

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAIA

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Département de physique

MÉMOIRE DE MASTER

Présenté par:

Melle MOUSSOUNI REBIHA

Option:

Physique Des Matériaux Et Nano-Composites

Thème

## ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT DE FILMS DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

Soutenu le: 19/06/2014 devant le Jury composé de :

Mme	MEZIANI OURREAD	Ouerdia	Professeur	UAMB	Président
Mr	MAHTOUT Sofiane		MCA	UAMB	Examineur
Mr	ZENIA Hand		MCB	UAMB	Examineur
Melle	AMATOUSSE Nawel		MCA	UAMB	Rapporteur

*À*

*ma mère et mon père,*

*mes frères et sœurs*

*toute ma famille*

*et aussi au Dr N.AMATOUSSE*

# Remerciements

Au nom d'Allah ; le plus grand merci lui revient de m'avoir guidée vers le droit chemin, de m'avoir aidée tout au long de mes années d'étude.

J'adresse mon profond remerciement.

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Docteur N.AMATOUSSE, Maître de conférences à l'université de Béjaïa, qui s'est toujours montrée à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour son aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également au Professeur Meziani Ouerdia pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance et à messieurs Mahtout Sofiane et Zenia Hand Maîtres de Conférences à l'université de Béjaïa d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également mes camarades du Master II Physique pour leurs conseils et leurs idées. Je tiens à les remercier spécialement pour m'avoir soutenue, encouragée ainsi que pour m'avoir fait partager leurs remarques lors de la révision de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ma famille pour leur contribution, leurs encouragements et leur dévouement. Je remercie spécialement mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience, ainsi que pour leur aide morale. Je leur serai éternellement reconnaissante d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici.

Je tiens également à remercier mes deux frères Didine, Youcef et sœurs qui ont eu la gentillesse de me guider dans ce chemin.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

**Il ne suffit pas d'engranger les récoltes du savoir, du savoir-faire, ni de vendanger les fruits du savoir-être et du savoir-devenir, encore faut-il accepter de les offrir pour s'agrandir ensemble.**

[Jacques Salomé](#)

ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT DE  
FILMS DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

## Résumé :

Un grand nombre d'études ont été consacrées à la modélisation d'écoulements de films fluides viscoélastiques. L'intérêt du sujet tant pour son coté appliqué que pour son coté fondamental en est la raison principale [7].

Dans le cadre de ce travail, une étude linéaire de stabilité de l'écoulement à surface libre d'un film mince d'un fluide visqueux faiblement élastique est effectuée. Les équations gouvernant un tel mouvement sont d'un formalisme mathématique particulièrement compliqué. Il s'agit en effet d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace et non linéaires. Comme aucun cadre général n'existe pour ce genre de problème, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des modélisations mathématiquement abordables.

Lorsque les effets visqueux l'emportent sur les effets inertiels, l'expérience montre que sur un film de fine épaisseur (quelques millimètres), l'instabilité se manifeste par la croissance d'ondes dont la longueur est grande devant l'épaisseur du film. Dans ces conditions, les champs hydrodynamiques en présence peuvent être exprimés sous la forme d'une série asymptotique. Une équation d'évolution de l'épaisseur du film peut ainsi être obtenue par l'intermédiaire de l'équation cinématique. Il s'agira ensuite de déterminer les conditions critiques au début de l'instabilité. La connaissance de ces conditions intéresse particulièrement le secteur industriel où il est important de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités afin d'éviter qu'elles n'altèrent la qualité du produit.

# Table des matières

Liste des symboles	1
<b>1 INTRODUCTION :</b>	<b>4</b>
<b>2 Équations gouvernant l'écoulement</b>	<b>9</b>
2.1 Présentation du problème : . . . . .	9
2.1.1 Équations de Navier-Stokes généralisées : . . . . .	10
2.1.2 Conditions aux limites : . . . . .	12
2.2 Écoulement de base : . . . . .	15
2.3 Adimensionnement : . . . . .	15
2.3.1 Échelles caractéristiques : . . . . .	16
2.3.2 Équations adimensionnées : . . . . .	16
<b>3 Modélisation par l'approche ondes longues</b>	<b>19</b>
3.1 Brève revue des études antérieures : . . . . .	19
3.1.1 Fluides Newtoniens : . . . . .	19
3.1.2 Fluides Non Newtoniens : . . . . .	21
3.2 Modélisation du problème : . . . . .	22
3.2.1 Hypothèse ondes longues : . . . . .	22
3.2.2 Équation de surface : . . . . .	23
<b>4 Étude de la stabilité linéaire :</b>	<b>31</b>
4.1 Relation de dispersion des perturbations de faible amplitude : . . . . .	31
4.2 Étude de stabilité temporelle : . . . . .	32
4.2.1 Courbes de stabilité marginale : . . . . .	34
4.2.2 Taux d'amplification des instabilités : . . . . .	36
<b>5 CONCLUSION</b>	<b>40</b>

# Liste des symboles

- $\epsilon$  paramètre ondes longues , page 16
- $\Gamma_0$  terme viscoélastique, page 14
- $\gamma$  coefficient de tension superficielle, page 13
- $\mu$  viscosité dynamique, page 15
- $\nu$  viscosité cinématique, page 15
- $\omega$  pulsation complexe, page 31
- $\vec{v}$  vitesse du fluide, page 10
- $\rho$  densité du fluide ( sa masse volumique ), page 11
- $\theta$  angle d'inclinaison, page 12
- A amplitude de la perturbation, page 31
- D/Dt Dérivée particulaire, page 11
- $h(x,t)$  épaisseur du fluide, page 12
- $h_n$  épaisseur du film fluide en écoulement stationnaire, page 16
- k nombre d'onde, page 31
- $P_a$  pression atmosphérique, page 17
- R nombre de Reynolds, page 17
- $R_c$  nombre de Reynolds critique, page 31
- W nombre de Weber, page 17

# Table des figures

1.0.1 Instabilités d'interfaces . . . . .	4
1.0.2 Exemple d'un fluide non newtonien. . . . .	6
2.1.1 Film mince d'un fluide viscoélastique en écoulement sur un plan incliné (configuration 2D) . . . . .	10
4.2.1 Courbes de stabilité marginale obtenues pour $W = 10, \theta = 30^\circ$ et pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique $\Gamma$ (trait plein : $\Gamma = 0.05$ , pointillés $\Gamma = 0.04$ , tirets : $\Gamma = 0.03$ , trait plein épais : $\Gamma = 0$ ) . . . . .	34
4.2.2 Courbes de stabilité marginale et pour $\Gamma = 0.05, \theta = 30$ pour différentes valeurs du nombre de Weber $W$ (trait plein : $W = 10$ , pointillés $W = 9$ , tirets : $W = 8$ , trait plein épais : $W = 7$ ) . . . . .	35
4.2.3 Courbes de stabilité marginale pour $\Gamma = 0.05, W = 10$ et pour différentes valeurs de l'inclinaison du plan $\theta$ (trait plein : $\theta = 90^\circ$ , pointillés $\theta = 60^\circ$ , tirets : $\theta = 45^\circ$ , trait plein épais : $\theta = 30^\circ$ ) . . . . .	35
4.2.4 Taux d'amplification $\omega_i$ des ondes en fonction du nombre d'onde $k$ pour $W=10$ , $R=10$ , $\theta = 30^\circ$ (trait plein : $\Gamma = 0.05$ , pointillés $\Gamma = 0.04$ , tirets : $\Gamma = 0.03$ , trait plein épais : $\Gamma = 0$ ) . . . . .	36
4.2.5 Taux d'amplification $\omega_i$ des ondes en fonction du nombre d'onde $k$ pour $R=10$ , $\theta = 30^\circ$ $\Gamma = 0.05$ (trait plein : $W = 10$ , pointillés $W = 9$ , tirets : $W = 8$ , trait plein épais : $W = 7$ ) . . . . .	37
4.2.6 Taux d'amplification $\omega_i$ des ondes en fonction du nombre d'onde $k$ pour $R=10$ , $W=10$ (trait plein : $\theta = 90^\circ$ , pointillés $\theta = 60^\circ$ , tirets : $\theta = 45^\circ$ , trait plein épais : $\theta = 30^\circ$ ) . . . . .	37

# INTRODUCTION

# Chapitre 1

## INTRODUCTION :

Les écoulements de films minces de fluides sont devenus l'objet d'études depuis plusieurs décennies et certains cas sont toujours un sujet d'actualité.

De ce fait, d'innombrables hypothèses ont été émises et diverses théories élaborées dans le but d'expliquer et de comprendre les phénomènes interfaciaux rencontrés dans ce type d'écoulement.

Dans l'industrie, les films minces interviennent dans plusieurs domaines. Ils peuvent être utilisés pour la conception de peintures, d'adhésifs ou lors du dépôt de couches de pellicules photographiques en infographie. On les rencontre également dans la nature tels que dans les coulées de lave, de boue... Ils sont aussi présents en biologie, sur la paroi interne des poumons ou à la surface des yeux par exemple ainsi que dans des situations physiques et industrielles comme lors du processus de transfert de chaleur ou lors de la conception et de la rupture de barrages...

Un fluide en général peut être considéré comme étant un ensemble de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, non rigide et qui a tendance à s'écouler.

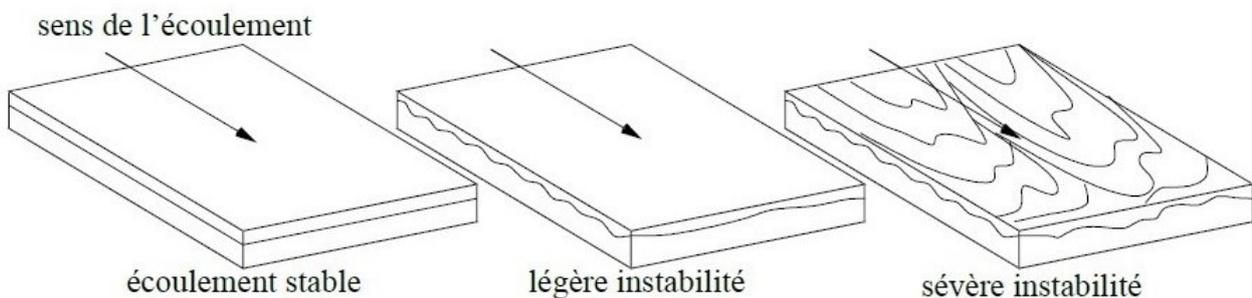


FIGURE 1.0.1 – Instabilités d'interfaces

Ils peuvent être classés en deux grandes catégories : newtoniens et non newtoniens.

## 1- Les fluides newtoniens :

Ce sont des fluides pour lesquels les éléments du tenseur des contraintes visqueuses sont linéairement proportionnels aux vitesses de déformation. La constante de proportionnalité est appelée viscosité du fluide.

