



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université A.Mira Béjaïa  
Faculté des Sciences exactes  
Département de Physique

**Mémoire de Master**

*Rédigé par*

**METMATI Nafissa**

*En vue de l'obtention du diplôme de master en Physique*

*Spécialité : Physique Théorique*

Intitulé

---

# Sur la supersymétrie en mécanique quantique

---

*Soutenu le 19/06/2013 devant le jury composé de :*

|    |                          |                   |     |        |
|----|--------------------------|-------------------|-----|--------|
| Mr | <b>KHODJA Lamine</b>     | <i>Président</i>  | MCB | Béjaïa |
| Mr | <b>BELHADI Zahir</b>     | <i>Examineur</i>  | MAB | Béjaïa |
| Mr | <b>GHARBI Abdelhakim</b> | <i>Rapporteur</i> | MCB | Béjaïa |

Année Universitaire 2012/2013

# Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier monsieur H.Gharbi d'avoir accepté de m'encadrer pour ce memoire de fin de cycle, pour son aide et ses conseils durant cette période.

J'exprime ma profonde gratitude aux membre du jury, ainsi qu'à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Je tiens également à remercier mes parents, mes frères, Midou un peu plus, pour leurs soutiens et leurs encouragements tout au long de ces nombreuses années d'études.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Rappel de la mécanique quantique</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1      | Equation de Schrödinger . . . . .   | 4         |
| 2.2      | Oscillateur harmonique à une dimension . . . . .  | 5         |
| 2.2.1    | Hamiltonien . . . . .   | 5         |
| 2.2.2    | Opérateurs de création et d'annihilation . . . . .  | 5         |
| 2.2.3    | Elements propres de $N$ . . . . .   | 7         |
| 2.2.4    | Signification physique des opérateurs $a, a^+$ . . . . .                                  | 8         |
| 2.2.5    | Dégénérescence des niveaux d'énergie . . . . .  | 9         |
| 2.2.6    | Fonctions propres du hamiltonien . . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>Mécanique quantique supersymétrique</b>  | <b>12</b> |
| 3.1      | Factorisation d'un hamiltonien quelconque . . . . .                                       | 12        |
| 3.2      | Hamiltonien partenaire supersymétrique factorisé . . . . .                                | 13        |
| 3.3      | Dépendance entre les valeurs propres et les fonctions propres de $H_1$ et $H_2$ . . . . . | 15        |
| 3.4      | Brisure spontanée de symétrie . . . . .   | 17        |
| 3.5      | Exemple : particule dans une boîte de taille $L$ . . . . .                                | 17        |
| <b>4</b> | <b>Hiérarchie de hamiltoniens isospectraux et invariance de forme</b>                     | <b>21</b> |
| 4.1      | Factorisation et hiérarchie de hamiltoniens isospectraux . . . . .                        | 21        |
| 4.2      | Invariance de forme . . . . .   | 25        |
| 4.2.1    | Formules générales et spectre énergétique . . . . .                                       | 26        |
| 4.2.2    | Illustrations . . . . .   | 31        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>36</b> |

# Chapitre 1

## Introduction

La mécanique quantique est la théorie physique consacrée à l'étude de la matière à l'échelle microscopique. Un aspect fondamental dans l'étude d'un système quantique est la résolution de l'équation de Schrödinger. A cet effet et dès l'avènement de la mécanique quantique plusieurs méthodes ont été élaborées pour retrouver de façon exacte les solutions de cette équation c'est-à-dire, les spectres d'énergie des systèmes étudiés et leurs fonctions d'ondes. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode analytique usuelle, la méthode de l'équation intégrale, la méthode de l'espace des impulsions et la méthode de la mécanique quantique supersymétrique (fréquemment abrégée SUSY QM), qui fera l'objet de ce travail.

La supersymétrie (SUSY) a été tout d'abord initiée dans le contexte de la physique des particules, comme une symétrie qui relie entre bosons et fermions[1]. Cette théorie a connue des applications importantes dans plusieurs domaines de la physique atomique, physique de la matière condensée et physique statistique.

La mécanique quantique supersymétrique a été introduite en 1981 par Witten, Cooper et Freedman[2, 3]. C'est un formalisme mathématique puissant pour obtenir les spectres d'énergie des systèmes quantiques, et de générer des potentiels exactement solubles partant d'un potentiel qui est analytiquement intégrable. Cette technique a connue une réussite importante après l'introduction du concept de l'invariance de forme par le physicien Gendenshtein en 1983[4]. Cette notion permet d'obtenir les énergies des états liés des systèmes d'une manière simple et complètement algébrique.

Ce mémoire s'articule sur cette approche de supersymétrie en mécanique quantique pour la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension, il sera organisé comme suit :

Après cette introduction, on donnera dans le chapitre 2, un rappel concis sur des concepts de base de la mécanique quantique tels que l'équation de Schrödinger et l'oscillateur harmonique. Dans le chapitre 3, on fera le point sur l'idée de base de la supersymétrie qui est la méthode de factorisation. Celle-ci a été déjà utilisée par Schrödinger et développée par Infeld et Hull[5, 6]. Par la suite, on se familiarisera avec les notions de partenaire supersymétrique et de superpotentiel, afin de trouver les fonctions d'ondes et les énergies propres associées aux

systèmes étudiés, puis on introduira le concept fondamental de la brisure spontanée de la symétrie. Ensuite on étudiera l'exemple d'une particule dans un puit infini pour bien illustrer la méthode supersymétrique. Le chapitre 4 sera consacré à la construction d'une hiérarchie de hamiltoniens isospétraux, et du concept d'invariance de forme, puis on passera à l'application de ce formalisme sur quelques systèmes unidimensionnels exactement solubles. On terminera notre travail par une conclusion générale, et des perspectives pouvant être envisagées dans ce domaine.

# Chapitre 2

## Rappel de la mécanique quantique

### 2.1 Equation de Schrödinger

La mécanique quantique postule que l'état d'une particule microscopique (un système physique) est décrit à un instant  $t$  par la donnée d'une fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$ , dont l'évolution au cours du temps est donnée par la fameuse équation de Schrödinger introduite en 1926[7]

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= H(t) \Psi(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $H(t)$  est l'opérateur hamiltonien associé à l'énergie totale de cette particule non relativiste de masse  $m$ , soumise à un potentiel  $V(\vec{r}, t)$ , le symbole  $\Delta$  est l'opérateur laplacien et  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. En mécanique quantique, on étudie seulement les fonctions qui sont définies, continues et indéfiniment dérivable. Ainsi on ne va s'intéresser qu'à l'ensemble de fonctions de carré sommable.

Dans ce travail, nous nous limitons à l'étude de l'équation de Schrödinger à une dimension, et pour les systèmes stationnaires dont l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas, la première étape de résolution de l'équation de schrödinger consiste en la séparation de la variable spatiale  $x$  et temporelle  $t$  et ce en écrivant la fonction d'onde comme suit :

$$\Psi(x, t) = f(t) \cdot \varphi(x) \quad (2.2)$$

Nous portons (2.2) dans (2.1), et après un simple calcul, nous obtenons un système de deux équations, où la première ne dépend que du temps, la seconde est uniquement fonction de la position  $x$

$$i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E f(t) \quad (2.3)$$

$$H(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \quad (2.4)$$

où  $E$  est la constante de séparation des variables, qui représente l'énergie de la particule. Ainsi, la solution de l'équation (2.3) est donnée par

$$f(t) = c \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (2.5)$$

et la solution (2.2) devient

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) c \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (2.6)$$

Les fonctions d'ondes du type  $\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \varphi(x)$  sont appelées fonctions d'ondes stationnaires. L'équation (2.4) est dite équation de Schrödinger indépendante du temps.

## 2.2 Oscillateur harmonique à une dimension

### 2.2.1 Hamiltonien

Après avoir introduit l'équation fondamentale de la mécanique quantique, on passera à l'étude de l'oscillateur harmonique qui est un exemple de base de la physique quantique pour lequel l'équation de Schrödinger est exactement soluble.

L'opérateur hamiltonien, associé à l'énergie mécanique d'une particule de masse  $m$  dans un puit de potentiel harmonique  $V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2$ , s'écrit sous la forme suivante

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (2.7)$$

où  $w$  est la pulsation de l'oscillateur,  $p$  et  $x$  sont respectivement les opérateurs de l'impulsion et de la position.

