

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université ABDERRAHMANE MIRA - Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique



## Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Physique Théorique

### Thème

*Influence d'un champ électromagnétique sur  
l'écoulement plan d'un fluide non newtonien*

Présenté par : M<sup>lle</sup> BELLOUL Assia

Soutenu le 29 juin 2015 devant le jury composé de :

Président :	OULEBSIR Nadia	MCB	UAMB
Examineurs :	MEHIDI Nadia	MCA	UAMB
	BOUCHARA Lydia	MAA	UAMB
Promoteur :	AMATOUSSE Nawel	MCA	UAMB

Année universitaire: 2014/2015



# Remerciements

*En préambule à ce mémoire, j'adresse mes remerciements les plus sincères tout d'abord au « Bon Dieu » le plus puissant pour m'avoir guidée vers le chemin du savoir et pour m'avoir donné le courage, la patience et la santé qui m'ont été utiles tout au long de mon parcours.*

*Toute mon estime et ma respectueuse gratitude vont à Madame **AMATOUSSE Nawel** pour avoir accepté de m'encadrer et aussi pour le temps qu'elle m'a accordé tout au long de la réalisation de ce mémoire et surtout pour la confiance qu'elle m'a témoigné.*

*Mes vifs remerciements vont également à **M<sup>me</sup> OULEBSIR Nadia** pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury et d'évaluer mon travail.*

*Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à **Mme MEHIDI Nadia** et à **Melle BOUCHARA Lydia** pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Enfin, je tiens à remercier tous ceux et celles qui ont contribué d'une façon ou d'une autre, de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

# *Dédicaces*



*C'est avec ma profonde gratitude et plus grand amour,  
que je dédie ce mémoire à la mémoire de mon très cher père  
« Aucune dédicace ne saurait exprimer l'affection et le  
grand amour que j'éprouve pour toi malgré ton absence»*

*A ma très chère mère à qui je dois le mérite d'être arrivée  
là, qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude et  
mon affection.*

*A mes très chères sœurs :*

*Malika, Katia, Rachida, Sonia, Sassa et Tinhinene*

*A mes très chers frères :*

*Rezak et Mohand*

*A mes chères nièces :*

*Tania, Léa, Djodja et Dihia*

*A mes très chers neveux :*

*Aksal et Salas*

*A Malek et toute sa famille*

*A tous mes cousins en particulier AHMED, KAMEL,  
KHELIL, CHAFIA ET GHANIA.....*

*A tous mes amis (es)*

*Et A tous les étudiants de la promotion de Physique théorique (2015).*



# Sommaire

Liste des abréviations

Liste des figures

**Introduction** .....1

## *Chapitre I : Description du problème*

I.1.Présentation du problème .....5

I.1.1.Equations du mouvement .....6

I.1.2.Conditions aux limites .....8

I.2. Ecoulement de base.....9

I.3. Mise à l'échelle.....10

I.3.1 Équations du mouvement adimensionnées.....12

I.3.2. Solution de base adimensionnée ..... 13

## *Chapitre II :Approches théoriques*

II.1. Etat de l'art.....13

II.1.1. Fluides Newtoniens.....13

II.1.2. Fluides viscoélastiques.....14

II.1.3. Ecoulements soumis à un champ électromagnétique.....14

II.2. Modèles théoriques.....14

II.2.1. Modèles Ondes longues.....14

II.2.2. Modèles intégraux de couche limite.....15

II.2.3. Une alternative à l'approche intégrale de couche limite.....17

**Chapitre III:Analyse de stabilité linéaire**

III.1. Equations linéarisées.....	20
III.2. Etude de stabilité temporelle.....	21
III.2.1.Courbes de stabilité marginale.....	23
III.2.2.Taux d'amplification des instabilités.....	26
<b>Conclusion.....</b>	<b>29</b>
<b>Références bibliographiques</b>	

## *Liste des symboles et abréviations*

$\gamma$  Coefficient de tension superficielle

$\mu$  Viscosité dynamique

$\nu$  Viscosité cinématique

$\Gamma$  Paramètre viscoélastique

$\rho$  masse volumique du fluide

$\mu_0$  Perméabilité magnétique

$\sigma$  Conductivité du fluide

$\theta$  Angle d'inclinaison du plan

$\frac{D}{Dt}$  Dérivée particulaire

$\overline{\sigma}$  Tenseur des contraintes

$\overline{e}$  Tenseur des taux de déformation

$h_n$  Epaisseur du film mince dans l'écoulement de base

$R$  Nombre de Reynolds

$W$  Nombre de Weber

$Ka$  Nombre de Kapitza

$H_a$  Nombre de Hartmann

$\alpha$  Nombre électrique

$k$  Nombre d'onde

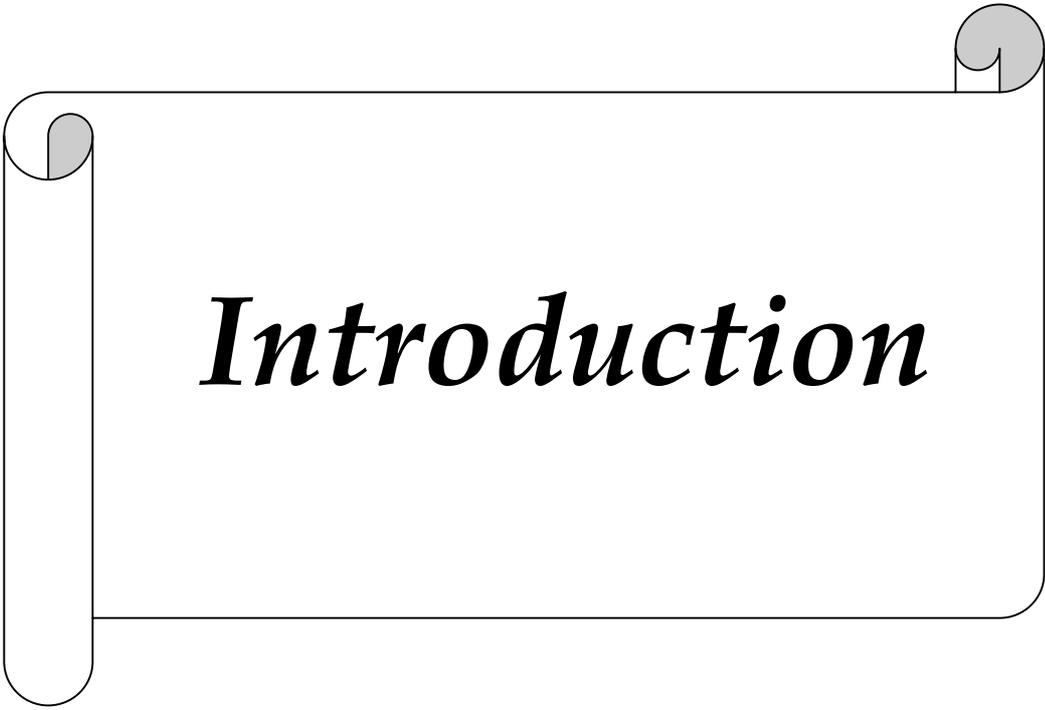
$w$  Pulsation complexe

# Liste des figures

<b>Figure</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
1	Instabilités à l'interface d'un écoulement	2
2	Exemple d'un fluide newtonien	3
3	Exemple d'un fluide non newtonien	3
I.1	Géométrie du problème	5
II.1	Courbes neutres	14
III .2.1.1	Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés : $H_a=1$ , $Ka=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta=90^0$	24
III. 2.1 .2	Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha =1$ , $Ka=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta=90^\circ$	24
III. 2.1.3	Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés : $H_a=1$ , $Ka=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta=90^0$	25
III. 2.1.4	Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha =-1$ , $Ka=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta=90^\circ$	25
III .2.2.1	Taux d'amplification $w_i$ des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés : $H_a=1$ , $Ka=10$ , $R=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta =90^0$	27
III.2.2.2	Taux d'amplification $w_i$ des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha =1$ , $Ka=10$ , $R=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta =90^0$	27
III .2.2.3	Taux d'amplification $w_i$ des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés : $H_a=1$ , $Ka=10$ , $R=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta =90^0$	28

# Liste des figures

III.2.2.4	Taux d'amplification $w_i$ des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre magnétique. Les autres paramètres ont été fixés : $\alpha = -1$ , $Ka=10$ , $R=10$ , $\Gamma=0.05$ , $\theta = 90^0$	<b>28</b>
-----------	---	-----------



*Introduction*

# Introduction générale

Dans l'industrie, les films minces interviennent dans les secteurs faisant appel à des méthodes de couchage ou de revêtement de surfaces (industrie alimentaire, photographique, papeterie...) pour lesquels l'apparition des instabilités est généralement synonyme de détérioration de la qualité du produit. Il est donc important de pouvoir prédire le déclenchement des instabilités afin d'agir sur le système et retarder, voire éviter leur apparition. On trouve également à ce problème des applications dans le domaine environnemental, notamment l'écoulement de glaciers, de laves ou de boues en suspension.

Historiquement, l'étude du comportement de la surface libre d'un film de fluide visqueux en écoulement sur un plan incliné a débuté avec les travaux de Kapitza (1949) [1].

D'autres travaux dans le domaine ont été réalisés par Benney en 1966 [2] qui obtint une équation d'évolution de la surface libre du film à partir d'un développement en ondes longues. Son développement asymptotique souffre cependant de singularités et n'est valide qu'au voisinage de la criticalité. Un développement non linéaire de l'équation de Benney conduit, entre autres, à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky et à celle de Kawahara [3, 4]. Ces modèles ne sont cependant valables qu'à de faibles nombres de Reynolds.

Une autre approche initialement proposée par Shkadov [5] permet de décrire la dynamique du film à des nombres de Reynolds modérés. Elle consiste à moyenniser les équations bilans de la quantité de mouvement et de la masse sur l'épaisseur du film avec l'hypothèse d'un profil de vitesse semi parabolique. Le modèle obtenu est un système d'équations décrivant l'évolution de l'épaisseur du film fluide et du débit instantané local. Bien que ne présentant pas de comportements singuliers, ce modèle n'a pu prédire le seuil d'apparition des ondes à la surface du film.

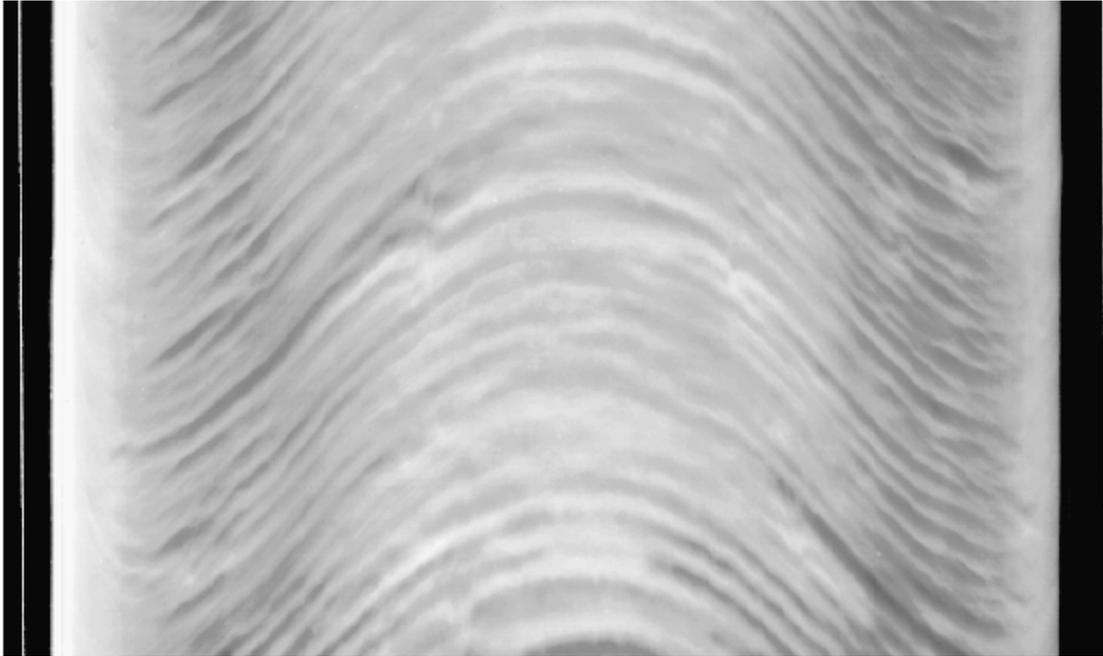


Figure.1. Instabilités à l'interface d'un écoulement.

