ◊ A : distribution d'inter-arrivée ;
- ◊ S : distribution de service ;
- ◊ N_s : nombre de serveurs ;
- ◊ N_c : capacité de la file ;
- ◊ P : population des usagers ;
- ◊ D : la discipline de service

Lorsque les trois derniers éléments ne sont pas mentionnés, il sous-entendu que la capacité et la source sont infinies et que la discipline est FIFO.

5) Caractéristiques d'un système de files d'attente

À partir de la distribution stationnaire, on pourra obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système telles que :

- le nombre moyen L de clients dans le système ;
- le nombre moyen L_q de clients dans la file d'attente ;
- la durée d'attente moyenne W_q d'un client ;
- la durée de séjour moyenne W dans le système (attente + service) ;

Ces valeurs sont liées les unes aux autres par les relations suivantes [42] :

$$\begin{aligned} L &= \lambda_e W; \\ L_q &= \lambda_e W_q; \\ W &= W_q + \frac{1}{\mu}; \\ L &= L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}. \end{aligned}$$

Les deux premières relations sont appelées *formules de Little*, avec :

λ_e : taux d'arrivée dans le système ;

μ : taux de service ;

$\frac{1}{\lambda_e}$: intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;

$\rho = \frac{\lambda_e}{\mu}$: taux d'occupation du système.

2.1.1 Étude mathématique d'un système d'attente

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction des processus stochastiques suivants :

- $\{X_t; t \geq 0\}$ où X_t correspond au nombre de clients dans le système à la date t ;
- $\{W_n; n \geq 1\}$ où W_n correspond à la durée d'attente du $n^{\text{ième}}$ client ;
- $\{N_t; t \geq 0\}$ où N_t est le nombre de clients pouvant être servis si le serveur travaillait sans interruption durant la période $[0, t]$;
- $\{D_t; t \geq 0\}$ où D_t est le nombre d'arrivées à la date t .

Ces quantités peuvent être considérées comme les caractéristiques essentielles du système.

2.2 Files d'attente markoviennes

Les files d'attente markoviennes sont celles pour lesquelles les inter-arrivées et les durées de service sont exponentielles. Leur notation de Kendall sera de la forme $M/M/\dots$ (M comme markovien).

2.2.1 File d'attente $M/M/1$

Cette file est caractérisée par une arrivée poissonnienne de taux λ et une durée de service exponentielle de taux μ .

Condition de stabilité

La file d'attente $M/M/1$ est stable pour $\lambda < \mu$, cette condition exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps, λ , doit être inférieur au nombre moyen de clients que le serveur de la station est capable de traiter par unité de temps μ .

Régime transitoire

Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps Δt les probabilités suivantes :

- $P(\text{exactement une arrivée pendant } \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$;
- $P(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$;
- $P(\text{deux arrivées ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$;
- $P(\text{exactement un départ pendant } \Delta t \text{ sachant } X_t \geq 1) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$;
- $P(\text{aucun départ pendant } \Delta t \text{ sachant } X_t \geq 1) = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$;
- $P(\text{deux départs ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$.

Dans ce cas, la matrice des taux de transition $G = (G_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ prend la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu & \ddots \end{pmatrix}.$$

Et le graphe représentatif du processus de naissance et de mort de la file d'attente $M/M/1$ est donné sous la forme :

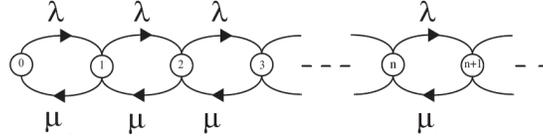


FIGURE 2.2 – Graphe représentatif du processus de naissance et de mort.

Pour calculer les probabilités d'état $p_n(t) = P(X_t = n)$, nous pouvons écrire pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) p_{n-i}(\Delta t) \\ &= p_{n-1}(t) \lambda \Delta t + p_n(t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t] + p_{n+1}(t) \mu \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) + o(\Delta t)/\Delta t.$$

En faisant tendre Δt vers 0, on trouve

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p'_n(t) = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t). \end{cases}$$

Ces équations sont connues sous le nom *d'équations différentielles de Kolmogorov*; elles permettent en principe de calculer les probabilités d'état $p_n(t) = P(X(t) = n)$ si l'on connaît en plus les conditions initiales du processus (la distribution de probabilité de $X(0)$).

Régime stationnaire

Pour calculer les probabilités stationnaires, on considère les équations de Kolmogorov lorsque $t \rightarrow \infty$ et on peut montrer que les limites :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = p_n$$

existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p'_n(t) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

À la place du système d'équations différentielles de Kolmogorov, on obtient alors un système d'équations linéaires et homogènes

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0; \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu) p_n. \end{cases}$$

Auxquelles il faut ajouter la condition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Sa résolution est élémentaire ; en additionnant les $(n + 1)$ premières équations, on obtient :

$$\mu p_{n+1} = \lambda p_n$$

d'où

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

En se servant du fait que les p_n définissent une distribution de probabilité, on obtient finalement :

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

à condition que $\lambda < \mu$; le régime stationnaire du système d'attente M/M/1 est donc gouverné par la loi géométrique.

Caractéristiques de la file M/M/1

La file M/M/1 est stable pour $\lambda < \mu$ (c'est-à-dire $\rho = \lambda/\mu < 1$). À partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t); t \geq 0\}$, on peut calculer d'autres valeurs caractéristiques de ce système d'attente.

- **Le nombre moyen de clients dans le système d'attente L**

Donc, le nombre moyen de clients se trouvant dans le système d'attente est donné par $\mathbb{E}(X)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\rho}{1 - \rho} = L.$$

- **Le nombre moyen de clients dans la file d'attente L_q**

Soit X_q la variable aléatoire qui désigne le nombre de clients dans la file d'attente.

$$X_q = \begin{cases} 0, & \text{si } X = 0; \\ X - 1, & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

Alors,

$$L_q = E(X_q) = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

- **Le temps moyen d'attente dans le système W**

D'après les formules de Little, on a :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

- **Le temps moyen d'attente dans la file W_q**

De manière analogue, on obtient :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

2.2.2 File d'attente M/M/1/K

On considère un système à serveur simple identique à la file M/M/1 excepté que la capacité de la file d'attente est finie. On a donc toujours les hypothèses suivantes : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux λ et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux μ . Soit K la capacité de la file d'attente : c'est le nombre maximal de clients qui peuvent être présents dans le système, soit en attente, soit en service. Quand un client arrive alors qu'il y a déjà K clients présents dans le système, il est perdu. Ce système est connu sous le nom de file M/M/1/K.

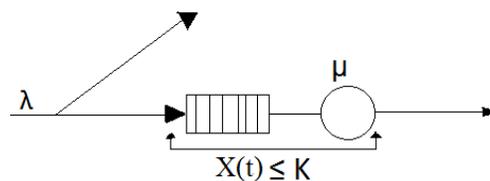


FIGURE 2.3 – File d'attente M/M/1/K

Condition de stabilité

Il n'y a pas de condition de stabilité pour la file M/M/1/K. Ce résultat s'interprète facilement. La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés.

Régime transitoire

Le graphe de naissance et de mort associé à la file d'attente M/M/1/K est donné comme suit :

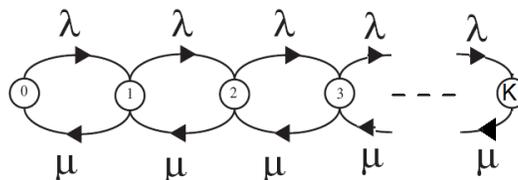


FIGURE 2.4 – Graphe de transition associé à la file M/M/1/K.

À partir de ce graphe, on extrait les équations différentielles de Kolmogorov correspondantes

au processus $X(t)$ du système M/M/1/K qui sont données comme suit :

$$\begin{cases} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p'_n(t) &= -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n \leq k-1; \\ p'_k(t) &= -\mu p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t). \end{cases}$$

Régime stationnaire

On note par p_n la probabilité stationnaire d'être dans l'état n (la probabilité que le système contienne n clients). Ces probabilités peuvent être calculées en écrivant les équations d'équilibre du système :

$$\lambda p_{n-1} = \mu p_n, \quad \text{pour } n = 1, \dots, k.$$

Soit

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{n-1} = \rho p_{n-1}, \quad \text{pour } n = 1, \dots, k;$$

où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

On applique n fois cette relation, on obtient :

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \rho^n p_0, \quad \text{pour } n = 1, \dots, k.$$

Comme les p_n définissent une distribution de probabilité, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^K p_n = 1.$$

On peut en déduire la probabilité p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K p_n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}.$$

On obtient finalement :

$$p_n = \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}\right) \rho^n, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, k.$$

Calcul des paramètres de performance

- Nombre moyen de clients dans le système L

On a :

$$L = \sum_{n=0}^K n p_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}}{1 - \rho^{k+1}}.$$

- **Temps moyen de séjour W**

On considère ici le temps moyen de séjour d'un client effectivement admis dans la file d'attente. Cette quantité peut être obtenue par application de la règle de Little :

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda}.$$

- **Taux d'utilisation de serveur $U(K)$** .

$$U(K) = \sum_{n=1}^K p_n = 1 - p_0 = \rho \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho^{K+1}}.$$

2.2.3 File d'attente M/M/C

On considère un système identique à la file M/M/1 excepté qu'il comporte C serveurs identiques et indépendants les uns des autres.

On conserve les hypothèses : processus d'arrivée des clients poissonien de taux λ et le temps de service exponentiel de taux μ (pour chacun des serveurs). Ce système est connu sous le nom de la file M/M/C.

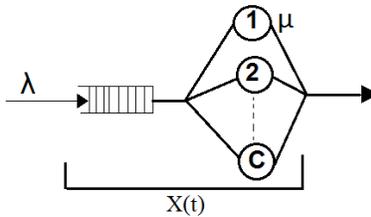


FIGURE 2.5 – File d'attente M/M/C.

Condition de stabilité

La condition de stabilité est ici $\lambda < C\mu$ et exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps doit être inférieur au nombre moyen de clients que les serveurs de la file sont capables de traiter par unité de temps.

Régime stationnaire

On peut donner p_n comme suit [23] :

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & \text{si } n \leq C - 1; \\ \frac{\rho^n}{C! C^{n-C}} p_0, & \text{si } n \geq C, \end{cases}$$

où, $\rho = \lambda/\mu$.

On peut aisément vérifier que la condition de convergence de cette série est identique à la condition de stabilité de la file, soit $\frac{\lambda}{C\mu} < 1$.

Avec cette condition, p_0 est donné comme suit :

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{(C-1)! (C-\rho)} \right]^{-1}.$$

Le graphe représentatif du processus de naissance et de mort associé à la file d'attente M/M/C est :

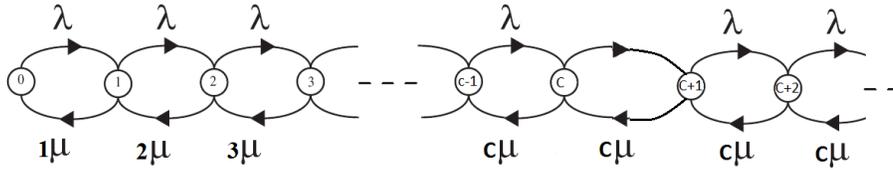


FIGURE 2.6 – Graphe de transition associé à la file M/M/C.

Caractéristiques de la file M/M/C

À partir de la distribution stationnaire de X , on peut obtenir les caractéristiques usuelles d'un système d'attente.

- **Nombre moyen de clients dans la file d'attente L_q**

Dans ce type de système d'attente, on a :

$$X_q = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq C; \\ X - C, & \text{si } X > C. \end{cases}$$

Donc,

$$L_q = \mathbb{E}[X_q] = \sum_{n=C+1}^{\infty} (n - C) p_n = \frac{\rho^{C+1} p_0}{(C-1)! (C-\rho)^2}.$$

- **Nombre moyen de clients dans le système L**

On a :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

Donc,

$$L = \rho + \frac{\rho^{C+1} p_0}{(C-1)! (C-\rho)^2},$$

où, $\rho = \lambda/\mu$.

À l'aide des formules de Little, on déduit l'expression du temps moyen de séjour :

$$W = \frac{\rho^C p_0}{\mu (C-1)! (C-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}.$$

2.2.4 File d'attente M/M/ ∞

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Dans cette file particulière, il n'y a donc pas d'attente. On suppose toujours que le processus d'arrivée des clients est poissonien de taux λ et que les temps de service sont exponentiels de taux μ (pour tous les serveurs). Ce système est connu sous le nom de file M/M/ ∞ .

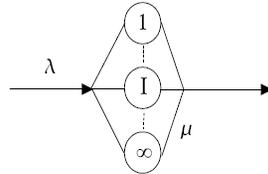


FIGURE 2.7 – File d'attente M/M/ ∞ .

Condition de stabilité

De façon intuitive, la capacité de traitement de la file est infinie puisque tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est instantanément traité. La condition de stabilité exprimant que "le nombre moyen de clients arrivant à la file par unité du temps doit être inférieur à la capacité de traitement de la file" est donc toujours satisfaite.

Régime transitoire

Le graphe représentatif du processus de naissance et de mort associé à la file d'attente M/M/ ∞ est donné comme suit :

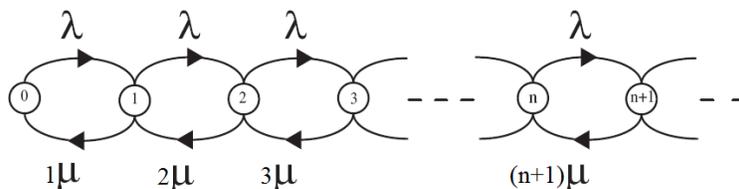


FIGURE 2.8 – Graphe de naissance et de mort associé à la file M/M/ ∞ .

Régime stationnaire

Soit p_n la probabilité stationnaire d'être dans l'état n . Les équations d'équilibre nous donnent :

$$\lambda p_{n-1} = n \mu p_n.$$

On peut écrire aussi :

$$p_n = \frac{\rho}{n} p_{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

où, $\rho = \lambda/\mu$.

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de p_0 :

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Avec la condition de normalisation, on obtient p_0 .

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-\rho}.$$

On obtient finalement :

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}.$$

Caractéristiques du système M/M/ ∞

- *Nombre moyen de clients L*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \rho.$$

- *Temps moyen de séjour W*

Intuitivement, le temps moyen passé dans le système est réduit au temps moyen de service, Soit $1/\mu$. On peut redémontrer ce résultat en utilisant la règle de Little :

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}.$$

2.3 Méthodes d'analyse des systèmes non markoviens

On dit qu'un processus donné est non markovien si l'hypothèse d'exponentialité des temps des inter-arrivées ou de la durée de service n'existe pas. Ce qui rend l'analyse de ces modèles délicate. On essaye alors de se ramener à un processus markovien judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

- Méthode des étapes d'Erlang ;
- Méthode de la chaîne de Markov induite ;
- Méthode des variables auxiliaires ;
- Méthode des événements fictifs ;
- Méthode d'approximation ;
- Simulation.

Méthode des étapes d'Erlang

Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox. Cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire.

Méthode des variables auxiliaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $\{X(t), A_1(t), \dots, A_n(t)\}$. Les variables $A_k(t), k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont dites auxiliaires.

Méthode des événements fictifs

Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

Méthode d'approximation

Dans ce cas, on caractérise l'état du système étudié par :

- des méthodes asymptotiques décrivant l'état du système, et
- estimation par bornes de certaines de ces caractéristiques.