### 2.2.2 Opérateurs de création et d'annihilation

Puisque l'hamiltonien  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, le problème donc va se ramener à la résolution de l'équation aux valeurs propres

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2\right)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (2.8)$$

L'étude quantique du spectre de l'oscillateur harmonique, va nous faire connaître clairement la méthode de factorisation (due à P.Dirac[8]), qui va être énoncée de la manière suivante :

Nous commençons par simplifier les choses, par l'introduction de la quantité physique  $\hbar w$  possédant la dimension d'une énergie donc  $H$  devient :

$$H = \hbar w \left(\frac{p^2}{2m\hbar w} + \frac{1}{2\hbar}mw^2x^2\right)$$

Pour des raisons de commodité, on effectue un changement de variables pour avoir un hamiltonien exprimé en termes de grandeurs sans dimensions qui sont

$$X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad P = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \quad (2.9)$$

de sorte que l'hamiltonien se simplifie comme

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (X^2 + P^2)$$

Il est maintenant simple de factoriser le hamiltonien, en introduisant deux opérateurs différentiels du premier ordre  $a$  et  $a^+$  qu'on appellera respectivement opérateur d'annihilation et de création :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP) \quad (2.10)$$

on inverse ces dernières relations, on obtient

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+), \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a - a^+) \quad (2.11)$$

Ceci permet la réécriture suivante du hamiltonien :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^+a + aa^+)$$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés essentielles des quatre nouveaux opérateurs introduits ( $X$ ,  $P$ ,  $a$  et  $a^+$ ) :

- 1)  $[X, P] = i1^1$
- 2)  $[a, a^+] = 1^2$
- 3) Hériticité des opérateurs :

Nous savons que  $x$ ,  $p$  sont deux opérateurs hermitiques, par conséquent les opérateurs  $X$  et  $P$  sont aussi hermitiques. Examinons maintenant le cas de  $a$  et  $a^+$ .

$$(a)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^+ - iP^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP) = a^+ \quad (2.12)$$

$$(a^+)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^+ + iP^+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP) = a \quad (2.13)$$

Ainsi, les opérateurs  $a$ ,  $a^+$  ne sont pas hermitiques.

---

<sup>1</sup> obtenue à partir de la relation  $[x, p] = i\hbar 1$  où le calcul de ce dernier commutateur ( $[x, p] = i\hbar 1$ ), se déduit après qu'on le fait agir sur une fonction d'onde  $\Psi(x)$  quelconque.

<sup>2</sup> obtenu en utilisant les propriétés de commutations suivantes :  
 $[A, B] = -[B, A]$ ,  $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$   
 où  $A, B, C$  trois opérateurs linéaires.

Nous définissons désormais l'opérateur nombre de quanta<sup>3</sup>  $N = a^+a$ , et en vertu de  $[a, a^+] = 1$ , l'hamiltonien prendra la forme suivante :

$$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad (2.14)$$

On voit bien de cette formule que, la résolution du spectre de l'hamiltonien de l'oscillateur se réduit à l'étude des fonctions et valeurs propres de l'opérateur  $N$ . Avant de l'entamer, on doit mentionner quelques unes de ses propriétés, qui vont être utiles dans notre étude quantique

- $N^+ = (a^+a)^+ = a^+(a^+)^+ = a^+a = N$  d'où  $N$  est hermitique (valeurs propres réelles).
- $[N, a^+]^4 = [a^+a, a^+] = a^+ [a, a^+] = a^+$ .
- $[N, a] = [aa^+, a] = a [a^+, a] = -a$ .

### 2.2.3 Elements propres de $N$

Nous disposons maintenant des informations nécessaires pour aborder la résolution de l'équation aux valeurs propres

$$N\Psi_\nu(x) = \nu\Psi_\nu(x) \quad (2.15)$$

ainsi l'équation de départ est

$$H\Psi_\nu(x) = E_n\Psi_\nu(x) \quad (2.16)$$

avec

$$E_n = \hbar\omega \left( \nu + \frac{1}{2} \right)$$

Puisque nous avons vu que  $N$  est hermitique, ses valeurs propres seront donc réelles, et pour plus de précision, nous calculons

$$\begin{aligned} (a\Psi_\nu(x), a\Psi_\nu(x)) &= \int \Psi_\nu^*(x) N\Psi_\nu(x) dx \\ &= \nu \int \Psi_\nu^*(x) \Psi_\nu(x) dx \\ &= \|a\Psi_\nu(x)\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Or la norme  $\int |\Psi_\nu(x)|^2$  est positive, alors  $\nu$  doit être supérieur ou égal à zéro. Ainsi on peut déduire que pour  $\nu = 0$ , la fonction propre fondamentale  $\Psi_0(x)$  vérifie toujours l'égalité  $a\Psi_0(x) = 0$ .

on fait agir, l'opérateur  $a$  sur la fonction propre  $\Psi_\nu(x)$  de  $N$ , et à l'aide de la propriété  $[N, a] = -a$ , on trouve que  $\nu - 1$  est valeur propre de  $N$  avec la fonction propre  $a\Psi_\nu(x)$

<sup>3</sup>appellation justifiée lors de l'étude des valeurs propres de  $H$ .

<sup>4</sup>après avoir recours à l'identité :

$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ .

$$N(a\Psi_\nu(x)) = (\nu - 1)a\Psi_\nu(x)$$

on utilise toujours la propriété  $[N, a] = -a$ , et on effectue une seconde application de  $a$  sur  $\Psi_\nu(x)$ , on déduira que  $a^2\Psi_\nu(x)$  est aussi fonction propre de  $N$  avec la valeur propre  $\nu - 2$

$$Na^2\Psi_\nu(x) = (\nu - 2)a^2\Psi_\nu(x)$$

En guise de résumé :

Si on démarre d'une fonction propre  $\Psi_\nu(x)$  avec la valeur propre  $\nu$ , et on lui applique d'une façon successive l'opérateur échelle  $a$ , on obtiendra une série de fonctions propres possédant les valeurs propres  $\nu - 1, \nu - 2, \dots$ . Puisque on a dit que les valeurs propres de  $N$  sont toutes positives, cela implique que quand on arrive à une nième application de  $a$  sur la fonction  $\Psi_\nu(x)$ , on doit avoir une valeur  $\nu - n$  nulle mais pas négative, ça exige que  $\nu$  doit être entier positif, et que la chaîne des valeurs propres soit limitée (bornée inférieurement).

Aussi, si on part de l'égalité  $[N, a^+] = a^+$ , on démontre facilement que  $a^+\Psi_\nu(x)$  est fonction propre de  $N$ , avec la valeur propre  $\nu + 1$

$$Na^+\Psi_\nu(x) = (\nu + 1)a^+\Psi_\nu(x)$$

on fait agir l'opérateur  $a^+$  plusieurs fois sur la fonction  $\Psi_\nu(x)$ , on engendre une chaîne infinie (vers le haut bien sûr) de fonctions propres de  $N$  associées aux valeurs propres  $\nu + 1, \nu + 2, \dots$

Pour se souvenir toujours que les valeurs possibles de  $\nu$  sont des entiers positifs, on écrit  $\nu = n$ , et on dénomme la fonction propre associée par la fonction  $\Psi_n(x)$ , l'équation (2.15), sera :

$$N\Psi_n(x) = n\Psi_n(x) \tag{2.17}$$

Par ailleurs, les valeurs propres de  $H$  vont s'obtenir immédiatement à partir de celles de  $N$ , ce qui donne :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{où } n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.18}$$

On constate donc que les valeurs stationnaires de l'énergie de l'oscillateur harmonique sont discrètes et bien précises, on dit alors que le spectre de  $H$  est quantifié. On voit clairement que pour  $n = 0$ , l'énergie de l'état fondamentale est différente de zéro, elle est égale à  $\hbar\omega/2$ .

### 2.2.4 Signification physique des opérateurs $a, a^+$

Rappelons d'abord que les équations aux valeurs propres obtenues par application d'opérateurs  $a, a^+$  sur la fonction  $\Psi_n(x)$  sont respectivement :

$$N(a\Psi_n(x)) = (n-1)(a\Psi_n(x))$$

$$N(a^+\Psi_n(x)) = (n+1)(a^+\Psi_n(x))$$

on précède de la même manière, on trouvera les équations analogues à celles citées plus haut, pour l'opérateur  $H$  :

$$H(a\Psi_n(x)) = (E_n - \hbar\omega)(a\Psi_n(x))$$

$$H(a^+\Psi_n(x)) = (E_n + \hbar\omega)(a^+\Psi_n(x))$$

Il est clair de ces deux relations que l'action de l'opérateur  $a$  sur la fonction propre  $\Psi_n(x)$ , fait diminuer l'énergie de l'oscillateur d'une quantité  $\hbar\omega$ , dite quantum d'énergie. Pour cette raison,  $a$  est appelé opérateur d'annihilation (ou destruction). L'application de  $a^+$  s'accompagne d'une augmentation de l'énergie d'un quantum  $\hbar\omega$ ,  $a^+$  est appelé alors l'opérateur de création, et de ces deux faits, le produit  $a^+a$  porte le nom "opérateur nombre de quanta".

