

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master en Physique

Spécialité: Physique Théorique

THEME

**Etude de la stabilité d'écoulements
gravitaires de films liquides**

Présenté par : Mlle BOUKORRAS Sarra

Soutenu le: Juin 2015 devant le Jury composé de:

Président : Mme O. MEZIANI

Professeur Université de Béjaïa

Rapporteur : Mme Nadia MEHIDI

MCA Université de Béjaïa

Examineur : Melle N. AMATOUSSE

MCA Université de Béjaïa

Examineur : Mme L. TIGRINE

MCB Université de Béjaïa

ANNEE 2014/2015

REMERCIEMENTS

Louange à Dieu le Miséricorde

A ceux qui m'ont aidé avec un simple mot de courage pour préparer ce travail

Je remercie Madame MEHIDI NADIA, j'apprécie ses efforts pour m'encourager, merci pour votre gentillesse, vos conseils, orientations précieuses, merci pour votre soutien tout au long de ce travail. Merci infiniment.

Mes sincères remerciements vont à Mme O.MEZIANI pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Melle N.AMATOUSSE et Mme L.TIGRINE pour l'intérêt qu'elle ont porté à mon travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

A mes parents, sans eux, je n'en serais pas là aujourd'hui. Merci pour tout leur amour et leur soutien depuis toujours. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, la conséquence de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude

Je tiens à remercier toute ma famille

Au grand cœur, le grand amour Lamia

A celle qui ses histoires m'ont manqué Aicha

A mon cher frère Salah

A notre sourire Mouhamed Abderraouf

Sans oublier les époux de mes sœurs Riad et Rabeh

A mes chers neveux Abderrahmane, Selsabil, Merime, Mouhamed, Alaa

A Monsieur Ouar Youcef et son épouse Samia et ses enfants Melissa, Sabrina et mounir

Je remercie également Monsieur Dehouche Mouloud

A tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de ce travail

Merci

TABLES DES MATIERES

Liste des symboles	5
Introduction Générale	7
Chapitre I- Etude bibliographique	
I.1 Contexte général des écoulements avec interface	10
I.2 Domaines d'application	11
I.3 Différents types d'écoulements	12
I.4 Instabilités hydrodynamiques	12
I.5 Instabilité capillaire	13
Chapitre II- Formulation mathématique du problème	
II.1 Introduction	16
II.2 Configuration étudié	16
II.3 Etablissement des Equations de Navier-Stokes dans le repère en coordonnées cylindriques	18
II.3.1 Equations de Navier-Stokes	18
II.3.2 Conditions aux limites	19
Conditions aux limites à la paroi	20
Conditions aux limites à l'interface fluide-fluide	20
II.4 Intégration des équations relatives à l'écoulement de base	22
II.5 Système complet	25

Chapitre III – Adimensionnement des équations 2D

III.1 Introduction	28
III.2 Ecoulement axisymétrique	28
III.3 Equations adimensionnées	30
III.4 Nombres adimensionnés	32

Chapitre IV –Analyse asymptotique à faible nombre de Reynolds

IV.1 Introduction	34
IV.2 Hypothèse onde longue	34
IV.3 Résolution à l'ordre 0	35
IV.4 Résolution à l'ordre 1	36

Conclusion et perspectives 38

Références bibliographiques 39

.LISTE DES SYMBOLES

(e_r, e_θ, e_z)	La base locale
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
$\mathbf{U}_j(r, \theta, z, t)$	Vitesse de chaque fluide $j = 1$ ou 2
u_j, v_j, w_j	Composantes de la vitesse de fluide j
$p_j(r, \theta, z, t)$	Pression de chaque fluide
μ_j	viscosité dynamique du fluide j
ρ_j	Masse volumique du fluide j
R_1	Le rayon de la région fluide (1)
R_2	Le rayon de la conduite fluide (2)
$h = h(r, z, t)$	Épaisseur du fluide
t	temps
\mathbf{t}_j	Vecteur unitaire tangentielle
\mathbf{n}	la normale à l'interface
\mathbf{T}	Tenseur des contraintes
\mathbf{S}	tenseur de taux déformation
$\boldsymbol{\tau}$	Le tenseur des contraintes visqueuses
τ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes visqueuses
σ	Tension de surface
K	la courbure de l'interface
k	Nombre d'onde