2.4 Réseaux de files d'attente

Un réseau de files d'attente est un ensemble de files simples (stations) interconnectées. Soit M le nombre de stations du réseau.

2.4.1 Réseaux ouverts

Dans un réseau de files d'attente ouvert, les clients arrivent de l'extérieur, circulent dans le réseau à travers les différentes stations, puis quittent le réseau. Le nombre de clients pouvant se trouver à un instant donné dans un réseau ouvert n'est donc pas limité. Afin de spécifier complètement un réseau ouvert, il faut bien sûr caractériser chaque station, mais également le processus d'arrivée des clients et le routage (cheminement) des clients dans le réseau.

La figure qui suit donne un exemple d'un réseau de files d'attente ouvert comportant 4 stations.

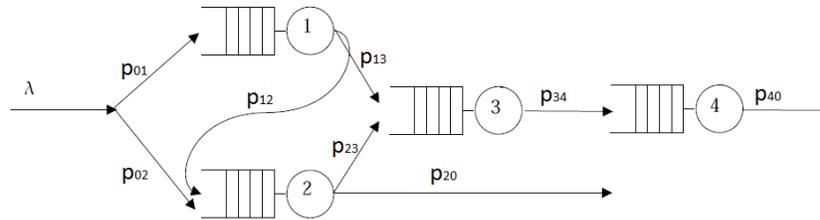


FIGURE 2.9 – Réseau de files d'attente ouvert.

Processus d'arrivée

Le processus d'arrivée des clients dans le réseau sera décrit, comme pour une file simple, à l'aide d'un processus de renouvellement (et sera donc caractérisé par la distribution du temps d'interarrivée). Si l'arrivée des clients suit un processus de Poisson, les interarrivées sont exponentielles et sont caractérisées par un unique paramètre : le taux d'arrivée λ . Dans le cas d'un processus d'arrivée non poissonien, ce paramètre reste intéressant, puisqu'il indique le nombre moyen de clients qui arrivent dans le système par unité du temps, mais devient insuffisant pour caractériser parfaitement l'arrivée des clients.

Routage des clients

Lorsqu'un client termine son service à une station, il faut préciser où ce client va se rendre, soit à une autre station, soit à l'extérieur (le client quitte alors le réseau). Ce routage est souvent caractérisé de façon probabiliste : soient p_{ij} la probabilité pour qu'un client qui quitte la station i se rende à la station j et p_{i0} la probabilité pour qu'un client qui quitte la station i quitte le système, tel que :

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1, \quad \forall i = \overline{0, M}.$$

Il existe cependant d'autres types de routages :

◇ **Routage vers la file la plus courte (routage dynamique) :**

Un client quittant une station choisira, parmi toutes les destinations possibles, la station qui comporte le moins de clients :

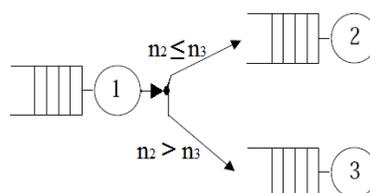


FIGURE 2.10 – Routage vers la file la plus courte.

◇ **Routage cyclique (routage déterministe) :**

Les clients quittant une station choisiront à tour de rôle chacune des stations parmi toutes les destinations possibles.

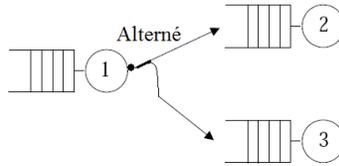


FIGURE 2.11 – Routage cyclique.

2.4.2 Réseaux fermés

Dans un réseau de files d'attente fermé, les clients sont en nombre constant. Soit N le nombre total de clients dans le système. Il n'y a donc pas d'arrivée ni de départ de clients. La spécification d'un réseau fermé se réduit donc à celle des différentes stations et à celle du routage des clients. Par un mécanisme de routage probabiliste, on définit p_{ij} la probabilité qu'un client qui quitte la station i se rende à la station j . Les p_{ij} sont tels que :

$$\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1.$$

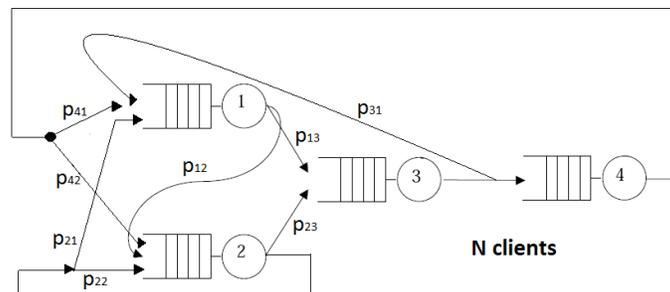


FIGURE 2.12 – Réseau de files d'attente fermé.

2.4.3 Réseaux multiclassés

Comme pour les files simples, les réseaux de files d'attente peuvent être parcourus par différentes classes de clients. Soit R le nombre de classes de clients. Ces différentes classes se distingueront par :

- ◇ des processus d'arrivée différents (si le réseau est ouvert) ;

- ◇ des comportements différents à chaque station (service et discipline de service) ;
- ◇ des routages différents dans le réseau.

2.4.4 Réseaux de files d'attente à capacité limitée

Les différentes stations du réseau peuvent avoir des capacités limitées. Lorsqu'une file est pleine, plus aucun client ne peut y entrer. Cela introduit des blocages dans les autres stations et éventuellement des pertes de clients à l'entrée du système (si celui-ci est ouvert).

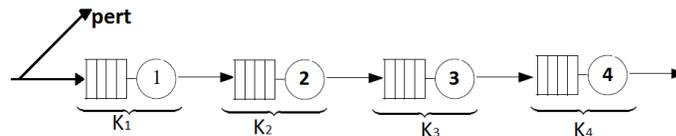


FIGURE 2.13 – Réseau de files d'attente à capacité limitée.

2.4.5 Réseaux de files d'attente ouverts à contrainte de population

Ce sont des réseaux soumis à une limite supérieure sur le nombre total de clients pouvant s'y trouver simultanément. Lorsqu'un client arrive dans le réseau alors que celui-ci est plein (la contrainte de population est atteinte), deux cas peuvent être envisagés. Soit le client est "rejeté", ce qui rejoint le modèle de la section précédente, soit le client est "mémorisé" et se place en attente dans une file externe (généralement FIFO).

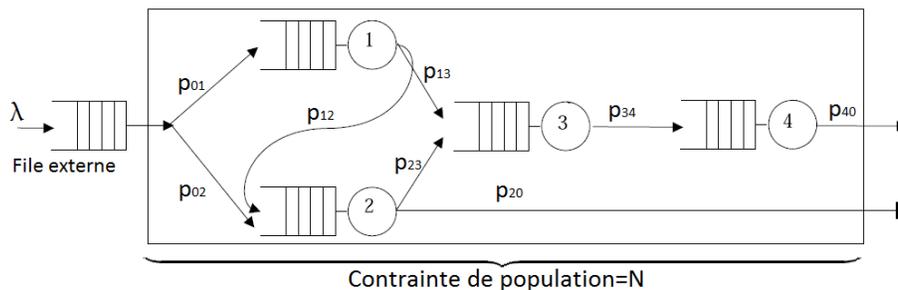


FIGURE 2.14 – Réseau ouvert à contrainte de population.

2.5 Réseaux de files d'attente à forme produit

Considérons un réseau de files d'attente constitué d'un ensemble de files d'attente interconnectées. On classe ces réseaux de files d'attente en deux catégories :

- ▷ Les réseaux de files d'attente **mono-classes**, dans lesquels circule une seule classe de clients,
- ▷ Les réseaux de files d'attente **multi-classes**, dans lesquels circulent plusieurs classes de clients, ces différentes classes pouvant se distinguer par un schéma de routage spécifique et par des comportements différents au niveau de chaque station, tant au niveau du service que de l'ordonnement de l'attente.

Forme produit

L'analyse quantitative d'un réseau n'est pas trop complexe s'il possède la forme produit. Chacune de ses stations peut être étudiée en isolation, les performances du réseau sont alors déduites à partir des performances de ses stations.

Définition 2.5.1. *Un réseau de files d'attente sera dit à forme produit si et seulement si ses probabilités d'états $\pi(\vec{n})$ se mettent sous la forme*

$$\pi(\vec{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^M \pi(n_i)$$

Où G est une constante de normalisation assurant que $\sum_{\vec{n}} \pi(\vec{n}) = 1$.

2.5.1 Réseaux mono-classes ouverts markoviens

Dans ce type de réseaux, les clients arrivent vers le système depuis l'extérieur. Après avoir accompli un certain nombre d'opérations, ils quittent le système. De même que pour les files d'attente simples, où la file M/M/1 est la plus simple à étudier, on s'intéresse ici aux réseaux de files d'attente ouverts comportant :

- Une seule classe de clients ;
- Un processus d'arrivée des clients dans le système poissonien de taux λ ;
- Un seul serveur à chaque station ;
- Un temps de service exponentiel à chaque station de taux μ_i ;
- Une capacité de stockage illimitée à toutes les stations ;
- Une discipline de service FIFO pour toutes les files.

Ces réseaux sont connus sous le nom de **Réseaux de Jackson ouverts**.

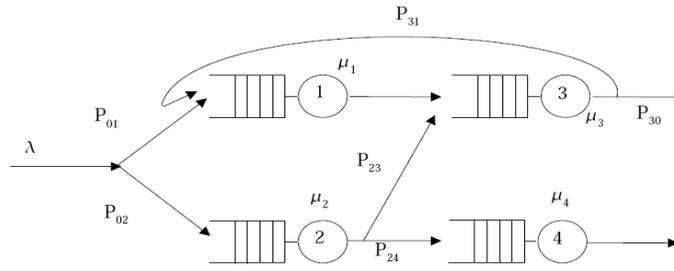


FIGURE 2.15 – Réseau de Jackson ouvert.

Condition de stabilité

La condition de stabilité est logiquement liée non seulement au taux d'arrivée des clients dans le réseau et au taux de service μ_i des différentes stations, mais également au cheminement des clients. Pour cela, on utilise une variable e_i qui comptabilise le nombre moyen de fois qu'un client visite la station i au cours de son séjour dans le système.

À chaque passage sur la station i , un client induit une charge de $1/\mu_i$. En moyenne, un client induit une charge de e_i/μ_i sur la station i .

Le taux d'arrivée des clients à la station i est :

$$\lambda_i = e_i \lambda.$$

Ainsi, la condition de stabilité du système est :

$$\lambda_i < \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Calcul des taux de visite

On suppose maintenant que le réseau est stable, donc pour chaque station i , on a : $\lambda_i < \mu_i$ avec $\lambda_i = e_i \lambda$, où les taux de visites e_i sont les solutions du système suivant :

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.1)$$

Ce système est constitué de M équations à M inconnus. En général, il est simple à résoudre et on en déduit les taux d'arrivée aux différentes stations : $\lambda_i = e_i \lambda$, $i = 1, 2, \dots, M$.

- On vérifie la condition de stabilité du réseau : $\lambda_i < \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, M$.
- Si la condition est satisfaite, on peut poursuivre l'étude du réseau, sinon, ce système est instable .

Analyse du régime permanent

Un réseau de Jackson est décrit par le processus $\{\vec{X}(t); t \geq 0\}$, où $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t))$ avec $X_i(t)$ est le nombre de clients présents dans la station i au temps t .

Le système d'équations qui semblait a priori fort compliqué dans le cas général, possède ici une solution extrêmement simple. Cette solution nous est donnée par la propriété suivante :

Propriété 2.5.1. *La probabilité stationnaire du réseau possède la forme produit suivante :*

$$p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^M p_i(n_i),$$

où $p_i(n_i)$ est la probabilité stationnaire d'une file $M/M/1$ ayant un taux d'arrivée λ_i et un taux de service μ_i . Soit

$$p_i(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i},$$

où

$$\rho_i^{n_i} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Paramètres de performance

Les paramètres de performance de chaque station se déduisent de la décomposition en files $M/M/1$:

- **Débit de la station i :**

$$d_i = \lambda_i = \lambda e_i.$$

- **Nombre moyen de clients dans la station i :**

$$L_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}, \text{ avec } \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

- **Temps moyen de séjour dans la station i :**

$$W_i = \frac{L_i}{d_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}.$$

Les paramètres de performance du réseau s'en déduisent alors immédiatement :

- **Débit du réseau :**

$$d = \lambda.$$

- **Nombre moyen de clients dans le réseau :**

$$L = \sum_{i=1}^M L_i.$$

- **Temps moyen de séjour dans le réseau :**

$$W = \frac{L}{d} = \frac{L}{\lambda}.$$

2.5.2 Réseaux mono-classes fermés markoviens

Les clients dans un réseau fermé sont en nombre constant, on suppose donc que les N clients présents dans le réseau à l'instant initial y demeurent en ne faisant que passer de file d'attente en file d'attente. Formellement, cela revient à supposer que

$p_{i0} = 0$ et $p_{0i} = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, M$.

Comme dans le cas ouvert, on s'intéressera aux réseaux de files d'attente fermés comportant :

- Une seule classe de clients ;
- Un seul serveur à chaque station ;
- Un temps de service exponentiel à chaque station μ_i pour $1 \leq i \leq M$;
- Des files FIFO.

Ces réseaux sont connus sous le nom de *réseaux de Jackson fermés* ou encore *réseaux de Gordon et Newell*.

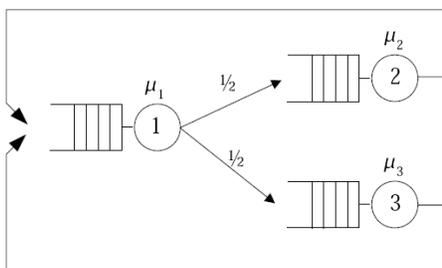


FIGURE 2.16 – Un réseau de type Gordon-Newell.

Condition de stabilité

Dans un réseau fermé, il n'y a aucun problème de stabilité puisque le nombre de clients à chaque station est limité à la population du réseau, c'est-à-dire pour toute station i , $X_i(t) \leq N$ à tout instant t .

Calcul des taux de visite

e_i : taux de visite de la station i ou nombre moyen de passage par la station i entre deux passages par une station de référence.

De la même manière que dans le cas ouvert, les e_i sont solutions du système d'équations :

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Analyse de régime permanent

Le réseau peut être décrit avec le processus $\{\vec{X}(t); t \geq 0\}$ où $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t))$ mais avec la contrainte

$$\sum_{i=1}^M X_i(t) = N.$$

Le nombre de façons possibles qu'on peut répartir les N clients sur les M stations est :

$$C_{N+M-1}^{M-1} = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!}.$$

Ce nombre correspond à la taille de vecteur des probabilités stationnaires associé au réseau.

L'ensemble $E(M, N)$ de tous les états possibles du système est défini comme suit :

$$E(M, N) = \{\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M); \sum_{i=1}^M n_i = N\}.$$

Le système d'équations défini précédemment possède une solution extrêmement simple. Cette solution nous est donnée par la propriété suivante :

Propriété 2.5.2. *La probabilité stationnaire du réseau possède la forme produit suivante :*

$$p(\vec{n}) = \frac{1}{G(M, N)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i),$$

où $f_i(n_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$ et $G(M, N)$ est une constante de normalisation, définie par :

$$G(M, N) = \sum_{\vec{n} \in E(M, N)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i).$$

2.6 Stabilité des systèmes et réseaux de files d'attente

Lors de l'étude des systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel, qui est généralement compliqué, par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiquement exploitables. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité. Le choix de la méthode d'étude de stabilité se fait selon la nature du problème à résoudre et la fonctionnalité du système en question. Dans la littérature sur les files d'attente, il existe plusieurs approches de stabilité. Parmi ces approches, on peut citer :

2.6.1 Méthode des fonctions tests

La méthode de la fonction-test s'inspire de la méthode directe de Lyapunov de la théorie classique de la stabilité des équations différentielles ordinaires. Cette méthode a été introduite par Kalashnikov et Tsitsiashvili [30, 31] pour étudier la stabilité des chaînes de Markov induites des systèmes de files d'attente à un serveur. Par la suite, elle a été utilisée pour les systèmes multi-serveurs et les systèmes multi-phases. La difficulté de cette méthode réside dans le choix de la fonction test.