## 2- Les fluides non newtoniens :

Les fluides dont le comportement brise la loi de Newton (fig 1.0.2) sont dits non Newtoniens. On distingue parmi ces fluides plusieurs catégories :

## a- Fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques) :

Dans ce type de fluide, la viscosité diminue avec l'augmentation de la contrainte appliquée . C'est le cas du sang, des chaînes polymériques liquides à longue chaîne, des jus de fruits, des colles et des ciments, des shampoings...

## b- Fluides viscoplastiques :

Ce sont des cas particuliers des fluides rhéofluidifiants. Ils se distinguent par l'existence d'un seuil de contrainte d'écoulement. En d'autres termes, aucun mouvement n'apparaît au niveau du fluide si ce dernier est soumis à une contrainte inférieure au seuil. On parle alors de fluide à seuil ou viscoplastique.

Comme exemples de fluides viscoplastiques, on peut citer : les boues de forage, les pâtes à papier, les vernis, les peintures , les polymères fondus ou en solution très concentrée...

## c- Fluides rhéoépaississants :

Dans ces fluides, la viscosité s'accroît lorsque la contrainte augmente. Ce comportement est observé dans les amidons dilués dans l'eau.

## d- Fluides thixotropes :

Les fluides thixotropes sont des fluides ayant une mémoire de forme à courte et à grande échelle. Le comportement à un instant  $t$  d'un fluide thixotrope dépend des contraintes subies dans un temps antérieur (mémoire à courte échelle). Lorsque la contrainte est éliminée, le fluide retrouve son état initial (mémoire à grande échelle). Comme exemples , on peut citer le ketchup, le yaourt

....



FIGURE 1.0.2 – Exemple d'un fluide non newtonien.

e- Fluides viscoélastiques :

Les fluides complexes ou non newtoniens sont caractérisés par l'existence d'une propriété intrinsèque de la matière appelée temps de relaxation. Suivant le rapport de ce temps à l'échelle de temps de la sollicitation qui définit le nombre de Deborah  $De$ , le comportement se rapprochera de celui d'un solide (caractérisé par son élasticité) ou de celui d'un liquide (caractérisé par sa viscosité). On considère qu'il s'agit d'un fluide purement visqueux quand  $De \ll 1$  car les temps nécessaires pour les modifications de structure du produit sont beaucoup plus faibles que le temps caractéristique de la sollicitation. Le comportement est semblable à un solide élastique pour  $De \gg 1$  car la structure du matériau n'a « pas le temps » de s'adapter aux effets de la contrainte. La viscosité n'est donc pas toujours la seule grandeur à observer. La plupart des matériaux possèdent également des propriétés élastiques d'autant plus marquées qu'ils possèdent une organisation moléculaire complexe, c'est pour cela que la viscoélasticité est très fréquente dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus.

La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux avec une partie de la contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation et un aspect élastique avec l'autre partie de la contrainte proportionnelle à la déformation elle-même.

Ce qui nous intéresse et traiterons le long de ce mémoire est l'écoulement bidimensionnel le long d'un plan incliné d'un film mince visqueux faiblement élastique.

Les équations gouvernant un tel mouvement sont d'un formalisme mathématique particulièrement compliqué. Il s'agit en effet d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace et non linéaire. Comme aucun cadre général n'existe pour ce genre de problème, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des modélisations mathématiquement abordables.

Lorsque les effets visqueux l'emportent sur les effets inertiels, l'expérience montre que sur un film de fine épaisseur (quelques millimètres), l'instabilité se manifeste par la croissance d'ondes dont la longueur est grande (en centimètre) devant l'épaisseur du film [3]. Dans ces conditions, les champs hydrodynamiques en présence peuvent être exprimés sous la forme d'une série asymptotique. Une équation d'évolution de l'épaisseur du film peut ainsi être obtenue par l'intermédiaire de l'équation cinématique. Il s'agira ensuite de déterminer les conditions critiques au début de l'instabilité figure (1.0.1). La connaissance de ces conditions intéresse particulièrement le secteur industriel où il est important de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités afin d'éviter qu'elles n'altèrent la qualité du produit.

# Chapitre 2 Équations gouvernant l'écoulement

# Chapitre 2

## Équations gouvernant l'écoulement

### 2.1 Présentation du problème :

Dans ce chapitre, nous allons présenter le système d'équations qui gouverne l'écoulement laminaire[1] et bidimensionnel d'un fluide viscoélastique et incompressible. Le fluide considéré est de faible épaisseur, il s'écoule sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale et est soumis seulement aux effets gravitationnels. L'écoulement est à surface libre, l'interface est en contact direct avec l'air ou règne une pression égale à  $p_a$ .

Dans ce qui suit la notation  $\chi_\alpha$  signifie la dérivation partielle de la grandeur  $\chi$  par rapport à  $\alpha$ .

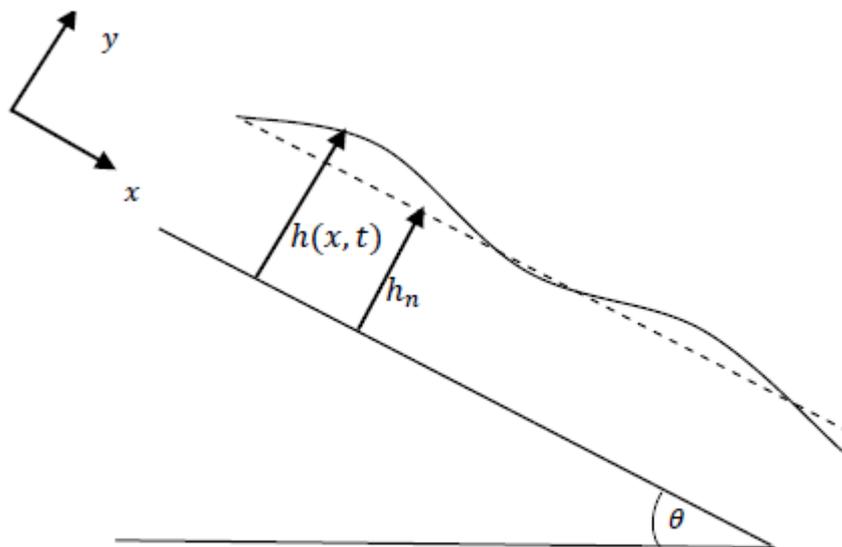


FIGURE 2.1.1 – Film mince d'un fluide viscoélastique en écoulement sur un plan incliné (configuration 2D)

### 2.1.1 Équations de Navier-Stokes généralisées :

Les équations sont écrites dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Ce système d'axes est aligné avec le plan, l'axe  $Ox$  est dans la direction et le sens de l'écoulement. L'axe  $Oy$  est quant à lui normal au plan (voir Figure (2.1.1)).

Les équations régissant la dynamique d'un fluide en écoulement résultent de l'application des lois et principes de la mécanique classique à savoir le bilan de la masse et le bilan de la quantité de mouvement.

#### La conservation de la masse :

La conservation de la masse pour un fluide incompressible se traduit par la divergence nulle du champ de vitesse  $\vec{v}$  :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1.1)$$

Si  $(u, v)$  représentent les composantes du champ de vitesse, l'équation (2.1.1) s'écrira comme suit :

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.1.2)$$

**Le bilan de quantité de mouvement :**

Ce bilan exprime la variation de la quantité de mouvement par unité de volume comme la somme des efforts volumiques et surfaciques appliqués.[4]

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \cdot \vec{g} + \text{div} \vec{\sigma} \quad (2.1.3)$$

Où  $\vec{g} = (g \sin \theta, -g \cos \theta)$  est l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  est la densité du fluide et  $\vec{\sigma}$  le tenseur des contraintes.

Le fluide viscoélastique considéré obéit à une loi de comportement de type Walters B” :

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.1.4)$$

Avec :

$$\tau_{ij} = -2 \cdot \Gamma_0 \cdot \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + v_k \cdot \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \cdot e_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \cdot e_{kj} \right) \quad (2.1.5)$$

$\mu$  étant la viscosité dynamique du fluide,  $p$  représente la pression et  $\Gamma_0$  le paramètre viscoélastique. Les  $e_{ij}$  sont les éléments du tenseur des taux de déformation, ils ont pour expression :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.6)$$

En remplaçant dans l'équation (2.1.3) l'expression (2.1.4) du tenseur des contraintes, on obtient l'équation du bilan de la quantité de mouvement suivante :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \text{div} \vec{\tau} + \rho \cdot \vec{g} \quad (2.1.7)$$

En projetant l'équation (2.1.7) sur l'axe (Ox), on trouve :

---

<sup>1</sup>  $\frac{D}{Dt}$  : Dérivée particulaire

$$\rho \cdot [u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y] = -p_x + \mu \cdot (u_{xx} + u_{yy}) + (\tau_{xx})_x + (\tau_{xy})_y + \rho \cdot g \sin \theta \quad (2.1.8)$$

La projection de (2.1.7) suivant la normale (Oy) donne :

$$\rho \cdot [v_t + u \cdot v_x + v \cdot v_y] = -p_y + \mu (v_{xx} + v_{yy}) + (\tau_{yx})_x + (\tau_{yy})_y - \rho \cdot g \cdot \cos \theta \quad (2.1.9)$$

Les composantes du tenseur  $\tau_{ij}$  sont données par les expressions suivantes :

$$\tau_{xx} = -\Gamma_0 [2u_{tx} + 2u \cdot u_{xx} + 2v \cdot u_{yx} - 4u_x^2 - 2u_y(u_y + v_x)] \quad (2.1.10)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\Gamma_0 [u_{ty} + v_{tx} + uu_{xy} + uv_{xx} + vu_{yy} + vv_{yx} - 2v_x u_x - 2u_y v_y] \quad (2.1.11)$$

$$\tau_{yy} = -\Gamma_0 [2v_{ty} + 2uv_{xy} + 2vv_{yy} - 2v_x(v_x + u_y) - 4v_y^2] \quad (2.1.12)$$

2

Aux équations du mouvement (2.1.1) et (2.1.7) sont associées des conditions au niveau de la paroi, solide et fixe, sur laquelle le fluide s'écoule ainsi qu'au niveau de l'interface fluide- air.

### 2.1.2 Conditions aux limites :

L'adhérence du fluide à la paroi solide d'équation  $y=0$  s'écrit :

$$u = 0, v = 0 \quad (2.1.13)$$

Au niveau de l'interface (fluide-air) d'équation  $y= h(x,t)$ , nous avons deux types de conditions :

a) La condition cinématique :

L'équation qui traduit l'imperméabilité de la surface libre se déduit de la relation :

$$\frac{Df}{Dt} = 0$$

où  $f = y - h(x,t) = 0$  représente l'équation de l'interface.

En développant, on trouve :

$$v = h_t + u \cdot h_x \quad (2.1.14)$$

---

<sup>2</sup>voir liste des symboles

b) Les conditions dynamiques :

La continuité des contraintes tangentielles s'écrit :

$$\overline{(\sigma \cdot \vec{n})} \cdot \vec{t} = \overline{(\sigma_{air})} \cdot \vec{t} \quad (2.1.15)$$

La condition sur les contraintes normales est donnée par :

$$\overline{(\sigma \cdot \vec{n})} \cdot \vec{n} - \overline{(\sigma_{air} \cdot \vec{n})} \cdot \vec{n} = -\gamma \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \quad (2.1.16)$$

La normale à l'interface est donnée par  $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{grad}f}{\|\overrightarrow{grad}f\|}$ .