λ	Longueur d'onde dans la direction de l'écoulement
ε	$\varepsilon = \frac{R_1}{\lambda}$ Pareramètre onde longue
R_e	Nombre de Reynolds
R_{ec}	Nombre de Reynolds critique
W	Nombre de Weber
μ	$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ Rapport des viscosités dynamiques des fluides
ρ	$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ Rapport des masses volumiques des fluides
d	$d = \frac{R_2}{R_1}$ Rapport des épaisseurs des fluides

INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements des films minces sont rencontrés dans de nombreux domaines industriels et naturels. La stabilité de l'interface entre deux ou plusieurs couches de fluides visqueux en écoulement laminaire a fait l'objet de nombreux travaux tant du point de vue théorique [1,2,3,4] qu'expérimental [4,5,6]. Une partie de ces études concernent la stabilité de l'interface s'écoulant par gravité sur des surfaces planes [2, 3]. Une seconde partie concerne l'étude des écoulements sur des parois courbes [1, 4, 6]. Le moteur de l'écoulement peut être la gravité comme dans notre travail, un gradient de pression ou alors un cisaillement :

- Des films liquides d'épaisseur millimétrique s'écoulant par gravité sur une paroi plane.
- Films multicouches sous l'action d'un gradient de pression.
- Films liquides cisailés par un gaz.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à la stabilité de l'interface entre deux fluides visqueux s'écoulant par gravité à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Les instabilités observées dans les films liquides tombants se manifestent par l'apparition d'onde de surface. Dans le cas des films minces de faibles effets inertiels peuvent être à l'origine de cette instabilité (elle se produit à de faible nombre de Reynolds). Selon les applications l'instabilité pourra avoir un effet favorable sur le procédé, elle sera alors recherchée ou au contraire elle sera évitée. Ce travail développe un modèle théorique basé sur la théorie de grande longueur d'onde qui conduit à une équation d'évolution des ondes de surface avec une petite amplitude. Cette équation permet de déterminer les conditions critiques d'apparition des instabilités. C'est ainsi que le problème a été résolu par Benney [7], dans le cas d'un écoulement d'un film mince sur un plan incliné.

- Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique.
- Le second chapitre, traite de la formulation mathématique du problème. Les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites associées sont exprimées en coordonnées cylindriques.

- La définition des films minces conduit à une hypothèse simplificatrice des équations de Navier-Stokes. Ces dernières sont écrites dans le chapitre trois sous formes adimensionnées dans l'hypothèse de grande longueur d'onde.
- La méthode de résolution est traitée dans le chapitre quatre. Il s'agit de regarder la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis des perturbations d'amplitude infinitésimale, en lui superposant une perturbation des vitesses, une perturbation des pressions.

CHAPITRE I
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Contexte général des écoulements avec interface

Les écoulements multicouches sont le siège d'instabilités aux l'interfaces. Les études théoriques et expérimentales sur le comportement de l'interface entre deux fluides visqueux en écoulement laminaire montrent qu'il existe deux types d'instabilités :

Le premier type d'instabilité est un mode de cisaillement [8,11] obtenu pour un nombre d'onde k_c fini et de grands nombres de Reynolds R_e . Ce mode possède des taux d'amplification ω très fort et la déstabilisation de ce mode peut conduire à la transition vers la turbulence de l'écoulement.