Cette imprécision a été récemment corrigée par Ruyer-Quil et Manneville [6] qui ont développé une approche théorique combinant un développement en gradient du champ de vitesses à une méthode aux résidus pondérés.

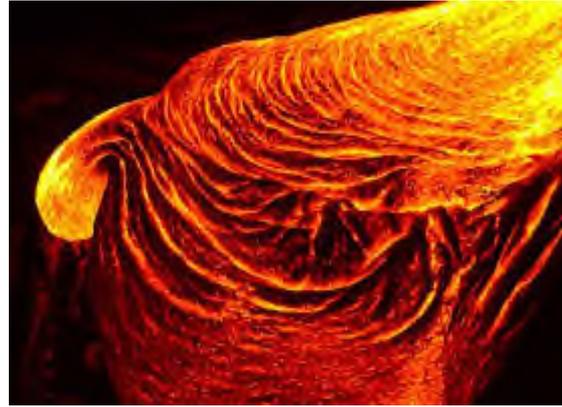
Selon le dictionnaire **Larousse**, quand on parle de fluides, on fait allusion aux corps liquides ou gaz dont les molécules sont faiblement liées et qui prend la forme du vase qui le contient. En physique, on distingue deux catégories de fluides : les fluides newtoniens et les fluides non newtoniens (voir les figures 2 et 3).

Les fluides newtoniens sont caractérisés par une relation de proportionnalité linéaire et isotrope entre le tenseur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation. C'est le cas de la plupart des liquides purs comme l'eau sous les conditions courantes.

Les fluides non newtoniens par contre peuvent offrir des comportements rhéologiques très variés et beaucoup plus complexes. On en distingue plusieurs catégories :



**Figure 2. Exemple d'un fluide newtonien**



**Figure 3. Exemple d'un fluide non newtonien**

- Fluides dont la viscosité dépend du taux de cisaillement [7] :

Fluides rhéofluidifiants : La viscosité diminue dans ce cas lorsque le taux de cisaillement augmente. Si le fluide ne s'écoule que lorsque la contrainte  $\sigma$  qui lui est appliquée dépasse un certain seuil, le fluide rhéofluidifiant est dit viscoplastique ou à seuil. C'est le cas par exemple des boues de forage, des pâtes à papier....

Fluides rhéoépaississants : Leur viscosité augmente avec le taux de cisaillement. Ce comportement est observé dans les amidons dilués dans l'eau.

- Fluides dont la viscosité dépend du temps [7] :

Les fluides thixotropes : Leur viscosité diminue avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante. À l'arrêt du cisaillement, la viscosité augmente avec le temps. Comme exemples, on peut citer les peintures, l'encre, les suspensions d'argile...

Les fluides rhéopectiques : Leur viscosité augmente avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante.

- Fluides viscoélastiques :

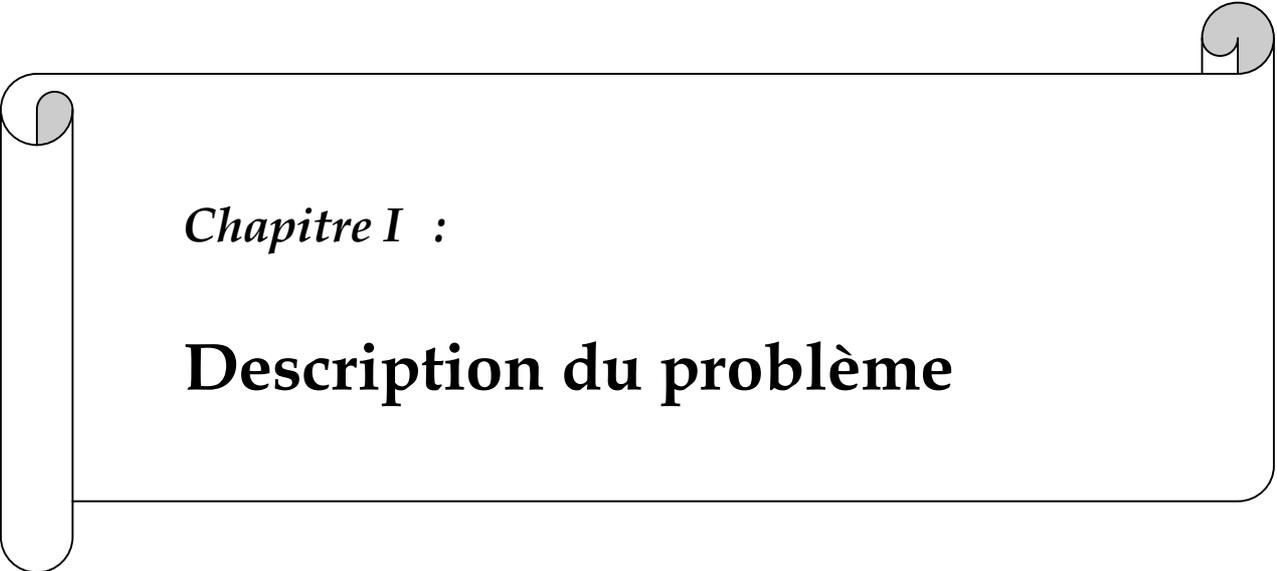
Un fluide viscoélastique présente des caractéristiques d'un solide ou d'un liquide, selon le temps de sollicitation auquel il est soumis. La viscoélasticité est très fréquente dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus.

La compréhension de la physique de ces écoulements, en particulier les phénomènes interfaciaux est encore loin d'être satisfaisante.

## Introduction générale

L'objectif de ce travail est d'étudier la stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné d'un film mince d'un fluide visqueux faiblement élastique soumis à l'effet d'un champ électromagnétique.

Après la mise en équations du problème, nous allons élaborer un modèle théorique simple pouvant décrire les instabilités de la surface libre. Une étude linéaire de stabilité de l'écoulement sera effectuée suivant une approche temporelle du problème. Nous allons déterminer dans ce cadre les conditions critiques au seuil de l'instabilité. Nous examinerons par la suite l'influence de l'application d'un champ électromagnétique uniforme sur la stabilité de l'interface.



*Chapitre I :*

**Description du problème**

# Chapitre 1 : Description du problème

Dans ce chapitre, nous allons décrire mathématiquement l'écoulement à surface libre d'un fluide non newtonien de faible épaisseur soumis à l'effet d'un champ électromagnétique.

Dans le but de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant l'écoulement, les équations obtenues seront mises par la suite sous forme adimensionnelle.

## 1.1.Présentation du problème :

On s'intéresse au comportement d'un film mince d'un fluide visqueux faiblement élastique en écoulement sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale et soumis aux effets d'un champ électromagnétique (voir Fig.1.1.1).

L'écoulement est à surface libre, l'interface est en contact direct avec l'air où la pression est égale à  $p_a$ .

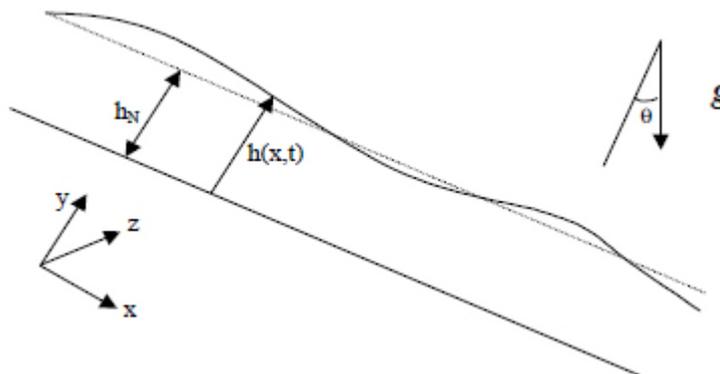


FIGURE 1.1.1-Géométrie du problème

## Description du problème

### 1.1.1 Equations du mouvement :

Le système d'équations décrivant l'évolution de la vitesse  $\vec{v}$  ( $u, v$ ) et de la pression du fluide  $p$  est constitué par les équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse.

Le champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell.

Les équations décrivant le mouvement sont écrites dans un système bidimensionnel ( $x, y$ ) aligné avec le plan. L'axe Ox est dans la direction et le sens de l'écoulement et l'axe Oy est perpendiculaire au plan.

### Equation de conservation de la masse :

Le principe de conservation de la masse appliqué à un fluide incompressible se traduit par la divergence nulle du champ de vitesse  $\vec{v}$  [8]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad 1.1.1$$

En développant l'équation (1.1.1), on obtient :

$$u_x + v_y = 0 \quad 1.1.2$$

### Bilan de la quantité de mouvement :

La forme locale du principe fondamental de la dynamique appliqué à un milieu continu s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma} \quad 1.1.3$$

$$\text{Où } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$\vec{f}$  représente les forces de volume,  $\vec{\sigma}$  le tenseur des contraintes et  $\rho$  la masse volumique du fluide.

Le fluide viscoélastique considéré obéit à une loi de comportement de type Walters B'' :

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} + \tau_{ij} \quad 1.1.4$$

Avec :

$$\tau_{ij} = -2 \cdot \Gamma_0 \cdot \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot e_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \cdot e_{kj} \right) \quad 1.1.5$$

## Description du problème

$\mu$  étant la viscosité dynamique du fluide et  $\Gamma_0$  le paramètre viscoélastique.

Le tenseur des taux de déformation  $\bar{e}$  a pour composantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.1.6$$

Le bilan de la quantité de mouvement (1.1.3) s'écrira donc comme suit :

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\bar{\nabla} p + \mu \cdot \Delta \bar{v} + \text{div} \bar{\tau} + \rho \cdot \bar{g} + \mu_0 \sigma (\bar{E} + \mu_0 (\bar{v} \wedge \bar{H})) \wedge \bar{H} \quad 1.1.7$$

Où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique et  $\sigma$  la conductivité du fluide.

$\bar{g}$  est l'accélération de la pesanteur.

Les champs magnétique  $\bar{H}$  et électrique  $\bar{E}$  appliqués, supposés uniformes, sont respectivement dans la direction longitudinale et transversale :

$$\bar{H} = H_0 \bar{i}, \quad \bar{E} = E_0 \bar{k}.$$

Nous négligeons toute perturbation du champ électromagnétique.

La projection de l'équation (1.1.7) sur l'axe (OX) donne :

$$\rho (u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y) = -p_x + \mu \cdot (u_{xx} + v_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \rho \cdot g \sin \theta \quad 1.1.8$$

En projetant l'équation (1.1.7) suivant la normale (OY), on trouve :

$$\rho (v_t + u \cdot v_x + v \cdot v_y) = -p_y + \mu \cdot (v_{xx} + u_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} - \rho \cdot g \cos \theta + \mu_0 \cdot \sigma \cdot (E_0 \cdot H_0 - \mu_0 (v \cdot H_0^2)) \quad 1.1.9$$

Les composantes du tenseur symétrique  $\tau_{ij}$  ont pour expression :

$$\tau_{xx} = -\Gamma_0 \left[ 2u_{tx} + 2u \cdot u_{xx} + 2v \cdot u_{yy} - 4(u_x)^2 - u_y \cdot (v_x + u_y) \right] \quad 1.1.10$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\Gamma_0 \left[ 2u_{ty} + 2v_{tx} + 2u \cdot (u_{xy} + v_{xx}) + v \cdot (u_{yy} + v_{yx}) - 2v_x u_x - u_y v_y \right] \quad 1.1.11$$

$$\tau_{yy} = -\Gamma_0 \left[ 2v_{ty} + 2u \cdot v_{xy} + 2v \cdot v_{yy} - 2v_x \cdot (v_x + u_y) - 4(v_y)^2 \right] \quad 1.1.12$$

## Description du problème

Aux équations du mouvement (1.1.1) et (1.1.7) sont associées des conditions au niveau de la paroi, solide et fixe, sur laquelle le fluide s'écoule et au niveau de l'interface fluide-air :

### **1.1.2 Conditions aux limites :**

- L'adhérence du fluide à la paroi solide et fixe d'équation  $y = 0$  s'écrit :

$$u = 0, v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad 1.1.13$$

Au niveau de l'interface d'équation  $y = h(x, t)$ , nous avons deux types de conditions:

#### **a- Condition cinématique :**

L'équation qui traduit l'imperméabilité de la surface libre s'écrit :

$$\frac{Df}{Dt} = 0$$

avec

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \vec{v}$$

$f = y - h(x, t) = 0$  représente l'équation de l'interface.