On trouve après calcul :

$$\vec{n} = \vec{n} \left( \frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

La tangente à l'interface, perpendiculaire à  $\vec{n}$ , a pour expression :

$$\vec{t} = \vec{t} \left( \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

En remplaçant  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  par leur expression dans (2.1.15) et (2.1.16) on obtient :

La Condition Tangentielle :

$$\begin{aligned} & -4\mu u_x h_x + \mu(u_y + v_x) \cdot (1 - h_x^2) + \Gamma_0 h_x [2u_{tx} + 2uu_{xx} + 2vu_{yx} - 4u_x^2 - 2u_y(u_y + v_x)] \\ & \quad - \Gamma_0 h_x [2v_{ty} + 2uv_{xy} + 2vv_{yy} - 2v_x(v_x + u_y) - 4v_y^2] \\ & \quad - \Gamma_0(1 - h_x^2)[u_{ty} + v_{tx} + uu_{xy} + uv_{xx} + vv_{yy} + vv_{yx} - 2v_x u_x - 2u_y v_y] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

La Condition Normale :

$$\begin{aligned}
 p - p_a = \frac{1}{(1 + h_x^2)} & \left[ 2uu_x \cdot h_x^2 - 2\mu h_x(u_y + v_x) + 2\mu v_y \right. \\
 & + 2\Gamma_0 h_x [u_{ty} + v_{tx} + uu_{xy} + uv_{xx} + vv_{yy} + vv_{yx} - 2v_x u_x - 2u_y v_y] \\
 & - \Gamma_0 h_x^2 [2u_{tx} + 2uv_{xx} + 2vv_{yx} - 4u_x^2 - 2u_y(u_y + v_x)] \\
 & \left. - \Gamma_0 [2v_{ty} + 2uv_{xy} + 2vv_{yy} - 2v_x(v_x + u_y) - 4v_y^2] \right] - \frac{\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \quad (2.1.18)
 \end{aligned}$$

La tension de surface est une caractéristique très importante des fluides. Elle explique beaucoup de phénomènes naturels, la stabilité des gouttes de pluie dans l'atmosphère, le pouvoir de certains reptiles et insectes à se déplacer sur la surface de l'eau, la formation des bulles de savon, les remontées capillaires dans les solides poreux...

La tension superficielle dépend du fluide, de la température et du milieu en contact avec ce fluide.

Dans le tableau ci dessous sont données quelques valeurs du coefficient de tension superficielle  $\gamma$  pour des fluides en contact avec de l'air :

Fluide	Température (C°)	Tension de surface $\gamma$ ( $10^{-3}\text{N m}^{-1}$ )
Acide acétique	20	27,6
Acide acétique (10,0 %) + Eau	30	54,56
Eau	100	58,85
Eau	50	69,91
polyméthylméthacrylate	20	41,1
polystyrène	20	40,7
poly n-butyl méthacrylate	20	31,2
Éthanol	20	22,27
Méthanol	20	22,6
Octane	20	21,8
Glycérol	20	21,7

Tableau N°1 : Tension superficielle pour différents fluides en contact avec l'air

## 2.2 Écoulement de base :

L'épaisseur du film est dans ce cas constante et égale à  $h_n$  et le champ des vitesses se réduit à sa composante longitudinale  $\vec{v} = \vec{v}(u, 0)$ .

En régime stationnaire, les équations du mouvement s'écriront alors :

$$\mu \cdot u_{yy} + \rho g \sin \theta = 0 \quad (2.2.1)$$

$$-p_y - \rho g \cos \theta = 0 \quad (2.2.2)$$

La résolution de ce système d'équations différentielles avec comme conditions :

-En  $y=0$  ,  $u=v=0$

-En  $y=h_n$  :  $u_y = 0$  et  $p = p_a$ , nous donne la composante longitudinale du champ de vitesse  $U(y)$  et la pression  $P(y)$  correspondant à l'écoulement non perturbé :

$$U(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left( h_n y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (2.2.3)$$

$$P(y) - P_a = \rho g \cos \theta (h_n - y) \quad (2.2.4)$$

A partir de l'équation (2.2.3), on peut définir la vitesse moyenne de l'écoulement :

$$u_n = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} u(y) dy = \frac{g \sin \theta h_n^2}{3\nu} \quad (2.2.5)$$

La relation entre la viscosité dynamique  $\mu$  et cinématique  $\nu$  est :

$$\mu = \rho \cdot \nu$$

## 2.3 Adimensionnement :

Dans cette partie, nous allons utiliser certaines grandeurs spécifiques à l'écoulement pour transformer les équations du mouvement (2.1.2), (2.1.8) et (2.1.9) et les conditions aux limites (2.1.13)-(2.1.17) en un système d'équations adimensionnées. Cela nous permettra d'introduire des nombres adimensionnels caractéristiques de l'écoulement tels que le nombre de Reynolds  $R$  et le nombre de Weber  $W$ .

### 2.3.1 Échelles caractéristiques :

Pour l'adimensionnement, on utilise les grandeurs caractéristiques suivantes :

$L$ , une longueur d'onde suivant la direction de l'écoulement comme échelle des longueurs longitudinales,

$h_n$ , l'épaisseur constante du film fluide correspondant à l'écoulement de base comme échelle des longueurs suivant la normale au plan incliné,

$\frac{L}{u_n}$  comme échelle temporelle,

$u_n$  comme échelle des vitesses longitudinales,

$\frac{h_n}{L}u_n$  comme échelle des vitesses normales,

$\frac{\rho\nu}{h_n}u_n$  comme échelle des pressions ,

### 2.3.2 Équations adimensionnées :

En passant aux grandeurs sans dimension, les équations du mouvement (2.1.2 , 2.1.8, 2.1.9) et les conditions aux limites correspondantes (2.1.13 - 2.1.17) s'écriront comme suit :

**La condition d'incompressibilité :**

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.3.1)$$

**La composante longitudinale du bilan de la quantité de mouvement :**

$$\begin{aligned} R\varepsilon [u_t + uu_x + vu_y] &= -\varepsilon p_x + (\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy}) \\ &+ R\Gamma\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\left( 2\varepsilon^2 u_{tx} + 2\varepsilon^2 uu_{xx} + \varepsilon^2 vu_{yx} - 4\varepsilon^2 u_x^2 - 2u_y(u_y + \varepsilon^2 v_x) \right) \right] \\ &+ R\Gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[ -(\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + \varepsilon uu_{xy} + \varepsilon^3 uv_{xx} + \varepsilon v u_{yy} + \varepsilon^3 vv_{yx} - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y) \right] + 3 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

**La composante normale du bilan de la quantité de mouvement :**

$$\begin{aligned} R\varepsilon^2 [v_t + uv_x + vv_y] &= -p_y + (\varepsilon^3 v_{xx} + \varepsilon v_{yy}) \\ &- R\Gamma\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + \varepsilon uu_{xy} + \varepsilon^3 uv_{xx} + \varepsilon v u_{yy} + \varepsilon^3 vv_{yx} - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y] \\ &- R\Gamma \frac{\partial}{\partial y} [2\varepsilon^2 v_{ty} + 2\varepsilon^2 uv_{xy} + 2\varepsilon^2 vv_{yy} - 2\varepsilon^2 v_x(\varepsilon^2 v_x + u_y) - 4\varepsilon^2 v_y^2] - 3 \cot \theta \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Concernant les conditions aux limites, on aura :

**La condition cinématique :**

$$v = h_t + u.h_x \quad (2.3.4)$$

**La condition tangentielle :**

$$\begin{aligned} & -4\varepsilon^2 u_x h_x + (u_y + \varepsilon^2 v_x) (1 - \varepsilon^2 h_x^2) + \Gamma R \varepsilon h_x [2\varepsilon^2 u_{tx} + 2\varepsilon^2 u u_{xx} + 2\varepsilon^2 v u_{yx} - 4\varepsilon^2 u_x^2 \\ & \quad - 2u_y (u_y + \varepsilon^2 v_x)] \\ & \quad - \Gamma R h_x \varepsilon [2\varepsilon^2 v_{ty} + 2\varepsilon^2 u v_{xy} + 2\varepsilon^2 v v_{yy} - 2\varepsilon^2 v_x (\varepsilon^2 v_x + u_y) - 4\varepsilon^2 v_y^2] \\ & - \Gamma R (1 - \varepsilon^2 h_x^2) [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + \varepsilon u u_{xy} + \varepsilon^3 u v_{xx} + \varepsilon v u_{yy} + \varepsilon^3 v v_{yx} - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

**La condition normale :**

$$\begin{aligned} p - p_a &= (1 - \varepsilon^2 h_x^2) \left[ 2 \frac{R}{\rho h_n} \varepsilon^2 h_x^2 \cdot \varepsilon u u_x - 2\varepsilon h_x (u_y + \varepsilon^2 v_x) + \varepsilon v_y \right. \\ & \quad \left. + 2R\Gamma h_x \varepsilon [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + \varepsilon u u_{xy} + \varepsilon^3 u v_{xx} + \varepsilon v u_{yy} + \varepsilon^3 v v_{yx} - 2\varepsilon^3 v_{tx} u_x - 2\varepsilon u_y v_y] \right. \\ & \quad \left. - R\Gamma h_x^2 \varepsilon^2 [2\varepsilon^2 u_{tx} + 2\varepsilon^2 u u_{xx} + 2\varepsilon^2 v u_{yx} - 4\varepsilon^2 u_x^2 - 2u_y (u_y + \varepsilon^2 v_x)] \right. \\ & \quad \left. - R\Gamma [2\varepsilon^2 v_{ty} + 2\varepsilon^2 u v_{xy} + 2\varepsilon^2 v v_{yy} - 2\varepsilon^2 v_x (\varepsilon^2 v_x + u_y) - 4\varepsilon^2 v_y^2] - W R h_{xx} \left( 1 - \frac{3}{2} h_x^2 \varepsilon^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Les équations (2.3.1) à (2.3.5) font intervenir les nombres sans dimension suivants :

- Le nombre de Reynolds  $R = \frac{\rho h_n u_n}{\mu}$  qui représente le rapport entre les effets d'inertie et le effets visqueux.
- Le nombre de Weber  $W = \frac{\gamma}{\rho h_n u_n^2}$  représentant l'effet de la tension surface.
- Le paramètre viscoélastique  $\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\rho h_n^2}$ .
- Le paramètre  $\varepsilon = \frac{h_n}{L}$  qui rend compte du caractère ondes longues des modes instables.

# Chapitre 3 Modélisation par l'approche ondes longues

# Chapitre 3

## Modélisation par l'approche ondes longues

Un grand nombre d'études ont été menées durant plusieurs années sur la stabilité de l'interface lors d'écoulements de films minces ce qui a donné naissance à divers modèles pour différentes configurations et types de fluide.