2.6.2 Méthode métrique

La méthode métrique est une approche d'étude de stabilité basée sur la théorie des métriques stochastiques. Cette méthode a été établie par Zolotariev [52] pour les processus récurrents. Elle conçoit le problème de stabilité comme celui de continuité lorsqu'on applique certains espaces métriques bien particuliers dans d'autres espaces [39].

2.6.3 Méthode de renouvellement

Il s'agit d'une approche permettant de prouver les théorèmes de stabilité et d'ergodicité des processus aléatoires décrivant le comportement d'une classe de modèles stochastiques. L'idée de cette méthode est basée sur l'introduction des événements de renouvellement qui apparaissent lors de la description des modèles stochastique. Cette méthode a été établie par Borovkov en 1970 [10]. Elle est appliquée principalement aux systèmes de files d'attente et permet d'obtenir des résultats sur la convergence et des théorèmes de stabilité et d'ergodicité.

2.6.4 Méthode de convergence faible

Cette méthode est utilisée pour démontrer les propriétés de stabilité des processus markoviens homogènes. La plupart des outils et des notations utilisés par celle-ci sont empruntés à l'analyse fonctionnelle. Comparée aux autres méthodes de stabilité des systèmes stochastiques, cette méthode est moins contraignante. Cependant, elle fait appel à plusieurs paramètres non directement liés aux caractéristiques des systèmes étudiés.

2.6.5 Méthode de stabilité forte

Cette méthode a été établie dans les années 1980 par Aïssani et Kartashov [3]. Elle suppose que la perturbation de noyau de transition du processus aléatoire décrivant le système étudié est petite par rapport à une certaine norme. Cette condition beaucoup plus stricte que

les conditions habituelles, permet d'obtenir de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. Cette méthode s'applique pour tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov homogène. En particulier, elle a été principalement appliquée aux : modèles d'attente classiques (Aïssani et Kartashov [4], Aïssani [2], Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [11, 12] Benaouicha et Aïssani [7]), modèles d'attente avec rappels (Berdjoudj et Aïssani [9]), modèles d'attente avec vacances (Rahmoune et Aïssani[40]), modèles d'attente avec priorités (Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [13] et Hamadouche et Aïssani [21]), modèles d'attente avec arrivées par groupes (Boukir et al. [14]), réseaux de files d'attente (Lekadir et Aïssani [34]), modèles stochastiques de gestion des stocks (Rabta et Aïssani [37, 38]) et modèles de risques (Benouaret et Aïssani [8]).

2.6.6 Méthode de stabilité uniforme

Cette approche a été élaborée par Ipsen et Meyer en 1994 [28]. Elle a pour but d'analyser la sensibilité des probabilités stationnaires vis-à-vis des perturbations des probabilités de transition d'une chaîne de Markov irréductible finie. En l'an 2000, Balai et Meyn ont essayé de relier l'ergodicité géométrique, exponentielle et uniforme à la stabilité uniforme [5].

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les éléments essentiels de description des systèmes de files d'attente markoviens et non markoviens, et on a tardé sur quelques paramètres de performances de ces files d'attente, où on a mis en évidence le régime transitoire et le régime stationnaire de chaque système ainsi que leur conditions de stabilité. Après cela, on a présenté les éléments de base de quelques type de réseaux de files d'attente. Ensuite, nous avons introduit brièvement quelques approches de stabilité des systèmes et réseaux de files d'attente. Dans le chapitre suivant, on présentera une autre approche d'approximation qui est la technique de la troncature d'espace d'états des chaîne de Markov, où on s'intéressera à l'estimation de l'erreur induite par application de la méthode de stabilité forte.

3

Troncature de l'espace d'états des chaînes de Markov infinies

Introduction

Le principe de la méthode de troncature consiste à approximer la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov à espace d'états infini, si elle existe, par celle d'une chaîne de Markov à espace d'états fini. Cela se fait par troncature d'espace d'états de la chaîne originale tout en utilisant plusieurs techniques comme l'augmentation linéaire, et la renormalisation, etc.

L'application de cette approche est devenue importante et, dans certains cas indispensable, surtout dans les réseaux de files d'attente ne possédant pas la propriété de la forme produit, où en général des modifications sur l'espace d'états du réseau peuvent être suggérées pour obtenir des bornes d'erreurs simples ou des approximations faciles à calculer.

3.1 Principe de la troncature des chaînes de Markov

Le principe de la troncature a été introduit en 1913 par Riesz [44]. Dans son contexte initial, il consiste en "résolution d'un système constitué d'une infinité d'équations linéaires avec un nombre infini d'inconnus, le système est alors limité aux Q premières équations, et le reste étant négligées".

Soit $P = (P(i, j))_{i, j \geq 1}$ une matrice stochastique infinie, irréductible et récurrente positive, elle admet donc une distribution stationnaire unique $\pi = (\pi(j))_{j \geq 1}$. Le calcul de cette distribution étant en général difficile voire impossible, il est alors souhaitable de disposer d'approximations simples et convergeant rapidement vers cette distribution.

Pour cela, une solution consiste à approcher P par une matrice stochastique finie P_Q . Considérons le coin Nord-Ouest d'ordre Q de la matrice P :

$$T_Q = (p(i, j))_{1 \leq i, j \leq Q}.$$

P étant irréductible, il existe au moins une ligne i pour laquelle :

$$\sum_{j=1}^Q p(i, j) < 1.$$

Si bien que la matrice tronquée T_Q n'est pas stochastique.

À partir de la matrice T_Q , on construit une matrice stochastique $P_Q = (p_Q(i, j))_{1 \leq i, j \leq Q}$ vérifiant $P_Q \geq T_Q$, c'est-à-dire $p_Q(i, j) \geq p(i, j)$ pour $1 \leq i, j \leq Q$; cela peut se faire avec plusieurs techniques de troncature.

3.2 Principales techniques de la troncature

La matrice stochastique P_Q qui représente la chaîne de Markov tronquée peut être obtenue avec l'application de plusieurs techniques de troncature. Parmi ces techniques on distingue :

3.2.1 Augmentation linéaire

La masse de probabilité perdue lors de la troncature de P est redistribuée sur les colonnes de T_Q , plus précisément :

Soit $A_Q = (a_Q(i, j))_{1 \leq i, j \leq Q}$ une matrice stochastique quelconque, on pose :

$$P_Q(i, j) = P(i, j) + a_Q(i, j) \sum_{k>Q} P(i, k), \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq Q. \quad (3.1)$$

En particulier, selon la structure de la matrice A_Q , on obtient :

- ▷ *Augmentation de la première colonne* : on prend $a_Q(i, 1) = 1$ pour $1 \leq i \leq Q$.
- ▷ *Augmentation de la dernière colonne* : on prend $a_Q(i, Q) = 1$ pour $1 \leq i \leq Q$.
- ▷ *Augmentation uniforme des colonnes* : on prend $a_Q(i, j) = \frac{1}{Q}$ pour $1 \leq i, j \leq Q$.
- ▷ On peut aussi prendre A_Q une matrice dont toutes les lignes sont identiques [19].
- ▷ Encore, plus simplement, on peut choisir A_Q booléenne [49].

3.2.2 Renormalisation

Dans cette technique, on pose :

$$S(i, Q) = \sum_{j=1}^Q P(i, j), \quad \forall 1 \leq i \leq Q,$$

où $S(i, Q)$ représente la somme des probabilités sur chaque ligne i du coin Nord-Ouest d'ordre Q de la matrice P .

Pour obtenir une matrice stochastique P_Q d'ordre Q , dans ce cas, on utilise la transformation suivante :

$$P_Q(i, j) = \frac{P(i, j)}{S(i, Q)}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq Q.$$

Ainsi, on prend Q assez grand afin que $S(i, Q) > 0$. Dans ce cas, $\lim_{Q \rightarrow \infty} P_Q(i, j) = P(i, j)$. Par conséquent si Q est grand P_Q et P sont voisines, ce qui amène aux questions suivantes :

- (Q1) P_Q admet-elle une distribution stationnaire π_Q ?
- (Q2) π_Q converge-t-elle, en un sens à préciser, vers π ?

En ce qui concerne la question (Q1), l'existence d'une distribution stationnaire π_Q a été étudiée pour divers types de matrices P_Q , en particulier par Seneta [45, 1]. Nous contentons de noter si l'état 1 est récurrent positif pour la matrice P_Q , il existe au moins une distribution stationnaire π_Q . En effet, la chaîne réduite à la classe de l'état récurrent 1 admet une distribution stationnaire qu'on peut compléter par 0 sur les autres états.

D'autre part, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la question (Q2), parmi les plus intéressants, on peut citer :

Wolf [51] qui s'est intéressé, en particulier, à l'approximation de la distribution stationnaire d'une matrice infinie P , irréductible, récurrente positive, par ailleurs quelconque, par les distributions stationnaires de matrices finies P_Q . Il a examiné quatre types de matrices P_Q , obtenues par :

- L'augmentation de la première colonne ;
- L'augmentation de la dernière colonne ;
- L'augmentation uniforme des colonnes ;
- La renormalisation,

et il a établi la convergence en variation totale de π_Q vers π sous des conditions analogues au critère de Foster.

Seneta [45] a prouvé que π_Q converge faiblement vers π si et seulement si la suite (π_Q) est uniformément tendue. Cet argument a été déjà pris par Gibson et Seneta [18] pour établir la convergence faible de π_Q vers π lorsque P est stochastiquement monotone et P_Q étant construite par augmentation linéaire.

Heyman [26] a construit des chaînes X_Q et X de matrices de transition respectives P_Q et P et, il a introduit les temps de retour à l'état 1, puis le temps nécessaire pour que la chaîne X dépasse la barrière Q . En s'appuyant sur les résultats de Heyman et Whitt [25], il a également établi une condition suffisante pour assurer la convergence faible de π_Q vers π .

Kalachnikov et **Rachev** [29] ont aussi étudié le problème de l'approximation d'une chaîne de Markov infinie. L'essentiel de leurs travaux est orienté vers l'approximation uniforme de la chaîne originale par des chaînes finies construites par augmentation de la première colonne.

Tweedie [48] s'est intéressé, en particulier aux chaînes géométriquement ergodiques et les chaînes de Markov stochastiquement monotone, afin qu'il puisse étudier les deux questions ci-dessus. Les approximations de π peuvent être construites à partir de P_Q , mais seulement dans des cas particuliers, pour lesquels la distribution π_Q converge vers π . Il a montré ainsi que cette convergence s'établit toujours pour deux classes générales de chaînes de Markov : les chaînes géométriquement ergodiques, et celles dominées par les chaînes stochastiquement monotones. Pour ces deux classes il a obtenu des estimations de l'erreur d'approximation.

3.3 Convergence de la distribution stationnaire π_Q vers la distribution π

Pour établir la convergence de la distribution stationnaire π_Q vers la distribution stationnaire π lorsque P est stochastiquement monotone et P_Q construite par augmentation, on construit des chaînes de Markov X_Q et X de matrices de transition respectives P_Q et P et on introduit les

temps de retour en état 1 et le temps nécessaire pour que la chaîne X ne dépasse pas une barrière Q [18, 26].

En ce qui concerne les matrices stochastiquement monotones, on a les définitions ci-dessous relatives à cette notion [47] :

Définition 3.3.1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles, de fonctions de répartition F et G respectivement, X est dite stochastiquement inférieure à Y , qu'on note par $X \leq_{st} Y$, si pour tout t on a :

$$F(t) \geq G(t).$$

Définition 3.3.2. La matrice $P = (p(i, j))_{i, j \geq 1}$ est dite stochastiquement inférieure à la matrice $Q = (q(i, j))_{i, j \geq 1}$, qu'on note par $P \leq_{st} Q$, si seulement si :

$$\sum_{j=1}^m p(i, j) \geq \sum_{j=1}^m q(i, j), \quad \forall i \geq 1, \quad \forall m \geq 1.$$

Définition 3.3.3. La matrice $Q = (q(i, j))_{i, j \geq 1}$ est dite stochastiquement monotone si et seulement si :

$$i \leq j \Rightarrow \forall m, \quad \sum_{k=1}^m q(i, k) \geq \sum_{k=1}^m q(j, k).$$

Dans la suite de ce chapitre, on supposera que :

- (H1) $P = (p(i, j))_{i, j \geq 1}$ est une matrice stochastiquement irréductible et $P_Q = (p_Q(i, j))_{1 \leq i, j \leq Q}$ est une matrice stochastique vérifiant $P_Q \geq T_Q$;
- (H2) $P = (p(i, j))_{i, j \geq 1}$ est une matrice stochastiquement inférieure à la matrice stochastique $Q = (q(i, j))_{i, j \geq 1}$;
- (H3) Q est irréductible, récurrente positive et strictement monotone.

Théorème 3.3.1. [46] Soit P une matrice irréductible et $P \leq_{st} Q$, où Q est une matrice irréductible et stochastiquement monotone. Supposons qu'il existe un entier j_0 , un nombre réel δ , avec $0 < \delta < 1$ et une suite $(V(j))_{j \geq j_0}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$, non décroissante et tendant vers l'infini, vérifiant la condition suivante :

$$\sum_{j \geq j_0} q(i, j)V(j) \leq (1 - \delta)V(i), \quad \forall i \geq j_0.$$

Alors, les matrices Q , P et P_Q admettent des distributions limites, notées respectivement μ , π et π_Q . En outre, on a la relation suivante :

$$\sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| = o\left(\frac{\ln V(Q)}{V(Q)}\right) \quad (\pi_Q(j) = 0, \text{ si } j > Q).$$

3.4 Distance uniforme

Dans cette section, on s'intéressera au problème d'évaluation de la quantité :

$$D_Q(m) = P(X_Q(m) \neq X(m)).$$

Mais avant cela, on doit définir les paramètres suivants :

Y : la chaîne de Markov de matrice de transition Q ;

W_1 : l'instant de premier retour de la chaîne Y à l'état 1 ;

$$\bar{\mu}(Q) = \sum_{j>Q} \mu(j).$$

Ainsi, un résultat essentiel pour l'évaluation de la vitesse de convergence de la distribution limite de P_Q vers celle de P , est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. [46] *Si la matrice de transition P est irréductible, avec $P \leq_{st} Q$, où Q est une matrice de transition irréductible, récurrente positive et stochastiquement monotone, on a :*

$$D_Q = \sup_{m \geq 0} \{P(X_Q(m) \neq X(m))\} \leq \inf_{T \geq 1} \left\{ T \bar{\mu}(Q) + \sum_{j>T} P(W_1 > j) \right\},$$

où m et T sont deux entiers positifs.

La borne $B(Q) = \{T \bar{\mu}(Q) + \sum_{j>T} P(W_1 > j)\}$, est une quantité qui tend vers 0 en décroissant avec Q puisque la chaîne Y de matrice Q est irréductible et récurrente positive, D_Q tend donc vers 0 quand Q tend vers l'infini.