### 2.2.5 Dégénérescence des niveaux d'énergie

L'équation qui caractérise les fonctions propres correspondantes à la valeur propre  $n = 0$ , est donnée par :

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\Psi_0(x) = 0 \quad (2.19)$$

Sa solution générale vaut après normalisation

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) \quad (2.20)$$

Seulement une seule fonction propre  $\Psi_0(x)$  [9] solution de l'équation linéaire du premier ordre  $a\Psi_0(x) = 0$ . Donc le niveau fondamental de l'hamiltonien  $H$  n'est pas dégénéré.

Pour aller plus loin, nous allons procéder par récurrence pour montrer que toutes les autres fonctions propres sont également non dégénérées.

Supposons d'abord que la valeur propre  $n$  de  $N$  n'est pas dégénérée, ensuite considérons deux fonctions propres  $\Psi_{n+1}(x)$  et  $\varphi_{n+1}(x)$  de valeur propre  $n+1$ . Nous rappelons aussi que  $a\Psi_{n+1}(x)$  et  $a\varphi_{n+1}(x)$  sont des fonctions propres de valeurs propres  $n$ , et puisque nous avons dit que  $n$  est non dégénérée, il existera alors une constante  $c$ , tel que :

$$a\Psi_{n+1}(x) = c a\varphi_{n+1}(x)$$

En opérant avec  $a^+$  par la gauche, en trouvant

$$\begin{aligned} a^+ a \Psi_{n+1}(x) &= c a^+ a \varphi_{n+1}(x) \implies \\ (n+1) \Psi_{n+1}(x) &= c (n+1) \varphi_{n+1}(x) \implies \\ \Psi_{n+1}(x) &= c \varphi_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Les deux fonctions  $\Psi_{n+1}(x)$  et  $\varphi_{n+1}(x)$  de  $N$ , sont proportionnelles entre elles, il résulte donc que la valeur  $n+1$  n'est pas dégénérée. Enfin, on conclut que les niveaux d'énergie donnés par  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$  ne sont pas dégénérés.

### 2.2.6 Fonctions propres du hamiltonien

Dans ce paragraphe, nous allons chercher les expressions générales de l'action des opérateurs  $a$  et  $a^+$  sur les fonctions propres de  $H$ . Supposons d'abord que les fonctions propres de  $H$  sont normalisées à l'unité, et comme nous savons que  $H$  est hermitique, ces fonctions propres seront donc orthogonales, alors nous dirons que la base  $\{\Psi_n(x)\}$  est orthonormée.

D'autre part, on a vu que les opérateurs  $a$  et  $a^+$  font passer l'oscillateur d'un état  $n$  à un autre qui le suit  $n+1$ , ou le précède  $n-1$  respectivement. Après ce qui a été fait, on peut trouver les relations adéquates décrivant le passage entre les deux niveaux consécutifs du spectre

Soit l'équation

$$\Psi_1(x) = c_1 a^+ \Psi_0(x) \tag{2.21}$$

où la phase entre les deux fonctions  $\Psi_1(x)$ ,  $\Psi_0(x)$  sera choisie de sorte que le coefficient  $c_1$  soit réel et non négatif, il s'ensuit que la norme de  $\Psi_1(x)$  est

$$\begin{aligned} (\Psi_1(x), \Psi_1(x)) &= |c_1|^2 \int \Psi_0^*(x) a a^+ \Psi_0(x) dx \\ &= |c_1|^2 \int \Psi_0^*(x) (N+1) \Psi_0(x) dx \end{aligned}$$

comme on a

$$a^+ a \Psi_0(x) = a^+ (a \Psi_0(x)) = 0 \implies N \Psi_0(x) = 0$$

d'où

$$\|\Psi_1(x)\|^2 = |c_1|^2 = 1$$

L'équation (2.21) devient

$$\Psi_1(x) = a^+ \Psi_0(x) \tag{2.22}$$

Pour  $n = 1 \longrightarrow n = 2$ , on aura :

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} a^+ \Psi_1(x) \implies \sqrt{2} \Psi_2(x) = 1 a^+ \Psi_1(x) \tag{2.23}$$

Par récurrence, le calcul se généralise pour n'importe quelle valeur de  $n$ , et on trouve finalement

$$a^+ \Psi_n(x) = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}(x) \quad (2.24)$$

$$a \Psi_n(x) = \sqrt{n} \Psi_{n-1}(x) \quad (2.25)$$

Il nous reste à exprimer les fonctions propres de l'hamiltonien en fonction de celle de l'état fondamental, et cela se réalise par application répétée de l'opérateur  $a^+$  sur la fonction  $\Psi_0(x)$ , et d'après (2.24), on obtient la formule générale

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \Psi_0(x) \quad (2.26)$$

Après avoir substitué les expressions de  $a^+$  et celle de  $\Psi_0(x)$  dans la formule de  $\Psi_n(x)$ , on trouve les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^n} \left(-\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n \exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2\right) \quad (2.27)$$

# Chapitre 3

## Mécanique quantique supersymétrique

Une des tâches les plus importantes en mécanique quantique est la résolution de l'équation de Schrödinger. L'approche de supersymétrie est une technique simple, et très efficace pour obtenir les spectres d'énergie exactes des systèmes quantiques stationnaires. Elle repose principalement sur deux idées clefs :

\* La généralisation de la méthode de factorisation de l'oscillateur harmonique[10] qui consiste à faciliter le problème de résolution d'une équation linéaire du second ordre, en choisissant d'abord l'énergie de l'état fondamental nulle, ce qui peut être faite sans nuire au caractère général du traitement qui suit, de façon à donner une relation avantageuse permettant de connecter la fonction propre de l'état fondamental et le potentiel du système[3], puis écrire le hamiltonien sous forme d'un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre  $A$  et  $A^+$  (opérateurs d'annihilation et de création généralisés).

\* La définition d'un superpotentiel correspondant au potentiel du système via une équation différentielle non linéaire, qui permet de déterminer la fonction d'onde de l'état fondamentale et l'énergie propre associée. Ainsi, on obtient un hamiltonien partenaire supersymétrique par permutation de l'ordre des opérateurs  $A$  et  $A^+$ .

On se propose maintenant de présenter l'ensemble des outils nécessaires pour définir la théorie de SUSY.

### 3.1 Factorisation d'un hamiltonien quelconque

L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension s'écrit :

$$H_1\Psi_n = E_n\Psi_n \quad (3.1)$$

On considère un système dont l'énergie de l'état fondamental est égale à zéro, et la fonction d'onde correspondante est  $\Psi_0$ . Ainsi à partir de (3.1) on obtient

$$H_1\Psi_0(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + v_1(x)\right)\Psi_0(x) = 0 \quad (3.2)$$

d'où l'on tire

$$v_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Psi_0''(x)}{\Psi_0(x)} \quad (3.3)$$

On voit bien que, si on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental, on trouvera facilement le potentiel et inversement.

Le traitement de factorisation que nous avons donné auparavant pour la résolution du problème de l'oscillateur harmonique, s'applique à une situation plus générale, en découplant l'hamiltonien du système en deux opérateurs échelles adjoints l'un à l'autre. On écrit

$$H_1 = A^+ A \quad (3.4)$$

avec

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \quad (3.5)$$

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \quad (3.6)$$

où,  $w(x)$  est une fonction réelle, connue sous le nom du superpotentiel. En développant le produit  $A^+ A$  par application sur une fonction arbitraire, on obtient

$$\begin{aligned} H_1 \Psi(x) &= \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \right) \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + w(x) \right) \Psi(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Psi(x) \frac{d}{dx} w(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) + w(x) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \Psi(x) + w^2(x) \Psi(x) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} w(x) + w^2(x) \right) \Psi(x) \end{aligned}$$

En l'identifiant avec (3.2), on obtient l'équation de type Riccati :

$$v_1(x) = w^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} w(x) \quad (3.7)$$

La solution de  $w(x)$  en terme de la fonction d'onde de l'état fondamental est

$$w(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} \quad (3.8)$$

Ainsi, une fois qu'on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental, on peut tirer le superpotentiel  $w(x)$ .