Après développement, on trouve :

$$v = h_t + u \cdot h_x \quad 1.1.14$$

#### **b- Conditions dynamiques :**

La continuité des contraintes tangentielles s'écrit comme suit :

$$\left( \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} \right) \cdot \vec{t} = \left( \overline{\overline{\sigma}}_{\text{air}} \vec{n} \right) \cdot \vec{t} \quad 1.1.15$$

La condition sur les contraintes normales est donnée par :

$$\left( \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} \right) \cdot \vec{n} - \left( \overline{\overline{\sigma}}_{\text{air}} \vec{n} \right) \cdot \vec{n} = -\gamma \cdot \nabla \cdot \vec{n} \quad 1.1.16$$

$\gamma$  étant le coefficient de tension superficielle.

## Description du problème

La normale à l'interface étant donnée par  $\vec{n} = \frac{\vec{grad}f}{\|\vec{grad}f\|}$ , on trouve après calcul :

$$\vec{n} = \left( \frac{-h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

La tangente à l'interface (perpendiculaire à  $\vec{n}$ ), a pour expression :

$$\vec{t} = \left( \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right)$$

En développant les conditions sur les contraintes tangentiels et normales, il vient :

$$\begin{aligned} & -4\mu \cdot u_x h_x + \mu \cdot (u_y + v_x) \cdot (1 - h_x^2) + \Gamma_0 \cdot h_x \left[ 2u_{tx} + 2u \cdot u_{xx} + 2v \cdot u_{yy} - 4(u_x)^2 - 2u_y \cdot (v_x + u_y) \right] \\ & - \Gamma_0 \cdot h_x \left[ 2u_{ty} + 2v_{tx} + 2u \cdot (u_{xy} + v_{xx}) + v \cdot (u_{yy} + v_{yx}) - 2v_x u_x - u_y v_y \right] \\ & - \Gamma_0 \cdot (1 - h_x^2) \left[ 2u_{ty} + 2v_{tx} + 2u \cdot (u_{xy} + v_{xx}) + v \cdot (u_{yy} + v_{yx}) - 2v_x u_x - u_y v_y \right] = 0 \end{aligned} \quad 1.1.17$$

$$\begin{aligned} p - p_a &= \frac{1}{(1+h_x^2)} \left[ 2uu_x h_x^2 - 2\mu h_x (u_y + v_x) + 2\mu v_y \right. \\ & + 2\Gamma_0 \cdot h_x \left[ 2u_{ty} + 2v_{tx} + 2u \cdot (u_{xy} + v_{xx}) + v \cdot (u_{yy} + v_{yx}) - 2v_x u_x - u_y v_y \right] \\ & - \Gamma_0 \cdot h_x^2 \left[ 2u_{tx} + 2u \cdot u_{xx} + 2v \cdot u_{yy} - 4(u_x)^2 - 2u_y \cdot (v_x + u_y) \right] \\ & \left. - \Gamma_0 \left[ 2v_{ty} + 2uv_{xy} + 2vv_{yy} + -2v_x (v_x + u_y) - 4(v_y)^2 \right] - \frac{\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{2}{3}}} \right] \end{aligned} \quad 1.1.18$$

### 1.2 Ecoulement de base :

En l'absence de perturbations, l'interface séparant le fluide de l'air est plane ( $h(x,t) = h_n = \text{constante}$ ) et la vitesse se réduit à sa composante longitudinale. Les équations du mouvement et les conditions aux limites correspondantes admettent dans ce cas une solution simple, stationnaire et invariante par translation suivant la direction longitudinale. Cette solution définit l'écoulement de base.

Pour un tel écoulement, le problème à résoudre est :

$$\mu \cdot u_{yy} + \rho \cdot g \sin \theta = 0 \quad 1.2.1$$

$$-p_y - \rho \cdot g \cos \theta + \mu_0 \sigma E_0 H_0 = 0 \quad 1.2.2$$

## Description du problème

Les conditions aux limites se réduisent à :

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{et} \\ u_y = 0 \quad \text{et } p = p_a \quad \text{en } y = h_n$$

Après intégration, on trouve les expressions suivantes de la vitesse longitudinale et de la pression :

$$U(y) = \frac{\rho \cdot g \sin \theta}{\mu} \left( h_n y - \frac{y^2}{2} \right) \quad 1.2.3$$

$$P(y) = p_a + (\rho g \cos \theta - \mu_0 \sigma E_0 H_0)(h_n - y) \quad 1.2.4$$

A partir de l'équation (1.2.3), on peut définir la vitesse moyenne de l'écoulement :

$$u_n = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} U(y) dy = \frac{\rho \cdot g \sin \theta \cdot h_n^2}{3\nu} \quad 1.2.5$$

Où  $\nu = \mu / \rho$  représente la viscosité cinématique.

### **1.3 Mise à l'échelle:**

L'écriture sous forme adimensionnelle [9] des équations du mouvement et des conditions aux limites fait à l'aide de grandeurs de référence issues des propriétés physiques du fluide considéré et de caractéristiques de l'écoulement. Le choix a donc porté sur :

$L$ , une longueur d'onde caractéristique suivant la direction de l'écoulement comme échelle des longueurs longitudinales.

$h_n$ , l'épaisseur constante du film fluide correspondant à l'écoulement de base comme échelle des longueurs suivant la normale au plan incliné,

$u_n$ , la vitesse moyenne de l'écoulement comme référence des vitesses longitudinales,

$\frac{L}{u_n}$  comme référence temporelle,

$\frac{h_n}{L} u_n$  comme référence des vitesses normales,

$\frac{\rho \nu}{h_n} u_n$  comme échelle des pressions.

#### **1.3.2 Équations du mouvement adimensionnées :**

En passant aux grandeurs sans dimension, les équations du mouvement (1.1.2, 1.1.8, 1.1.9) et les conditions aux limites correspondantes (1.1.14, 1.1.17 et 1.1.18) s'écriront comme suit :

## Description du problème

$$u_x + v_y = 0 \quad 1.3.1$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon(u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y) &= -\varepsilon p_x + (\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy}) - 2\Gamma R\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon^2 u_{tx} + \varepsilon^2 u \cdot u_{xx} + \varepsilon v \cdot u_{yy} - 4\varepsilon^2 (u_x)^2 \\ &- 2u_y \cdot (\varepsilon 2v_x + u_y)] - \Gamma R \frac{\partial}{\partial y} [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + u \cdot (\varepsilon u_{xy} + \varepsilon^3 v_{xx}) + \varepsilon v \cdot (u_{yy} + \varepsilon^2 v_{yx}) - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y] + 3 \end{aligned} \quad 1.3.2$$

$$\begin{aligned} R\varepsilon^2(v_t + u \cdot v_x + v \cdot v_y) &= -p_y + (\varepsilon^3 v_{xx} + \varepsilon v_{yy}) - \Gamma R\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + u \cdot (\varepsilon u_{xy} + \varepsilon^3 v_{xx}) + \varepsilon v \cdot (u_{yy} + \varepsilon^2 v_{yx}) \\ &- 2\varepsilon^3 v_x \cdot u_x - 2\varepsilon u_y \cdot v_y] - \Gamma R \frac{\partial}{\partial y} [2\varepsilon^2 v_{ty} + 2\varepsilon^2 u \cdot v_{xy} + 2\varepsilon^2 v \cdot v_{yy} + -2\varepsilon^2 v_x \cdot (\varepsilon^2 v_x + u_y) - 4\varepsilon^2 (v_y)^2] \\ &- 3 \cot \theta + \alpha H_a^2 - \varepsilon H_a^2 v \end{aligned} \quad 1.3.3$$

Pour les conditions aux limites, on aura :

$$v = h_t + u \cdot h_x \quad 1.3.4$$

$$\begin{aligned} -4\varepsilon^2 u_x h_x + (u_y + \varepsilon^2 v_x) \cdot (1 - \varepsilon^2 h_x^2) &+ \Gamma \cdot R\varepsilon h_x [2\varepsilon^2 u_{tx} + 2\varepsilon^2 u \cdot u_{xx} + 2\varepsilon v \cdot u_{yy} - 4\varepsilon^2 (u_x)^2 - 2u_y \cdot (\varepsilon v_x + u_y)] \\ -\Gamma R\varepsilon \cdot h_x [2\varepsilon^2 u \cdot v_{xy} + 2\varepsilon^2 v_{tx} + 2\varepsilon^2 v \cdot v_{yy} - 2\varepsilon^2 v_x \cdot (u_{yy} + \varepsilon^2 v_{yx}) - 4\varepsilon^2 (v_y)^2] \\ -\Gamma R \cdot (1 - \varepsilon^2 h_x^2) [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + u \cdot (\varepsilon u_{xy} + \varepsilon^3 v_{xx}) + \varepsilon v \cdot (\varepsilon^2 u_{yy} + v_{yx}) - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y] &= 0 \end{aligned} \quad 1.3.5$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)} [2\varepsilon^2 u_x h_x - 2\varepsilon \cdot h_x (u_y + \varepsilon^2 v_x) + 2\varepsilon \cdot v_y \\ &+ 2\Gamma R\varepsilon \cdot h_x [\varepsilon u_{ty} + \varepsilon^3 v_{tx} + u \cdot (\varepsilon u_{xy} + \varepsilon^3 v_{xx}) + \varepsilon v \cdot (u_{yy} + \varepsilon^2 v_{yx}) - 2\varepsilon^3 v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y] \\ &- \Gamma R\varepsilon^2 \cdot h_x^2 [2\varepsilon u_{tx} + 2\varepsilon^2 u \cdot u_{xx} + 2\varepsilon v \cdot u_{yy} - 4\varepsilon^2 (u_x)^2 - u \cdot \varepsilon (v_y + u_x)] \end{aligned} \quad 1.3.6$$

Les équations (1.3.1) à (1.3.6) font intervenir les nombres sans dimension suivants :

-Le nombre de Reynolds  $R = \frac{\rho h_n u_n}{\mu}$  qui représente le rapport entre les effets d'inertie et les effets visqueux.

-Le nombre de Weber  $W = \frac{\gamma}{\rho h_n u_n^2}$  représentant l'effet de la tension surface. Le nombre

de Weber est relié au nombre de Kapitza par la relation :  $W = \frac{\sqrt[3]{3}}{R^3} Ka$ .

-Le paramètre viscoélastique  $\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\rho h_n^2}$

### Description du problème

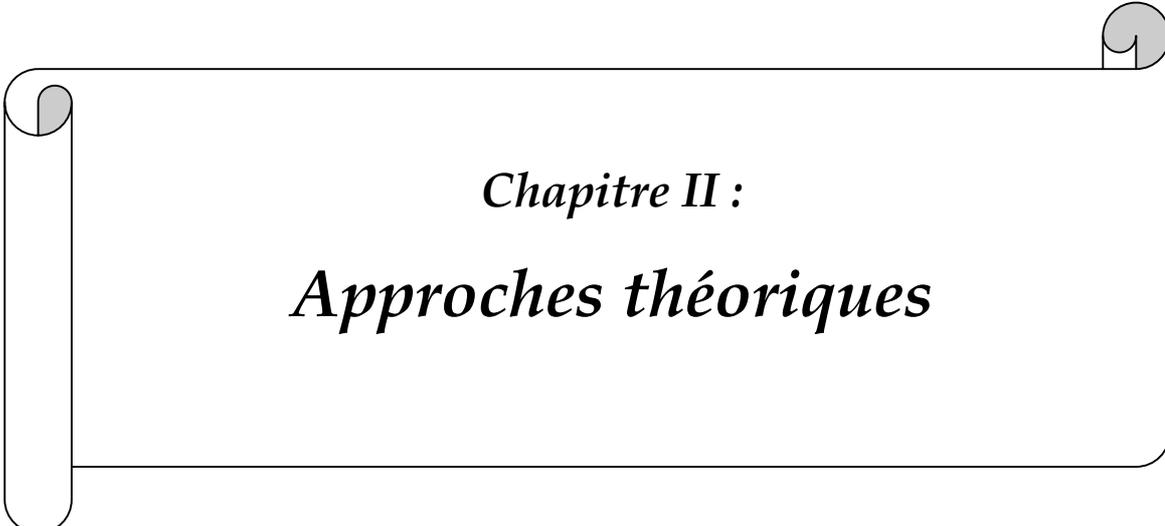
- Le nombre de Hartmann  $H_a = h_n \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$

- Le nombre électrique  $\alpha = \frac{E_0}{\mu_0 H_0 u_n}$

- Le paramètre  $\varepsilon = \frac{h_n}{L}$  qui rend compte du caractère ondes longues des modes instables.

En variables adimensionnées, la vitesse longitudinale de l'écoulement de base s'écrit comme suit :

$$U(y) = 3 \left( y - \frac{y^2}{2} \right) \quad 1.3.7$$



*Chapitre II :*  
*Approches théoriques*

## Chapitre 2 : Approches théoriques

Développer des modèles pouvant se substituer aux équations de Navier-Stokes est l'enjeu majeur des études de stabilité menées depuis les travaux pionniers de P.L Kapitza et S.P Kapitza [1].