3.5 Distance entre les distributions stationnaires

Les résultats présentés jusqu'à présent ne concernent que les distributions de probabilités transitoires, en faisant tendre m vers l'infini nous obtiendrons un majorant de la distance entre les distributions limites.

Propriété 3.5.1. [46] $X(m) \leq Y(m)$ pour tout $m \geq 0$.

Cette propriété montre que l'état 1 est récurrent positif pour la chaîne X , de plus Y étant apériodique, X l'est aussi et finalement X est ergodique puisque elle est irréductible, ainsi X admet une distribution limite qui sera notée :

$$\pi = (\pi(j))_{j \geq 1}.$$

En ce qui concerne la chaîne X_Q , nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Lemme 3.5.1. [46] *La classe de l'état 1 est la seule classe récurrente de la matrice stochastique P_Q .*

Finalement pour ce cas, l'estimation de la déviation de la distribution stationnaire est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. [46] *Si la matrice de transition P est irréductible, avec $P \leq_{st} Q$, où Q est une matrice de transition irréductible, récurrente positive et stochastiquement monotone, on a :*

$$\sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| \leq 2\beta(Q) \quad (\pi_Q(j) = 0, \text{ si } j > Q).$$

3.6 Vitesse de convergence

Cette section est consacrée à la présentation de quelques résultats concernant l'évaluation de la vitesse de convergence de π_Q vers π , dans le cas où la chaîne ayant une matrice de transition Q géométriquement récurrente, mais avant cela, nous rappelons d'abord brièvement quelques définitions et propriétés essentielles des chaînes irréductibles à espace d'états S [35, 36].

Définition 3.6.1. *On appelle "small set" une partie A de S , pour laquelle il existe un entier $m > 0$ et une mesure non triviale V_m sur S tels que, pour tout i dans A et pour tout j dans S on ait :*

$$P^{(m)}(i, j) \geq V_m(j).$$

Pour une chaîne irréductible à valeurs dans S , toute partie finie est un "small set".

Soit $Z = (Z(k))_{k \geq 0}$ une chaîne irréductible et A une partie de S , le temps d'atteinte de l'ensemble A est défini par :

$$\tau_A = \inf \{k \geq 1; Z(k) \in A\}.$$

Définition 3.6.2. *La chaîne $Z = (Z(k))_{k \geq 0}$ est dite géométriquement récurrente s'il existe un "small set" B et un nombre $r > 1$, dépendant éventuellement de B , tel que :*

$$\sup_{i \in B} \mathbb{E}_i \{r^{\tau_B}\} < +\infty.$$

Définition 3.6.3. *L'état i est dit géométriquement récurrent s'il existe $r > 1$, dépendant éventuellement de i , tel que :*

$$\mathbb{E}_i \{r^{\tau_i}\} < +\infty.$$

Propriété 3.6.1. *Si la chaîne est géométriquement récurrente tous les états sont géométriquement récurrents.*

Définition 3.6.4. La chaîne $Z = (Z(k))_{k \geq 0}$ est dite uniformément récurrente s'il existe un "small set" B et un nombre $r > 1$, dépendant éventuellement de B , tel que :

$$\sup_{i \in S} \mathbb{E}_i \{r^{T_B}\} < +\infty.$$

Afin d'évaluer la vitesse de convergence de π_Q vers π , il suffit de majorer :

$$B(Q) = \inf_{T \geq 1} \{T \bar{\mu}(Q) + \sum_{j > T} P(W_1 > j)\}.$$

La majoration de $B(Q)$ sera réalisée en deux étapes. La première étape consiste à majorer $B(Q)$ par une fonction de $\bar{\mu}(Q)$, en exploitant l'hypothèse de la récurrence géométrique. La seconde, qui est plus délicate, est consacrée à l'évaluation de $\bar{\mu}(Q)$.

Première étape

Propriété 3.6.2. [46] Soit P irréductible, $P \leq_{st} Q$, où Q est irréductible et stochastiquement monotone. Si la chaîne de matrice de transition Q est géométriquement récurrente, alors :

- (1) Q admet une distribution limite μ ;
- (2) P admet une distribution limite π ;
- (3) P_Q admet une distribution limite π_Q ;
- (4) $\sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| = o(-\bar{\mu}(Q) \ln \bar{\mu}(Q))$ ($\pi_Q(j) = 0$ si $j > Q$).

Le lemme ci-dessous, fournit une caractérisation utile des chaînes géométriquement récurrentes et stochastiquement monotones. Celle-ci est fondée sur la condition de Foster-Lyapounov.

Lemme 3.6.1. [46] Considérons une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N}^* , dont la matrice de transition $Q = (q(i, j))_{i, j \geq 1}$ est irréductible et stochastiquement monotone. Cette chaîne est géométriquement récurrente si et seulement s'il existe une partie finie B de \mathbb{N}^* , un nombre réel δ , avec $0 < \delta < 1$ et une suite $(V(j))_{j \in B}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ vérifiant les conditions :

- (a) $\sum_{j \in B} q(i, j) V(j) \leq (1 - \delta) V(i), \forall i \in B;$
- (b) $\sum_{j \in B} q(i, j) V(j) < +\infty, \forall i \in B.$

Du lemme précédent, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.6.1. [46] Soit P irréductible, $P \leq_{st} Q$ où Q est irréductible et stochastiquement monotone. Supposons qu'il existe une partie finie B de \mathbb{N}^* , un nombre réel δ , avec $0 < \delta < 1$ et une suite $(V(j))_{j \in B}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ vérifiant les conditions :

$$(a) \quad \sum_{j \in B} q(i, j)V(j) \leq (1 - \delta)V(i), \quad \forall i \in B;$$

$$(b) \quad \sum_{j \in B} q(i, j)V(j) < +\infty, \quad \forall i \in B.$$

Alors :

- (1) Q admet une distribution limite μ ;
- (2) P admet une distribution limite π ;
- (3) P_Q admet une distribution limite π_Q ;
- (4) $\sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| = o(-\bar{\mu}(Q) \ln \bar{\mu}(Q))$ ($\pi_Q(j) = 0$ si $j > Q$).

Remarque 3.6.1. On notera que si P est stochastiquement monotone, on obtient l'encadrement suivant :

$$\bar{\pi}(Q) \leq \sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| \leq C \bar{\pi}(Q) \ln \bar{\pi}(Q)$$

où C est une constante.

Deuxième étape

Le théorème précédent fournit la vitesse de convergence de π_Q vers π en fonction de $\bar{\mu}(Q)$, qui est, en général, inconnue ; il est alors préférable de s'affranchir de $\bar{\mu}(Q)$.

La récurrence géométrique ou même uniforme ne garantit pas une décroissance rapide de $\bar{\mu}(Q)$ vers 0. La raison de ce phénomène est qu'il n'y a pas de rapport étroit entre la nature de la récurrence, qui est une propriété temporelle, et le comportement asymptotique de la distribution stationnaire μ , qui est une propriété spatiale.

Le théorème suivant permet, en renforçant l'hypothèse du théorème précédent, de majorer $\bar{\mu}(Q)$ et d'en déduire la vitesse de convergence de π_Q vers π .

Théorème 3.6.2. [46] Soit P irréductible, $P \leq_{st} Q$ où Q est irréductible et stochastiquement monotone. Supposons qu'il existe un entier j_0 , un nombre réel δ , avec $0 < \delta < 1$ et une suite $(V(j))_{j \geq j_0}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$, non décroissante et tendant vers l'infini, vérifiant la condition :

$$\sum_{j \geq j_0} q(i, j) V(j) \leq (1 - \delta) V(i), \quad \forall i \geq j_0;$$

Alors :

- (1) Q admet une distribution limite μ ;
- (2) P admet une distribution limite π ;
- (3) P_Q admet une distribution limite π_Q ;
- (4) $\sum_{j \geq 1} |\pi_Q(j) - \pi(j)| = o(\ln V(Q)/V(Q))$ ($\pi_Q(j) = 0$ si $j > Q$).

3.7 Exemple illustratif sur les techniques de troncature

On définit la matrice $P = (P(i, j))_{i, j \geq 1}$ qui représente le modèle original comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si on suppose que cette matrice stochastique à espace d'états infini, irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une distribution stationnaire unique $\pi = (\pi(j))_{j \geq 1}$.

Dans cet exemple, on fixe le rang de la troncature à quatre ($Q = 4$). Ainsi, on considère "le coin Nord-Ouest" d'ordre 4 de la matrice P donné par :

$$T_4 = (P(i, j))_{1 \leq i, j \leq 4}.$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix},$$

P étant irréductible, cela implique que T_4 contient au moins une ligne i pour laquelle :

$$\sum_{j=1}^4 P_{ij} < 1,$$

alors la matrice tronquée T_4 n'est pas une matrice stochastique. À partir de T_4 , on construit une matrice stochastique $P_4 = (P_4(i, j))_{1 \leq i, j \leq 4}$ vérifiant $P_4 \geq T_4$, c'est-à-dire $P_4(i, j) \geq T_4(i, j)$ pour $1 \leq i, j \leq 4$. Pour ce faire, on considère plusieurs techniques de troncature.

3.7.1 Techniques de l'augmentation linéaire

Pour la technique de l'augmentation linéaire, la matrice P_4 est calculée comme suit :

$$P_4(i, j) = P(i, j) + a(i, j) \sum_{k>4} P(i, k), \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 4. \quad (3.2)$$

où, $\sum_{k>4} P(i, k)$ représente la masse de probabilité perdue sur la ligne i lors de la troncature de P . Cette masse de probabilité est redistribuée sur les colonnes de T_4 selon la définition d'une certaine matrice stochastique A_Q , tel que :

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque ligne i , on a :

$$\sum_{k>4} P(i, k) = (a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + a_{i,4}) \sum_{k>4} P(i, k),$$

pour $i = \overline{1, 4}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{k>4} P_{1k} = a_{11} \sum_{k>4} P_{1k} + a_{12} \sum_{k>4} P_{1k} + a_{13} \sum_{k>4} P_{1k} + a_{14} \sum_{k>4} P_{1k} \\ \sum_{k>4} P_{2k} = a_{21} \sum_{k>4} P_{2k} + a_{22} \sum_{k>4} P_{2k} + a_{23} \sum_{k>4} P_{2k} + a_{24} \sum_{k>4} P_{2k} \\ \sum_{k>4} P_{3k} = a_{31} \sum_{k>4} P_{3k} + a_{32} \sum_{k>4} P_{3k} + a_{33} \sum_{k>4} P_{3k} + a_{34} \sum_{k>4} P_{3k} \\ \sum_{k>4} P_{4k} = a_{41} \sum_{k>4} P_{4k} + a_{42} \sum_{k>4} P_{4k} + a_{43} \sum_{k>4} P_{4k} + a_{44} \sum_{k>4} P_{4k} \end{cases}$$

Posons $s_{(i,k)} = \sum_{k>4} P(i, k)$. Alors, la matrice P_4 s'écrit comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} + a_{11}s_{(1,k)} & P_{12} + a_{12}s_{(1,k)} & P_{13} + a_{13}s_{(1,k)} & P_{14} + a_{14}s_{(1,k)} \\ P_{21} + a_{21}s_{(2,k)} & P_{22} + a_{22}s_{(2,k)} & P_{23} + a_{23}s_{(2,k)} & P_{24} + a_{24}s_{(2,k)} \\ P_{31} + a_{31}s_{(3,k)} & P_{32} + a_{32}s_{(3,k)} & P_{33} + a_{33}s_{(3,k)} & P_{34} + a_{34}s_{(3,k)} \\ P_{41} + a_{41}s_{(4,k)} & P_{42} + a_{42}s_{(4,k)} & P_{43} + a_{43}s_{(4,k)} & P_{44} + a_{44}s_{(4,k)} \end{pmatrix}.$$

- **L'augmentation de la première colonne [29]**

Pour le cas de l'augmentation de la première colonne, on prend $a_4(i, 1) = 1$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Alors A_4 s'écrit sous la forme suivante :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et la matrice P_4 est donnée comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} + \sum_{k>4} P_{1k} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} + \sum_{k>4} P_{2k} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} + \sum_{k>4} P_{3k} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} + \sum_{k>4} P_{4k} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}.$$

- **L'augmentation de la dernière colonne [1]**

De même pour le cas de l'augmentation de la dernière colonne, on suppose que $a_4(i, 4)$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Alors, l'écriture induite de la matrice A_4 est donnée par :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice P_4 est donnée comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} + \sum_{k>4} P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} + \sum_{k>4} P_{2k} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} + \sum_{k>4} P_{3k} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} + \sum_{k>4} P_{4k} \end{pmatrix}.$$

- **L'augmentation uniforme**

Dans ce cas, la matrice A_4 est construite de façon à ce que toutes ses composantes $a(i, j) = 1/4$ pour $1 \leq i, j \leq 4$:

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

et la matrice P_4 est donnée comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{1k} & P_{12} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{1k} & P_{13} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{1k} & P_{14} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{1k} \\ P_{21} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{2k} & P_{22} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{2k} & P_{23} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{2k} & P_{24} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{2k} \\ P_{31} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{3k} & P_{32} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{3k} & P_{33} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{3k} & P_{34} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{3k} \\ P_{41} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{4k} & P_{42} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{4k} & P_{43} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{4k} & P_{44} + \frac{1}{4} \sum_{k>4} P_{4k} \end{pmatrix}.$$

- On peut aussi considérer le cas où la matrice A est une matrice stochastique dont toutes ses lignes sont identiques, c'est un cas considéré par *Gibson et Seneta* [18].

Ainsi, la matrice A_4 peut être définie comme suit :

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \end{pmatrix},$$

avec $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 1$.

Tenant compte de la formule (3.2), on obtiendra l'écriture de la matrice P_4 sous la forme suivante :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} + a_{11}s(1, k) & P_{12} + a_{22}s(1, k) & P_{13} + a_{33}s(1, k) & P_{14} + a_{44}s(1, k) \\ P_{21} + a_{11}s(2, k) & P_{22} + a_{22}s(2, k) & P_{23} + a_{33}s(2, k) & P_{24} + a_{44}s(2, k) \\ P_{31} + a_{11}s(3, k) & P_{32} + a_{22}s(3, k) & P_{33} + a_{33}s(3, k) & P_{34} + a_{44}s(3, k) \\ P_{41} + a_{11}s(4, k) & P_{42} + a_{22}s(4, k) & P_{43} + a_{33}s(4, k) & P_{44} + a_{44}s(4, k) \end{pmatrix},$$

où,

$$s(i, k) = \sum_{k>4} P(i, k), \quad \text{Pour tout } 1 \leq i \leq 4.$$

- Le dernier cas de l'augmentation linéaire, c'est le cas considéré par *Van Dijk* [49], où il a pris la matrice A comme étant une matrice booléenne.