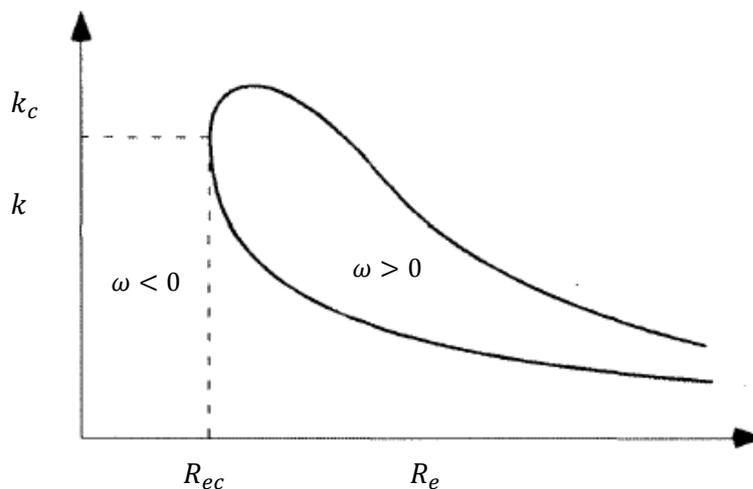


Fig.I.1 Allure de la courbe de stabilité marginale dans le plan $(R_e - k)$ pour le mode de cisaillement

Le deuxième mode d'instabilité est un mode d'interface [8] avec un faible taux d'amplification, il se déstabilise pour un nombre d'onde k_c nul (figure I.2 (b)) et à de faibles nombres de Reynolds. Sa déstabilisation à un faible taux d'amplification permet de prévoir l'existence d'ondes d'amplitudes finies (qui ne conduisent pas vers la turbulence de l'écoulement).

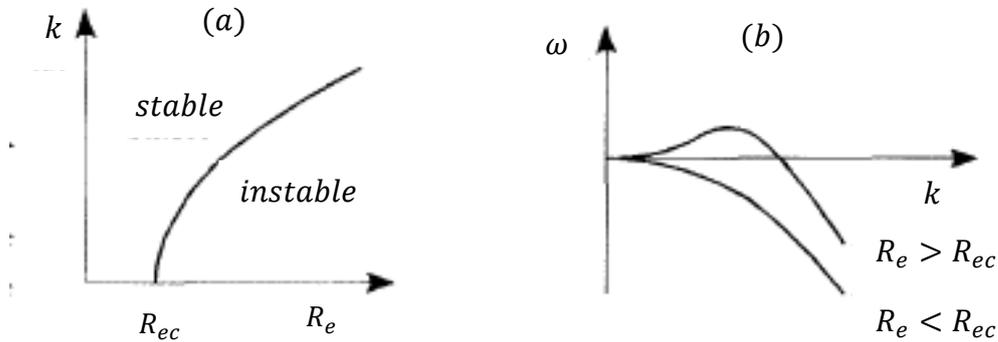


Fig.I.2 (a) Allure de la courbe de stabilité marginale dans le plan $(R_e - k)$ pour le mode interfacial. (b) allure du taux d'amplification $\omega(k)$ pour $R_e > R_{ec}$ et pour $R_e < R_{ec}$.

I.2 Domaines d'application

L'étude du comportement et de la dynamique des écoulements de couches de fluides représente un problème fondamental en physique dont la compréhension profiterait à différents secteurs de l'industrie dans certains de ses problèmes d'ingénierie.

- En aérodynamique automobile, on rencontre un écoulement complexe gaz-liquide sur des parois planes et courbes qui ne facilitent pas le contrôle de ces écoulements.
- Le génie chimique qui vise à augmenter les surfaces d'échanges pour favoriser les réactions chimiques dans les réacteurs des pompes à chaleur.
- Dans la mise en œuvre des polymères.
- Industrie pétrochimique dans le transport et l'exploitation des hydrocarbures, qui fait intervenir des situations d'écoulements complexes en conduites cylindriques. La configuration de cet écoulement qui est de type écoulement coaxial de deux fluides visqueux et immiscibles avec interface et le sujet de notre travail.

I.3 Instabilités hydrodynamiques

L'instabilité hydrodynamique des films minces en écoulement sur un substrat solide a suscité de nombreuses études théoriques et expérimentales [3,4]. Cette instabilité a été étudiée pour la première fois par Kapitza [4], il montre qu'au-delà d'un débit critique, l'écoulement est toujours instable et des oscillations se développaient à la surface du film. Ces déformations de l'interface ont été reconnues comme le résultat d'une instabilité de grande longueur d'onde par Yih [2].