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode que nous avons utilisée pour élaborer un modèle simple pouvant décrire les instabilités de la surface libre dans les régimes d'écoulement caractérisés par des nombres de Reynolds de faibles à modérés.

### 2.1 Etat de l'art

#### 2.1.1 Fluides Newtoniens :

La stabilité de l'écoulement d'un film de fluide newtonien sur un plan incliné a été largement étudiée depuis que le problème a été posé de manière formelle par Benjamin (1957) et Yih (1963) [10, 11]. Les instabilités de grandes longueurs d'onde qui les gouvernent sont des modes dits de surface. Yih (1963) [11] a montré que ces dernières apparaissaient à des nombres de Reynolds bien déterminés ( $Rc = 6/5 \cot \theta$ ) et leur célérité est le double de la vitesse à la surface libre.

Kelly et al., (1989) [12] ont effectué un bilan énergétique afin de déterminer les mécanismes responsables de ces instabilités. Smith (1990) [13] a proposé une explication concernant les mécanismes physiques à leur origine. L'inertie du fluide joue un rôle important dans la stabilité de tels écoulements [14].

Plus récemment, Ruyer Quil et Manneville [6] ont développé un modèle simple pour modéliser les instabilités de la surface libre de l'écoulement d'un fluide newtonien. Leur méthode combine un développement en gradient du profil des vitesses à une méthode aux résidus pondérés.

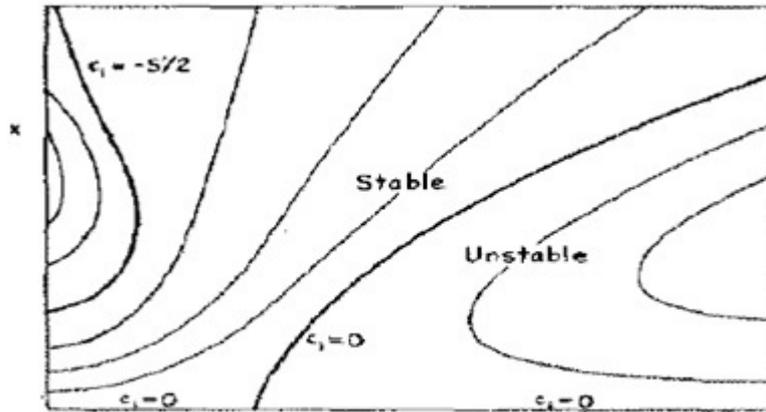


Figure : Courbes neutres [10]

A de grands nombres de Reynolds et pour des inclinaisons inférieures à 0.5, des modes dont le seuil critique est plus bas que celui des modes de surface deviennent les modes les plus instables (De Bruin (1974), Floryan (1987)) [15 ,16]. Ces modes ont des longueurs d'ondes de l'ordre de l'épaisseur du film et se propagent à une vitesse inférieure à celle de la surface libre. On les appelle modes de cisaillement ou modes de Tollmien-Schlichting.

### **2.1.2 Fluides viscoélastiques (Non Newtoniens)**

Gupta [17] a examiné la stabilité de l'écoulement sur un plan incliné d'un film fluide viscoélastique du second ordre. Il montre que les modes de surface apparaissent à des nombres de Reynolds plus petits que pour des fluides newtoniens. Le même constat a été fait par Lai en 1967 [18] qui a étudié la stabilité d'un film de fluide viscoélastique de type Oldroyd B dans le cadre de l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes. Cet écoulement a été également étudié par Shaqfeh et al [19]. Ces derniers ont montré que la viscoélasticité a un effet stabilisant pour des nombres de Reynolds modérés et déstabilisant dans les régimes d'écoulement caractérisés par de faibles nombres de Reynolds. Uma et Usha [20] ont utilisé un modèle intégral de couche limite pour modéliser les instabilités d'interface apparaissant dans un écoulement d'un fluide faiblement élastique. Leur étude n'est cependant valable qu'à des nombres de Reynolds modérés. Une généralisation de leur modèle par une méthode aux résidus pondérés a été récemment réalisée [21].

### **2.1.3 Ecoulements soumis à un champ électromagnétique**

Hsieh (1965) [22] et Ladikov (1966) [23] ont étudié la stabilité linéaire de l'écoulement d'une couche de fluide sur un plan horizontal et incliné en présence d'un champ magnétique uniforme.

Deux modèles non linéaires ont été proposés par Korsunsky en 1999 [24] pour les faibles et grands nombres de Reynolds. Des modèles à deux équations ont également été élaborés pour l'étude de l'effet d'un champ magnétique vertical [25,26].

## **2.2 Modèles théoriques**

### **2.2. 1. Modèles Ondes longues**

Sur un film de fine épaisseur, l'instabilité à des faibles nombres de Reynolds se manifeste par la croissance d'ondes dont la longueur est de l'ordre de quelques centimètres.

Dans ces conditions, les champs de vitesses et de pression peuvent être développés sous forme d'une série asymptotique [27] en  $\varepsilon$  :

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} \quad 2.1.1$$

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} \quad 2.1.2$$

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} \quad 2.1.3$$

En résolvant les équations du mouvement aux différents ordres de l'approximation, on obtient, par l'intermédiaire de l'équation cinématique, une équation d'évolution de l'épaisseur du film  $h$ .

La dynamique de l'écoulement est dans ce cas totalement asservie à la cinématique de sa surface libre.

Les modèles dits ondes longues reproduisent correctement les résultats d'études de stabilité linéaire, le seuil d'apparition des instabilités est déterminé de façon précise. Cependant, lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur seuil, l'amplitude des ondes observées diverge en un temps fini ce qui limite la portée de tels modèles.

### **III.2 Modèles intégraux de couche limite**

La cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur du film permet de formuler des modèles simples en termes de l'épaisseur locale et de grandeurs moyennées ne dépendant que de la dimension spatiale  $x$  et du temps  $t$  [5].

## Approches théoriques

La méthode consiste à introduire le paramètre formel  $\varepsilon$ , à travers la transformation  $(\partial_t, \partial_x) \rightarrow \varepsilon(\partial_t, \partial_x)$ . Ce petit paramètre assure l'hypothèse de la lente variation en temps et en espace (suivant  $x$ ) qui découle du fait que l'échelle de variation suivant l'épaisseur du film mince est beaucoup plus grande que l'épaisseur elle-même.

On ne garde dans les équations du mouvement que les termes d'ordre inférieur à  $\varepsilon^3$ . Le fluide étant faiblement élastique,  $\Gamma = O(\varepsilon)$ . Les équations (1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3) s'écrivent alors :

$$\varepsilon u_x + \varepsilon v_y = 0 \quad 2.2.1$$

$$R\varepsilon(u_t + uu_x + vu_y) = -\varepsilon p_x + \varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} - 2R\Gamma\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon v u_{yy} - (u_y)^2) - \Gamma R \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon u_{ty} + \varepsilon u u_{xy} + \varepsilon v u_{yy} - 2\varepsilon v_x u_x - 2\varepsilon u_y v_y) + 3 \quad 2.2.2$$

$$R\varepsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \varepsilon v_{yy} - 3 \cot \theta + \alpha H_a^2 - \varepsilon H_a^2 v \quad 2.2.3$$

La condition d'adhérence à la paroi et la condition cinématique sont inchangées :

$$\text{Condition d'adhérence à la paroi : } u|_0 = v|_0 = 0 \quad 2.2.4$$

Condition cinématique :

$$v|_h = h_t + u|_h h_x \quad 2.2.5$$

Les conditions sur les contraintes normales et tangentielles s'écriront comme suit :

$$p|_h = 2\varepsilon^2 h_x u_x|_h - 2\varepsilon h_x u_y|_h - 2\varepsilon v_y|_h - WR\varepsilon^2 h_{xx} \quad 2.2.6$$

$$u_y|_h = 4\varepsilon^2 u_x|_h h_x - \varepsilon^2 v_y|_h + \Gamma R (\varepsilon u_{ty}|_h + \varepsilon u u_{xy}|_h + \varepsilon v u_{yy}|_h) \quad 2.2.7$$

L'équation (2.2.7) montre que  $u_y|_h$  est au moins d'ordre  $\varepsilon$ . Dans ce cas, (2.2.6) se simplifie comme suit :

$$p|_h = 2\varepsilon^2 h_x u_x|_h - 2\varepsilon v_y|_h - WR\varepsilon^2 h_{xx} \quad 2.2.8$$

En intégrant (2.2.3) de  $y$  à  $h(x,t)$  puis en reportant l'expression de la pression à l'interface donnée par (2.2.6) dans le résultat, il vient :

$$p(y) = R\varepsilon^2 \int_y^h (u_t + uu_x + vu_y) dy + 2\varepsilon v_y|_h - WR\varepsilon^2 h_{xx} + 3 \cot \theta (h-y) - \alpha H_a^2 (h-y) + \varepsilon \int_y^h H_a^2 v dy \quad 2.2.9$$

## Approches théoriques

En substituant l'expression de la pression (2.2.9) dans (2.2.2), on trouve :

$$\begin{aligned} & -R\varepsilon(u_t + uu_x + vu_y) - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y|_h) + \varepsilon^3 WRh_{xxx} - 3\varepsilon h_x \cot \theta + \varepsilon \alpha H_a^2 h_x - \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h v dy \\ & + 2\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} + 2R\Gamma \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (u_y^2) + R\Gamma \frac{\partial}{\partial y} (-\varepsilon u_{ty} - \varepsilon uu_{xy} - \varepsilon v u_{yy} + 2\varepsilon u_y v_y) + 3 = 0. \end{aligned} \quad 2.2.10$$

L'équation (2.2.10) porte le nom d'équation de couche limite. Elle est cohérente à l'ordre  $\varepsilon^2$ . Bien que d'ordre  $\varepsilon^3$ , le terme proportionnel au nombre de Weber n'a pas été négligé. Une tension de surface importante garantit la validité de l'hypothèse des grandes longueurs d'onde.

En combinant la condition d'incompressibilité (2.2.1) à la condition qui traduit l'imperméabilité de l'interface (1.1.14), on trouve :

$$h_t + q_x = 0 \quad 2.2.11$$

où nous avons introduit le débit local  $q$  défini par :

$$q(x,t) = \int_0^h u dy$$

L'équation (2.2.11) est exacte.

En relevant l'équation (2.2.10) sur toute l'épaisseur du film avec l'hypothèse d'un profil de vitesses semi-parabolique [5], on obtient une équation d'évolution de l'épaisseur  $h$  et du débit instantané local  $q$ .

L'approche intégrale de couche limite donne des résultats très satisfaisants à des nombres de Reynolds modérés mais échoue à décrire correctement la dynamique du film au seuil de l'instabilité.

### **2.3 Une alternative à l'approche intégrale de couche limite : Méthode des Résidus pondérés :**

La démarche de calcul que nous avons suivie repose sur une technique qui combine une méthode aux résidus pondérés à un développement en gradient du profil des vitesses.

Le champ des vitesses est projeté sur une base de fonctions tests indépendantes ( $f_i(y)$ ) qui vérifient la condition d'adhérence à la paroi.

$$u = \sum a_i(x,t) f_i(y) \quad 2.3.1$$

Approches théoriques

avec  $f_i(\eta) = \eta^{i+1} - \frac{i+1}{i+2} \eta^{i+2}$  où  $\eta = \frac{y}{h(x,t)}$ .

Les coefficients  $a_i$  ( $i \geq 1$ ) sont au moins d'ordre  $\varepsilon$  (voir [6] pour plus de détails) et n'apparaissent qu'avec la déformation de l'interface.

En suivant la démarche développée par Ruyer-Quil et Manneville [6] dans le cas de l'écoulement d'une couche mince d'un fluide newtonien,  $u(x, y, t)$  peut être écrit comme suit :

$$u(x, y, t) = u^0 + \varepsilon u^1 + o(\varepsilon^2) \quad 2.3.2$$

où  $u^0$  est un polynôme de degré 2 et  $u^1$  une correction de degré 6.