Dans notre exemple, on prendra la matrice A comme une matrice identité :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Tenant compte toujours de la formule (3.2), on obtiendra la matrice P_4 comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} P_{11} + s(1, k) & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} + s(2, k) & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} + s(3, k) & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} + s(4, k) \end{pmatrix}.$$

3.7.2 Technique de la renormalisation

Dans cette technique, on pose :

$$S(i, 4) = \sum_{j=1}^4 P(i, j), \quad \forall 1 \leq i \leq 4,$$

où, $S(i, 4)$ représente la somme des probabilités sur chaque ligne i du coin Nord-Ouest d'ordre 4 de la matrice P , tel que :

$$\begin{cases} S(1, 4) = P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14}, \\ S(2, 4) = P_{21} + P_{22} + P_{23} + P_{24}, \\ S(3, 4) = P_{31} + P_{32} + P_{33} + P_{34}, \\ S(4, 4) = P_{41} + P_{42} + P_{43} + P_{44}. \end{cases}$$

Pour obtenir une matrice stochastique P_4 d'ordre 4, on doit tenir compte de la transformation suivante :

$$P_4(i, j) = \frac{P(i, j)}{S(i, 4)}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 4.$$

Dans ce cas, la matrice P_4 est donnée comme suit :

$$P_4 = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}}{S(1,4)} & \frac{P_{12}}{S(1,4)} & \frac{P_{13}}{S(1,4)} & \frac{P_{14}}{S(1,4)} \\ \frac{P_{21}}{S(2,4)} & \frac{P_{22}}{S(2,4)} & \frac{P_{23}}{S(2,4)} & \frac{P_{24}}{S(2,4)} \\ \frac{P_{31}}{S(3,4)} & \frac{P_{32}}{S(3,4)} & \frac{P_{33}}{S(3,4)} & \frac{P_{34}}{S(3,4)} \\ \frac{P_{41}}{S(4,4)} & \frac{P_{42}}{S(4,4)} & \frac{P_{43}}{S(4,4)} & \frac{P_{44}}{S(4,4)} \end{pmatrix}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique a été effectuée sur les techniques de troncature dans les chaînes de Markov à espace d'états infini, ainsi que sur les principaux résultats relatifs à ces techniques. Ensuite, afin de bien assimiler le principe de celles-ci, nous avons considéré un exemple illustratif sur une chaîne de Markov à espace d'états infini, où nous avons appliqué les différentes techniques de troncature (l'augmentation linéaire et la renormalisation) sur cette chaîne dans le but d'obtenir une chaîne de Markov à espace d'états fini. Dans le chapitre prochain, nous nous intéressons à l'application de ces techniques de troncature sur un cas de réseau de file d'attente de type "overflow", où nous utiliserons la méthode de stabilité forte afin d'estimer numériquement l'erreur due à la troncature de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant l'état de ce modèle.

4

Troncature d'espace d'états infini d'un réseau de files d'attente overflow

Introduction

Dans ce chapitre, on introduira les résultats théoriques obtenus par l'application de la méthode de stabilité forte pour l'estimation de l'erreur de la troncature d'espace d'états d'une chaîne de Markov décrivant un réseau de files d'attente de type "overflow" [1], et cela avec l'utilisation de plusieurs techniques de troncature, à savoir : l'augmentation de la première colonne, la renormalisation et l'augmentation uniforme.

4.1 Préliminaire et notations

Dans cette section, nous introduisons les notations nécessaires adaptées à notre cas.

On note par $\mathfrak{B}(\mathbb{N})$, l'espace Borélien des nombres naturels qui est muni de la topologie discrète, dont on peut considérer l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathfrak{B}(\mathbb{N}))$.

Soit $\mathfrak{M} = \{\mu(i, j)\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathfrak{B}(\mathbb{N})$ et $\eta = \{f(i, j)\}$ est l'espace des fonctions mesurables bornées définies sur \mathbb{N}^2 .

Dans notre cas, l'espace d'états S est donné comme suit :

$$S = \{(k, l), k \in \{0, 1\} \text{ et } l \in \mathbb{N}\}.$$

L'outil principal utilisé dans notre analyse est la norme v (norme poids), notée $\|\cdot\|_v$, où v est un vecteur dont ses éléments $v(s) > 1$ pour tout s dans l'espace des états S , et pour tout $f \in \eta$. On a par définition [33] :

$$\|f\|_v = \sup_{s \in S} \frac{|f(s)|}{v(s)} = \sup_{k \in \{0, 1\}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \frac{|f(k, l)|}{v(k, l)}.$$

Soit μ une mesure de probabilité dans S , alors la norme v de μ est définie par :

$$\|\mu\|_v = \sum_{s \in S} v(s) |\mu_s| = \sum_{i \in \{0, 1\}} \sum_{j \in \mathbb{N}} v(i, j) |\mu(i, j)|.$$

La norme v est élargie aux noyaux de transition dans S . Dans ce cas, soit A un noyau de transition, alors :

$$\|A\|_v = \sup_{s \in S} \frac{1}{v(s)} \sum_{s' \in S} v(s') |A(s, s')| = \sup_{k \in \{0, 1\}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{v(k, l)} \sum_{i \in \{0, 1\}} \sum_{j \in \mathbb{N}} v(i, j) |A_{(k, l) \rightarrow (i, j)}|.$$

Supposons maintenant que $\tilde{\pi}$ et π possèdent une norme v finie, alors

$$|\tilde{\pi}f - \pi f| \leq \|\tilde{\pi} - \pi\|_v \|f\|_v \inf_{s \in S} v(s).$$

4.1.1 Borne de stabilité forte

Définition 4.1.1. *La chaîne de Markov X de noyau de transition P et de mesure invariante π vérifiant $\|P\|_v < \infty$ est dite fortement v -stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$, si pour chaque noyau de transition \tilde{P} dans un certain voisinage $\{\tilde{P} : \|\tilde{P} - P\|_v < \epsilon\}$ admet une unique mesure invariante $\tilde{\pi}$, telle que :*

$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \rightarrow 0$ uniformément dans ce voisinage, quand $\|\tilde{P} - P\|_v \rightarrow 0$.

Le critère de stabilité forte est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. [3]

Soit X une chaîne de Markov de noyau de transition P et de mesure invariante π . Cette chaîne est dite v -fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$, si elle existe une mesure invariante σ et une fonction mesurable non négative h sur \mathbb{N} , satisfaisant les conditions suivantes :

- a. $\pi h > 0$, $\sigma \mathbb{1} = 1$, $\sigma h > 0$, et
- b. $T = P - h \circ \sigma$ est non négatif,
- c. $\|T\|_v < 1$,
- d. $\|P\|_v < \infty$,

où \circ représente le produit de convolution entre la mesure σ et la fonction h et $\mathbb{1}$ est un vecteur dont tout les éléments sont égaux à 1.

Théorème 4.1.2. [32]

Soit P un noyau de transition v -fortement stable. Si

$$\|\tilde{P} - P\|_v < \frac{1 - \|T\|_v}{\|I - \Pi\|_v},$$

Alors, la borne de la stabilité forte est donnée comme suit :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq \|\pi\|_v \frac{\|I - \Pi\|_v \|\tilde{P} - P\|_v}{1 - \|T\|_v - \|I - \Pi\|_v \|\tilde{P} - P\|_v},$$

où Π est le projecteur stationnaire associé au noyau de transition P et \tilde{P} est le noyau de transition perturbé.

En général, la constante $\|I - \Pi\|_v$ peut-être estimée par $1 + \|\pi\|_v$.

4.2 Description du modèle

Considérons un réseau de files d'attente constitué de deux stations en parallèle. La première station (*station 1*) est avec perte de clients, elle comporte un seul serveur sans file. La deuxième station (*station 2*) formée d'une file d'attente de capacité infinie et d'un unique serveur. Un client arrivé vers le système est assigné pour la *station 1*, si le serveur de celle-ci est disponible. Sinon, il sera acheminé directement vers la *station 2*. Supposons que :

H1 : La durée du service dans la première station suit une loi exponentielle de paramètre μ_1 ;

H2 : Le service des clients dans la deuxième station est également de loi exponentielle de paramètre μ_2 ;

H3 : Les clients arrivent vers le système suivant un processus de Poisson du paramètre λ .

La dynamique générale de ce réseau de files d'attente est illustrée en Figure (4.1) ci-dessous.

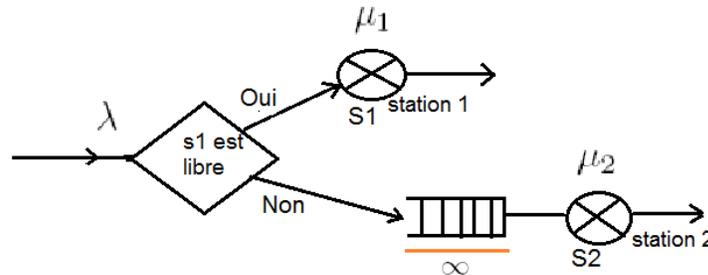


FIGURE 4.1 – Réseau de files d'attente "overflow".

4.2.1 Position du problème

Si $\lambda < \mu_2$, l'état d'équilibre d'un tel réseau de files d'attente (modèle de type "overflow") ne vérifie pas la propriété de la forme produit. Ainsi, le calcul de ses performances n'est pas évident. Toujours, dans ce sens, plusieurs analyses numériques et plusieurs approximations ont été proposées et réalisées pour ce modèle. Van Dijk [49] a analysé le même réseau de files d'attente et il a obtenu une borne pour l'erreur d'approximation de ses caractéristiques stationnaires, tout en utilisant l'approche de la récompensation et en tronquant le niveau de la taille de la deuxième file. Wolf [51] s'est également intéressé au même problème de troncature et ce en approchant la distribution stationnaire du modèle originale (à capacité infinie). De leur part, Adel et al. [1] ont considéré le problème de la troncature de la taille de la deuxième file, où ils ont estimé l'erreur due à cette troncature par la méthode de stabilité forte.

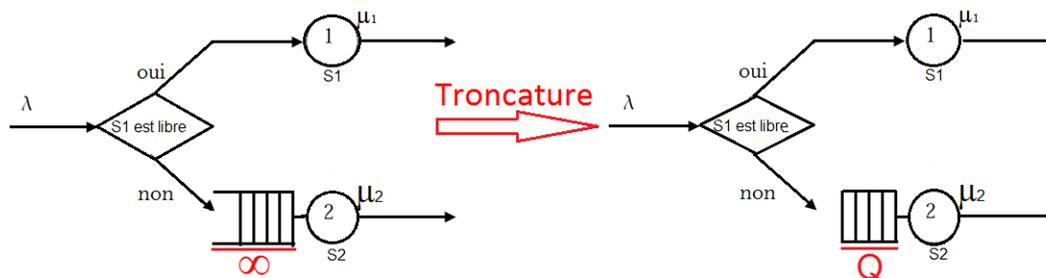


FIGURE 4.2 – La perturbation considérée.

L'état de ce réseau est décrit le couple de variables aléatoires (i, j) , où i représente le nombre de clients dans la première station 1 et j est le nombre de clients dans la deuxième station 2. On pose $M = (\lambda + \mu_1 + \mu_2)$. Ce couple de variables aléatoires est une chaîne de Markov à temps discret de noyau de transition \tilde{P} défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{(0,j);(1,j)} = \lambda/M; \\ \tilde{P}_{(1,j);(1,j+1)} = \lambda/M; \\ \tilde{P}_{(1,j);(0,j)} = \mu_1/M; \\ \tilde{P}_{(i,j);(i,j-1)} = \mu_2/M; \\ \tilde{P}_{(0,j);(1,j)} = \mu_1/M; \\ \tilde{P}_{(i,0);(i,0)} = \mu_2/M; \end{array} \right.$$

$\tilde{P} = (\tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (i,j)})_{(k,l) \in S; (i,j) \in S}$ est une matrice stochastique infinie, irréductible et récurrente positive [49]. Donc, elle admet une distribution stationnaire unique $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_{(k,l)})_{(k,l) \in S}$.

Dans la suite de ce chapitre, on présentera les résultats théoriques obtenus par Adel et al. [1] lors d'analyse du même réseau de files d'attente et en considérant différentes techniques de la troncature.

4.3 Troncature de l'espace d'états du modèle overflow

Considérons "le coin Nord-Ouest" T_Q d'ordre Q de la matrice \tilde{P} , défini par :

$$T_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)} = \tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (i,j)}, \quad \text{avec } 0 \leq k, i \leq 1; 0 \leq l, j \leq Q.$$

La matrice T_Q n'est pas stochastique, car elle comporte au moins une ligne (k, l) telle que :

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^Q T_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)} < 1,$$

et cela du fait que la chaîne de Markov associée au réseau de files d'attente "overflow" est irréductible. Afin de rendre T_Q stochastique, on construit une nouvelle matrice stochastique P_Q vérifiant :

$$P_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)} \geq T_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)}, \quad \forall 0 \leq k, i \leq 1 \text{ et } 0 \leq l, j \leq Q.$$

Cela peut se faire avec l'utilisation de plusieurs techniques :

◇ **Augmentation linéaire :**

Dans ce cas, la masse de probabilités perdue lors de la troncature de la matrice \tilde{P} est redistribuée sur les colonnes de T_Q avec plusieurs manières. On note par :

$$\sum_{m=0}^1 \sum_{n>Q} \tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (m,n)},$$

la masse de probabilités perdue sur la ligne (k, l) lors de la troncature de \tilde{P} .

Donc, la nouvelle matrice stochastique P_Q est donnée en fonction de cette masse de probabilités perdue, telle que :

$$P_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)} = \tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (i,j)} + A_{Q(k,l) \rightarrow (i,j)} \sum_{m=0}^1 \sum_{n>Q} \tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (m,n)}, \quad \forall 0 \leq k, i \leq 1 \text{ et } 0 \leq l, j \leq Q, \quad (4.1)$$

où, A_Q est une matrice stochastique quelconque, construite selon la technique de troncature à spécifier ultérieurement dans notre étude.

◇ **Renormalisation :**

On pose

$$S((k, l); Q) = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^Q \tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (m,n)}, \quad \forall 0 \leq k \leq 1 \text{ et } 0 \leq l \leq Q.$$

La nouvelle matrice stochastique P_Q , construite par la technique de la renormalisation, sera donnée en fonction de $S((k, l); Q)$, telle que :

$$P_{Q(k,l) \rightarrow (m,n)} = \frac{\tilde{P}_{(k,l) \rightarrow (m,n)}}{S((k, l); Q)}. \quad (4.2)$$

4.3.1 Augmentation de la première colonne

Pour cette technique, la masse de probabilités perdue lors de la troncature de l'espace d'états relatif au noyau de transition \tilde{P} est redistribuée sur la première colonne de T_Q . Plus précisément, soit A_Q une matrice stochastique quelconque. La définition de cette matrice est liée à la technique à utiliser. Pour obtenir l'augmentation de la première colonne, on pose :

$$A_{Q(k,l) \rightarrow (1,0)} = 1, \quad \forall 0 \leq k, l \leq Q.$$

En utilisant la formule (4.1), la matrice de transition $P1$ associée au modèle tronqué est alors donnée comme suit :

$$\begin{cases} P1_{(1,Q) \rightarrow (1,0)} = \frac{\lambda}{M}; \\ P1_{(i,j) \rightarrow (m,n)} = \tilde{P}_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, \quad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La borne de stabilité forte induite par cette technique

Afin d'estimer l'erreur induite par la troncature de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant le modèle considéré dans cette étude et ce en utilisant la méthode de stabilité forte, on choisit la fonction test v comme suit :

Pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$,

$$v(k, l) = \alpha^k \beta^l, \quad (k, l) \in (\{0, 1\}) \times (\{0, 1, \dots, \dots Q\}).$$

La condition d'ergodicité géométrique permettant l'existence du régime stationnaire de la chaîne de Markov en question est donnée par [49] :

$$1 < \frac{\mu}{\lambda}, \quad (4.3)$$

où,

$$\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$$

Pour calculer la borne de stabilité forte, on a besoin d'estimer la déviation entre les noyaux de transitions \tilde{P} et $P1$ en norme v . Cette borne est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. [1] *Si la condition (4.3) est satisfaite, alors*

$$\|P1 - \tilde{P}\|_v \leq \frac{\lambda}{\beta^Q M} = \Delta 1(\beta). \quad (4.4)$$

Soit $T1$ le noyau tabou (noyau auxiliaire) relatif au noyau de transition du modèle tronqué défini comme suit :

$$T1_{(i,j) \rightarrow (m,n)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ P_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Dans le lemme suivant, nous introduisons la norme v de $T1$.