Ce chapitre commence par une brève revue des études de stabilité disponibles dans la littérature. La seconde partie sera consacrée à l'approche suivie pour modéliser les instabilités qui se manifestent lors de l'écoulement du film de fluide viscoélastique .

Tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel de calcul formel Maple 16.

### 3.1 Brève revue des études antérieures :

#### 3.1.1 Fluides Newtoniens :

##### 3.1.1.1 Écoulements à couche unique :

Les premières études de stabilité concernant l'écoulement de films de fluides newtoniens à une couche s'écoulant sur un plan incliné ont été menées par Benjamin et Yih. Leur étude a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité. Ils montrent ainsi que la vitesse de propagation de ces ondes est deux fois plus grande que la vitesse de base du liquide au niveau de la surface libre. Sans rendre compte de l'inertie, les écoulements à une seule couche sont stables pour des perturbations de type ondes longues (de longueur infini). Les instabilités qui gouvernent ces écoulements sont des modes dits de surface, à grande longueur d'onde.[14]

Pour comprendre l'effet de la tension superficielle sur l'apparition des instabilités, Hooper et

Boyd [8] ont effectué une étude asymptotique aux petites longueurs d'ondes en considérant un écoulement de Couette infini.

Kelly et Waters, réussirent à réaliser un bilan énergétique afin de déterminer les mécanismes responsables de ces instabilités [15].

Smith a proposé une explication concernant les mécanismes physiques régissant la croissance de ces instabilités à grande longueur d'onde. Il décrit comment une perturbation superficielle produit un mouvement au sein de la couche fluide et de quelle façon ce mouvement peut amplifier ou non les perturbations de l'interface suivant l'importance relative de l'inertie et du gradient de pression dans l'écoulement. Il retrouve par cette analyse les résultats de Yih [14] concernant la valeur du nombre de Reynolds critique et la valeur de la vitesse de propagation de ces ondes [10].

### 3.1.1.2 Écoulements multicouche :

Les études de ce genre d'écoulement sont beaucoup plus intéressantes vu l'importance des rapports de viscosité, de densité et de l'épaisseur des couches sur la stabilité du système.

Yih a proposé une étude sur la stabilité de l'écoulement bicouche de deux fluides newtoniens de viscosités différentes, pour des écoulements de Couette et de Poiseuille. Son analyse consiste en une étude asymptotique aux grandes longueurs d'ondes. Il montre que la différence de viscosité peut être le précurseur de l'instabilité. Pour de faibles nombres de Reynolds, l'écoulement de Couette sera en permanence instable si le fluide le plus visqueux est majoritaire. Il est également instable lorsque le fluide le plus visqueux est minoritaire, à condition qu'il ait une densité inférieure à celle du fluide le moins visqueux. Dans les deux cas, on tend vers une interface neutre (ni stable ni instable) lorsque le rapport des viscosités tend vers 1. Il identifie aussi des instabilités de taux de croissance proportionnels au nombre de Reynolds pour des combinaisons de rapport de viscosité et d'épaisseur de couche connues. Yih énonce que la présence de l'inertie n'est pas indispensable à l'apparition de ces instabilités [14].

Craik et Smith confirment les résultats de Yih en mettant en évidence un mode instable dont le taux de croissance tend vers zéro quand le nombre de Reynolds diminue [18].

Kao établit que pour le cas de systèmes multicouche à surface libre composés de fluides de densité et viscosité différentes, le nombre de modes pouvant être instables est égal au nombre d'interfaces du système. A deux couches, il y a un mode dit d'interface localisé entre les couches et un mode dit de surface sur la surface libre. Il étudie les écoulements bicouche dans le cadre d'ondes infiniment longues et observent leur comportement. Il en déduit que les modes de surface et d'interface initiaux qui se manifestent dépendent des paramètres de l'écoulement et notamment des rapports d'épaisseur, de densité et de viscosité entre les couches. Il en conclut qu'il y a compétition entre

les deux modes pour le déclenchement des instabilités.

Chen a montré que pour de faibles nombres de Reynolds, un système peut être stable pour de grandes longueurs d'onde et instable pour de plus petites longueurs d'onde. Les modes d'interface doivent leur existence à la présence de la surface libre mais l'écoulement en entier influe sur chaque mode [12].

### 3.1.2 Fluides Non Newtoniens :

#### 3.1.2.1 Écoulement à une couche :

Gupta a examiné la stabilité de l'écoulement, sur un plan incliné, d'un film fluide viscoélastique du second ordre. Il montre que les modes de surface apparaissent à des nombres de Reynolds plus petits que pour des fluides newtoniens [23].

Le même constat a été fait par Lai [27] qui a étudié la stabilité d'un film de fluide viscoélastique de Oldroyd B dans le cadre de l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes.

Cet écoulement a été également étudié par Shaqfeh *et al* [24]. Ils ont montré que pour des nombres de Reynolds modérés, la viscoélasticité a un effet stabilisant. Elle est cependant déstabilisante à des nombres de Reynolds faibles.

Enfin, Uma et Usha [25] ont utilisé un modèle intégral de couche limite pour modéliser les instabilités d'interfaces apparaissant dans un écoulement d'un fluide faiblement élastique. Leur étude, bien que très concluante à des nombres de Reynolds modérés, ne décrit pas correctement les conditions critiques au début de l'instabilité.

#### 3.1.2.2 Écoulements multicouche :

Li introduit les termes d'élasticité (de relaxation) dans l'écoulement par le moyen d'un modèle d'Oldroyd . Il explique que l'élasticité n'est pas derrière le déclenchement des instabilités, qui est du à la présence d'un gradient de viscosité entre les deux fluides, mais contribue seulement à son accentuation. Mais son article est retiré pour non conformité avec ce qu'a démontré Hinch *et al.* que l'élasticité à elle seule peut déclencher les instabilités [16].

Waters et Keeley ont étudié la stabilité de l'écoulement de deux fluides non-newtoniens en utilisant un modèle d'Oldroyd-B et en se limitant aux ondes longues [15].

Weinstein a réalisé une analyse numérique sur l'influence de l'équation de Carreau à 4 paramètres sur la stabilité spatiale d'un film multicouche s'écoulant sur un plan incliné dans le but d'évaluer l'effet du comportement rhéofluidifiant sur la stabilité [7].

Pinarbasi et Liakopoulos ont étudié les effets de la rhéofluidification ainsi que l'existence du seuil d'écoulement, en utilisant des fluides inélastiques modélisés soit par un modèle de Bingham, soit par un modèle de Carreau-Yasuda. Leurs résultats sont valables pour des ondes quelconques. Ils arrivent à conclure qu'en passant d'une configuration avec deux fluides newtoniens à une configuration avec un fluide newtonien et un fluide viscoplastique, la stabilité est favorisée pour des ondes longues et intermédiaires. En ce qui concerne la rhéofluidification, plus elle est importante plus l'interface sera instable. Ce qui est en accord avec Waters et Keeley [17].

Laure et al, en effectuant une étude asymptotique aux ondes longues, mettent en évidence le comportement additif des contributions élastiques et newtoniennes et ont tracé la courbe d'instabilité relative uniquement à la partie élastique du modèle en prenant un nombre de Reynolds nul.[18]

Toujours, Laure *et al* ont étudié numériquement la stabilité de l'écoulement aux ondes modérés et ont aussi étudié le cas d'un écoulement tricouche.

Su et Khomami ont effectué une étude asymptotique aux ondes longues et une étude numérique aux ondes intermédiaires qui leur a permis de tracer la valeur de la partie imaginaire de la pulsation  $\omega$  en fonction du nombre d'onde  $k$ . Ils ont alors montré que le maximum d'amplification est obtenu pour  $k$  voisin de 1[5],[11].

Le Meur a réalisé une étude de stabilité d'écoulements de fluides viscoélastiques, à une surface libre ou séparés par une interface. Il a aussi étudié la stabilité de l'écoulement de Couette simple de fluides obéissant aux lois de Johnson-Segalman. Il a d'abord étudié la stabilité sans perturbation extérieure de l'écoulement puis a réalisé une étude asymptotique aux ondes longues et une étude numérique aux ondes quelconques de fluides s'écoulant sur des plans volontairement perturbés. Son travail permet de retrouver les résultats essentiels de la littérature en prenant un autre cheminement que celui proposé par Yih [6].

Millet Séverine *et al*, mettent en évidence, après une étude de stabilité linéaire d'un écoulement de deux couches de fluides non newtoniens sur un plan incliné, l'existence d'un rapport de densité seuil à partir duquel on observe un basculement d'une instabilité à grande longueur d'onde à une instabilité de longueur d'onde modérée. L'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides sur la position de ce seuil a été également étudiée[13].

## 3.2 Modélisation du problème :

### 3.2.1 Hypothèse ondes longues :

Aux faibles nombres de Reynolds, toutes les études s'accordent à dire que les instabilités interfaciales se manifestent par l'apparition d'ondes de très grande longueur [2]. Le paramètre  $\epsilon$  introduit

dans le chapitre précédent est donc très petit et l'on peut alors négliger les termes d'ordre supérieur à  $\epsilon^2$  dans les équations du mouvement. Cette hypothèse permet également d'exprimer les champs de vitesse et de pression sous la forme d'une série asymptotique en  $\epsilon$  :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 \quad (3.2.1)$$

$$v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 \quad (3.2.2)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 \quad (3.2.3)$$

### 3.2.2 Équation de surface :

Dans ce qui suit, nous reporterons les expressions (3.2.1)-(3.2.3) dans les équations (2.1.2) ,(2.1.8) , (2.1.9) et les conditions aux limites (2.1.13)-(2.1.18) que nous résolverons par la suite aux différents ordres de l'approximation.

#### 3.2.2.1 À l'ordre zéro de l'approximation :

À l'ordre zéro en  $\epsilon$ , les équations à résoudre sont les suivantes :

$$u_{0x} + v_{0y} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$u_{0yy} + 3 = 0 \quad (3.2.5)$$

$$p_{0y} - 3 \cot(\theta) = 0 \quad (3.2.6)$$

En  $y=0$  :

$$u_0 = 0 \quad (3.2.7)$$

En  $y=h(x,t)$  :

$$u_{0y} = 0 \quad (3.2.8)$$

$$p_0 + WRh_{xx} = 0 \quad (3.2.9)$$

Afin de garantir l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes, on choisira  $W$  suffisamment grand. Après avoir résolu l'équation (3.2.5) en prenant en compte les conditions aux limites (3.2.7) et (3.2.8), on trouve la vitesse longitudinale  $u_0(x, y, t)$

$$u_0(x, y, t) = -\frac{3}{2}y^2 + 3hy \quad (3.2.10)$$

La résolution de l'équation (3.2.6) en considérant la condition (3.2.9) donnera :

$$p_0(x, y, t) = -3 \cot \theta y + 3 \cot \theta h - WRh_{xx} \quad (3.2.11)$$

On déduit la vitesse normale  $v_0(x, y, t)$  de la condition d'incompressibilité (3.2.4) :

$$v_0(x, y, t) = -\int_0^y u_{0x} dy$$

En utilisant la relation (3.2.10), on trouve

$$v_0(x, y, t) = -\frac{3}{2}h_x y^2 \quad (3.2.12)$$

Un calcul intégral simple associé à la condition d'incompressibilité permet d'écrire la condition cinématique sous la forme suivante :

$$h_t + q_x = 0 \quad (3.2.13)$$

où  $q(x, t) = \int_0^h u(x, y, t) dy$  représente le débit local.