En écrivant le résidu correspondant au poids  $g$ , on réduit la dimension du problème d'un degré de liberté :

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[ -R\varepsilon(u_t + uu_x + vu_y) - \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_y^h v dy + 2\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} + 2R\Gamma \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (u_y^2) \right] g dy \\ & + \int_0^h \left[ R\Gamma \frac{\partial}{\partial y} (-\varepsilon u_{ty} - \varepsilon u u_{xy} - \varepsilon v u_{yy} + 2\varepsilon u_y v_y) \right] g dy + \\ & + \left[ 3 - 3\varepsilon h_x \cot\theta - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_y|_h) + \varepsilon \alpha H_a^2 h_x + \varepsilon^3 WR h_{xxx} \right] \int_0^h g dy = 0 \end{aligned} \quad 2.2.3$$

Les champs issus de la correction  $u^1$  du champ des vitesses n'apparaissent dans l'équation (2.2.3) qu'à travers le terme de diffusion  $u_{yy}$ . Une double intégration par partie de ce terme donne :

$$\int_0^h u_{yy} g dy = u_y|_h g|_h - u_y|_0 g|_0 - u|_h g'|_h + u|_0 g'|_0 + \int_0^h g'' u dy \quad 2.3.4$$

Puisque  $u(0) = 0$ , (2.3.4) se simplifie comme suit :

$$\int_0^h u_{yy} g dy = u_y|_h g|_h - u_y|_0 g|_0 - u|_h g'|_h + \int_0^h g'' u_y dy \quad 2.3.5$$

Le terme  $u_y|_h$  étant au moins d'ordre  $\varepsilon$ , les coefficients d'ordre un n'interviennent que

dans le calcul de  $u_y|_0$ ,  $u|_h$  et de  $\int_0^h g''(y) u dy$ .

Pour obtenir un modèle cohérent à l'ordre un sans avoir à expliciter les champs du même ordre, il suffit d'imposer aux fonctions poids de vérifier les relations suivantes :

## Approches théoriques

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(h) = 0 \\ g''(y) = f(x, t) \end{cases}$$

Une fonction poids identique à la fonction test vérifie ces trois conditions.

Le résidu correspondant au poids  $g$  associé à la condition cinématique (2.2.11) formeront le modèle, un système fermé de deux équations couplées où les seules inconnues sont l'épaisseur  $h$  du film et le débit local  $q$  :

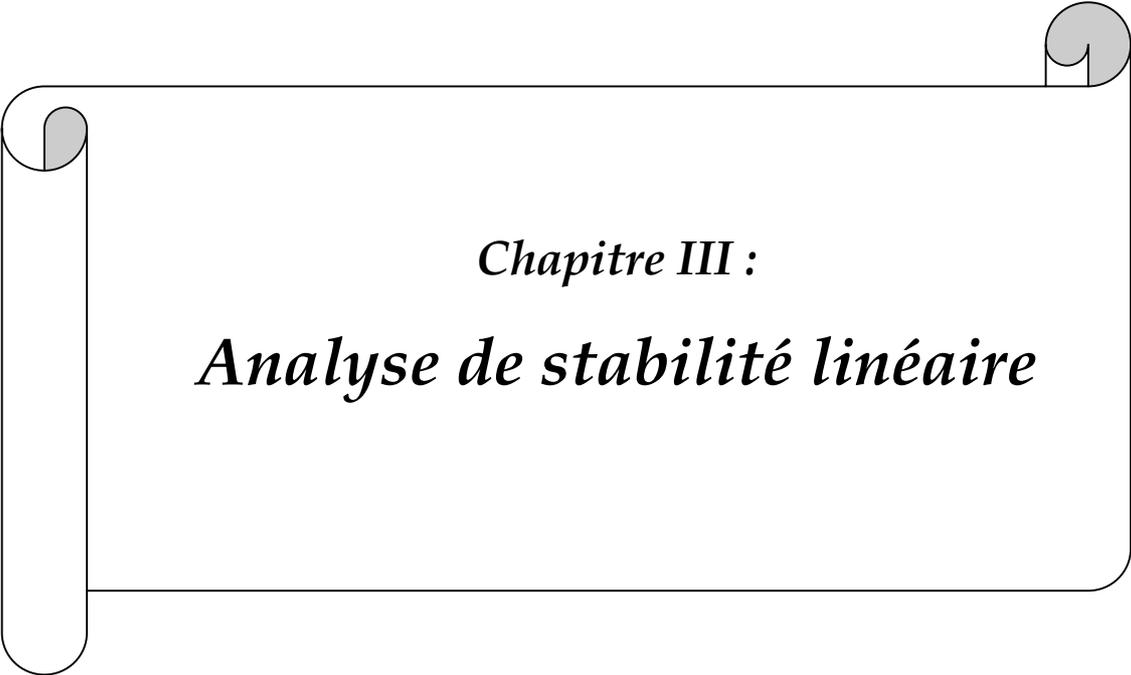
$$h_t + q_x = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} h(x, t) \varepsilon^3 W R h_{xxx}(x, t) + \left[ \frac{11}{140} h(x, t)^2 H_a^2 q_{xx}(x, t) + \frac{9}{5} q_{xx}(x, t) + \frac{5}{8} \frac{q(x, t) h(x, t)^2}{h(x, t)^2} - \frac{12}{5} \frac{q(x, t) h_{xx}(x, t)}{h(x, t)} \right. \\ & - \frac{9}{5} \frac{q_x(x, t) h_x(x, t)}{h(x, t)} + \frac{11}{104} h(x, t) H_a^2 q_x(x, t) h_x(x, t) - \frac{29}{140} H_a^2 q(x, t) h_x(x, t)^2 - \frac{107}{840} h(x, t) H_a^2 h_x(x, t) \left. \right] \varepsilon^2 \\ & + \left[ \frac{9}{2} \frac{R \Gamma q(x, t) q_x(x, t)}{h(x, t)^3} - \frac{6 R \Gamma q^2(x, t)}{h(x, t)^4} h(x, t) + \frac{18}{35} \frac{R \Gamma q^2(x, t) h_x(x, t)}{h^2(x, t)} - h(x, t) h_x(x, t) \cot \theta \right. \\ & + \frac{1}{3} h(x, t) \alpha H_a^2 h_x(x, t) - \frac{3}{2} \frac{R \Gamma q(x, t) h_t(x, t)}{h(x, t)^3} + \frac{23}{40} \frac{R q(x, t) h_t(x, t)}{h(x, t)} + \frac{R \Gamma q_t(x, t)}{h(x, t)^2} - \frac{2}{5} R q_t(x, t) \\ & \left. - \frac{111}{280} \frac{R q_x(x, t) q_x(x, t)}{h(x, t)} \right] \varepsilon - \frac{q(x, t)}{h(x, t)^2} + h(x, t) \end{aligned}$$

### 2.3.6

En posant  $\Gamma = 0$ ,  $\alpha = 0$  et  $H_a = 0$  dans (2.3.6), on retrouve le modèle de Ruyer-Quil et Manneville [6] qui décrit l'écoulement sur une paroi inclinée d'un film mince d'un fluide newtonien.

Contrairement aux modèles intégraux du type Shkadov [5], notre modèle donne avec précision le seuil du déclenchement des instabilités.



*Chapitre III :*  
*Analyse de stabilité linéaire*

# Chapitre 3:

## Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire des écoulements de films de fluides en présence ou non d'un champ électromagnétique s'avère essentielle pour étudier et comprendre le phénomène de transition vers la turbulence. Le principe de la théorie linéaire consiste à examiner la réponse du système à une perturbation de faible amplitude.

Dans ce chapitre, une analyse de stabilité linéaire sera effectuée dans le but de déterminer le seuil du déclenchement des instabilités ( $R_C$ ) et d'examiner l'influence de différents paramètres sur la stabilité de l'interface.

### 3.1 Equations linéarisées :

Dans le cadre d'une étude de stabilité linéaire, l'écoulement de base (1.3.7) est légèrement perturbé. L'expression de l'épaisseur  $h(x,t)$  et du débit  $q(x,t)$  du film désormais instable sera alors :

$$h(x,t) = 1 + \tilde{H}(x,t) \quad 3.1.1$$

$$q(x,t) = q_0 + \tilde{Q}(x,t) \quad 3.1.2$$

$$\text{où } q_0 = \int_0^1 U(y) dy = 1 \quad 3.1.3$$

Les perturbations  $\tilde{H}$  et  $\tilde{Q}$  étant imperceptibles, on peut négliger les termes non linéaires dans les équations formant le modèle (2.2.11, 2.3.6).

La forme linéaire des équations obtenues suggère de rechercher des solutions sous forme de modes normaux de nombre d'onde  $k$  et de pulsation  $w$ . On écrit donc :

$$\tilde{H}(x,t) = H_0 e^{i(kx - wt)} \quad 3.1.4$$

$$\tilde{Q}(x,t) = Q_0 e^{i(kx - wt)} \quad 3.1.5$$

avec  $H_0$  et  $Q_0 \ll 1$

En substituant les expressions (3.1.4) et (3.1.5) dans les équations linéarisées, on obtiendra un système algébrique où les inconnues sont  $H_0$  et  $Q_0$  :

$$H_0 w I + Q_0 k I \quad 3.1.6$$

$$\begin{aligned} & \left( -336IRw - 66H_a^2 k^2 - 1512k^2 - 840 + 3780IR\Gamma k - 333IRk + 2016H_0 k^2 + 3780IR\Gamma k - 333IRk \right. \\ & \left. - 840IR\Gamma w \right) Q_0 + \left( -280IRWRk^3 - 5040IR\Gamma k + 1260IR\Gamma w - 483IRw - 840Ik \cot \theta \right. \\ & \left. + 107H_a^2 k^2 + 432IR + 280I\alpha H_a^2 k + 2520 + 2016k^2 \right) H_0 \end{aligned} \quad 3.1.7$$

Le système (3.1.7) n'admet de solutions non nulles que si son déterminant est nul. Cette dernière condition donnera :

$$\begin{aligned} & -k^2 RW + \left( -\frac{36}{5} I - \frac{107}{280} IH_a^2 \right) k^3 + \left( -18R\Gamma + \alpha H_a^2 + \frac{27}{5} Iw - 3 \cot \theta \right. \\ & \left. + \frac{33}{140} IwH_a^2 + \frac{54}{35} R \right) k^2 + \left( -\frac{102Rw}{35} - 9I + 18R\Gamma w \right) k + \frac{6w^2 R}{5} + 3Iw - 3w^2 R\Gamma = 0 \end{aligned} \quad 3.1.8$$

Il s'agit de la relation dispersion des perturbations d'amplitude infinitésimale.

### 3.2 Etude de stabilité temporelle :

L'étude qui suit concerne la stabilité temporelle de l'écoulement, le nombre d'onde  $k$  est dans ce cas réel et la pulsation  $w$  est complexe pour tout  $k$ .

On écrit :

$$w = w_r + iw_i \quad 3.2.1$$

On aura alors:

$$\tilde{H} = H_0 \exp(w_i t) \cdot \exp[i(kx - w_r t)] \quad 3.2.2$$

$$Q = Q_0 \exp(w_i t) \cdot \exp[i(kx - w_r t)] \quad 3.2.3$$

## Analyse de stabilité linéaire

La partie imaginaire  $w_i$  de la pulsation  $w$  représente le taux d'amplification de la perturbation. Cette dernière est amplifiée ou amortie dans le temps selon que  $w_i$  est supérieur ou inférieur à zéro. Si  $w_i=0$ , la stabilité est dite neutre ou marginale.

A partir du développement aux petits nombres d'onde de la pulsation  $w$ , nous avons montré que les ondes longues se propageaient à une célérité proche de 3 fois la vitesse moyenne de l'écoulement.

Pour un nombre d'onde critique nul, la valeur du nombre de Reynolds marquant le seuil du déclenchement de l'instabilité a été déterminée:

$$R_c = \frac{1}{5\Gamma + 2} \left( \frac{5}{3} \cot(\theta) - \frac{5\alpha H_a^2}{9} \right) \quad 3.2.4$$

Ce nombre est inversement proportionnel au paramètre viscoélastique  $\Gamma$ . La viscoélasticité a un effet déstabilisant sur l'écoulement.

Pour des inclinaisons du plan telles que  $\cot(\theta) > \frac{\alpha H_a^2}{3}$ , le nombre de Reynolds critique diminue avec l'augmentation de  $\alpha$  et  $H_a$ . Les champs électrique et magnétique déstabilisent l'écoulement dans ce cas.

Pour des inclinaisons telles que  $\cot(\theta) \leq \frac{\alpha H_a^2}{3}$ , l'écoulement est toujours instable.

Lorsque l'orientation du champ électrique est opposée à celle choisie, le nombre de Reynolds critique augmente avec l'augmentation des paramètres  $\alpha$  et  $H_a$ , l'écoulement se stabilise dans ce cas. Cette tendance est plus accentuée pour les grandes valeurs de  $H_a$ .