## 3.2 Hamiltonien partenaire supersymétrique factorisé

La théorie supersymétrique d'un système est définie par la construction d'un hamiltonien  $H_2$  à partir du hamiltonien original  $H_1$  [11]

On considère un hamiltonien  $H_2$

$$H_2 = AA^+ \quad (3.9)$$

qui correspond au potentiel  $v_2$ , tel que

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_2(x) \quad (3.10)$$

On dit que  $H_2$  est l'hamiltonien partenaire de  $H_1$ , ou superpartenaire. En évaluant le produit  $AA^+$ , on aura

$$AA^+ = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} + w^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.11)$$

Ainsi le nouveau potentiel peut s'écrire comme

$$v_2(x) = w^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.12)$$

Les deux potentiels SUSY-partenaires  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  s'expriment l'un de l'autre comme suit :

$$v_2(x) = v_1(x) + 2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.13)$$

Cette dernière relation est obtenue par combinaison des équations (3.7) et (3.12). Nous passons maintenant à l'étude des énergies de ces hamiltoniens. Soient

la fonction propre  $\Psi_n^{(1)}$  d'énergie  $E_n^{(1)}$  associée à  $H_1$

la fonction propre  $\Psi_n^{(2)}$  d'énergie  $E_n^{(2)}$  associée à  $H_2$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| A\Psi_n^{(1)} \right\|^2 &= (A\Psi_n^{(1)}(x), A\Psi_n^{(1)}(x)) \\ &= \int \Psi_n^{*(1)} A^+ A\Psi_n^{(1)} dx \\ &= \int \Psi_n^{*(1)}(x) H_1 \Psi_n^{(1)}(x) dx \\ &= E_n^{(1)} \int \Psi_n^{*(1)} \Psi_n^{(1)} dx \\ &= E_n^{(1)} \geq 0 \quad \forall n \end{aligned} \quad (3.14)$$

On trouve également

$$E_n^{(2)} = \left\| A^+ \Psi_n^{(2)} \right\|^2 \geq 0 \quad \forall n \quad (3.15)$$

On conclut que les énergies propres des hamiltoniens partenaires sont positives.

### 3.3 Dépendance entre les valeurs propres et les fonctions propres de $H_1$ et $H_2$

Notre problème actuel est de trouver le lien entre les spectres d'énergie des deux hamiltoniens partenaires  $H_1$  et  $H_2$ .

Les fonctions propres et les valeurs propres des hamiltoniens correspondants aux états liés sont notées :

$$H_1 \Psi_m^{(1)} = E_m^{(1)} \Psi_m^{(1)} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

$$H_2 \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \Psi_n^{(2)} \quad (3.17)$$

par ailleurs

$$H_1 = A^+ A \quad H_2 = A A^+ \quad (3.18)$$

D'où finalement

$$H_2 (A \Psi_m^{(1)}) = A A^+ A \Psi_m^{(1)} = E_m^{(1)} (A \Psi_m^{(1)}) \quad (3.19)$$

$$H_1 (A^+ \Psi_n^{(2)}) = A^+ A A^+ \Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (A^+ \Psi_n^{(2)}) \quad (3.20)$$

#### Interprétation des relations :

Premièrement, les niveaux d'énergies : il est facile de voir que

- \* L'énergie  $E_m^{(1)}$  de  $H_1$  et aussi valeur propre de  $H_2$  associée à la fonction propre  $A \Psi_m^{(1)}$
- \* L'énergie  $E_n^{(2)}$  de  $H_2$  et aussi valeur propre de  $H_1$  associée à la fonction propre  $A^+ \Psi_n^{(2)}$

D'où il résulte que

$$\{E_m^{(1)}\} = \{E_n^{(2)}\}$$

Le niveau d'énergie nulle n'existe que dans un seul spectre pour la simple raison que la fonction d'onde de l'état fondamental est supprimée (annihilée) par l'opérateur  $A$ , alors il résulte que

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Un résultat important est le suivant : tout les niveaux d'énergie des deux spectres coïncident, à part celui de l'état fondamental. Deuxièmement, pour les fonctions propres : nous avons vu déjà que

$$w(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)}$$

L'intégration des deux membres de l'équation, nous donne

$$\Psi_0^{(1)} = N_0^{(1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^x w(y) dy\right) \quad (3.22)$$

avec  $N_0^{(1)}$  constante de normalisation.

Passons maintenant aux fonctions d'onde des états excités :

En identifiant les relations précédentes deux à deux (3.16 – 3.20) et (3.17 – 3.19), on constatera que

$$\Psi_m^{(1)}(x) \sim A^+ \Psi_n^{(2)}(x)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) \sim A \Psi_m^{(1)}(x)$$

Plus précisément

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) = N_n^{(2)} A^+ \Psi_n^{(2)}(x) \quad (3.23)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = N_{n+1}^{(1)} A \Psi_{n+1}^{(1)}(x) \quad (3.24)$$

où  $N_{n+1}^{(1)}$  et  $N_n^{(2)}$  sont des constantes imposées par la condition de normalisation

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n+1}^{(1)*}(x) \Psi_{n+1}^{(1)}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_n^{(2)*} N_n^{(2)} \Psi_n^{(2)*}(x) A A^+ \Psi_n^{(2)}(x) dx \\ &= \left| N_n^{(2)} \right|^2 E_n^{(2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^{(2)*}(x) \Psi_n^{(2)}(x) dx \\ &= \left| N_n^{(2)} \right|^2 E_n^{(2)} \\ &= 1 \\ \implies N_n^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$N_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}$$

Finalement,

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^+ \Psi_n^{(2)}(x) \quad (3.25)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A \Psi_{n+1}^{(1)}(x) \quad (3.26)$$

La solution analytique de l'un des deux hamiltoniens entraîne la solution analytique de l'autre.

**Petite conclusion :**

Les spectres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  sont identiques excepté l'état fondamental, et le passage entre les deux se fait par application des opérateurs  $A^+$  et  $A$  selon le cas, d'où l'appellation "hamiltoniens partenaires".

**Schématisation :**

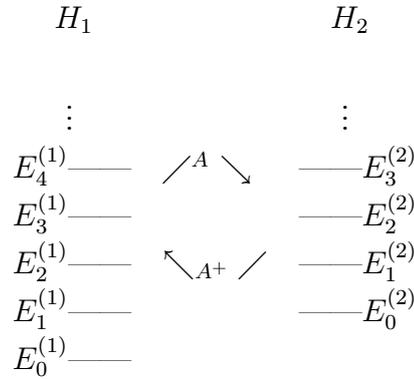


Figure1: Spectre des deux hamiltoniens partenaires

### 3.4 Brisure spontanée de symétrie

Le concept de la brisure spontanée de symétrie dans le cadre de la mécanique quantique est emprunté à la théorie quantique des champs. Dans notre cas, cette notion est précisément reliée à la fonction d’onde fondamentale de l’hamiltonien de référence, donnée en terme du superpotentiel par la relation suivante

$$\Psi_0^1(x) = N_0^{(1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^x w(y) dy\right)$$

Si cette dernière est normalisable (physique) on dira que la supersymétrie est conservée, sinon on dit qu’elle est brisée et dans ce cas on pourra pas remonter aux fonctions d’ondes de l’hamiltonien partenaire. Le point essentiel qu’il faut retenir, et que le formalisme de SUSY s’utilise uniquement dans le cas où la symétrie est non brisée.

### 3.5 Exemple : particule dans une boîte de taille L

Pour bien comprendre la technique de supersymétrie, on prend l’exemple d’un partenaire supersymétrique dans un puits infini. Soit  $x = 0$  et  $x = L$ , les deux bornes de la zone de confinement, où à l’intérieur de cette zone le potentiel est égal à zéro, et en dehors de cette région, le potentiel est infini. La démarche que nous allons faire est la suivante : on part d’un superpotentiel connu, on trouvera par la suite, les expressions des deux potentiels partenaires supersymétriques, et puis on définira les deux hamiltoniens correspondants. Soit

$$w(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad x \in ]0, L[ \tag{3.27}$$

sa dérivée première est donnée par

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{L}x)}$$

Après substitution de ces résultats dans les équations (3.7) et (3.12), on aura

$$v_1 = \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2 \left( \frac{\cos^2(\pi x/L) - 1}{\sin^2(\pi x/L)} \right) = -\hbar^2 \pi^2 / 2mL^2 \quad (3.28)$$

$$v_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left( -1 + \frac{2}{\sin^2(\pi x/L)} \right) \quad (3.29)$$

Les deux hamiltoniens partenaires supersymétriques seront donnés par

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} - \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \left( \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{L}x)} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.30)$$

On se propose maintenant de chercher leurs fonctions propres. L'équation de Schrodinger pour le hamiltonien  $H_1$  s'écrit :

$$H_1 \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} \quad (3.31)$$

Or

$$H_1 \Psi_n^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi^2}{L^2} \right) \Psi_n^{(1)} = 0 \quad (3.32)$$

Il vient

$$\Psi_n''^{(1)} + \left( \frac{\pi^2}{L^2} + E_n^{(1)} \frac{2m}{\hbar^2} \right) \Psi_n^{(1)} = 0 \quad (3.33)$$

En posant

$$k_E = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{2mE_n^{(1)} L^2}{\hbar^2 \pi^2}} \quad (3.34)$$

On aura donc

$$\Psi_n''^{(1)} + k_E^2 \Psi_n^{(1)} = 0 \quad (3.35)$$

La solution générale, exprimée avec les fonctions cosinus et sinus, est

$$\Psi_n^{(1)} = C \sin(k_E x) + D \cos(k_E x) \quad (3.36)$$

où  $C$  et  $D$  sont des constantes complexes ( $\in \mathbb{C}$ )

Conditions aux limites :

$$\Psi_n^{(1)}(0) = 0 \quad \text{implique que } D \text{ vaut } 0$$

$$\Psi_n^{(1)}(L) = 0 \quad \text{impose} \quad k_E L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots^1$$

On déduit alors que

$$k_E = \frac{n\pi}{L} \quad (3.37)$$

le vecteur  $k$  prend des valeurs discrètes  $\frac{n\pi}{L}$ , alors  $k$  est quantifié implique que l'énergie  $E$  de la particule l'est aussi.