À l'ordre zéro, la relation (3.2.13) s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (q_0(x, t)) = 0 \quad (3.2.14)$$

avec  $q_0(x, t) = h(x, t)^3$

On aura alors :

$$h_t + 3h(x, t)^2 h_x = 0 \quad (3.2.15)$$

Les effets viscoélastiques n'apparaîtront qu'aux ordres suivants de l'approximation.

### 3.2.2.2 À l'ordre un de l'approximation :

À cet ordre on aura le système suivant :

$$\begin{aligned}
 -R \left( 3h_t y + 3 \left( -\frac{3y^2}{2} + 3hy \right) h_x y - \frac{3}{2} h_x y^2 (-3y + 3h) \right) - 3 \cot(\theta) h_x + WRh_{xxx} + u_{1yy} + 12R\Gamma \\
 (-3y + 3h) h_x - R\Gamma(9h_x(-3y + 3h) - 9h_x y) = 0 \quad (3.2.16)
 \end{aligned}$$

$$-p_{1y} - 3h_x = 0 \quad (3.2.17)$$

En  $y=0$  :

$$u_1 = 0 \quad (3.2.18)$$

En  $y=h(x,t)$  :

$$u_{1y} - 2R\Gamma h_x u_{0y}^2 - R\Gamma u_{0yt} - 2u_{0y} v_{0y} + u_0 u_{0yx} + v_0 u_{0yy} = 0 \quad (3.2.19)$$

$$p_1 + 2h_x u_{0y} - v_{0y} = 0 \quad (3.2.20)$$

La résolution de l'équation (3.2.16) en considérant les conditions (3.2.18) et (3.2.19) donnera :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, t) = \frac{3}{2} R \left( \frac{1}{4} h_x h y^4 + \frac{1}{3} h_t y^3 \right) + \frac{1}{2} \left( 3 \cot \theta h_x - WRh_{xxx} - 9R\Gamma h_x h \right) y^2 + \left( -\frac{3}{2} R h_x h^4 - \frac{3}{2} R h_t h^2 - \right. \\
 \left. 3h \cot(\theta) h_x + hWRh_{xxx} + 18R\Gamma h_x h^2 + 3R\Gamma h_t \right) y \quad (3.2.21)
 \end{aligned}$$

Pour la pression, on utilisera l'équation (3.2.17) associée à la condition (3.2.20) et on aura :

$$p_1(x, y, t) = -3h_x y \quad (3.2.22)$$

La vitesse normale est déterminée de la même manière qu'à l'ordre zéro. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 v_1(x, y, t) = & \frac{-3}{10}R \left( \frac{1}{4}h_{xx}h + \frac{1}{4}h_x^2 \right) y^5 - \frac{1}{8}Rh_{xt}y^4 - \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \cot \theta h_{xx} - \frac{1}{2}WRh_{xxxx} - \frac{9}{2}R\Gamma h_{xx}h - \frac{9}{2}R\Gamma h_x^2 \right) y^3 \\
 & - \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2}Rh_{xx}h^4 - 6Rh_x^2h^3 - \frac{3}{2}Rh_{xt}h^2 - 3Rh_t h_x h - 3h_x^2 \cot \theta - 3h \cot \theta h_{xx} \right. \\
 & \left. + h_x WRh_{xxx} + hWRh_{xxxx} + 18R\Gamma h_{xx}h^2 + 36R\Gamma h_x^2 h + 3R\Gamma h_{xt} \right) y^2 \quad (3.2.23)
 \end{aligned}$$

De l'expression (3.2.21), on peut déduire le débit local à l'ordre un :

$$\begin{aligned}
 q_1(x, t) = & -\frac{3}{10}Rh_x h^6 + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \cot \theta h_x - \frac{1}{2}WRh_{xxx} - \frac{9}{2}R\Gamma h_x h \right) h^3 + \frac{1}{2} \left( 3Rh_x h^4 - 3h \cot \theta h_x + \right. \\
 & \left. hWRh_{xxx} + 9R\Gamma h_x h^2 \right) h^2 \quad (3.2.24)
 \end{aligned}$$

L'équation d'évolution de l'épaisseur du film viscoélastique s'écrira à cet ordre de l'approximation comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (q_0(x, t) + \epsilon q_1(x, t)) = 0 \quad (3.2.25)$$

qui peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & h_t + 3h^2 h_x - \frac{3}{10}h_{xx}h^6 - \frac{9}{5}h_x^2 Rh^5 + \frac{1}{3} \left( \cot \theta h_{xx} - \frac{1}{2}WRh_{xxxx} - \frac{9}{2}R\Gamma h_{xx}h - \frac{9}{2}R\Gamma h_x^2 \right) h^3 \\
 & + \left( \frac{3}{2} \cot \theta h_x - \frac{1}{2}WRh_{xxx} - \frac{9}{2}R\Gamma h_x h \right) h^2 h_x + \frac{1}{2} \left( 3Rh_{xx}h^4 + 12R(h_x)^2 h^3 - 3(h_x)^2 \cot \theta - 3h \cot \theta h_{xx} \right. \\
 & \left. + h_x WRh_{xxx} + hWRh_{xxxx} + 9R\Gamma h_{xx}h^2 + 18R\Gamma h_x^2 h(x, t) \right) h^2 + \left( 3Rh_x h^4 - 3h \cot \theta h_x + \right. \\
 & \left. hWRh_{xxx} + 9R\Gamma h_x h^2 \right) h h_x = 0 \quad (3.2.26)
 \end{aligned}$$

Cette équation ne fait intervenir que l'épaisseur du film fluide et ses dérivées spatiales et tempo-

relles.

### **3.2.2.3 A l'ordre deux de l'approximation :**

Le même calcul qu'aux ordres zéro et un nous donne les résultats suivants :

La vitesse longitudinale :

$$\begin{aligned}
u_2(x, y, t) = & -\frac{1}{4480} \left( 27hh_{xx}R^2 + 27h_x^2R^2 \right) y^8 - \frac{1}{3360} \left( 30R^2h_{xt} + 18h_x^2R^2h - 72h^2h_{xx}R^2 \right) y^7 \\
& - \frac{1}{2400} \left( -20WR^2h_{xxxx} + 90h_{xx}hR^2\Gamma + 30R^2h_xh_t + 60 \cot \theta h_x R - 120R^2hh_{xt} + 90R^2\Gamma h_x^2 \right) y^6 \\
& - \frac{1}{1600} \left( 360h_x^2R^2\Gamma h - 40h_{tt}R^2 + 80WR^2h_{xxxx}h + 120R^2\Gamma h_{xx}R \right) y^5 - \frac{1}{960} \left( -2160h^3h_{xx}R^2\Gamma \right. \\
& - 120R \cot \theta h_{xt} - 6480h_x^2R^2\Gamma h^2 - 120h^2WR^2h_{xxxx} + 40WR^2h_{xxxt} + 900h_x^2R^2h^4 + 360h^2h_{xx} \cot \theta R \\
& \left. + 720Rh_x^2h \cot \theta - 720R^2\Gamma hh_{xt} - 360R^2\Gamma h_xh_t + 540h_xR^2h_th^2 + 180h^5h_{xx}R^2 + 180R^2h_{xt}h^3 \right. \\
& \left. - 240h_xhWR^2h_{xxx} \right) y^4 - \frac{1}{480} \left( 240R^2h_t^2h + 480h_{xx} - 480R^2\Gamma h_{tt} + 240Rh \cot \theta h_{xt} - 2880R^2\Gamma h_xhh_t \right. \\
& \left. - 80 \left( \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \right) WR^2h_{xxx} + 240Rh_t \cot \theta h_t - 1440R^2\Gamma h_{xt}h^2 + 480h_xh^3h_t + 120R^2h_{tt}h^2 \right. \\
& \left. - 80h(x, t)WR^2h_{xxxt} + 120R^2h^4h_{xt} \right) y^3 + \frac{1}{2} \left( -6R^2\Gamma hh_xWh_{xxx} - R^2\Gamma Wh_{xxxt} + 3R\Gamma \cot \theta h_{xt} \right. \\
& \left. - 54R^2\Gamma^2h_{xx}h^3 - 162R^2\Gamma^2h_x^2h^2 - 18R^2\Gamma^2h_{xt}h + \frac{45}{2}R^2\Gamma h_x^2h^4 + \frac{9}{2}R^2\Gamma h^5h_{xx} \right. \\
& \left. + \frac{9}{2}R^2\Gamma h^3 - 18R^2\Gamma^2h_xh + \frac{27}{2}R^2\Gamma h_th^2h_x - 3R^2\Gamma h^2Wh_{xxxx} + 18R\Gamma hh_t \cot \theta \right. \\
& \left. + 9R\Gamma h^2 \cot \theta h_{xx} \right) y^2 + \left( h^3R \cot \theta h_{xt} - \frac{3}{10}h^5WR^2h_{xxxx} - \frac{153}{10}h^6R^2\Gamma h_{xx} \right. \\
& \left. + \frac{9}{10}h^5R \cot \theta h_{xx} - 18h^4R^2\Gamma h_{xt} - \frac{1}{3}h^3WR^2h_{xxxt} - 3h^2R^2\Gamma h_{tt} + 90R^2\Gamma^2h_{xx}h^4 - 36R^2\Gamma^2h_{xt}h^2 \right. \\
& \left. - 3R^2\Gamma h_t^2h - \frac{369}{5}h^5R^2\Gamma h^5R^2\Gamma h_x^2 + \frac{213}{40}h^5R^2h_xh_t + 3h^4Rh_x^2 \cot \theta + 360R^2\Gamma^2h_x^2h^3 \right. \\
& \left. + \frac{9}{2}h^2h_{xx} + hR\Gamma Wh_{xxxt} + R^2\Gamma h_tWh_{xxx} - h^4h_xWR^2h_{xxxx} - 3hR\Gamma \cot \theta h_{xt} \right. \\
& \left. + 4R^2\Gamma h^3Wh_{xxxx} - 12R\Gamma h^3 \cot \theta h_{xx} - \frac{1}{2}h^2h_tWR^2h_{xxx} - 3R\Gamma h_t \cot \theta h_x - 54h^3R^2\Gamma h_xh_t \right. \\
& \left. + \frac{3}{2}h^2Rh_t \cot \theta h_x - 36R\Gamma h^2h_x^2 \cot \theta + 72hR^2\Gamma^2h_xh_t + 3R^2\Gamma^2h_{tt} + \frac{363}{560}h^8R^2h_{xx} \right. \\
& \left. + \frac{101}{80}h^6R^2h_{xt} + \frac{5}{8}h^4R^2h_{tt} - \frac{537}{140}h^7R^2h_x^2 + \frac{3}{2}h^3R^2h_t^2 + 12R^2\Gamma h^2h_xWh_{xxx} + 12h_x^2h \right) y
\end{aligned}$$