I.4 Instabilité capillaire

L'instabilité capillaire est connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Plateau. Elle a été décrite initialement par Rayleigh et c'est Plateau [9] qui identifie la tension superficielle comme étant à l'origine de cette instabilité.

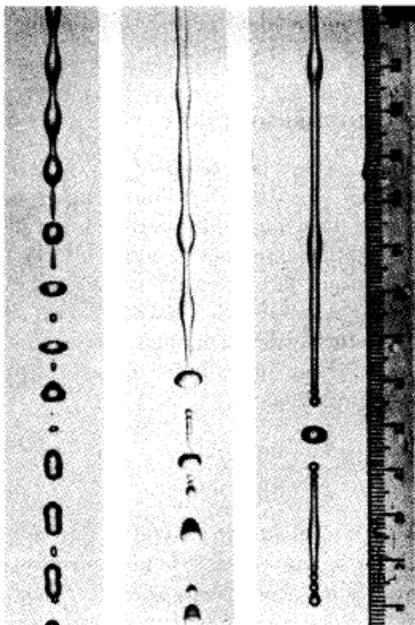


Fig.I.3 (a) Photographie illustrant la déformation d'un filet d'eau issu d'un cylindre de 4cm . Les longueurs d'ondes sont de 4,6, 12,5 et 42 mm .D'après Rutland et Jameson 1971.

I.5 Synthèse bibliographique

La stabilité et la croissance des ondes dans les écoulements de fluides présentant une interface ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux, tant du point de vue linéaire que non linéaire. Les deux configurations d'écoulement les plus étudiées sont celle d'un écoulement de Couette ou de Poiseuille dans divers géométries. Ecoulements entre deux plaques planes horizontales et écoulements annulaire en conduite circulaire.

Ces écoulements présentent un intérêt important aussi bien par leurs applications dans l'industrie que dans la mise en lumière du rôle stabilisateur ou déstabilisateur que peuvent jouer certains paramètres physiques comme : la viscosité, la densité, la tension superficielle, l'épaisseur des fluides etc...

Écoulements entre deux plaques planes horizontales

L'un des premiers travaux sur les écoulements des films minces visqueux présentant une interface déformable à de faibles nombres de Reynolds remonte à Yih [2] en 1967. Son travail concerne le cas de deux fluides de viscosités différentes pour des écoulements de Couette et de Poiseuille plans, il est basé sur une approche asymptotique **aux grandes longueurs d'ondes** $\ll 1$. Il montre qu'en fonction du rapport des épaisseurs des fluides et du rapport des viscosités, la différence de viscosité a un effet déstabilisant.

D'autres auteurs ont traité le cas **des ondes courtes** $\gg 1$, pour un écoulement de Couette pour lequel l'épaisseur du fluide supérieur est infinie. Ils ont considéré l'effet de la tension de surface. Leur étude montre que la tension de surface a un effet stabilisant sur les ondes courtes.

Dans le cas **de longueurs d'ondes quelconques** Yiantsios Higgins [10] généralisent les résultats de Yih [2] pour des écoulements plans de Poiseuille en considérant des ondes quelconques. Ils examinent les effets de la tension de surface, de la densité et de la gravité en plus de différence de viscosité. Ils concluent à leurs effets stabilisants ou déstabilisants. Ces auteurs mentionnent aussi l'existence d'une instabilité de cisaillement qui apparaît à des grands nombres de Reynolds.

- Ecoulements axisymétriques en conduite circulaire

Pour le cas d'écoulements axisymétriques concentriques, la méthode générale proposée par Yih [2] pour de faible nombre de Reynolds a été reprise par **Hickox** [1] et il montre que l'écoulement de Poiseuille axisymétrique est toujours instable si le fluide interne est moins visqueux que le fluide pariétal.