En vertu de (3.34) et de (3.37), on doit alors avoir

$$E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left( \frac{L^2 k_E^2}{\pi^2} - 1 \right) = (n^2 + 2n) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

Les fonctions d'ondes des états stationnaires s'écrivent donc :

$$\Psi_n^{(1)}(x) = C \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{L}x\right)$$

La normalisation de  $\Psi_n^{(1)}$  donne :

$$\begin{aligned} \int_0^L \Psi_n^{(1)*}(x) \Psi_n^{(1)}(x) dx &= 1 \\ \longrightarrow \int_0^L dx \|c\|^2 \sin^2\left(\frac{(n+1)\pi}{L}x\right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\|c\|^2 \frac{L}{2} = 1 \implies c = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

la fonction d'onde normalisée est donc :

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L] \quad (3.39)$$

L'état fondamental est défini par

$$E_0^{(1)} = 0$$

$$\Psi_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Les valeurs propres de l'hamiltonien  $H_2$  seront données par

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} = ((n+2)^2 - 1) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad \text{avec } n = 0, 1, \dots \quad (3.40)$$

Cherchons maintenant les fonctions d'ondes associées à ce hamiltonien. Nous avons déjà trouvé que

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A \Psi_{n+1}^{(1)}(x) \quad (3.41)$$

---

<sup>1</sup> $n = 0 \longrightarrow$  une fonction d'onde nulle  $\longrightarrow$  ce cas est à écarter.

Ainsi

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{L}x\right)$$

Nous insérons les résultats de(3.5), (3.27), (3.40) dans (3.41) et après un simple calcul, nous obtenons :

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{((n+2)^2 - 1)L}} \left[ -\sin\left(\frac{(n+2)\pi x}{L}\right) \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) + (n+2) \cos\left(\frac{(n+2)\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.42)$$

L'état fondamental est défini par :

$$E_0^{(2)} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$\Psi_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{3L}} \left[ -\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]$$

Le premier état excité est caractérisé par :

$$E_1^{(2)} = \frac{8\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$\Psi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{L}} \left[ -\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right]$$

La méthode supersymétrique nous a permis d'obtenir l'ensemble des énergies, et fonctions propres de du hamiltonien  $H_2$ , sans passer par la résolution compliquée de l'équation de Schrödinger  $H_2\Psi^{(2)} = E^{(2)}\Psi_n^{(2)}$ .

# Chapitre 4

## Hiérarchie de hamiltoniens isospectraux et invariance de forme

### 4.1 Factorisation et hiérarchie de hamiltoniens isospectraux

Nous avons appris dans le chapitre précédent qu'on peut construire un hamiltonien partenaire  $H_2$  à partir de la factorisation d'un hamiltonien référence  $H_1$  dont le spectre des états stationnaires est exactement connu. Cette démarche peut être répétée, en factorisant l'hamiltonien  $H_2$  (qu'on considère comme un nouveau hamiltonien de référence et on suit les mêmes étapes qu'auparavant) pour créer le superpartenaire  $H_3$ , puis en factorisant le  $H_3$  pour générer son partenaire  $H_4$ , et ainsi de suite, jusqu'à construire une famille de hamiltoniens partenaires ayant par paire le même spectre des états liés, excepté les états fondamentaux (quasiment isospectraux). Nous allons maintenant éclaircir les idées par des formules mathématiques, et pour que les expressions ne soient pas chargées on prend  $\hbar = 2m = 1$ . Soient les fonctions propres  $\Psi_n^{(1)}(x)$  associées aux valeurs propres  $E_n^{(1)}$  du hamiltonien de départ  $H_1$ . La factorisation de  $H_1$  donne

$$\begin{aligned} H_1 &= A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + v_1(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les deux opérateurs  $A_1^+, A_1$  s'écrivent en fonction du superpotentiel  $w_1(x)$  comme suit :

$$A_1 = \frac{d}{dx} + w_1(x), \quad A_1^+ = -\frac{d}{dx} + w_1(x) \tag{4.2}$$

Le potentiel correspondant à  $H_1$  est

$$v_1(x) = w_1^2(x) - \frac{d}{dx}w_1(x) + E_0^{(1)} \tag{4.3}$$

Le superpotentiel est

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -\frac{\Psi_0^{(1)'}(x)}{\Psi_0^{(1)}(x)} \\ &= -\frac{d}{dx} \ln \left( \Psi_0^{(1)}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Un hamiltonien partenaire se construit en permutant les deux opérateurs  $A_1^+, A_1$ , et on dénote par  $E_n^{(2)}, \Psi_n^{(2)}(x)$  les valeurs propres et les fonctions propres correspondant

$$\begin{aligned} H_2 &= A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + v_2(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le potentiel associé est donné par

$$\begin{aligned} v_2(x) &= w_1^2(x) + \frac{d}{dx} w_1(x) + E_0^{(1)} \\ &= v_1(x) + 2\frac{d}{dx} w_1(x) \\ &= v_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(1)}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les relations entre les énergies propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens partenaires sont

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad \text{avec toujours } n = 0, 1, \dots \quad (4.7)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \left( E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A_1 \Psi_{n+1}^{(1)}(x) \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^{(1)}(x) &= \left( E_n^{(2)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A_1^+ \Psi_n^{(2)}(x) \\ &= \left( E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A_1^+ \Psi_n^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

On passe maintenant, à la factorisation de l'hamiltonien  $H_2$  d'énergie fondamentale  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ , pour créer son partenaire  $H_3$  d'énergies propres  $E_n^{(3)}$ , et de fonctions propres  $\Psi_n^{(3)}(x)$ .

$$\begin{aligned} H_2 &= A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} \\ &= A_2^+ A_2 + E_0^{(2)} \\ &= A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

où

$$A_2 = \frac{d}{dx} + w_2(x), \quad A_2^+ = -\frac{d}{dx} + w_2(x) \quad (4.11)$$

l'équation de Riccati sera :

$$w_2^2(x) - w_2'(x) = v_2(x) - E_0^{(2)} \quad (4.12)$$

Après résolution on obtient

$$w_2(x) = -\frac{d}{dx} \ln \left( \Psi_0^{(2)}(x) \right) \quad (4.13)$$

Par les mêmes règles suivies plus haut, un nouveau partenaire se construit

$$\begin{aligned} H_3 &= A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + v_3(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec

$$\begin{aligned} v_3(x) &= w_2^2(x) + \frac{d}{dx} w_2(x) + E_1^{(1)} = v_2(x) + 2\frac{d}{dx} w_2(x) \\ &= v_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(1)}(x) \right) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(2)}(x) \right) \\ &= v_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(1)}(x) \Psi_0^{(2)}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

La correspondance des deux hamiltoniens partenaires  $H_2, H_3$  est

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)}(x) &= \left( E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)}(x) \\ &= \left( E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)} \right)^{-1/2} A_2 \Psi_{n+1}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^{(2)}(x) &= \left( E_n^{(3)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2^+ \Psi_n^{(3)}(x) \\ &= \left( E_{n+1}^{(2)} - E_1^{(1)} \right)^{-1/2} A_2^+ \Psi_n^{(3)}(x) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les énergies et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_3, H_1$  s'expriment les unes des autres par

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)}(x) &= \left( E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} \left( E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2 A_1 \Psi_{n+2}^{(1)}(x) \\ &= \left( E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} \left( E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)} \right)^{-1/2} A_2 A_1 \Psi_{n+2}^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{n+2}^{(1)}(x) &= (E_n^{(3)} - E_0^{(2)})^{-1/2} (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_1^+ A_2^+ \Psi_n^{(3)}(x) \\
 &= (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_1^+ A_2^+ \Psi_n^{(3)}(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