Lemme 4.3.2. [1] *On suppose que la condition (4.3) soit vérifiée, pour tout $1 < \beta < \frac{\mu}{M}$ et $\beta < \alpha < 1 + (1 - \frac{1}{\beta}) \frac{\mu}{M}$ on a :*

$$\|T1\|_v = \max \left\{ \alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{\mu_1}{M} + \frac{1}{\beta} \frac{\mu_2}{M}, \alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{\mu_2}{M} + \frac{1}{\beta} \frac{\mu_1}{M} \right\} = \rho 1(\alpha, \beta) < 1, \quad (4.5)$$

où,

$$\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}.$$

Pour démontrer que la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle tronqué soit v -fortement stable, on choisit la fonction mesurable $h1$ comme suit :

$$h1(i, j) = \mathbb{1}_{(i=0, j=0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et la mesure $\sigma1$ soit définie comme suit :

$$\sigma1(i, j) = P1_{(0,0) \rightarrow (i,j)}.$$

Cette mesure de probabilités n'est que la première ligne de la matrice $P1$.

Dans le lemme suivant, nous introduirons la norme v de la distribution stationnaire $\pi1$ qui est finie.

Lemme 4.3.3. [1] *On suppose que la condition (4.3) soit vérifiée, la norme v de $\pi1$ est donnée par :*

$$\|\pi1\|_v = \frac{\pi1(0,0)}{1 - \rho1(\alpha, \beta)} \left(1 + (\alpha - 1) \frac{\lambda}{M} \right) = C01(\alpha, \beta) < \infty, \quad (4.6)$$

où $\rho1$ est défini dans la relation (4.5).

Soient maintenant

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha : \rho1(\alpha, \beta) < 1\}$$

et

$$\beta_0 = \sup\{\beta : \rho1(\alpha, \beta) < 1\}.$$

Sous ces conditions, la chaîne de Markov associée au réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est v -fortement stable par rapport à la mesure de probabilités $\sigma1$ et la fonction mesurable $h1$ définies précédemment.

Théorème 4.3.1. [1] *Pour tout (α, β) tels que $1 < \beta < \beta_0$, $\beta < \alpha < \alpha_0$, la chaîne de Markov à temps discret décrivant le réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est v -fortement stable pour la fonction test $v(k, l) = \alpha^k \beta^l$.*

A partir du Théorème (4.3.1), la borne de stabilité forte donnée dans le Théorème (4.1.2) peut être utilisée pour le calcul de l'erreur de la troncature commise sur les distributions stationnaires. À cet effet, celle-ci est donnée dans théorème suivant tout en utilisant les différentes estimations obtenues en Lemme 4.3.1, Lemme 4.3.2 et Lemme 4.3.3.

Théorème 4.3.2. [1] *Soient $\tilde{\pi}$ et $\pi1$ les distributions stationnaires des chaînes de Markov à temps discret décrivant respectivement le réseau original et le réseau tronqué. On suppose que la condition (4.3) soit vérifiée, alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$ et $\beta < \alpha < \alpha_0$ et sous la condition :*

$$\Delta1(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho1(\alpha, \beta)}{C1(\alpha, \beta)}.$$

On a l'estimation de l'erreur due à la troncature suivante :

$$\|\pi_1 - \tilde{\pi}\|_v \leq \frac{C01(\alpha, \beta) C1(\alpha, \beta) \Delta 1(\alpha, \beta)}{1 - \rho 1(\alpha, \beta) - C1(\alpha, \beta) \Delta 1(\alpha, \beta)} = SSB_1(\alpha, \beta), \quad (4.7)$$

où, $C1(\alpha, \beta) = 1 + C01(\alpha, \beta)$, et $\Delta 1(\alpha, \beta)$, $\rho 1(\alpha, \beta)$ et $C01(\alpha, \beta)$ sont déjà définies dans les lemmes (4.3.1), (4.3.2) et (4.3.3) respectivement.

Dans le Théorème (4.3.2), le côté droit de l'inégalité (4.7) décrivant la borne de stabilité forte, est donné en fonction des paramètres α et β (paramètres de la norme v). Cela nous permet d'optimiser cette borne par rapport à ces deux paramètres et ce tout en considérant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{(\alpha, \beta)} SSB_1(\alpha, \beta) \\ \text{Sous les contraintes :} & \quad \rho 1(\alpha, \beta) < 1 \text{ et } \Delta 1(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho 1(\alpha, \beta)}{C01(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

4.3.2 Renormalisation

Dans ce deuxième cas et dans l'objectif de résoudre le même problème, on applique cette fois-ci la technique de la renormalisation qu'on a défini précédemment. Par conséquence, pour un nombre entier fini Q , la matrice stochastique $P2$ associée au modèle tronqué est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P2_{(1,Q) \rightarrow (1,Q-1)} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}; \\ P2_{(1,Q) \rightarrow (0,Q)} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}; \\ P2_{(i,j) \rightarrow (m,n)} = \tilde{P}_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, \quad \text{ailleurs.} \end{array} \right.$$

La borne de stabilité forte induite par cette technique

Afin de calculer la borne de stabilité forte, on a considéré la même fonction test v définie par : pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$,

$$v(k, l) = \alpha^k \beta^l, \quad (k, l) \in (\{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, Q\}).$$

Rappelons que la condition d'ergodicité géométrique de cette chaîne de Markov est la même :

$$1 < \frac{\mu}{\lambda}, \quad (4.8)$$

où,

$$\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}.$$

La norme v de la déviation entre les noyaux de transition \tilde{P} et $P2$ est donnée en lemme suivant :

Lemme 4.3.4. [1] *Si la condition (4.8) est vérifiée, alors*

$$\|P2 - \tilde{P}\|_v \leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_2}{M} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_1}{M} \right) = \Delta 2(\alpha, \beta). \quad (4.9)$$

Soit $T2$ le noyau tabou (noyau auxiliaire) associé au noyau de transition du modèle tronqué défini comme suit :

$$T2_{(i,j) \rightarrow (m,n)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ P_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La norme v de ce noyau est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.3.5. [1] *On suppose que la condition (4.8) soit vérifiée, pour tout $1 < \beta < \frac{\mu}{M}$ et $\beta < \alpha < 1 + (1 - \frac{1}{\beta}) \frac{\mu}{M}$ on a :*

$$\|T2\|_v = \max \left\{ \alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{1}{\beta} \frac{\mu_2}{M} + \frac{\mu_1}{M}, \frac{1}{\beta} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_2}{M} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{\mu_1}{M} \right) \right\} = \rho 2(\alpha, \beta) < 1. \quad (4.10)$$

De même, afin de démontrer que la chaîne de Markov relative à la matrice de transition $P2$ soit v -fortement stable, on choisit la fonction mesurable $h2$ comme une fonction indicatrice par rapport à l'état $(0, 0)$:

$$h2(i, j) = \mathbb{1}_{(i=0, j=0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et la mesure de probabilités $\sigma 2$ qui est définie comme suit :

$$\sigma 2(i, j) = P2_{(0,0) \rightarrow (i,j)}.$$

La majoration en norme v de la distribution stationnaire $\pi 2$ est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 4.3.6. [1] *Si la condition (4.8) est vérifiée, la norme v de $\pi 2$ est donnée comme suit :*

$$\|\pi 2\|_v = \frac{\pi 2(0,0)}{1 - \rho 2(\alpha, \beta)} \left(\alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_2}{M} \right) = C0 2(\alpha, \beta) < \infty. \quad (4.11)$$

Soient maintenant

$$\beta_0 = \sup \{ \beta : \rho 2(\alpha, \beta) < 1 \}$$

et

$$\alpha_0 = \sup \{ \alpha : \rho 2(\alpha, \beta) < 1 \}.$$

Sous toujours ces deux conditions, la chaîne de Markov associée au réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est v -fortement stable par rapport au choix considéré de la mesure σ_2 et de la fonction mesurable h_2 définies précédemment. Ce constat est précisé dans le théorème ci-dessous.

Théorème 4.3.3. [1] *Pour tout (α, β) tels que $1 < \beta < \beta_0$ et $\beta < \alpha < \alpha_0$, la chaîne de Markov à temps discret décrivant le réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est fortement v -stable pour la fonction test $v(k, l) = \alpha^k \beta^l$.*

En utilisant les différentes estimations obtenues en lemme 4.3.4, lemme 4.3.5, et lemme 4.3.6 et sous les hypothèses du théorème (4.3.3), on obtient la borne de stabilité forte. Celle-ci est donnée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 4.3.4. [1] *Soient $\tilde{\pi}$ et π_2 les distributions stationnaires des chaînes de Markov à temps discret décrivant respectivement le réseau original et le réseau tronqué. On suppose que la condition (4.8) soit vérifiée, alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$ et $\beta < \alpha < \alpha_0$, et sous la condition :*

$$\Delta_2(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho_2(\alpha, \beta)}{C_2(\alpha, \beta)}, \quad (4.12)$$

on a l'estimation suivante :

$$\|\pi_2 - \tilde{\pi}\|_v \leq \frac{C_{02}(\alpha, \beta) C_2(\alpha, \beta) \Delta_2(\alpha, \beta)}{1 - \rho_2(\alpha, \beta) - C_2(\alpha, \beta) \Delta_2(\alpha, \beta)} = SSB_2(\alpha, \beta), \quad (4.13)$$

où, $C_2(\alpha, \beta) = 1 + C_{02}(\alpha, \beta)$.

Et $\Delta_2(\alpha, \beta)$, $\rho_2(\alpha, \beta)$ et $C_{02}(\alpha, \beta)$ sont déjà définis dans les lemmes (4.3.4), (4.3.5) et (4.3.6) respectivement.

Dans le théorème (4.3.4) le côté droit de l'inégalité (4.13) qui décrit la borne de stabilité forte, est donné en fonction des paramètres α et β . Cela donne la possibilité de minimiser cette borne par rapport à (α, β) .

$$\begin{aligned} & \min_{(\alpha, \beta)} SSB_2(\alpha, \beta) \\ \text{Sous contraintes} & \quad \rho_2(\alpha, \beta) < 1 \text{ et } \Delta_2(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho_2(\alpha, \beta)}{C_2(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

4.3.3 Augmentation uniforme

Pour cette technique, la masse de probabilités perdue lors de la troncature de taille de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant le réseau de files d'attente overflow sera redistribuée sur ces colonnes d'une manière uniforme.

Avec cette transformation, la matrice de transition $P3$ associée au modèle tronqué est donnée par :

$$\begin{cases} P3_{(1,Q) \rightarrow (0,Q)} &= \frac{\mu_1}{M} + \frac{\lambda}{2(Q+1)M}; \\ P3_{(1,Q) \rightarrow (1,Q-1)} &= \frac{\mu_2}{M} + \frac{\lambda}{2(Q+1)M}; \\ P3_{(1,Q) \rightarrow (1,j)} &= \frac{\lambda}{2(Q+1)M}; \\ P3_{(i,j) \rightarrow (m,n)} &= \tilde{P}_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, \quad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La borne de stabilité forte induite par cette technique

Afin de calculer la borne de stabilité forte, on a défini la fonction test v comme suit :

Pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$,

$$v(k, l) = \alpha^k \beta^l, \quad (k, l) \in (\{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, Q\}).$$

Nous introduisons aussi la condition suivante :

$$1 < \frac{\mu}{\lambda}, \quad (4.14)$$

où,

$$\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}.$$

Lemme 4.3.7. [1] Si la condition (4.14) est vérifiée, alors

$$\|P3 - \tilde{P}\|_v \leq \frac{1}{(\beta - 1)} \frac{1}{(Q + 1)} \frac{\lambda}{M} = \Delta 3(\alpha, \beta). \quad (4.15)$$

Soit $T3$ le noyau tabou (noyau auxiliaire) associé au noyau de transition du modèle tronqué $P3$ défini comme suit :

$$T3_{(i,j) \rightarrow (m,n)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ P_{(i,j) \rightarrow (m,n)}, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La constante $\rho 3$ représentant la norme v du noyau tabou $T3$ est donnée dans le lemme ci-dessous.

Lemme 4.3.8. [1] On suppose que la condition (4.14) soit vérifiée, pour tout $1 < \beta < \frac{\mu}{M}$ et $\beta < \alpha < 1 + (1 - \frac{1}{\beta})\frac{\mu}{M}$ on a :

$$\|T3\|_v = \max \left\{ \alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{1}{\beta} \frac{\mu_2}{M} + \frac{\mu_1}{M}; \frac{1}{\beta} \frac{\mu_2}{M} + \frac{1}{\alpha} \frac{\mu_1}{M} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{(\beta - 1)}\right) \frac{1}{4} \frac{\lambda}{M} \right\} = \rho 3(\alpha, \beta) < 1. \quad (4.16)$$

La chaîne de Markov associée au modèle tronqué est v -fortement stable pour la fonction mesurable

$$h3(i, j) = \mathbb{1}_{(i=0, j=0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et la mesure σ qui est définie comme suit :

$$\sigma3(i, j) = P3_{(0,0) \rightarrow (i,j)}.$$

De même, la constante définissant l'estimation en norme v de la distribution stationnaire $\pi3$ est donnée en lemme suivant :

Lemme 4.3.9. [1] *Si la condition (4.14) est vérifiée, la norme v de $\pi3$ est donnée comme suit :*

$$\|\pi3\|_v = \frac{\pi3_{(0,0)}}{1 - \rho3(\alpha, \beta)} \left(\alpha \frac{\lambda}{M} + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_2}{M} \right) = C03(\alpha, \beta). \quad (4.17)$$

Soient maintenant

$$\beta_0 = \sup\{\beta : \rho3(\alpha, \beta) < 1\},$$

et

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha : \rho3(\alpha, \beta) < 1\}.$$

Sous toutes ces conditions introduites ci-dessus, la chaîne de Markov associée au réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est v -fortement stable par rapport à la mesure $\sigma3$ et la fonction mesurable $h3$ définies précédemment.

Théorème 4.3.5. [1] *Pour tout (α, β) tels que $1 < \beta < \beta_0$, $\beta < \alpha < \alpha_0$, la chaîne de Markov à temps discret décrivant le réseau de files d'attente overflow à espace d'états fini est v -fortement stable pour la fonction test $v(k, l) = \alpha^k \beta^l$.*

À partir de la condition de stabilité qui est donnée dans le théorème 4.3.5, la borne de stabilité forte donnée dans le théorème 4.1.2 peut-être appliquée pour le calcul de l'erreur de la troncature commise sur les distributions stationnaires. A cet effet, celle-ci est donnée au théorème suivant tout en utilisant les différentes estimations obtenues en lemme 4.3.7, lemme 4.3.8 et lemme 4.3.9.