Preziosi et al [11] se sont intéressés au cas d'un fluide visqueux (de l'huile) entouré par un fluide moins visqueux (de l'eau) en faible épaisseur s'écoulant dans une conduite circulaire. Il montre **qu'aux ondes longues** il existe un nombre de Reynolds critique pour lequel l'instabilité due à la tension superficielle est totalement éliminée. Pour **des ondes courtes** il montre qu'il existe aussi un nombre de Reynolds au-delà duquel l'écoulement se transforme en émulsion. Ces ondes courtes entraînent la formation de gouttes d'un des fluides qui rentrent dans l'autre fluide.

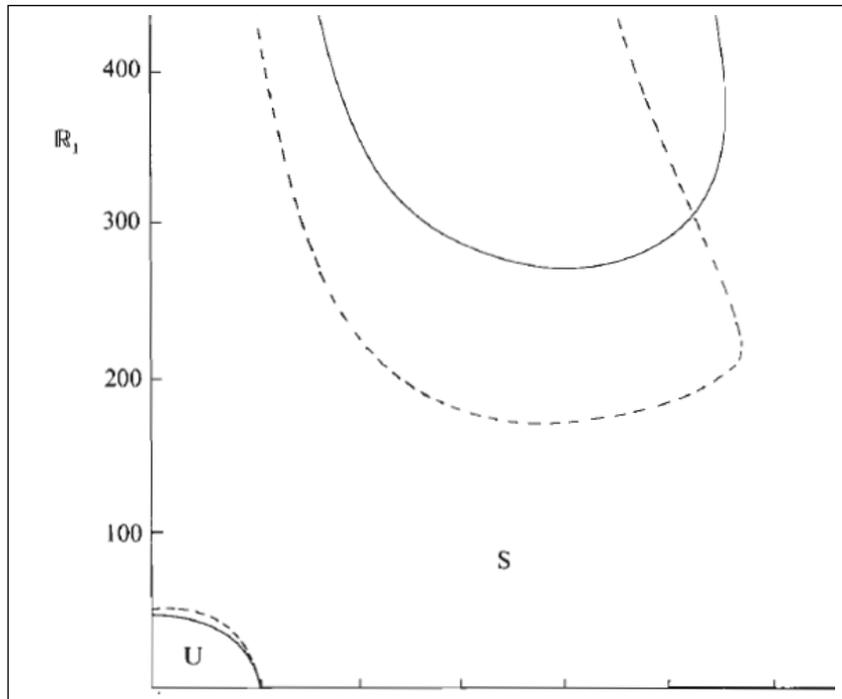


Fig.I.4 *Figure montrant une instabilité de cisaillement et une instabilité interfaciale.*

U et S désignent respectivement une région instable et une région stable.

R_1 représente un nombre de Reynolds et α un nombre d'onde[11].

CHAPITRE II
FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

II.1-Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter la formulation mathématique du problème. Nous allons donc introduire les équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions aux limites correspondantes, régissant l'écoulement de deux fluides newtoniens présentant une interface et s'écoulant à l'intérieur d'une conduite cylindrique. L'écoulement est soumis à l'effet de la gravité. Les équations à résoudre sont présentées en coordonnées cylindriques qui sont plus adaptées pour décrire correctement ce problème.

II.2-Configuration étudiée

On considère l'écoulement de deux couches minces de fluides immiscibles newtoniens incompressibles, de densité et viscosité différentes en écoulement à l'intérieure d'une conduite cylindrique de rayon R_2 sous l'effet de la gravité. Les notations utilisées dans ce chapitre sont illustrées sur la figure II-1. Le fluide interne noté 1 est totalement entouré par le fluide pariétal noté 2. Leurs viscosités dynamiques, densités et épaisseurs sont respectivement μ_j , ρ_j , R_1 et $(R_2 - R_1)$ la position de l'interface est définie par la fonction $H(\theta, z, t)$, qui fait partie des inconnues du problème.