En général, une fois nous connaissons le spectre énergétique et les fonctions propres d'un hamiltonien  $H_{m-1}$ , la technique de SUSY nous permet de construire aisément son partenaire  $H_m$ . Soit

$$H_m = -\frac{d^2}{dx^2} + v_m(x) \tag{4.22}$$

Il se simplifie sous la forme

$$H_m = A_m^+ A_m + E_0^{(m)} \tag{4.23}$$

où

$$A_m = \frac{d}{dx} + w_m(x), \quad A_m^+ = -\frac{d}{dx} + w_m(x) \tag{4.24}$$

Au cours de calcul, une équation non linéaire apparait

$$w_m^2(x) - w_m'(x) = v_m(x) - E_0^{(m)} \tag{4.25}$$

Sa solution sera

$$w_m(x) = -\frac{d}{dx} \ln \left( \Psi_0^{(m)}(x) \right) \tag{4.26}$$

L'associé supersymétrique de  $H_m$  sera donné par

$$H_{m+1} = A_m A_m^+ + E_0^{(m)} \tag{4.27}$$

Le lien entre les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens partenaires  $H_m, H_{m+1}$  est

$$E_{n+1}^{(m)} = E_n^{(m+1)} \tag{4.28}$$

$$\Psi_n^{(m+1)}(x) = (E_{n+1}^{(m)} - E_0^{(m)})^{-1/2} A_m \Psi_{n+1}^{(m)}(x) \tag{4.29}$$

$$\Psi_{n+1}^{(m)}(x) = (E_n^{(m+1)} - E_0^{(m)})^{-1/2} A_m^+ \Psi_n^{(m+1)}(x) \tag{4.30}$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du  $m^{\text{ième}}$  hamiltonien s'expriment en fonction de celles de du hamiltonien initial par

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \tag{4.31}$$

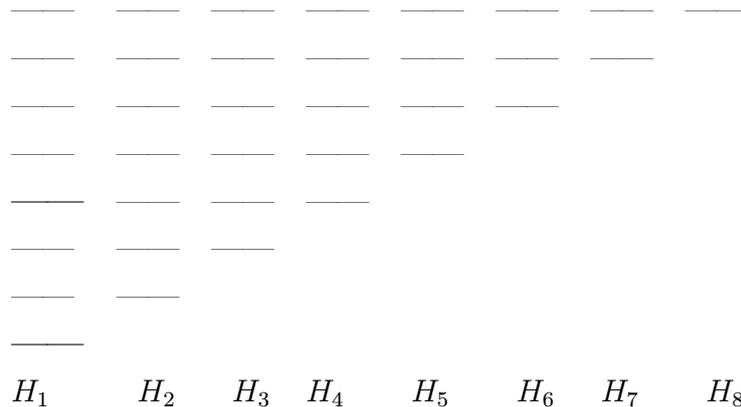
$$\Psi_n^{(m)}(x) = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)^{-1/2} \dots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_{m-1} A_{m-2} \dots A_1 \Psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \tag{4.32}$$

$$\Psi_{n+m-1}^{(1)}(x) = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \dots \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)^{-1/2} A_1^+ A_2^+ \dots A_{m-1}^+ \Psi_n^{(m)}(x) \tag{4.33}$$

Le potentiel  $v_m(x)$  sera donné par

$$v_m(x) = v_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \Psi_0^{(1)}(x) \Psi_0^{(2)}(x) \dots \Psi_0^{(m-1)}(x) \right) \tag{4.34}$$

Bref, dans les conditions où on connaît les énergies propres  $E_n^{(1)}$ , et les fonctions propres  $\Psi_n^{(1)}(x)$  de l'hamiltonien de départ  $H_1$ , et étant donné qu'il possède  $p$  (supérieur ou égal à un) états liés, on peut créer toute une chaîne de hamiltoniens partenaires ( $H_2, \dots, H_m$ ) via une factorisation répétée. Puisque on a vu que le niveau d'énergie fondamentale d'un hamiltonien n'a pas d'équivalent dans le spectre de son superpartenaire (le spectre est réduit d'un niveau), alors, l'hierarchie de hamiltoniens va comprendre  $(p - 1)$  hamiltoniens (c'est à dire  $m = 2, 3, \dots, p$ ), dont les fonctions d'ondes se déduisent commodément les unes des autres par application d'opérateurs adjoints  $A_m^+, A_m$ .



**Figure 2 :** Spectre énergétique d'une famille d'hamiltoniens, dont le nombre d'états liés de  $H_1$  est fixé à  $p = 8$ .

## 4.2 Invariance de forme

Nous avons décrit dans le paragraphe précédent, la méthode supersymétrique permettant de générer une hiérarchie de hamiltoniens partenaires, partant nécessairement d'un hamiltonien

nien initial du spectre et fonctions d'ondes connus. Dans cette section, nous allons voir qu'on peut évaluer le spectre entier de du hamiltonien de départ, en appliquant une nouvelle fois le formalisme de SUSY pour une catégorie de potentiels appelée "invariant de forme". Par définition, on dit que les potentiels sont invariants de forme, si et seulement si, les deux potentiels SUSY-partenaires  $v_1(x, a_1), v_2(x, a_1)$  définis antérieurement par (3.7), (3.12), disposent d'une forme paraille, et ils ne diffèrent que par quelques paramètres symbolisés par  $a_1$ . Autrement dit, ils vérifient toujours la condition

$$v_2(x, a_1) = v_1(x, a_2) + R(a_1) \tag{4.35}$$

où  $a_2$  désigne une fonction de  $a_1$ , qu'on note  $a_2 = f(a_1)$  et  $R(a_1)$  une autre fonction de  $a_1$ , qui ne depend pas de  $x$ , dite : le Reste. En tenant compte de cette condition, et en se servant de ce qui a été établi pour l'hierarchie de hamiltoniens dans le cas où la symétrie n'est pas brisée, on obtiendra aisément les énergies propres, et les fonctions propres des potentiels invariants de forme.

### 4.2.1 Formules générales et spectre énergétique

Lorsque la symétrie n'est pas brisée, on a défini l'état fondamental de l'hamiltonien initial par[12] :

$$E_0^{(1)} = 0 \tag{4.36}$$

$$\Psi_0^{(1)}(x, a_1) = N_0^{(1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^x w(y, a_1) dy\right) \tag{4.37}$$

Pour avoir de manière complète le spectre énergétique de l'hamiltonien de départ, nous avons besoin de la condition d'invariance de forme, ainsi, de faire appel à la notion de refactorisation permettant d'engendrer une famille de hamiltoniens pouvant être résolus analytiquement. Soit

$$\begin{aligned} v_2(x, a_1) &= v_1(x, f(a_1)) + R(a_1) \\ &= v_1(x, a_2) + R(a_1) \end{aligned} \tag{4.38}$$

Un paramètre  $a_m$  est défini par application de  $(m - 1)$  fois de la fonction  $f$  sur le paramètre  $a_1$

$$\begin{aligned} a_2 &= f(a_1) \\ a_3 &= f(a_2) = f(f(a_1)) = f^{(2)}(a_1) \\ &\vdots \\ a_m &= f^{(m-1)}(a_1) \end{aligned}$$

On sait que le hamiltonien de départ s'écrit

$$H_1(a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, a_1)$$

Nous allons maintenant définir la chaîne de hamiltoniens partenaires, et nous commençons par l'hamiltonien  $H_2$

$$\begin{aligned} H_2(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_2(x, a_1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, a_2) + R(a_1) \\ &= H_1(a_2) + R(a_1) \end{aligned}$$

L'hamiltonien partenaire  $H_3$ , sera donné par

$$\begin{aligned} H_3(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_3(x, a_1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_2(x, f(a_1)) + R(a_1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, f^{(2)}(a_1)) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, a_3) + R(a_2) + R(a_1) \\ &= H_1(a_3) + R(a_2) + R(a_1) \end{aligned}$$

Ce procédé peut se généraliser facilement en

$$\begin{aligned} H_m(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} R(a_k) \\ &= H_1(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} R(a_k) \end{aligned}$$

son associé supersymétrique est

$$\begin{aligned} H_{m+1}(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x, a_{m+1}) + \sum_{k=1}^m R(a_k) \\ &= H_1(a_{m+1}) + \sum_{k=1}^m R(a_k) \end{aligned} \tag{4.39}$$

qui peut se réécrire sous une autre forme, en vertu de (4.38),

$$\begin{aligned}
 H_{m+1}(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_2(x, a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} R(a_k) \\
 &= H_2(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} R(a_k)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Comment sera défini le spectre complet des valeurs propres de l'hamiltonien initial  $H_1(a_1)$ ? on se base sur l'équation (4.39), et on l'insère les expressions de factorisation des hamiltoniens données par (4.23), on trouve

Pour  $m = 1$  :

$$H_2(a_1) = H_1(a_2) + R(a_1) \iff \tag{4.41}$$

$$A_2^+(a_1) A_2(a_1) + E_0^{(2)} = A_1^+(a_2) A_1(a_2) + E_0^{(1)} + R(a_1)$$

En identifiant les deux membres de cette dernière, et tenant compte de (4.36), on aura

$$E_0^{(2)} = E_1^{(1)} = R(a_1) \tag{4.42}$$

$$A_2(a_1) = A_1(a_2)$$

Pour  $m = 2$  :

$$H_3(a_1) = H_1(a_3) + R(a_1) + R(a_2) \iff$$

$$A_3^+(a_1) A_3(a_1) + E_0^{(3)} = A_1^+(a_3) A_1(a_3) + E_0^{(1)} + R(a_1) + R(a_2)$$