En posant  $\Gamma = 0$ ,  $H_a = 0$  et  $\alpha = 0$  dans (3.2.4), on retrouve la valeur du nombre de Reynolds critique pour l'écoulement d'un film fluide newtonien :

$$R_c = \frac{5}{6} \cot(\theta)$$

### **3.2.1 Courbes de stabilité marginale :**

Les figures (3.2.1.1-3.2.1.4) représentent les courbes de stabilité marginale correspondant aux modes neutres du système ( $w_i=0$ ).

Ces courbes partagent le plan  $(k,R)$  en deux régions, une région stable caractérisée par des taux d'amplification négatifs ( $w_i<0$ ) et une région instable caractérisée par des taux d'amplification positifs ( $w_i>0$ ).

Les calculs ont été effectués pour un nombre de Kapitza de 10 et un paramètre viscoélastique  $\Gamma$  de 0.05. Le fluide s'écoule sur une paroi verticale.

Nous avons fait varier les paramètres électrique et magnétique pour examiner leur influence sur la stabilité de l'interface.

De la figure 3.2.1.1, on remarque que la zone de stabilité rétrécit lorsque le paramètre électrique augmente. Le même effet a été constaté en augmentant le nombre de Hartmann  $Ha$  (Fig. 3.2.1.2). La tendance déstabilisatrice est cependant plus perceptible dans ce dernier cas.

Les Figures 3.2.1.3 et 3.2.1.4 sont les courbes de stabilité marginale obtenues pour une orientation opposée du champ électrique. De ces figures, on observe un élargissement de la zone de stabilité lorsque l'intensité des champs électrique et magnétique augmente. Là aussi, la tendance est plus marquée avec l'augmentation de  $Ha$ .

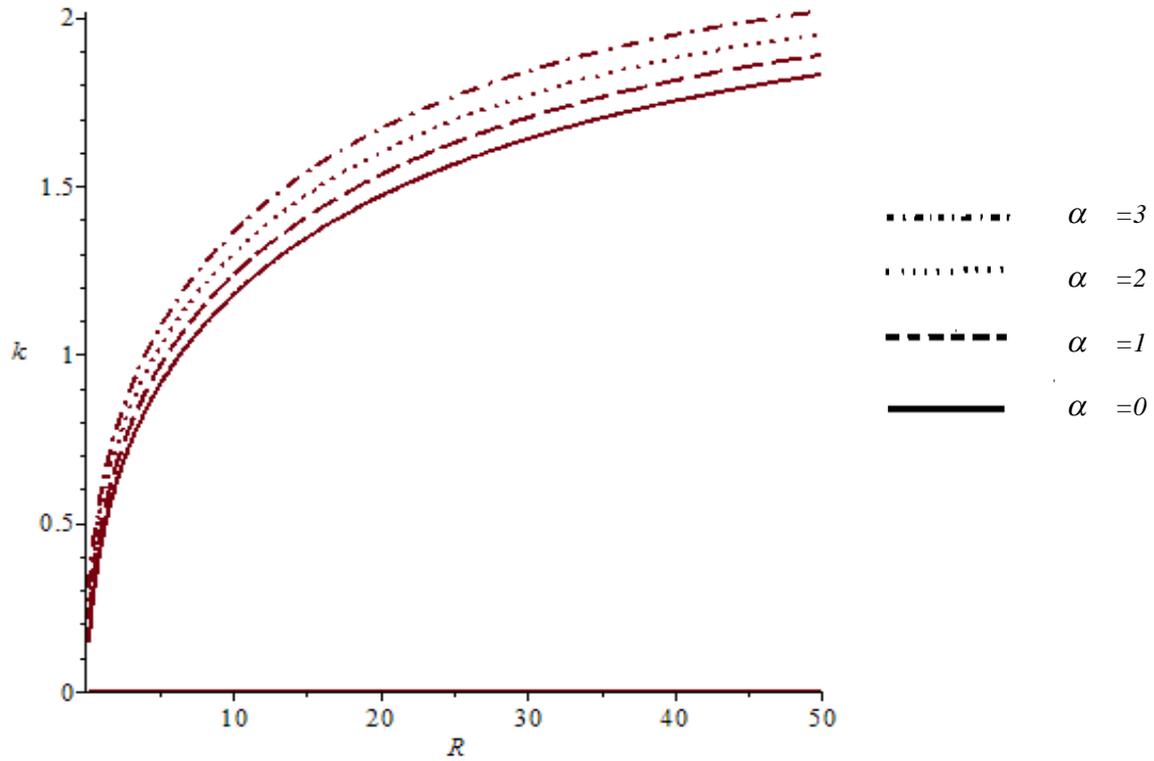


Figure 3.2.1.1 Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés :  $H_a=1$ ,  $Ka=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$

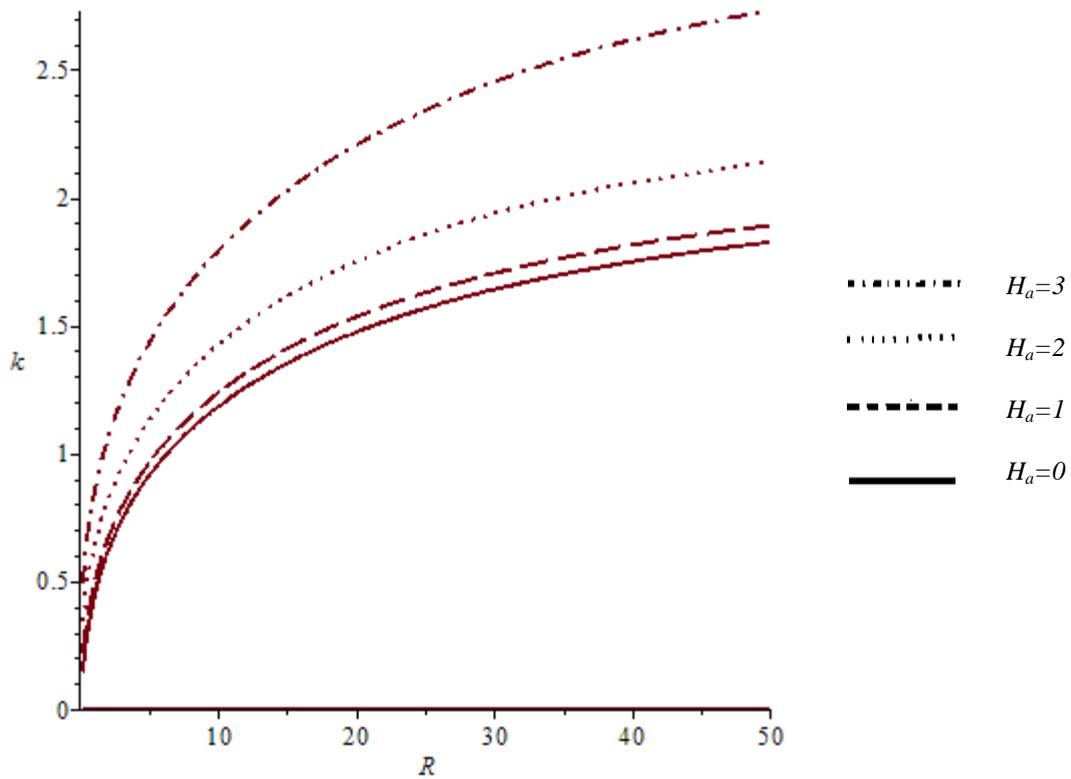


Figure 3.2.1.2 Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés :  $\alpha=1$ ,  $Ka=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$

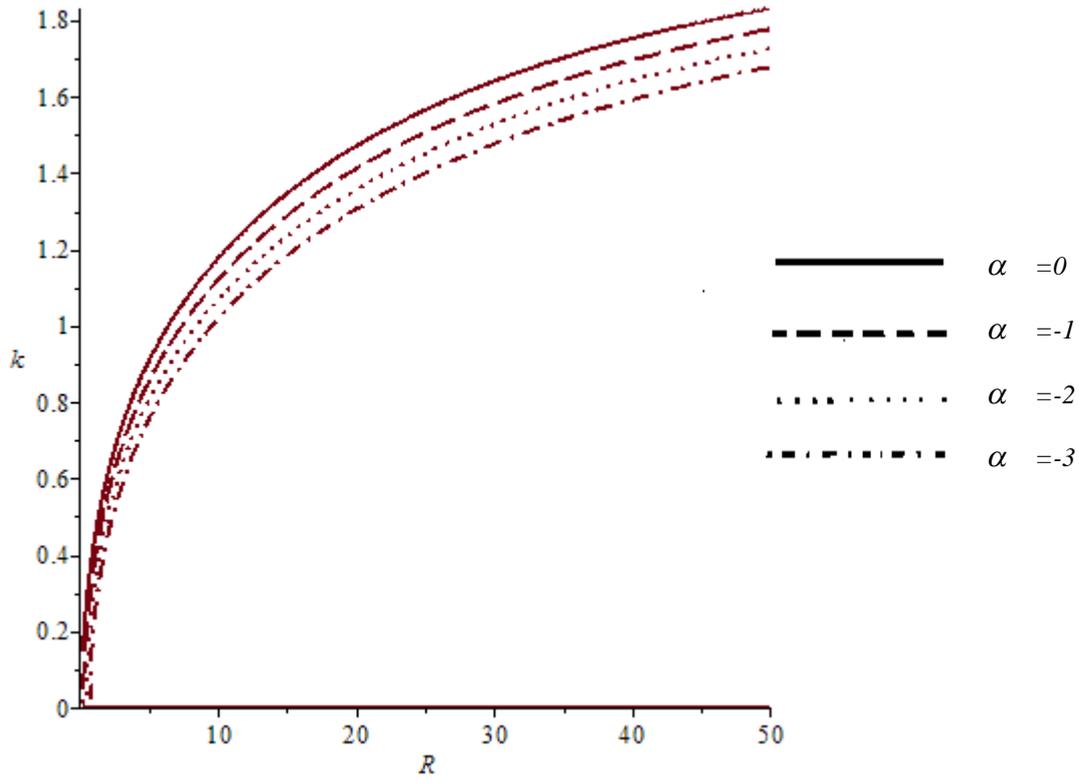


Figure 3 .2.1.3 Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés :  $H_a=1, Ka=10, \Gamma=0.05, \theta=90^\circ$

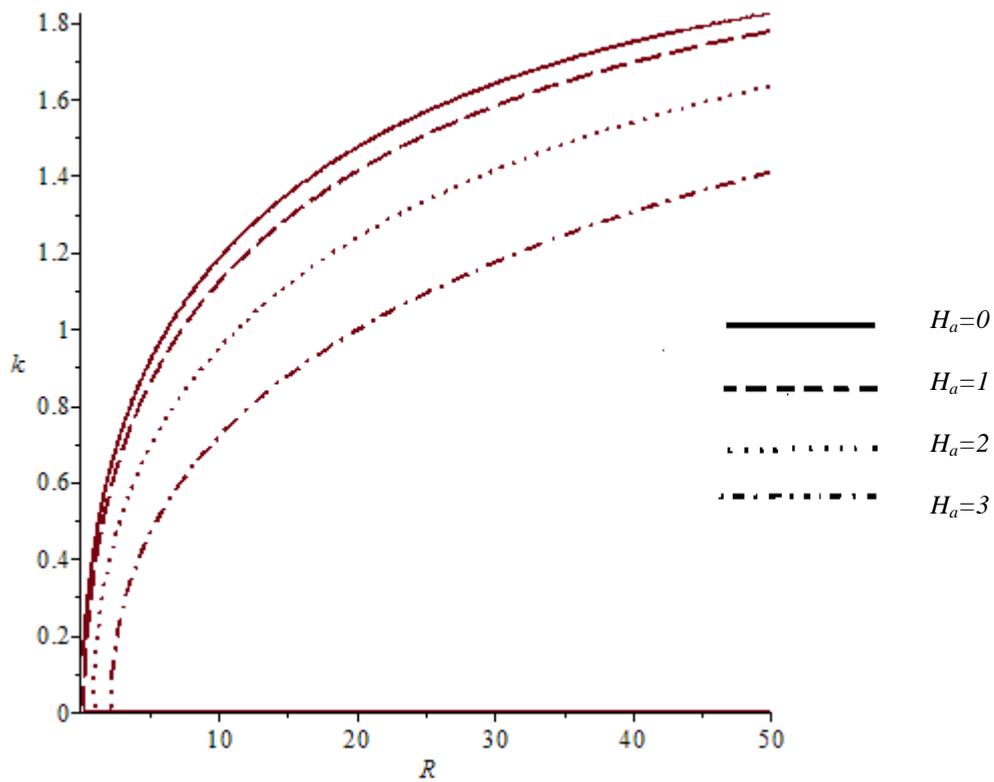


Figure 3 .2.1.4 Courbes de stabilité marginale obtenues pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés :  $\alpha = -1, Ka=10, \Gamma=0.05, \theta=90^\circ$

### **3.2.2 Taux d'amplification des instabilités :**

Les figures qui suivent montrent l'influence du champ magnétique et électrique sur le taux d'amplification des perturbations.