Théorème 4.3.6. [1] Soient $\tilde{\pi}$ et π_3 les distributions stationnaires des chaînes de Markov à temps discret décrivant respectivement le réseau original et le réseau tronqué. On suppose que la condition (4.14) soit vérifiée, alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$ et $\beta < \alpha < \alpha_0$. Sous la condition :

$$\Delta_3(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho_3(\alpha, \beta)}{C_3(\alpha, \beta)},$$

on a l'estimation suivante :

$$\|\pi_3 - \tilde{\pi}\|_v \leq \frac{C_{03}(\alpha, \beta) C_3(\alpha, \beta) \Delta_3(\alpha, \beta)}{1 - \rho_3(\alpha, \beta) - C_3(\alpha, \beta) \Delta_3(\alpha, \beta)} = SSB_3(\alpha, \beta), \quad (4.18)$$

où, $C_3(\alpha, \beta) = 1 + C_{03}(\alpha, \beta)$.

Et $\Delta_3(\alpha, \beta)$, $\rho_3(\alpha, \beta)$ et $C_{03}(\alpha, \beta)$ sont déjà définies dans les lemmes (4.3.7), (4.3.8) et (4.3.9) respectivement.

Dans le théorème (4.3.6) le côté droit de l'inégalité (4.18) qui décrit la borne de stabilité forte, est donné en fonction des paramètres α et β . Cela donne la possibilité de minimiser cette borne par rapport à (α, β) .

$$\min_{(\alpha, \beta)} SSB_3(\alpha, \beta)$$

$$\text{Sous contraintes} \quad \rho_3(\alpha, \beta) < 1 \text{ et } \Delta_3(\alpha, \beta) < \frac{1 - \rho_3(\alpha, \beta)}{C_3(\alpha, \beta)}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différents résultats théoriques obtenus par Adel et al. [1]. Ces résultats concernent trois bornes de perturbation obtenues par application de la méthode de stabilité forte et tout en utilisant trois techniques différentes de troncature : augmentation de la première colonne, renormalisation et l'augmentation uniforme. En effet, la perturbation considérée dans ce travail consiste à tronquer l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant le réseau de files d'attente de type overflow. Ainsi, notre objectif principal consiste à comparer numériquement la qualité de ces trois bornes de perturbation obtenues à ce niveau.

5

Étude comparative de quelques techniques de troncature

Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté les différents résultats théoriques obtenus pour chaque technique de troncature prise en considération dans notre étude et en appliquant la méthode de stabilité forte. En effet, les résultats théoriques obtenus ne peuvent pas répondre à la question qui consiste de savoir la meilleure technique de troncature et la plus adéquate pour l'estimation de la distribution stationnaire d'un réseau overflow.

Pour remplir cette lacune, on a fait appel à la programmation sous le logiciel Matlab afin de mener à terme une comparaison numérique entre les résultats théoriques relatifs aux trois techniques de troncature de la taille de l'espace d'états de la chaîne de Markov décrivant le réseau de files d'attente overflow.

5.1 Application numérique

Dans cette section, on va présenter les résultats numériques obtenus par l'application des trois techniques de troncature introduites dans le chapitre précédent. Cela peut se faire par implémentation des bornes de stabilité forte obtenues pour chaque technique de troncature et de les comparer avec l'erreur réelle induite par la même troncature.

En effet, on a conçu un algorithme pour chaque technique pour l'estimation de l'erreur commise sur la distribution stationnaire du système original. Lorsque une telle approximation est possible par rapport à une certaine norme v , il est important aussi, d'avoir une idée sur la qualité de cette approximation par rapport à l'erreur réelle. Pour cela, on a élaboré un programme pour chaque technique dans l'environnement Matlab.

5.1.1 Environnement MATLAB

Notre choix s'est porté sur l'utilisation de l'environnement MATLAB qui nous permet grâce à la richesse de sa bibliothèque mathématique, d'optimiser les instructions dans les programmes réalisés dans le cadre de ce travail. En effet, MATLAB est un système interactif et convivial de calcul numérique et de visualisation graphique destiné aux ingénieurs et scientifiques qui possèdent un langage de programmation à la fois puissant et simple. De plus, il intègre des fonctions d'analyse numérique, de calcul matriciel, etc.

5.1.2 Algorithme de calcul de la borne de stabilité forte

Nous avons conçu un algorithme qui nous permet d'estimer les trois bornes de stabilité forte (\mathbf{SSB}_1 , \mathbf{SSB}_2 , \mathbf{SSB}_3) obtenues dans le chapitre précédent, ainsi que l'erreur réelle due à chaque technique de troncature (\mathbf{ER}_1 , \mathbf{ER}_2 , \mathbf{ER}_3). Les principales procédures de cet algorithme sont données comme suit :

Étape 1 : Comporte les instructions suivantes :

- Introduire le niveau de la troncature Q ;
- Introduire le taux des inter-arrivées λ ;
- Introduire le taux du service de la première station μ_1 ;
- Introduire le taux du service de la deuxième station μ_2 ;
- Calcul de $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$;
- Calcul de $M = \lambda + \mu_1 + \mu_2$;

- Introduire la matrice de transition \tilde{P} associée au modèle original ;
- Introduire la matrice de transition P associée au modèle tronqué ;

Étape 2 : Calcul de la valeur optimale de la borne de stabilité forte $\mathbf{SSB}_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2, 3$), comporte les instructions suivantes :

- Détermination des valeurs de α_0 et de β_0 , tels que $\forall \beta \in \mathbf{I}_1 =]1, \beta_0[$ et $\alpha \in \mathbf{I}_2 =]\beta, \alpha_0[$, on a :

$$\rho(\alpha, \beta) < 1.$$

- Détermination des domaines des valeurs des paramètres de la norme v : $I_\beta = [\beta_{min}, \beta_{max}] \subset \mathbf{I}_1$ et $I_\alpha = [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \subset \mathbf{I}_2$, pour lesquels la condition $\Delta < \frac{1-\rho(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)}$ soit vérifiée.
- Détermination de la valeur optimale du couple (α, β) notée $(\alpha_{opt}, \beta_{opt})$ qui minimise la borne de stabilité forte $\mathbf{SSB}_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2, 3$).
- Calcul de la valeur de la borne optimale : $\mathbf{SSB}(\alpha_{opt}, \beta_{opt})$.

Étape 3 : Calcul de la valeur de l'erreur réelle $\mathbf{RE}(\alpha_{opt}, \beta_{opt})$. Cette étape comporte les instructions suivantes :

- Calculer la distribution stationnaire $\tilde{\pi}$ du modèle original ;
- Calculer la distribution stationnaire π du modèle tronqué ;
- Calculer

$$\mathbf{RE}(\alpha_{opt}, \beta_{opt}) = \sum_{i=0}^1 \sum_{m=0}^Q (\alpha_{opt})^i (\beta_{opt})^m |\tilde{\pi}_{(i,m)} - \pi_{(i,m)}|.$$

Fin.

Organigramme associé à l'algorithme

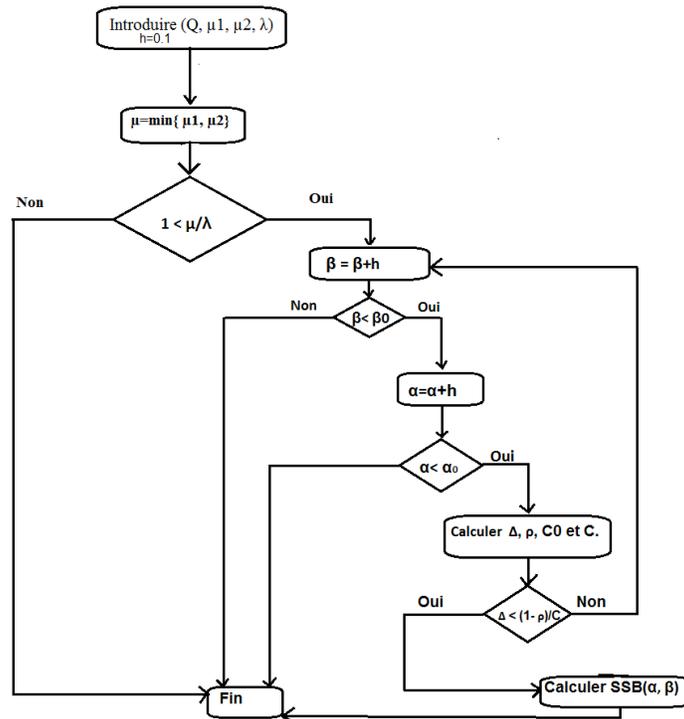


FIGURE 5.1 – Organigramme de l'algorithme

Le résultat final qu'on obtiendra à partir de l'exécution de notre programme est la valeur optimale de $SSB(\alpha, \beta)$.

Celle-ci est donnée par :

$$SSB(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}) = \min_{(\alpha, \beta)} SSB(\alpha, \beta).$$

5.1.3 Résultats numériques obtenus par application des trois techniques

L'algorithme introduit précédemment consiste à calculer la valeur du couple (α, β) qui minimise la borne $SSB(\alpha, \beta)$ pour les différentes valeurs du niveau de la troncature Q (c'est la perturbation considérée dans cette analyse), ainsi que la valeur $RE(\alpha, \beta)$ qui désigne l'erreur réelle relative à la technique de troncature appliquée sur le modèle original.

Dans notre application numérique, on a choisi les paramètres du modèle comme suit :

$$\lambda = 0.1, \mu_1 = 2.5, \mu_2 = 2.$$

1) Résultats obtenus par l'augmentation de la première colonne :

Q	α	β	$\ \tilde{\pi} - \pi_1\ _v$	
			$\mathbf{SSB}_1(\alpha, \beta)$	$\mathbf{RE}_1(\alpha, \beta)$
2	8.6000	8.5000	0.0436	0.0054
3	10.2000	10.1000	0.0046	$1.1405 * 10^{-4}$
4	11.5000	11.4000	$4.2880 * 10^{-4}$	$4.6540 * 10^{-5}$
5	12.6000	12.5000	$3.5818 * 10^{-5}$	$2.1051 * 10^{-5}$
6	13.4000	13.3000	$2.7817 * 10^{-6}$	0.0000
10	15.4000	15.3000	0.0000	0.0000
50	18.9000	18.8000	0.0000	0.0000

TABLE 5.1 – Résultats obtenus par l'augmentation de la première colonne.

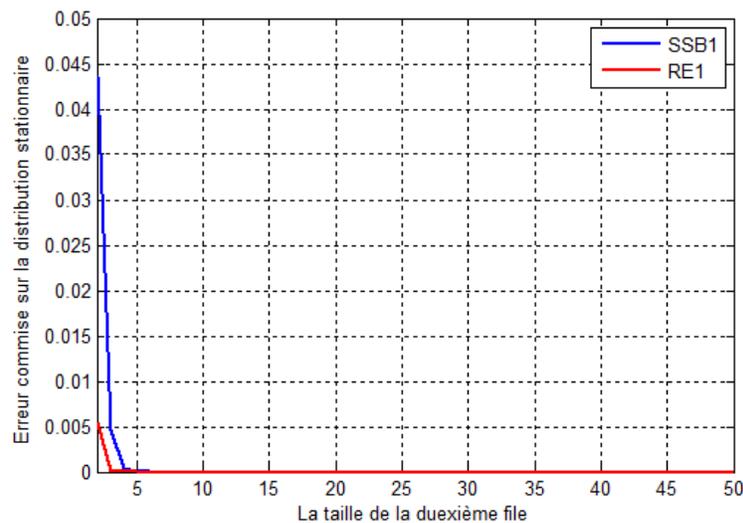


FIGURE 5.2 – Les deux bornes obtenues par l'augmentation de la première colonne

Discussion des résultats :

On peut facilement constater à partir des résultats du tableau et ceux de la figure, que les erreurs réelles sont légèrement inférieures à celles obtenues par l'application de la méthode de stabilité forte.

De plus, lorsqu'on augmente la valeur du niveau de la troncature Q , on remarque que les erreurs réelles et celles de la stabilité forte décroissent et même se rapproche à partir de ($Q > 5$), ce qui prouve que cette approximation est valable.

2) Résultats obtenus par la renormalisation :

Q	α	β	$\ \tilde{\pi} - \pi_2\ _v$	
			$\mathbf{SSB}_2(\alpha, \beta)$	$\mathbf{RE}_2(\alpha, \beta)$
1	6.5000	6.4000	0.34167408676109	0.1896
2	6.5000	6.4000	0.341641102156400	0.0456
3	6.5000	6.4000	0.341640279388323	0.0010
4	6.5000	6.4000	0.341640260200825	0.0002
5	6.5000	6.4000	0.341640259761923	0.0000
6	6.5000	6.4000	0.341640259751964	0.0000
7	6.5000	6.4000	0.341640259751739	0.0000
8	6.5000	6.4000	0.341640259751734	0.0000
10	6.5000	6.4000	0.341640259751734	0.0000
50	6.5000	6.4000	0.341640259751734	0.0000

TABLE 5.2 – Résultats obtenus par la renormalisation.

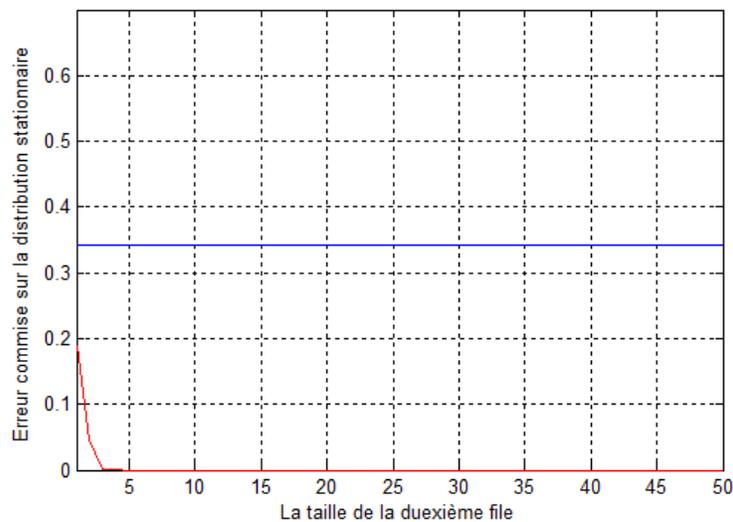


FIGURE 5.3 – Les deux bornes obtenues par la renormalisation

Discussion des résultats :

De même, pour cette technique, on constate que l'erreur réelle décroît avec l'augmentation de la valeur du niveau de la troncature Q ce qui n'est pas le cas de l'erreur associée à la stabilité forte qui reste presque stable (constante) et s'éloigne considérablement de l'erreur réelle avec cette augmentation de la valeur du paramètre de perturbation Q .