D'où, on tire

$$E_0^{(3)} = R(a_1) + R(a_2)$$

$$A_3^+(a_1) = A_1^+(a_3)$$

Pour  $m$  quelconque :

$$A_{m+1}^+(a_1) A_{m+1}(a_1) + E_0^{(m+1)} = A_1^+(a_{m+1}) A_1(a_{m+1}) + E_0^{(1)} + R(a_1) + \dots + R(a_m)$$

Ce qui entraîne

$$A_{m+1}^+ (a_1) = A_1^+ (a_{m+1}) \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} E_0^{(m+1)} &= E_1^{(m)} = E_2^{(m-1)} = \dots = E_m^{(1)} \\ &= \sum_{k=1}^m R(a_k) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les deux hamiltoniens partenaires de supersymétrie  $H_m(a_1)$ ,  $H_{m+1}(a_1)$ , ont le même spectre d'états liés, hormis l'état fondamental de  $H_m(a_1)$  [13], où l'énergie est

$$E_0^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-1} R(a_k) \quad (4.45)$$

De (4.44), on déduit que l'énergie du nième état de l'hamiltonien  $H_1(x, a_1)$  est

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad \text{avec } E_0^{(1)} = 0 \quad (4.46)$$

Il faut garder en memoire, que l'énergie  $E_0^{(1)} = 0$ , n'est pas une valeur réelle pour tout systèmes physiques, mais une modification utile qui a été faite pour avoir la situation, dès lors, vers la fin de calcul, on rajoute la quantité décalée pour obtenir l'énergie effective du spectre.

Quelles seront ensuite les relations entre les fonctions d'ondes fondamentales des différents hamiltoniens de l'hérarchie et celle de l'hamiltonien de départ ?

Les équations aux valeurs propres des deux hamiltoniens  $H_1(a_2)$  et  $H_2(a_1)$  sont :

$$H_1(a_2) \Psi_0^{(1)}(x, a_2) = E_0^{(1)} \Psi_0^{(1)}(x, a_2) \quad (4.47)$$

$$H_2(a_1) \Psi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(2)} \Psi_0^{(2)}(x, a_1) \quad (4.48)$$

Nous substituons les relations (4.41), (4.42) dans la dernière équation que nous venons d'écrire, nous obtenons

$$H_1(a_2) \Psi_0^{(2)}(x, a_1) = 0 \quad (4.49)$$

De (4.36), l'équation (4.48) redevient

$$H_1(a_2) \Psi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(1)} \Psi_0^{(2)}(x, a_1) \quad (4.50)$$

Par comparaison de (4.47), (4.50), on déduit que

$$\Psi_0^{(2)}(x, a_1) = \Psi_0^{(1)}(x, a_2) \quad (4.51)$$

qui se généralise d'une manière très simple en

$$\Psi_0^{(m+1)}(x, a_1) = \Psi_0^{(1)}(x, a_{m+1}) \quad (4.52)$$

Notre objectif alors consiste à rechercher les fonctions propres de l'hamiltonien initial  $H_1(x, a_1)$  obéissant à la condition d'invariance de forme.

Nous avons vu auparavant, que la relation entre les fonctions propres des deux hamiltoniens partenaires  $H_1(x, a_1)$ ,  $H_2(x, a_1)$ , avait la forme

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1) = (E_1^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_1^+(a_1) \Psi_0^{(2)}(x, a_1) \quad (4.53)$$

et en tenant compte de (4.51), l'équation (4.53) va se réécrire

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1) = (E_1^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_1^+(a_1) \Psi_0^{(1)}(x, a_2) \quad (4.54)$$

Il apparaît qu'on peut obtenir sans aucune difficulté, la fonction d'onde du premier état excité à partir de celle de son état fondamental, de plus, en s'appuyant toujours sur la méthode de factorisation, et les égalités (4.52), (4.43), cette relation pourra être généralisée pour trouver la relation de proportionnalité entre la fonction d'onde de l'état fondamental  $\Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1})$ , et celle du nième état  $\Psi_n^{(1)}(x, a_1)$ ;

$$\Psi_n^{(1)}(x, a_1) \propto A_1^+(a_1) A_1^+(a_2) \cdots A_1^+(a_{n-1}) A_1^+(a_n) \Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1}) \quad (4.55)$$

Nous allons maintenant traduire ce qui a été dit, pour voir les choses d'une façon plus précise, et plus claire.

La factorisation de l'hamiltonien  $H_1(x, a_1)$ , donne

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1) = (E_1^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_1^+(a_1) \Psi_0^{(1)}(x, a_2)$$

$$E_1^{(1)} = R(a_1)$$

ensuite, la factorisation de  $H_2(x, a_1)$ , apporte

$$\Psi_2^{(1)}(x, a_1) = \frac{A_1^+(a_1) A_2^+(a_1)}{((E_2^{(1)} - E_0^{(1)})(E_2^{(1)} - E_1^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(3)}(x, a_1)$$

$$= \frac{A_1^+(a_1) A_1^+(a_2)}{((E_2^{(1)} - E_0^{(1)})(E_2^{(1)} - E_1^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(1)}(x, a_3)$$

$$E_2^{(1)} = R(a_1) + R(a_2)$$

puis, la factorisation de  $H_3(x, a_1)$ , cause

$$\begin{aligned}
 \Psi_3^{(1)}(x, a_1) &= \frac{A_1^+(a_1)A_2^+(a_1)A_3^+(a_1)}{((E_3^{(1)}-E_0^{(1)})(E_3^{(1)}-E_1^{(1)})(E_3^{(1)}-E_2^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(4)}(x, a_1) \\
 &= \frac{A_1^+(a_1)A_1^+(a_2)A_1^+(a_3)}{((E_3^{(1)}-E_0^{(1)})(E_3^{(1)}-E_1^{(1)})(E_3^{(1)}-E_2^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(1)}(x, a_4) \\
 E_3^{(1)} &= R(a_1) + R(a_2) + R(a_3)
 \end{aligned}$$

subséquentement, la factorisation de l'hamiltonien  $H_m(x, a_1)$ , va déterminer la fonction d'onde du nième niveau et l'énergie associée, de l'hamiltonien de départ  $H_1(x, a_1)$ ;

$$\begin{aligned}
 \Psi_n^{(1)}(x, a_1) &= \frac{A_1^+(a_1)A_2^+(a_1)\dots A_n^+(a_1)}{((E_n^{(1)}-E_0^{(1)})(E_n^{(1)}-E_1^{(1)})\dots(E_n^{(1)}-E_{n-1}^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(n+1)}(x, a_1) \\
 &= \frac{A_1^+(a_1)A_1^+(a_2)\dots A_1^+(a_n)}{((E_n^{(1)}-E_0^{(1)})(E_n^{(1)}-E_1^{(1)})\dots(E_n^{(1)}-E_{n-1}^{(1)}))^{1/2}} \Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1}) \\
 &= \prod_{k=1}^n ((E_n^{(1)} - E_{k-1}^{(1)})^{-1/2} A_1^+(a_k)) \Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1})
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k) \tag{4.57}$$

On conclut de l'analyse qui vient d'être présentée, qu'on peut construire d'une manière totalement algébrique, le spectre complet des hamiltoniens dont les potentiels sont invariants de forme. Outre qu'on obtient de façon semblable, au cas de l'oscillateur harmonique à une dimension (équation 2.26), les fonctions d'ondes des états excités à partir de celle du niveau fondamental.