Sur la figure (3.2.2.1), nous avons représenté le taux d'amplification  $w_i$  pour différentes valeurs du paramètre électrique  $\alpha$ . On remarque que l'écoulement est déjà en mode instable ( $w_i > 0$ ) pour un nombre de Reynolds de 10. De plus, le taux d'amplification augmente quand le paramètre électrique augmente. Le maximum d'amplification est obtenu pour un nombre d'onde avoisinant le 0.6.

La figure 3.2.2.2 illustre l'influence du champ magnétique. L'onde la plus amplifiée correspond à la valeur de  $Ha$  la plus grande. Nous avons également remarqué que le nombre d'onde  $k$  correspondant au maximum d'amplification augmentait considérablement avec l'augmentation de  $Ha$ .

L'effet s'inverse lorsque l'orientation du champ électrique change (Fig. 3.2.2.3 et 3.2.2.4). Le taux d'amplification diminue dans les deux cas lorsque l'intensité des deux champs croît.

Ces calculs ont été effectués pour un nombre de Reynolds de 10 et pour une inclinaison correspondant à un écoulement vertical.

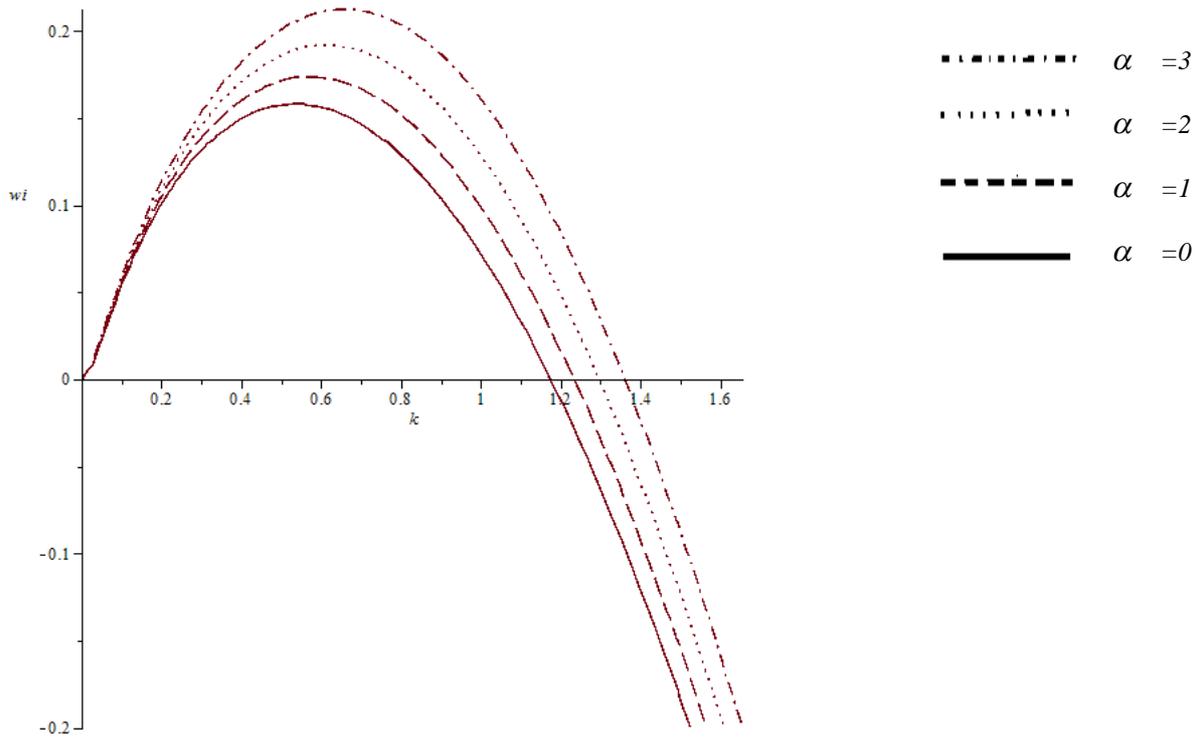


Figure 3.2.2.1 : Taux d'amplification  $w_i$  des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés :  $H_a=1$ ,  $Ka=10$ ,  $R=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$

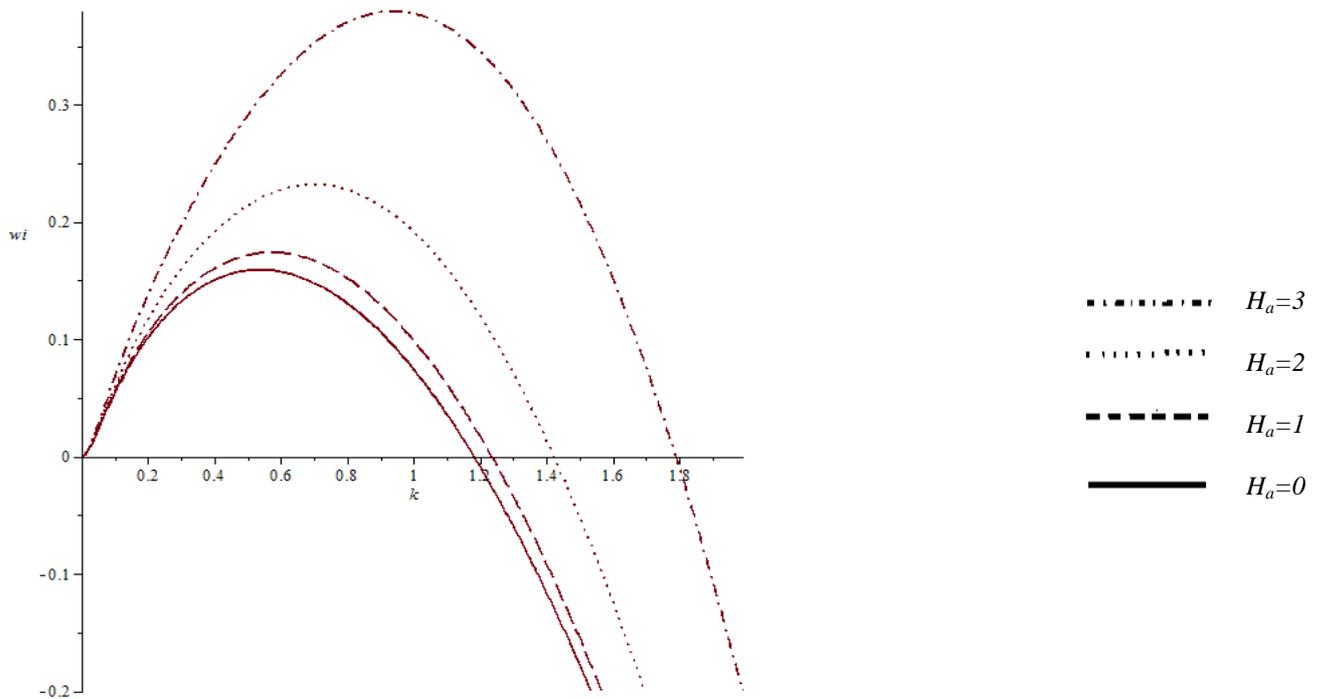


Figure 3.2.2.2 : Taux d'amplification  $w_i$  des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre de Hartmann. Les autres paramètres ont été fixés :  $\alpha = 1$ ,  $Ka=10$ ,  $R=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$

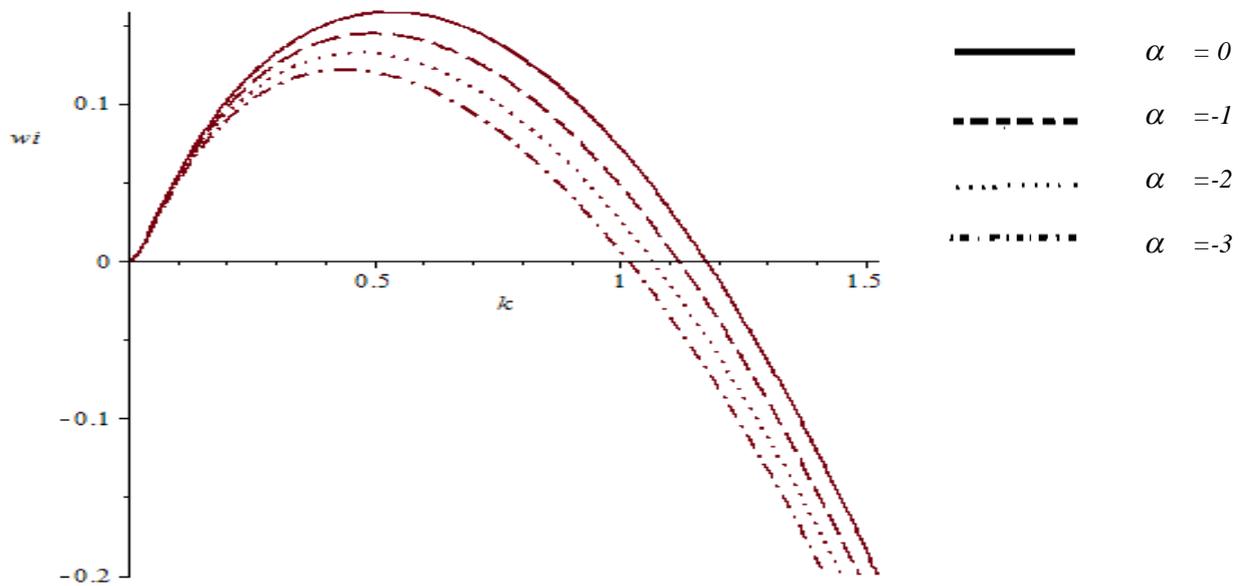


Figure 3.2.2.3. Taux d'amplification  $w_i$  des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre électrique. Les autres paramètres ont été fixés :  $H_a=1$ ,  $Ka=10$ ,  $R=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$

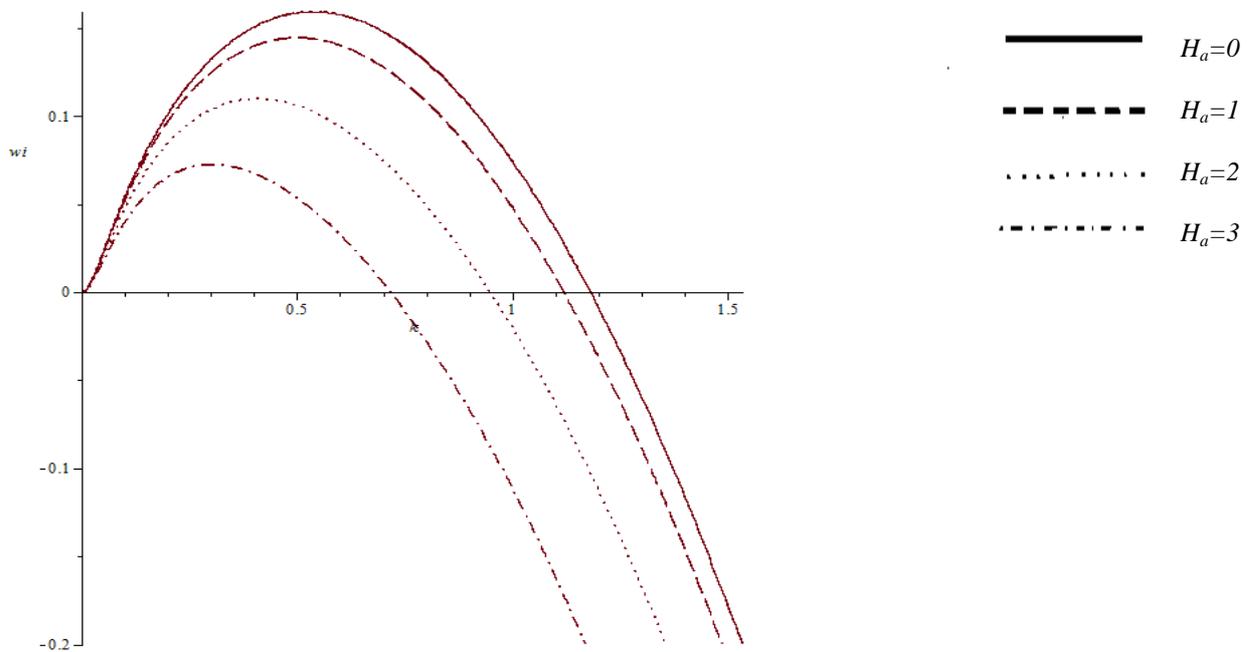
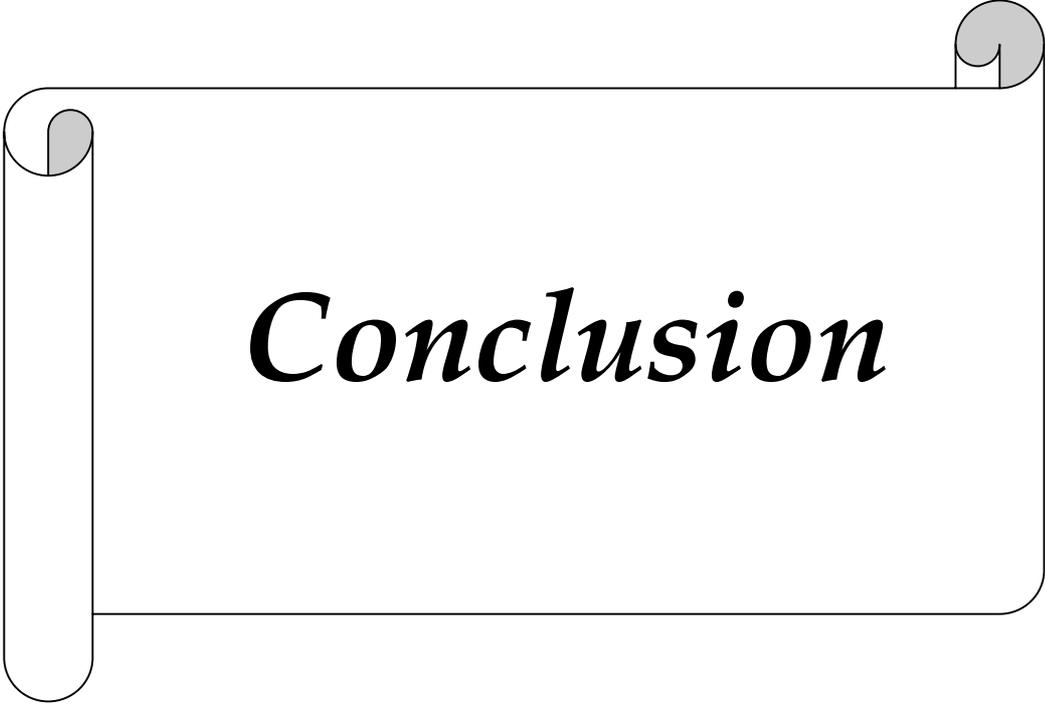