La pression :

$$\begin{aligned}
p_2(x, y, t) = & -\frac{9}{20}h_{xx}Ry^5 - \frac{1}{16}\left(24h_x^2R - 12hh_{xx}R\right)y^4 - \frac{1}{8}\left(-4WRh_{xxxx} - 252R\Gamma h_x^2 \right. \\
& \left. - 108R\Gamma h_{xx}h + 12\cot\theta h_{xx}\right)y^2 + 6Rh_x^2h^3 + 3Rh_t h h_x - h_xWRh_{xxx} - hWRh_{xxxx} \\
& - 18R\Gamma h_{xx}h^2 + \frac{3}{2}Rh_{xx}h^4 + \frac{3}{2}Rh_{xt}h^2 + 3h_x^2\cot\theta + 3h\cot\theta h_{xx} \\
& \left. + 3R\Gamma h_{xt} - 36R\Gamma h_x^2h\right)y - \frac{27}{40}h_{xx}Rh^5 + \frac{9}{8}Rh_x^2h^4 - \frac{1}{2}Rh_{xt}h^3 \quad (3.2.27)
\end{aligned}$$

L'expression du débit à cet ordre de l'approximation est trop longue pour être reproduite ici. Elle peut être facilement déduite de la relation suivante :

$$q_2(x, t) = \int_0^{h(x,t)} u_2(x, y, t) dy \quad (3.2.28)$$

Finalement, en combinant les résultats des ordres zéro, un et deux, on pourra écrire formellement la condition cinématique sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(q_0(x, t) + \epsilon q_1(x, t) + \epsilon^2 q_2(x, t)\right) = 0 \quad (3.2.29)$$

Comme la dynamique du film est réduite à l'évolution de l'épaisseur  $h$  seule, les équations ondes longues du type (3.2.29) sont également appelées "équations de surface".

En posant  $\Gamma = 0$  et en négligeant les effets capillaires, on retrouve l'équation développée par Benney [3] pour un écoulement d'un film fluide newtonien.

Notons enfin que les équations de surface ne sont valables qu'au voisinage du seuil de l'instabilité puisqu'au delà des comportements singuliers ont été observés .

Les modèles intégraux de couche limite [22] et les modèles intégraux aux résidus pondérés sont plus adaptés pour décrire la dynamique des écoulements de films minces à des nombres de Reynolds modérés ou grands.

# Chapitre 4 Étude de la stabilité linéaire

# Chapitre 4

## Étude de la stabilité linéaire :

Dans cette partie, on va procéder à une analyse de stabilité linéaire d'un film fluide visco-élastique soumis à une perturbation de petite amplitude. Le but de cette analyse est de déterminer le seuil du déclenchement des instabilités ( $R_c$ ) et d'examiner l'influence de différents paramètres sur la stabilité de l'interface.

### 4.1 Relation de dispersion des perturbations de faible amplitude :

Dans le cadre d'une étude de stabilité linéaire, l'écoulement de base est perturbé légèrement. L'expression de l'épaisseur  $h(x, t)$  du film désormais instable sera alors :

$$h(x, t) = 1 + \tilde{H} \quad (4.1.1)$$

Notons que la perturbation  $\tilde{H}$  est infinitésimale :

$$\tilde{H} \lll 1$$

Il est d'usage de rechercher des solutions sous forme de modes normaux de nombre d'onde  $k$  et de pulsation  $\omega$  :

$$\tilde{H} = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (4.1.2)$$

Après avoir injecté l'expression (4.1.1) associée à (4.1.2) dans l'équation de surface (3.2.29) puis en négligeant les termes non linéaires, on obtient la relation de dispersion des perturbations d'amplitude infinitésimale :

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{5}{36}iR^4\Gamma W^2 - \frac{61}{2160}iR^4\Gamma W^2 + \frac{1}{6}iR^4\Gamma^2 W^2 \right) k^2 + \left( \frac{1}{9}R^3\Gamma W^2 + \frac{2}{45}W^2 R^3 \right) k^8 \\
& + \left( -\frac{5}{6}iR^3\Gamma \cot\theta W - \frac{61}{300}iR^4\Gamma - 31R^4W\Gamma^3 + \frac{61}{360}iR^3 \cot\theta W + R^3\Gamma^2 \cot\theta W i + \frac{59}{120}iR^4W\Gamma \right. \\
& \left. + \frac{13}{10}iR^4\Gamma^2 W \right) k^7 + \left( 3R^3\Gamma^2 W + \frac{4}{15}R^2 W \cot\theta - \frac{2}{3}R^2 W\Gamma \cot\theta + \frac{11}{240}R^3\Gamma W - \frac{10959}{22400}W R^3 \right) k^6 \\
& + \left( \frac{3}{100}iR^4\Gamma + \frac{1}{2}iR^2 W\Gamma + \frac{1821}{400}iR^4\Gamma^2 + \frac{39}{10}iR^3\Gamma^2 \cot\theta + \frac{27}{2}iR^4\Gamma^4 - \frac{5}{4}iR^2\Gamma \cot\theta^2 \right. \\
& \left. + \frac{3}{2}iR^2\Gamma^2 \cot\theta^2 + \frac{59}{40}iR^3\Gamma \cot\theta + \frac{15}{56}iW R^2 - \frac{9}{20}iR^4\Gamma^3 - 9iR^3\Gamma^3 \cot\theta + \frac{61}{240}iR^2 \cot\theta^2 \right. \\
& \left. - \frac{61}{100}iR^3 \cot\theta + \frac{183}{500}iR^4 \right) k^5 + \left( \frac{531}{484}R^3 - \frac{609}{80}R^3\Gamma^2 + 9R^2\Gamma^2 \cot\theta - \frac{32877}{22400}R^2 \cot\theta \right. \\
& \left. + \frac{62679}{22400}R^3\Gamma - R\Gamma \cot\theta^2 - 18R^3\Gamma^3 + \frac{2}{5}R \cot\theta^2 + \frac{WR}{3} + \frac{11}{80}R^2\Gamma \cot\theta \right) k^4 + \left( -2i - \frac{9}{2}iR^2\Gamma^2 \right. \\
& \left. - \frac{27}{28}iR^2 + \frac{3}{2}iR\Gamma \cot\theta + \frac{45}{56}iR \cot\theta - \frac{1227}{280}iR^2\Gamma \right) k^3 + \left( -3R\Gamma - \frac{6}{5}R + \cot\theta \right) k^2 + 3ik - \omega = 0
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Toute l'information sur la stabilité linéaire de l'écoulement est contenue dans cette équation.

## 4.2 Étude de stabilité temporelle :

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à la stabilité dite temporelle de l'écoulement, le nombre d'onde  $k$  est dans ce cas réel et la pulsation  $\omega$  est complexe pour tout  $k$ .

On écrit :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \tag{4.2.1}$$

On aura alors :

$$\tilde{H} = A \exp(\omega_i t) \exp[i(kx - \omega_r t)] \tag{4.2.2}$$

La partie réelle  $\omega_r$  de la pulsation  $\omega$  est reliée à la célérité  $c_r$  de la perturbation par la relation suivante :

$$\omega_r = kc_r$$

La partie imaginaire  $\omega_i$  de la pulsation  $\omega$  représente le taux d'amplification de la perturbation.

Cette dernière est amplifiée ou amortie dans le temps selon que  $\omega_i$  est supérieur ou inférieur à zéro.

Si  $\omega_i = 0$ , les perturbations sont dites neutres et on parle alors de stabilité neutre ou marginale.

En prenant la partie réelle et imaginaire de la relation de dispersion (4.1.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
 c_r = & 3 + \left( -\frac{5}{36}iR^4\Gamma W^2 - \frac{61}{2160}iR^4W^2 + \frac{1}{6}iR^4W^2\Gamma^2 \right) k^8 + \\
 & \left( -\frac{5}{6}R^3\Gamma \cot\theta W - \frac{61}{300}R^4W - 3R^4\Gamma^3W + \frac{61}{360}R^3W \cot\theta + R^3\Gamma^2W \cot\theta + \frac{59}{120}R^4W\Gamma + \frac{13}{10}R^4\Gamma^2W \right) k^6 \\
 & \left( \frac{3}{100}R^4\Gamma + \frac{R^2W\Gamma}{2} - \frac{1821}{400}R^4\Gamma^2 + \frac{39}{10}R^3\Gamma^2 \cot\theta + \frac{27}{2}R^4\Gamma^4 - \frac{5}{4}R^2\Gamma \cot\theta^2 + \frac{3}{2}R^2\Gamma^2 \cot\theta^2 \right. \\
 & \left. + \frac{59}{40}R^3 \cot\theta\Gamma + \frac{15}{56}R^2 - \frac{9}{20}R^4\Gamma^3 - 9R^3\Gamma^3 \cot\theta + \frac{61}{240}R^2 \cot\theta^2 - \frac{61}{100}R^3 \cot\theta + \frac{183}{500}R^4 \right) k^4 \\
 & + \left( -2 - \frac{9}{2}R^2\Gamma^2 - \frac{27}{28}R^2 + \frac{3}{2}R\Gamma \cot\theta + \frac{45}{56}R \cot\theta - \frac{1227}{280}R^2\Gamma \right) k^2 \quad (4.2.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_i = & - \left( \left( -\frac{1}{9}R^3W^2\Gamma + \frac{2}{45}W^2R^3 \right) k^8 + \left( 3R^3\Gamma^2W + \frac{4}{15}R^2 \cot\theta W - \frac{2}{3}R^2\Gamma W \cot\theta + \frac{11}{240} \right. \right. \\
 & \left. \left. R^3W\Gamma - \frac{10959}{22400}WR^3 \right) K^6 \left( \frac{531}{448}R^3 - \frac{609}{80}R^3\Gamma^2 + 9R^2\Gamma^2 \cot\theta - \frac{32877}{22400}R^2 \cot\theta - \frac{62679}{22400}R^3\Gamma \right. \right. \\
 & \left. \left. - R\Gamma \cot\theta^2 - \frac{32877}{22400}R^2 \cot\theta + \frac{62679}{22400}R^3\Gamma - R\Gamma \cot\theta^2 - 18R^3\Gamma^3 + \frac{2}{5}R \cot\theta^2 + \frac{WR}{3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{11}{80}R^2\Gamma \cot\theta \right) k^4 + \left( -3R\Gamma - \frac{6}{5}R + \cot\theta \right) k^2 \right) \quad (4.2.4)
 \end{aligned}$$

Nous remarquons de la relation (4.2.3) que les ondes longues se propagent à une célérité proche de 3 fois la vitesse moyenne de l'écoulement.