## 4.2.2 Illustrations

Nous allons nous intéresser maintenant à appliquer les points qui ont été développés, à quelques systèmes quantiques, afin d'obtenir les informations nécessaires sur les spectres énergétiques des hamiltoniens correspondants. Le premier exemple illustrant l'utilité de l'étude des lois des potentiels invariants de forme, concerne le superpotentiel[14] d'expression

$$w(x, a_1) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a_1 \tanh x \quad \text{avec } a_1 > 0$$

Les potentiels partenaires supersymétriques s'écrivent

$$\begin{aligned}
 v_1(x, a_1) &= w^2(x, a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \dot{w}(x, a_1) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} a_1^2 \tanh^2 x - \frac{\hbar^2}{2m} a_1 \frac{1}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} a_1^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 x}\right) - \frac{\hbar^2}{2m} a_1 \frac{1}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(a_1^2 - \frac{a_1(a_1+1)}{\cosh^2 x}\right)
 \end{aligned}$$

de même on trouve

$$v_2(x, a_1) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(a_1^2 - \frac{a_1(a_1-1)}{\cosh^2 x}\right) \quad (4.58)$$

qui doivent satisfaire la condition

$$v_2(x, a_1) = v_1(x, a_2) + R(a_2)$$

on aura en effet

$$\begin{aligned}
 v_2(x, a_1) - v_1(x, a_2) &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ (a_1^2 - a_2^2) - \frac{1}{\cosh^2 x} ((a_1^2 - a_2^2) - (a_1 + a_2)) \right] \\
 &= R(a_2)
 \end{aligned}$$

Pour que les potentiels partenaires supersymétriques soient invariants de forme, et le superpotentiel solution de l'équation de Riccati, crée une fonction propre bien normalisable, on impose

$$a_2 = a_1 - 1 \quad (4.59)$$

implique que

$$R(a_2) = \frac{\hbar^2}{2m} (a_1^2 - a_2^2) \quad (4.60)$$

la fonction d'onde fondamentale sera donnée par

$$\begin{aligned}
 \Psi_0^{(1)}(x) &= N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int a_1 \tanh x dx\right) \\
 &= N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} a_1 \ln \cosh x\right) \\
 &= C \cosh x^{-\sqrt{2ma_1}/\hbar}
 \end{aligned}$$

où  $C$ , est la constante de normalisation.

Le spectre d'énergie de l'hamiltonien du système sera

$$\begin{aligned}
 E_n^{(1)} &= \sum_{k=2}^{n+1} R(a_k) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=2}^{n+1} (a_{k-1}^2 - a_k^2) \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} (a_1^2 - (a_1 - n)^2)
 \end{aligned}$$

avec  $a_k = a_{k-1} - 1 = a_1 - n + 1$ .

Ainsi on utilise (4.56) on trouvera facilement les fonctions d'ondes des états excités correspondantes.

### Oscillateur harmonique

Sur ce problème, nous allons commencer par rappeler, l'expression de l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique quantique

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (4.61)$$

Les énergies propres et les fonctions propres associées, vont être obtenues facilement à partir d'un superpotentiel de la forme[15]

$$w(x) = a_1x \quad (4.62)$$

qui doit satisfaire l'équation de Riccati

$$\begin{aligned}
 w^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w'(x) &= (a_1^2x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}a_1) \\
 &= \frac{1}{2}mw^2x^2 - E_0
 \end{aligned}$$

On déduit immédiatement que

$$a_1^2 = \frac{1}{2}mw^2 \quad \implies \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{mw^2}{2}}$$

et

$$E_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}a_1$$

Comme on a vu au chapitre1, que les valeurs propres de l'oscillateur sont toutes non négatives, alors, seule la valeur positive de  $a$  qui va être prise en considération.

L'énergie fondamentale s'obtient sans aucun problème

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar w \quad (4.63)$$

Le superpotentiel sera

$$w(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}wx \quad (4.64)$$

et le potentiel s'écrira

$$v_1(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 - \frac{1}{2}\hbar w \quad (4.65)$$

Les spectres de l'hamiltonien original donné par (4.61), et l'hamiltonien  $H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v_1(x)$ , sont seulement décalés par la constante  $\hbar w/2$ .

On se propose maintenant, de s'assurer que le potentiel  $v_1(x)$  est invariant de forme. D'après (3.12) et (3.7), les potentiels partenaires supersymétriques, seront donnés par

$$\begin{aligned} v_1(x, a_1) &= w^2(x, a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} w(x, a_1) \\ &= a_1^2 x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_2(x, a_1) &= w^2(x, a_1) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} w(x, a_1) \\ &= a_1^2 x^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a_1 \end{aligned}$$

qui doivent vérifier la condition

$$\begin{aligned} v_2(x, a_1) &= v_1(x, a_2) + R(a_1) \iff \\ a_1^2 x^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a_1 &= a_2^2 x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a_2 + R(a_1) \end{aligned}$$

Cela n'est vrai que si

$$a_2 = a_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}w$$

et

$$R(a_1) = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}} a_1 = \hbar w$$

Les énergies propres se déduisent facilement

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= R(a_1) = \hbar w \\ E_2^{(1)} &= R(a_1) + R(a_1) = 2\hbar w \\ \dots &= \dots \\ E_n^{(1)} &= n\hbar w \end{aligned}$$

Tenant compte de la quantité décalée  $\hbar\omega/2$  pour le spectre de  $H_1$ , les niveaux quantifiés d'énergie de l'hamiltonien de départ seront

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (4.66)$$

Les fonctions d'ondes s'obtient ainsi facilement, à l'aide des relations qui ont été établit auparavant (4.37), (4.56) et (4.2). On aura

\* Pour le niveau fondamental

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= N_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int \frac{m\omega}{2} x^2 dx\right) \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \end{aligned}$$

où la constante  $N_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$  est obtenue en imposant les conditions de normalisation  $\int |\Psi_0(x)|^2 = 1$ .

\* Pour les niveaux excités : en combinant les résultats

$$E_{k-1}^{(1)} = (k-1) \hbar\omega$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n ((E_n^{(1)} - E_{k-1}^{(1)})^{-1/2}) &= \prod_{k=1}^n ((n-k+1) \hbar\omega)^{-1/2} = ((\hbar\omega)^n n!)^{-1/2} \\ \prod_{k=1}^n A_1^+(a_k) &= \prod_{k=1}^n \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(-\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x\right) = \left[\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(-\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x\right)\right]^n \end{aligned}$$

On trouvera finalement la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{n!}} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^n \left(-\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x\right)^n \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

Nous venons de voir, qu'il suffit que les potentiels obeissent à la condition d'invariance de forme, qu'avec l'emploi des resultat de l'hiérarchie, on trouve aisément les énergies propres et les fonctions propres décrivant le système quantique étudié.

# Chapitre 5

## Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur l'approche de supersymétrie en mécanique quantique, où nous avons constaté que :

1. Grâce à une méthode purement algébrique basée sur des opérateurs échelles, nous avons pu obtenir de simples relations entre un hamiltonien du spectre connu d'énergie fondamentale prise nulle, et son hamiltonien partenaire supersymétrique.
2. Dans les conditions où nous disposons les valeurs propres et les fonctions propres d'un hamiltonien, et qu'avec l'appui de la méthode de refactorisation, nous avons pu construire toute une famille de hamiltoniens partenaires isospectraux, dont les solutions se déduisent les unes des autres par application rigoureuse des opérateurs échelles.
3. Une des conséquences les plus importantes dans la théorie de SUSY, est dans le cas où les potentiels sont invariants de forme, où nous avons pu trouver d'une manière simple les solutions analytiques des hamiltoniens en question.
4. Comme perspective, nous pouvons essayer d'appliquer cette méthode sur des systèmes quantiques relativistes obéissant aux équations de Dirac et de Klein- Gordon.

# Bibliographie

- [1] M. A. Wasay, *Supersymmetric quantum mechanics*, Master thesis, Uppsala Universitet, 23March 2010.
- [2] F.Cooper, A. Khare and U. Sukhatme ; arXiv :hep-th/9405029v2 (1994).
- [3] M. Chaichian and R. Hagedorn, *Symmetries in quantum mechanics from angular momentum to supersymmetry*, Helsinki, Geneva (1997) .
- [4] E. Nygren, *Supersymmetric quantum mechanics*, Bachelor thesis, Institut for theoretical physics University of Bern (2010) .
- [5] B. K. Bagchi, *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*, Chapman & Hull/CRC(2001) .
- [6] L. Infeld and T. E. Hull, *The factorization method*, Rev. Mod. Phy. 23 (1951) 21.
- [7] J-L. Basdevant et J. Dalibard, *Mecanique quantique cours de l'école polytechnique* (2002).
- [8] Cl. Aslangul, *Physique quantique Fondements et premières applications*,Éditions De Boeck Université (2007) .
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique* (tome II),Edition Hermann, Paris(2000) .
- [10] J. Bougie, A. gangopadhyaya, J. Mallow and C. Rasinariu, *Supersymmetric quantum mechanics and solvable models*, *Symmetry*, 4, 452-473 (2012) .
- [11] L. Maghlaoui, *Supersymétrie dans le formalisme de la paraquantification et métrique pseudo-complexe de robertson-walker*, thèse de Doctorat, Université de Mentouri-Constantine.
- [12] F.Cooper, A. Khare and U. Sukhatme ; *Supersymmetry in quantum mechanics*, Word Scientific Publishing (2001) .
- [13] F.Cooper, A. Khare and U. Sukhatme ; *Supersymmetry in quantum mechanics* ; Phy. Rep. 251, 267-385 (1995) .
- [14] G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum and statistical Physics*, Springer-Verlag (1996) .

- [15] A. Benachour, *Approche de supersymétrie en mécanique quantique et application à la construction de potentiels non hermitiens avec spectre réels*, Memoire de Magister, Université de Mentouri-Constantine, 29/06/2010.