Résultats obtenus par l'augmentation uniforme :

Q	α	β	$\ \tilde{\pi} - \pi_3\ _v$	
			$\mathbf{SSB}_3(\alpha, \beta)$	$\mathbf{RE}_3(\alpha, \beta)$
1	6.9000	6.8000	0.1970	0.0026
2	6.8000	6.7000	0.1294	$2.1317 * 10^{-4}$
3	6.8000	6.7000	0.0964	0.0000
4	6.8000	6.7000	0.0768	0.0000
5	6.8000	6.7000	0.0638	0.0000
6	6.8000	6.7000	0.0546	0.0000
7	6.8000	6.7000	0.0477	0.0000
8	6.8000	6.7000	0.0423	0.0000
9	6.8000	6.7000	0.0381	0.0000
10	6.8000	6.7000	0.0346	0.0000
20	6.8000	6.7000	0.0180	0.0000
30	6.8000	6.7000	0.0122	0.0000
40	6.8000	6.7000	0.0092	0.0000
50	6.8000	6.7000	0.0074	0.0000

TABLE 5.3 – Résultats obtenus par l'augmentation uniforme

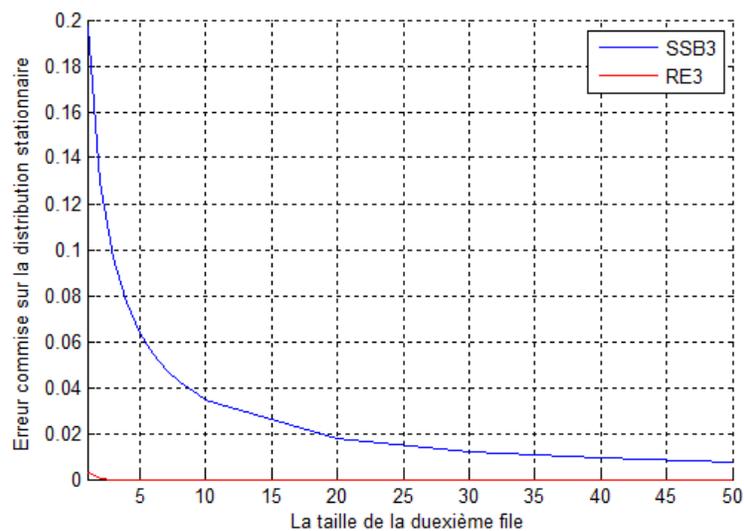


FIGURE 5.4 – Les deux bornes obtenues par l'augmentation uniforme

Discussion des résultats :

On constate la même chose que dans l'augmentation de la première colonne. L'erreur réelle et celle de stabilité forte décroissent et même se rapprochent, ce qui prouve que cette approximation est valide.

5.2 Comparaison des résultats

D'après les résultats obtenus précédemment, nous pouvons constater que la borne de stabilité forte obtenue par application de la technique de l'augmentation de la première colonne (\mathbf{SSB}_1) se coïncide rapidement avec l'erreur réelle (\mathbf{RE}_1) associée à cette technique dans l'intervalle $Q > 10$, et dans le cas de l'augmentation uniforme, la borne de stabilité forte (\mathbf{SSB}_3) se rapproche aussi de l'erreur réelle (\mathbf{RE}_3), où on voit que la borne de stabilité forte (\mathbf{SSB}_3) se coïncide avec l'erreur réelle (\mathbf{RE}_3) si ($Q > 50$).

D'après la comparaison des résultats obtenus, on peut dire que la technique de l'augmentation de la première colonne est la plus appropriée pour l'approximation de la distribution stationnaire du réseau de files d'attente overflow.

Conclusion

Après l'étude théorique de l'application de la méthode de stabilité forte dans le cas d'approximation des caractéristiques stationnaires du réseau de files d'attente overflow, dans ce chapitre, nous avons pu réaliser une application numérique dans le cas de la troncature de la capacité de la deuxième file d'attente du réseau overflow, tout en exploitant les résultats théoriques obtenus dans le quatrième chapitre.

Le but principal de cette analyse numérique est de étudier la qualité des bornes de stabilité forte via les trois techniques de troncature considérées. On remarque dans tous les cas que la perturbation effectuée sur le niveau de troncature du réseau overflow engendre une petite erreur dans le cas de l'augmentation de la première colonne et cette erreur tend vers zéro quand Q tend vers l'infini.

Conclusion générale

Les problèmes posés par les utilisateurs et les concepteurs des systèmes complexes sont d'ordre divers. Pour résoudre ces problèmes, on fait souvent recours à des méthodes d'approximation qui consistent à assimiler le système complexe à un système plus simple, analytiquement exploitable, qui lui est proche dans un certain sens.

Si l'approximation est possible, il est également important d'avoir une idée de l'erreur commise sur les caractéristiques du système. Cette problématique est particulièrement importante dans l'analyse de certains types de systèmes complexes où la précision sur les caractéristiques du système peut avoir des incidences majeures.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'erreur de la technique de troncature par la méthode de stabilité forte dans un réseau de files d'attente de type overflow. En premier lieu, on a utilisé la technique de l'augmentation de la première colonne et on a obtenu l'erreur d'approximation de la stabilité forte (\mathbf{SSB}_1), en deuxième lieu, on a utilisé la technique de la renormalisation et on a obtenu l'erreur d'approximation de la stabilité forte (\mathbf{SSB}_2) et en dernier lieu, on a appliqué la technique de l'augmentation uniforme où on a obtenu l'erreur d'approximation de la stabilité forte (\mathbf{SSB}_3). Puis, nous avons implémenté un algorithme afin d'évaluer numériquement les trois bornes d'estimations de l'erreur induites par ces trois techniques de troncature, que nous avons comparé à l'erreur réelle. Enfin, une comparaison entre les résultats numériques obtenus a été mise en œuvre, où on a déduit que la technique de l'augmentation de la première colonne est la plus appropriée pour l'estimation de la distribution stationnaire d'un réseau de type overflow.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche importantes, entre autres :

- ★ Envisager des études comparatives appropriées à ces bornes de perturbation, tout en considérant d'autres techniques de la troncature tel que l'augmentation de la dernière colonne.

-
- ★ Comparaison des deux approches, stabilité forte et celle de Van Dijk, dans le cas d'un réseau overflow.
 - ★ Etablir le cas d'applicabilité de ces techniques de troncature à d'autres réseaux de files d'attente qui ne possèdent pas la forme produit.
 - ★ Considération d'autres bornes de perturbation pour le cas de troncature d'espace d'états d'un réseau overflow obtenues par l'application d'autres méthodes de stabilité telles que la fonction de Lyapunov et la stabilité uniforme.

Bibliographie

- [1] K. Adel-Aissanou, K. Abbas, and D. Aïssani. (**in preparation**). comparative analysis of the errors bounds for state truncation of an overflow model.
- [2] D. Aïssani. Ergodicité uniforme et stabilité des chaîne de markov :application aux systèmes de files d'attente. Séminaire Mathématiques de Rouen *N° 167*, C.N.R.S Edition ; pp., 115-121, 1990.
- [3] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR*, (11) :(seriya A), 3–5, 1983.
- [4] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Strong stability of the imbedded markov chain in an $M/G/1$ system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 29 :1–5, 1984.
- [5] S. Balai and S. P. Meyn. Multiplicative ergodicity and large deviations for an irreducible markov chains. pages 1–28, 11 March 2000.
- [6] F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, and F. Palacios. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the ACM*, 22(2) :248 – 260, 1975.
- [7] M. Benaouicha and D. Aïssani. Strong stability in a $G/M/1$ queueing system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71 :22–32, 2004.
- [8] Z. Benouaret and D. Aïssani. Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claim. *Scandinavian Actuarial Journal*, Francis and Taylor Ed. doi : 10.1080/03461230802673805.
- [9] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong stability in retrial queues. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 68 :11–17, 2003.
- [10] A.A. Borovkov. Processus probabilistes de la théorie de files d'attente. *Nauka Edition, Moscow*, 1972.
- [11] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Measurement and performance of the strong stability method. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 72 :1–9, 2005.

- [12] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$. *Mathematical Methods of Operation Research*, 63(2) :341–356, 2006.
- [13] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Quantitative estimates in an $M_2/G_2/1$ priority queue with non-preemptive priority :the method of strong stability. *Stochastic Models*, 24 :1–21, 2008.
- [14] L. Boukir, L. Bouallouche-Medjkoune, and D. Aïssani. Strong stability of the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Application* **28** (1), 8-25.
- [15] X. Chao and M. Miyazawa. Probability in the engineering and informational sciences. 14 : 409 – 423.
- [16] R.B. Cooper. Introduction to queueing theory. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [17] P.J. Denning and F.P. Buzen. The operational analysis of queueing network model. *Computing Surveys* 10 : 225 – 261, 1978.
- [18] D. Gibson and E. Seneta. Augmented truncation of infinite stochastic matrices. *Journal of Applied Probability*, (24) :600–608, 1987.
- [19] D. Gibson and E. Seneta. Monotone infinite stochastic matrices and their augmented truncations. *Stochastic Process. Appl*, (24) :287–292, 1987.
- [20] D. Gross and C. Harris. Fundamentals of queueing theory. *Wiley*, 1985.
- [21] N. Hamadouche and D. Aïssani. (**to appear**) approximation strong in the $M_2/G_2/1$ queue with preemptive priority. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Springer Ed. doi :10.1007/s11009-010-9175-x.
- [22] D. Hamoudi. Développement en série et stabilité forte du système $M/M/1/N$. Master’s thesis, Université A. Mira, 2008.
- [23] J. Hêche. Résumé sur les files d’attente et les réseaux. *Recherche Opérationnelle*, 2004.
- [24] Liebling T. M. Hêche, J.-F. and D. de Werra. Recherche opérationnelle pour ingénieur ii. **Presses polytechniques et universitaires romandes**, Lausanne, Suisse, 2003.
- [25] D. P. Heyman and W. Whitt. Limits of queues as the waiting room grows. *Queueing Systems*, (5) :381–392, 1989.
- [26] D.P. Heyman. Approximating the stationary distribution of an infinite stochastic matrix. *Journal of Applied Probability*, (28) :96–103, 1991.
- [27] A. Hordijk and N.M. Van Dijk. Networks of queues with blocking. In *Performance ’81*, North-Holland, Amsterdam, 51 – 65, 1981.

- [28] C. F. Ipsen and D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *Siam J. Matrix Anal. Appl.* pages 1061–1074, October 1994.
- [29] V. Kalashnikov and S. Rachev. *Mathematical methods for construction of queueing models. Wadsworth and Brooks Cole*, 1990.
- [30] V.V. Kalashnikov. Qualitative analysis of complex systems behavior by the test functions method. *Nauka Edition, Moscow*, 1978.
- [31] V.V. Kalashnikov and G.S. Tsitsiashvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Engng, Cybernetics*(10) :211–217, 1971.
- [32] N. V. Kartashov. Strongly stable markov chains. stability problems for stochastic models. vniss, vsesayouzni seminar on stability problems for stochastic models. *journal of Soviet Mat*, 1986.
- [33] N. V. Kartashov. Strong stable markov chains, edition vsp, utrecht, the netherlands. 1996.
- [34] O. Lekadir and D. Aïssani. Error bound on practical approximations for two tandem queues with non-preemptive priority. *Computers and Mathematics with Applications* **61** (7), 1810–1822, 2011.
- [35] S.P Meyn and R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability. Springer, Berlin*, 1993.
- [36] E. Nummelin. *General irreducible markov chains and non-negative operators, cambridge univ. Press, Cambridge*, 1983.
- [37] B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes* **10** (26), 129–135, 2004.
- [38] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *International Journal of Production Economics* **97**, 159–171, 2005.
- [39] S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, 4 :287–318, 1989.
- [40] F. Rahmoun and D. Aïssani. Strong stability of queues with multiple vacation of the server. *Stochastic Analysis and Applications*, 26 :1–14, 2008.
- [41] M. Reiser and H. Kobayashi. Accuracy of the diffusion approximation for some queueing systems. *IBM J. Res. Devl.* 18 : 110 – 124, 1974.
- [42] A. Ruegg. *Processus stochastique. Presse Polytechnique Rromandes, Suisse*, 1985.
- [43] E. Seneta. Finite approximation to infinite non-negative matrices. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 63 : 983 – 992, 1967.
- [44] E. Seneta. The principle of truncation in applied probability. *Commentationes Mathematicae*, 1968.

-
- [45] E. Seneta. Computing the stationary distribution for infinite markov chains. *Linear Algebra Appl*, (34) :259–267, 1980.
- [46] F. Simonot. Sur l’approximation de la distribution stationnaire d’une chaîne de markov stochastiquement monotone. *Stochastic Process and their Applications*, (56) :133–149, 1995.
- [47] D. Stoyan. *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*. New York, 1983.
- [48] R. L. Tweedie. Truncation approximations of invariant measures for markov chains. *Journal of Applied Probability*, (35) :517–536, 1998.
- [49] N.M. Van Dijk. Truncation of markov chains with applications to queueing. *Operations Research*.
- [50] E.A. Van Doorn. On the overflow process from a finite markovian queue. *Performance Evaluation* 4 : 233 – 240, 1984.
- [51] D. Wolf. Approximation of the invariant probability distribution of an infinite stochastic matrix. Technical report.
- [52] V.M. Zolotarev. On the continuity of stochastic sequences generated by recurrent processes. *Theory of probability and Its Applications*, 50(4) :819–832, 1975.

Loi géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si :

$$P(X = n) = (1 - p)p^n, \quad \text{Avec } n = 1, 2, \dots$$

Pour cette distribution on a :

$$E(X) = \frac{p}{1 - p}$$
$$\sigma^2 = \frac{p}{1 - p}$$

Loi de poisson

La loi de poisson décrit généralement les probabilités d'apparition d'un événement très rare sur un grand nombre d'observation.

C'est une loi qui s'applique aux problèmes de files d'attente.

Définition 5.2.1. *Une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ est une variable à valeurs dans \mathbb{N} telle que :*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad \text{si } k \geq 0.$$

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

Loi exponentielle

Supposons que T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de densité

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

où μ est un paramètre positif.

Sa fonction de répartition est de la forme

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Pour cette distribution on a :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mu}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\mu^2}$$

Une propriété importante de la loi exponentielle est son absence de mémoire. Cette propriété joue un rôle fondamental dans la discussion de beaucoup de processus stochastique, elle s'écrit comme suit :

$$P(T > t + u | T > u) = P(T > t) = e^{-\mu t}$$

où $t > 0, u > 0$. Ceci signifie que la probabilité d'occurrence d'un événement pendant un intervalle de temps $(u, u + t)$ dépend uniquement de la longueur t de cet intervalle et non de sa position relative à l'axe temporel.

on utilise souvent la propriété d'absence de mémoire sous la forme :

$$P(T \leq t + \Delta t | T > t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Si T_1, T_2, \dots, T_n sont des variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois exponentielles de paramètres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ respectivement, alors $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$, et la probabilité pour que T_i soit le minimum est donnée par

$$\frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Résumé

Les réseaux de files d'attente sont des outils importants pour modéliser et évaluer les performances de toute une variété de systèmes réels. Cependant, les résultats analytiques ne sont pas toujours disponibles sous forme explicite. Pour la résolution de ces problèmes, on fait souvent recours à des méthodes d'approximation qui consistent à assimiler le système complexe à un système plus simple, analytiquement exploitable, qui lui est proche dans un certain sens. Si une telle approximation est possible, alors c'est très intéressant d'avoir une idée de l'erreur commise sur les caractéristiques du modèle original. Dans ce sens, la troncature de l'espace des états est souvent exigée dans les calculs qui concernent les chaînes de Markov infinies. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'erreur de la troncature d'espace des états de la chaîne de Markov décrivant le réseau overflow par la méthode de stabilité forte, tout en utilisant trois techniques différentes. Cela nous a permis de calculer les bornes de perturbation induites et de les comparer aux erreurs réelles.

Mots clés : Chaînes de Markov ; Troncature ; Files d'attente ; Stabilité Forte ; Algorithme.

Abstract

Queueing networks are important tools to modelize and evaluate the performance of one variety of real systems. However, the analytical results are not always available in explicit form. For solving these problems, we often resort to approximation methods that are to assimilate the complex system to a more simple one, analytically exploitable, which is close to a sense. If such an approximation is possible, then it is very interesting to get an idea of the error on characteristics of the original model. In this sense, truncation of the state space is often required in the calculations concerning the infinite Markov chains. In this work we are interested in estimating the truncation error space of states of the Markov chain describing the network overflow by the method of strong stability, while using three different techniques. This allowed us to calculate the bounds of Perturbation induced and compare them to actual errors.

Keywords : Markov chains ; Truncation ; Queues ; Strong Stability ; Algorithm.