Figure 3.2.2.4. Taux d'amplification  $w_i$  des ondes obtenu pour différentes valeurs du nombre magnétique. Les autres paramètres ont été fixés :  $\alpha=-1$ ,  $Ka=10$ ,  $R=10$ ,  $\Gamma=0.05$ ,  $\theta=90^\circ$



***Conclusion***

# Conclusion générale

Nous avons abordé dans ce mémoire de fin de cycle une étude sur la stabilité de l'écoulement bidimensionnel de films de fluides non newtoniens en présence d'un champ électromagnétique.

Afin de réaliser cette étude, une modélisation approchée des équations gouvernant l'écoulement à surface libre a été mise en œuvre. La méthodologie suivie est adaptée à l'étude des instabilités de grandes longueurs d'ondes observées dans les écoulements de films minces.

Pour répondre à la problématique posée dans ce travail, nous avons partagé ce mémoire en trois parties.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les équations gouvernant l'écoulement à surface libre du fluide considéré. L'écriture des équations obtenues sous forme adimensionnelle a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème. Nous avons par la suite déterminé la solution de ces équations dans le cadre relativement restreint d'un écoulement permanent.

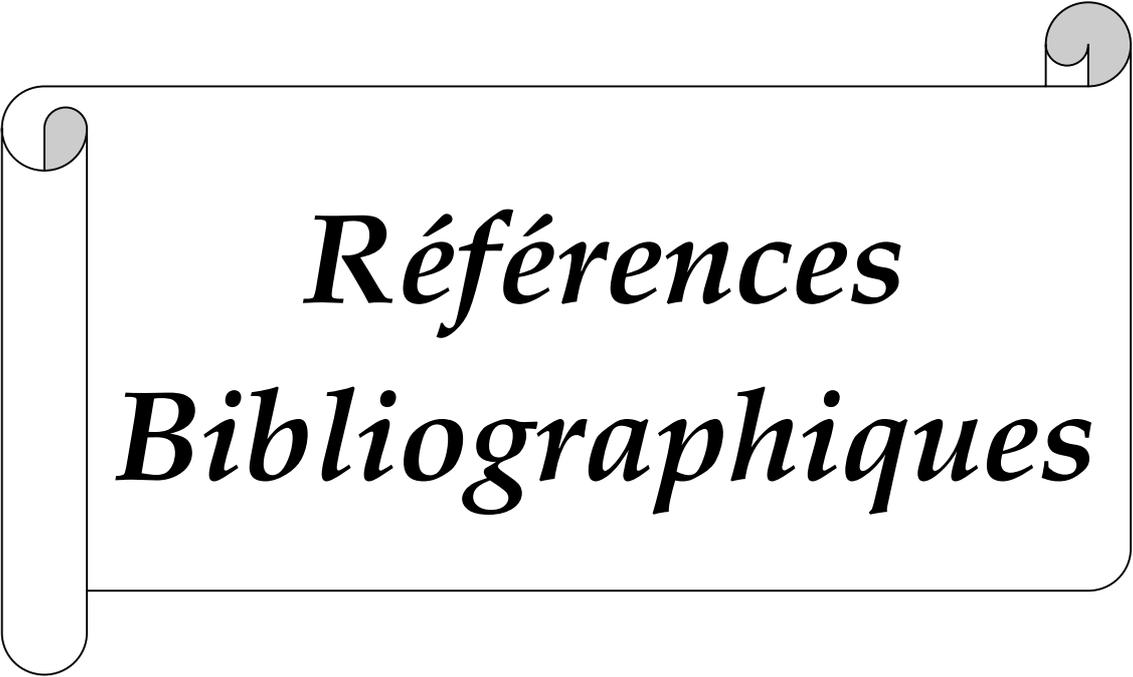
Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les modèles théoriques déjà développés pour décrire les instabilités de la surface libre. Deux familles de modèles sont rencontrées dans la littérature. Des modèles à une équation donnant l'évolution de l'épaisseur du film et des modèles à deux équations décrivant en plus l'évolution du débit local. Le choix de l'approche utilisée a été dicté par l'étendue de son domaine d'application. Nous avons donc opté pour l'approche intégrale aux résidus pondérés de Ruyer-Quil et Manneville. Le modèle à deux équations obtenu est valable jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de la centaine.

Une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement a fait l'objet du troisième chapitre de ce mémoire. Cette étude nous a permis d'étudier l'effet des champs électrique et magnétique via le tracé de courbes de stabilité marginale. L'influence des deux champs sur le taux d'amplification des perturbations a également été examinée.

## Conclusion

Dans le but d'approfondir et d'améliorer cette étude, il serait intéressant d'étudier :

- La stabilité de l'écoulement 2D de fluides viscoélastiques de type Oldroyd B en présence ou non d'un champ électromagnétique.
- La stabilité d'écoulements de fluides viscoélastiques dans une cavité cylindrique.
- La stabilité de l'écoulement 3D de films de fluides non newtoniens en présence d'un champ électromagnétique.



*Références  
Bibliographiques*

# Références bibliographiques

- [1] P.L Kapitza & S.P Kapitza., Wave flow of thin layers of viscous fluid. Zh.Eksp.Teor.Fiz. 19, 1 5, 1949.
- [2] D .J. Benney, Long waves on liquid films. J. Math. & Phys., 45:150–155, 1966.
- [3] G. L. Kliakhandler, Long interfacial waves in multilayer thin films and coupled Kuramoto-Shivashinsky equations. J. Fluid Mech., 31:45–65, 1999.
- [4] T. Kawahara, Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation. Phys. Rev. Lett., 51:381–383, 1983.
- [5] V. Ya. Shkadov. Wave modes in the gravity flow of a thin layer of a viscous fluid. Izv.Akad.Nauk.SSSR Mekh.Zhidk. I Gaza, 2:20–25, 1968.
- [6] C. Ruyer-Quil et P. Manneville, Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. Physics of Fluids, 14(1):170–183, 2001.
- [7] Abdoulaye FALL (Juin 2008), Rhéophysique des fluides complexes : Ecoulement et Blocage de suspensions concentrées. Thèse de doctorat de l’université Paris 7.
- [8] E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, Hydrodynamique physique, EDP Sciences (2012)
- [9] R.K. Zeytounian, Mécanique des fluides Fondamentale, Springer-Verlag (1991).
- [10] T.B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane. J. Fluid Mech. 2, 554-573, 1957.
- [11] C.-S. Yih, Instability due to viscosity stratification. J. Fluid Mech. 27, 337-352, 1967
- [12] R. E. Kelly, D. A. Goussis, S. P. Lin, et F. K. Hsu, The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. Phys. Fluids A 1(5), 819-828, 1989.
- [13] M. K. SMITH, The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films, J. Fluid Mech. 217, 469-485, 1990.
- [14] Séverine Millet (2007) Stabilité de l’écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné Formation doctorale : MECANIQUE DES FLUIDES, École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique de Lyon
- [15] A. P. Bruins, Mass Spectrom. Rev. 10:53, 1991.
- [16] J.M. Floryan, S. H Davis et R. E. Kelly, Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane.Phys. Fluids 30(4), 983-989, 1987.

## Références bibliographiques

- [17] A. S. Gupta, Stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane, *J. Fluid Mech.* 28, 17-28, 1967.
- [18] W. Lai, Stability of an Elastico-Viscous Liquid Film Flowing down an Inclined Plane, 1967.
- [19] E. S. G. Shaqfeh, R. G. Larson et G. H., Fredrickson, The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate Reynolds number, *J. Non-Newton. Fluid*, 1989.
- [20] B. Uma and R. Usha, Dynamics of a thin viscoelastic film on an inclined plane, *International Journal of Engineering Science*, 44, 1449-1481, 2006.
- [21] N. Amatusse, H. Ait Abderrahmane, N. Mehidi, Traveling waves on a falling weakly viscoelastic fluid film, *Int. J. Eng. Science*, 54, 27-41, 2012.
- [22] D.Y. Hsieh, Stability of a conducting fluid film flowing down inclined plane in a magnetic field. *Phys.Fluid*, 8. 1785-1791, 1965.
- [23] Ladikov Yu P., Flow stability of a conducting liquid flowing down inclined plane in the presence of a magnetic field, *Fluid Dynamics*, 1,1-4, 1966.
- [24] Korsunsky, Long waves on a film layer of conducting fluid film flowing down inclined plane in an electromagnetic field. *EurJ.Mech. B/fluids* 18 2.295-313,1999.
- [25] M. Amaouche, H. Ait Abderrahmane and L. Bourdache, Hydromagnetic thin film flow: Linear stability. *Physical Review* 88, 023028, 2013.
- [26] H. Ait Abderrahmane, G.H.Vatistas, Effect of uniform and constant electromagnetic fields on the stability of thin layer of liquid metal flow, *Fusion Engineering and Design*, 83, 661-666, 2008.
- [27] M. Boutounet. Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince. Thèse doctorat université Toulouse Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace. Spécialité : Mathématiques appliquées et dynamique des fluides. Novembre 2011.

**Résumé :**

Les applications liées aux écoulements de films viscoélastiques sont nombreuses, on pourrait citer par exemple l'industrie des polymères, en particulier leur mise en forme, mais aussi l'industrie alimentaire, l'industrie des pâtes à papier....

Quel que soit leur domaine d'application, la régularité de l'interface séparant ces films est primordiale, d'où l'intérêt de connaître au préalable les conditions menant à sa déstabilisation.

Notre étude porte sur la stabilité de l'écoulement plan d'un film fluide viscoélastique soumis à l'action d'un champ électromagnétique. Une modélisation approchée des équations gouvernant l'écoulement à surface libre a été mise en œuvre. Bien que ne faisant intervenir qu'un nombre restreint de champs hydrodynamiques, le modèle obtenu contient tous les effets physiquement importants. Une étude linéaire de stabilité de l'écoulement a été effectuée suivant une approche temporelle du problème. Nous avons déterminé dans ce cadre les conditions critiques au seuil de l'instabilité. L'influence de l'application d'un champ électromagnétique uniforme a été examinée.

**Mots clés :** film mince, fluide non newtonien, champ électromagnétique, instabilités.