De la relation (4.2.4), on peut déduire la valeur critique du nombre de Reynolds marquant le seuil du déclenchement de l'instabilité :

$$R_c = \frac{5}{3} \frac{\cot\theta}{2 + 5\Gamma} \quad (4.2.5)$$

Ce nombre est inversement proportionnel au paramètre viscoélastique  $\Gamma$ . La viscoélasticité a un effet déstabilisant sur l'écoulement.

En posant  $\Gamma = 0$  dans (4.2.5), on retrouve la valeur du nombre de Reynolds critique pour l'écou-

lement d'un film fluide newtonien ( $R_c = \frac{5}{6} \cot \theta$ ) [21]

### 4.2.1 Courbes de stabilité marginale :

À partir de la relation (4.1.3), on pourra représenter dans le plan ( nombre de Reynolds  $R$ , nombre d'onde  $k$  ) les courbes de stabilité marginale correspondant aux modes neutres du système ( $\omega_i = 0$ ) (figures (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3)) .

Ces courbes partagent le plan ( $k, R$ ) en deux régions, une région stable ( $\omega_i < 0$ ), à gauche des courbes et une région instable ( $\omega_i > 0$ ) à droite de celles-ci.

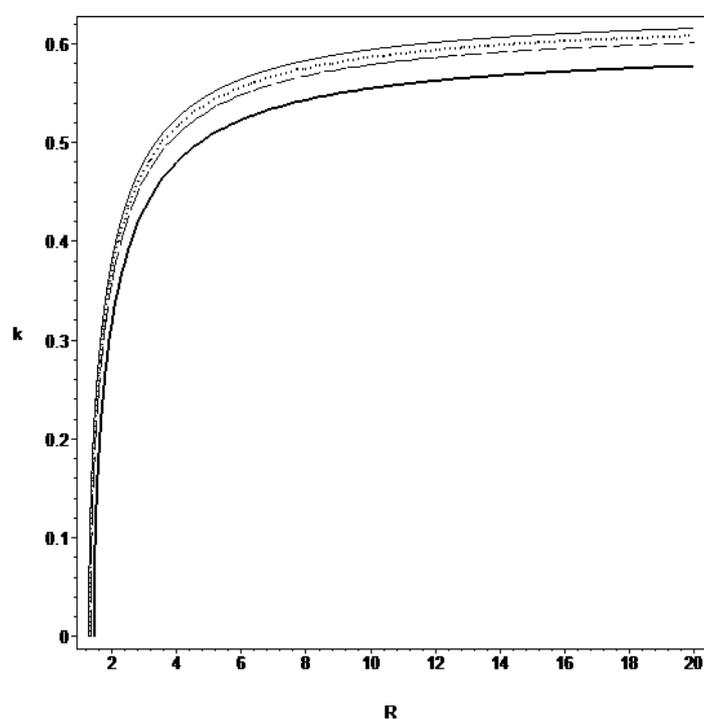


FIGURE 4.2.1 – Courbes de stabilité marginale obtenues pour  $W = 10, \theta = 30^\circ$  et pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique  $\Gamma$  (trait plein :  $\Gamma = 0,05$ , pointillés  $\Gamma = 0,04$ , tirets :  $\Gamma = 0,03$ , trait plein épais :  $\Gamma = 0$ )

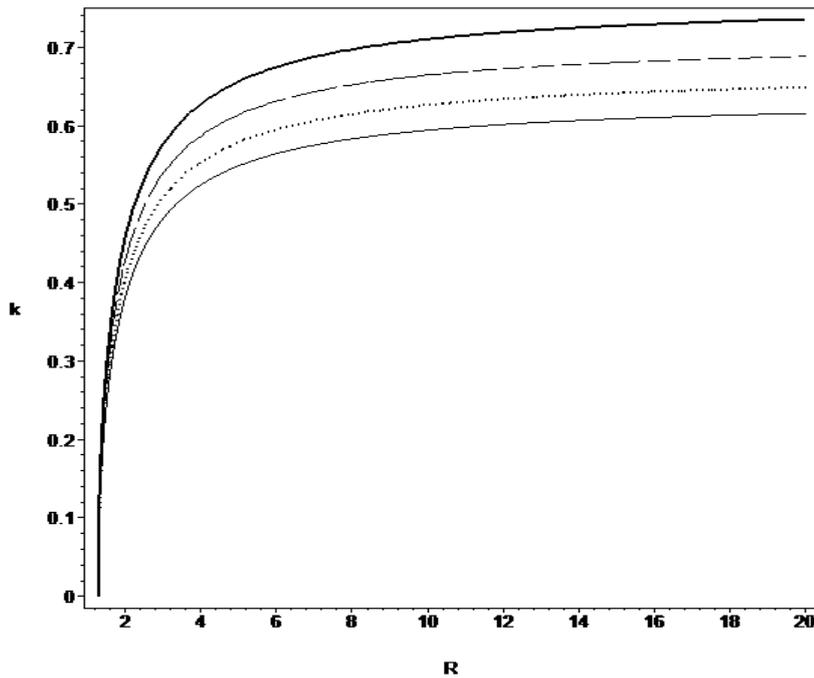


FIGURE 4.2.2 – Courbes de stabilité marginale et pour  $\Gamma = 0.05, \theta = 30$  pour différentes valeurs du nombre de Weber  $W$  (trait plein :  $W = 10$ , pointillés  $W = 9$ , tirets :  $W = 8$ , trait plein épais :  $W = 7$ )

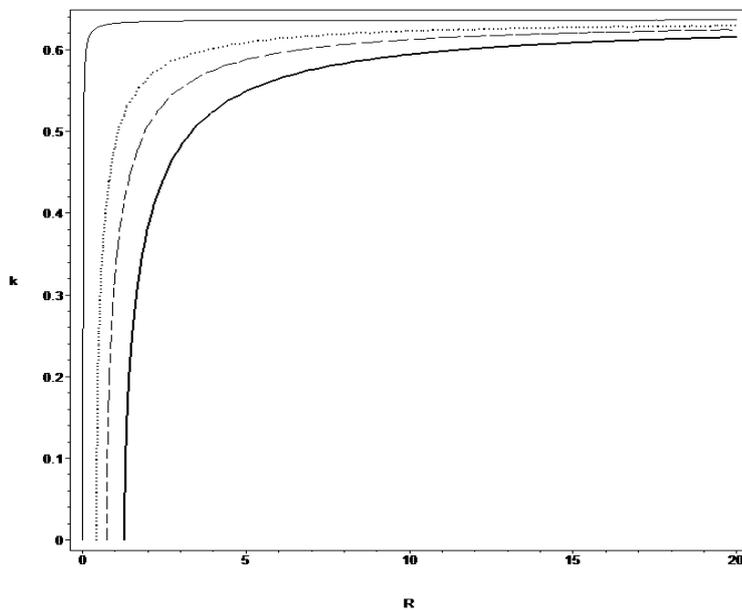


FIGURE 4.2.3 – Courbes de stabilité marginale pour  $\Gamma = 0.05, W = 10$  et pour différentes valeurs de l'inclinaison du plan  $\theta$  (trait plein :  $\theta = 90^\circ$ , pointillés  $\theta = 60^\circ$ , tirets :  $\theta = 45^\circ$ , trait plein épais :  $\theta = 30^\circ$ )

On peut remarquer de la figure (4.2.1) que la viscoélasticité a pour effet de déstabiliser l'écoulement. On voit clairement qu'il ya un élargissement de la zone d'instabilité quand le paramètre viscoélastique  $\Gamma$  augmente. Cela confirme le résultat obtenu à partir de la formule du seuil d'instabilité (4.2.5).

L'augmentation du nombre de Weber quant à elle augmente la zone stable (figure 4.2.2). La tension superficielle n'a cependant aucun effet sur le seuil de l'instabilité.

Concernant maintenant l'effet de l'inclinaison du plan, on constate que celle-ci contribue à la déstabilisation de l'écoulement puisque le seuil du déclenchement des instabilités est plus petit pour des topographies à inclinaisons  $\theta$  très grandes (figure 4.2.3).

## 4.2.2 Taux d'amplification des instabilités :

Nous allons dans ce qui suit examiner l'influence des paramètres du problème sur le taux d'amplification des perturbations.

Sur la figure (4.2.4), nous avons représenté le taux d'amplification  $\omega_i$  pour différentes valeurs du paramètre de viscoélasticité  $\Gamma$ .

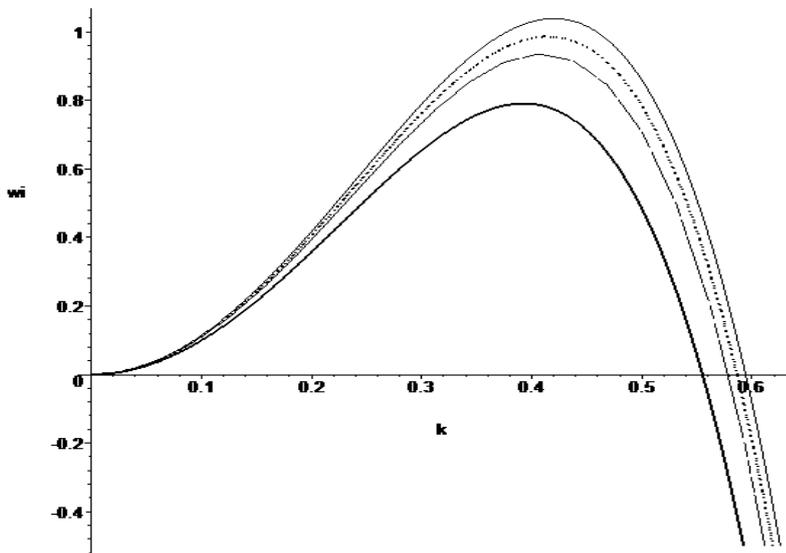


FIGURE 4.2.4 – Taux d'amplification  $\omega_i$  des ondes en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $W=10$ ,  $R=10$ ,  $\theta = 30^\circ$  (trait plein :  $\Gamma = 0.05$ , pointillés  $\Gamma = 0.04$ , tirets :  $\Gamma = 0.03$ , trait plein épais :  $\Gamma = 0$ )

Ce tracé montre que l'écoulement est déjà en mode instable ( $\omega_i > 0$ ) pour des petits nombres

d'ondes ce qui prouve qu'on est en présence d'instabilités de grandes longueurs d'ondes.

On peut constater également que l'amplification de ces ondes longues est de plus en plus importante quand le paramètre viscoélastique augmente.

Le même constat est fait lorsque l'on augmente l'angle d'inclinaison du plan (voir figure (4.2.6)).

Nous avons également analysé l'influence du nombre de Weber  $W$  sur le taux d'amplification  $\omega_i$  (figure (4.2.5))

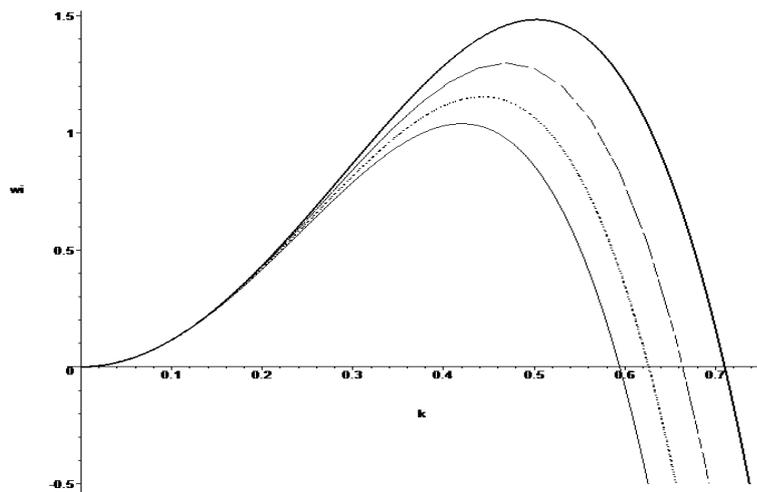


FIGURE 4.2.5 – Taux d'amplification  $\omega_i$  des ondes en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $R=10$ ,  $\theta = 30^\circ$   $\Gamma = 0.05$ (trait plein :  $W = 10$ , pointillés  $W = 9$ , tirets :  $W = 8$ , trait plein épais :  $W = 7$ )

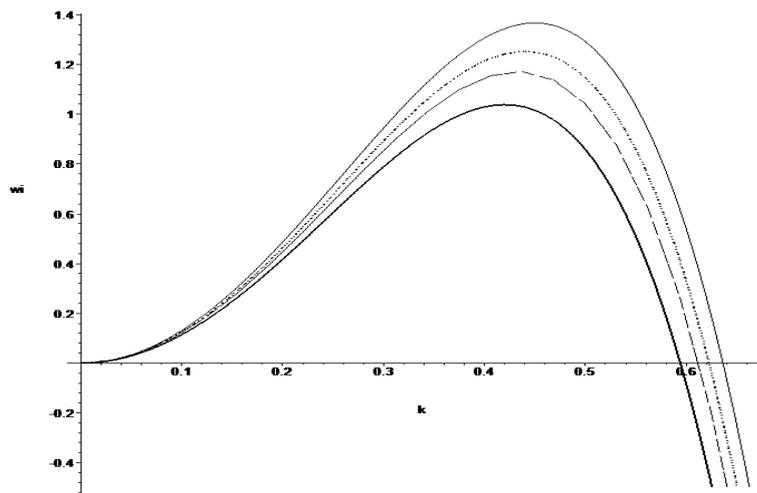


FIGURE 4.2.6 – Taux d'amplification  $\omega_i$  des ondes en fonction du nombre d'onde  $k$  pour  $R=10$ ,  $W=10$  (trait plein :  $\theta = 90^\circ$ , pointillés  $\theta = 60^\circ$ , tirets :  $\theta = 45^\circ$ , trait plein épais :  $\theta = 30^\circ$ )

On remarque clairement de cette figure que la diminution du nombre de Weber  $W$  fait augmenter  $\omega_i$ . Ce qui signifie que l'amplification des ondes est importante pour des écoulements dont l'effet de surface est peu prononcé.

# CONCLUSION

# Chapitre 5

## CONCLUSION

Dans ce projet de fin d'étude, nous nous sommes intéressés à la stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné d'un film de fluide visqueux faiblement élastique. Ce fluide obéit à une loi de comportement de type Walters B".

Une synthèse de la littérature montre que contrairement aux fluides newtoniens, les études sur des fluides complexes sont loin d'être largement répandues d'où l'intérêt que nous avons porté à ce sujet.

Dans un premier temps, nous avons établi les équations gouvernant l'écoulement étudié. La mise sous forme adimensionnelle de ces équations a fait apparaître le paramètre  $\epsilon$  qui est lié au caractère ondes longues des modes instables. Ce paramètre nous permet de réduire considérablement la complexité du problème. Dans ce chapitre, nous avons également établi la solution permanente des équations du mouvement en régime d'écoulement laminaire et en l'absence de perturbations dans le but, par la suite, d'examiner la stabilité de cette dernière vis à vis de perturbations infinitésimales.

Dans le cadre de l'hypothèse ondes longues, nous avons, dans le troisième chapitre, pu développer une équation de surface similaire à celle obtenue par Benney[3] pour un film fluide newtonien et en l'absence des effets viscoélastiques et capillaires. L'équation obtenue ne fait intervenir que l'épaisseur du film fluide viscoélastique et ses dérivées successives en temps et en espace.

Dans le chapitre quatre, en soumettant l'écoulement à des perturbations d'amplitude infinitésimale, nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de la solution de base pré-établie. La relation de dispersion obtenue nous a amenés au calcul du nombre de Reynolds critique qui définit le seuil du déclenchement des instabilités. Nous avons ainsi pu démontrer la tendance déstabilisante de la viscoélasticité. Tendance qui a été confirmée par la suite par une analyse à la marginalité. Toujours à la criticalité, nous avons montré que les ondes longues au niveau de

l'interface déstabilisée se propagent à une vitesse trois fois plus grande que la vitesse moyenne du fluide.

À la marginalité, nous avons également examiné l'influence de la tension de surface et de l'inclinaison du plan sur la stabilité de la surface libre. Nous avons remarqué un élargissement de la zone des modes stables avec l'augmentation du nombre de Weber  $W$ . Quant à l'influence de l'inclinaison de la paroi sur laquelle le fluide s'écoule, nous avons noté que l'interface est d'autant plus déstabilisée que cette paroi est plus inclinée.

# Bibliographie

- [1] D. Barkley And L. Tuckerman, Mean Flow Of Turbulent-laminar Patterns In Plane Couette Flow, J. Fluid Mech. 576, 109-137, 2007.
- [2] T.B. Benjamin, Waves Formation In Laminar Flow Down An Inclined Plan, J. Fluid Mech. 2, 554-574, 1957
- [3] D.J. Benney , Long Waves On Liquid Films , J Math. Phys. 45, 150-155, 1966
- [4] Francis H. Harlow And J. Eddie Welch, Numerical Calculation Of Time Dependent Viscous Incompressible Flow Of Fluid With Free Surface, Phys. Fluids, 8, 2182-2189, 1965
- [5] Khomami, B., Interfacial Stability And Deformation Of Two Stratified Power Law Fluids In Plane Poiseuille Flow. Part Ii. Interfacial Deformation., J. Non Newtonian Fluid Mech., 37, 19, 1990
- [6] Le Meur, H, Existence, Unicité Et Stabilité D'écoulements De Fluides Viscoélastiques Avec Interfaces. Thèse Université Paris Xi (Orsay) Mathématiques, 15 Décembre 1994
- [7] N. El Kissi, J-m. Piau, R. Chaigneau, Stabilité Interfaciale En Coextrusion ; Laboratoire De Rhéologie – Umr 5520 – Bp 53 – Domaine Universitaire – 38041 Grenoble Cedex 9, 24 Avril 2002
- [8] Hooper, A. P., Boyd, W. G. C., Shear Flow Instability At The Interface Between Two Viscous Fluids., J. Fluid. Mech., 128, 507, 1983
- [9] Khomami, B., Interfacial Stability And Deformation Of Two Stratified Power-law Fluids In Plane Poiseuille Flow. Part I. Stability Analysis., J. Non Newtonian Fluid Mech. , 36, 289, 1990
- [10] Smith, M. K. The Axisymmetric Long-waves Instability Of A Concentric Two-phase Pipe Flow. Phys. Fluids., 14, N° 2, 251, 1971

- [11] Su, Y. Y., Khomami, B., Purely Elastic Interfacial Instabilities In Superposed Flow Of Polymeric Liquids. *Rheol. Acta*, Vol. 31, 413, 1992
- [12] Chen, K. P. , Zhang, Y. , Stability Of The Interface In Coextrusion Flow Of Two Viscoelastic Fluids Through A Pipe, *J. Fluid Mech.*, 247, 489, 1993
- [13] Millet Séverine, Rousset François, Botton Valéry & Ben Hadid Hamda, Etude De Stabilité Linéaire De L'Écoulement À Deux Couches De Films Non-newtoniens Sur Un Plan Incliné, Laboratoire De Mécanique Des Fluides Et D'acoustique - Umr Cnrs 5509 Insa -lyon / Université Lyon 1 / Ecole Centrale De Lyon , Grenoble, 27-31 Août, 2007
- [14] Yih, C. S. Instability Due To Viscosity Stratification. *J. Fluid. Mech.*, 27, 337, 1967
- [15] Waters, N. D., Keely, A. M. The Stability Of Two Stratified Non-newtonian Liquids In Couette Flow. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 24, 161, 1987
- [16] Li, C. H., Stability Of Two Superposed Elastoviscous Fluids Liquids In Plane Poiseuille Flow., *Phys. Fluids*, 12, 531, 1969
- [17] Pinarbasi A., Liakopoulos A., Stability Of Two-layer Poiseuille Flow Of Carreau-yasuda And Bingham-like Fluids., *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 57, 227, 1995
- [18] P.Laure, H. Le Meure, Y Demart, J.C.Saut And S.Scotto, Linéar Stability Of Multilayer Plane Poiseuille Flows Of Oldroyd B *Fluid Mech.* 23, 1997
- [19] P.Laure, A. Fortin, Direct Simulation Of Interfacial Instabilities Of Two Layer Poiseuille Flow In Coextrusion Die. Comparisons with Linéar Stability Analysis. *Europ. J. Mech.* 2000
- [20] Ruyer Quil. C, Manneville P , Improved Modeling Of Flows Down Inclined Planes, *Eur. Phys. J. B*, 15 , 357-369, 2000.
- [21] Y.V.Shkadov, Waves Flow Regims Of A Thin Layer Of Viscous Fluid Subject To Gravity , *Izv. Ak. Nauk Sssr, Mekh. Zhi. Gaza* 2, 43-51, 1967 Traduit En Anglais Dans *Fluid Dynamic* 2 (Faraday Press, N.Y. 29-34 1970)
- [22] N. Amatousse, H. Ait Abderrahmane, N. Mehidi, Traveling Waves On A Falling Weakly Viscoelastic Fluid Film, *Int. J. Eng. Science* 54, 27-41, 2012
- [23] Gupta, A. S.. Stability Of A Visco-elastic Liquid Film Flowing Down An Inclined Plane. *J. Fluid Mech.* 28, 17-28, 1967

- [24] Shaqfeh, E. S. G., Larson, R. G. Et Fredrickson, G. H. The Stability Of Gravity Driven Viscoelastic Film-flow At Low To Moderate Reynolds Number. *J. Non-newton. Fluid Mech.* 31(1), 87-113, 1989
- [25] Uma B., Usha R. Dynamics Of A Thin Film On An Inclined Plane, *International Journal Of Engeneering Science*, 44, 1449-1481, 2006.
- [26] Kao, T.W., Role Of The Interface In The Stability Of Stratified Flow Down An Inclined Plane. *Phys. Fluids* 8(12), 2190-2194, 1965.
- [27] Lai,W., Stability Of An Elastico-viscous Liquid Film Flowing Down An Inclined Plane. *Phys. Fluids* 10(4), 844-847, 1967