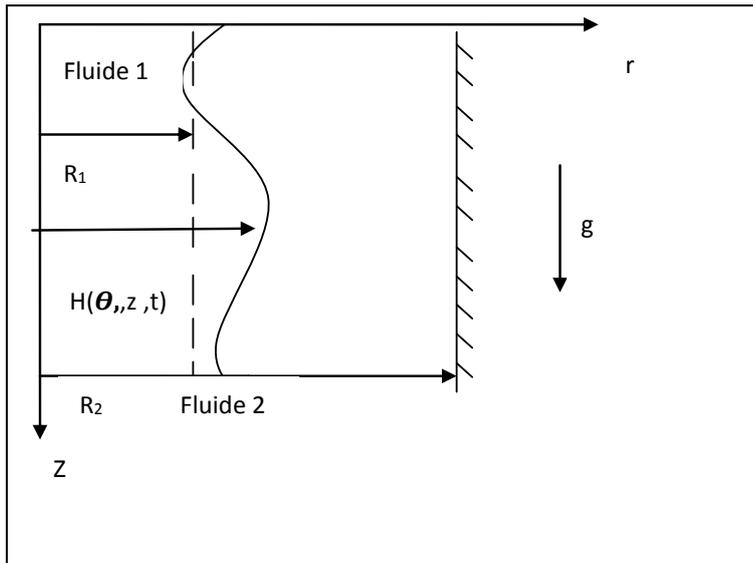


Figure II.1 : *Ecoulement de deux couches de fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique.* La géométrie de la conduite est considérée infinie dans la direction axiale (z)

Les équations sont écrites en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les inconnues sont la vitesse $U_j(r, \theta, z)$. et la pression $p_j(r, \theta, z)$. de chaque fluide. L'interface entre les deux fluides est définie par $r = H(\theta, z, t)$ et possède une tension de surface σ . Les équations régissant l'écoulement sont :

-conservation de la quantité de mouvement :

On note $\partial_x f = f_x$ la dérivée partielle de la grandeur f par rapport à la variable x

$$\rho_j(\partial_t \mathbf{U}_j + \mathbf{U}_j \cdot \nabla \mathbf{U}_j) = -\nabla p_j + \rho_j \mathbf{g} + \mu_j \nabla^2 \mathbf{U}_j \quad (\text{II.1})$$

-Equation de la conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_j = 0 \quad (\text{II.2})$$

Dans ces équations $\mathbf{U}=(u, v, w)^T$ représente la vitesse de chaque fluide dans la base locale $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$

∇ désigne l'opérateur de divergence en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , appliqué au vecteur vitesse on obtient :

$$\nabla \mathbf{U} = \frac{1}{r} \partial_r (ru) + \frac{1}{r} \partial_\theta v + \partial_z w$$

∇^2 désigne le laplacien dont l'expression en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\nabla^2 = \partial_r \partial_r + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta + \partial_z \partial_z$$

Dans ces équations :

p_j la pression dans chaque fluide,

ρ_j masse volumique de chaque fluide,

μ_j viscosité dynamique de chaque fluide,

\mathbf{g} l'accélération gravitationnelle.

II.3 Etablissements des équations de Navier –Stokes dans le repère en coordonnées cylindriques

II.3.1 Equations de Navier-Stokes

Equations de conservation de la masse

$$\frac{1}{r} \partial_r (ru_j) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_j + \partial_z w_j = 0 \quad (\text{II .3})$$

Equations de conservation de la quantité de mouvement

Les équations de Navier-Stokes complètes décrivant l'écoulement étudié sont développées dans un système d'axes attaché au cylindre ou z désigne la direction de l'écoulement

$$\begin{aligned} & \partial_t u_j + u_j \partial_r u_j + \frac{1}{r} v_j \partial_\theta u_j + w_j \partial_z u_j \\ &= -\frac{1}{\rho_j} \partial_r p_j + \frac{1}{\rho_j} \mu_j \left(\nabla^2 u_j - \frac{u_j}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_j \right) \end{aligned} \quad (\text{II .4})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t v_j + u_j \partial_r v_j + \frac{1}{r} v_j \partial_\theta v_j + w_j \partial_z v_j + \frac{1}{r} u_j v_j \\ &= -\frac{1}{\rho_j} \frac{1}{r} \partial_\theta p_j + \frac{1}{\rho_j} \mu_j \left(\nabla^2 v_j + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_j - \frac{1}{r^2} v_j \right) \end{aligned} \quad (\text{II .5})$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t w_j + u_j \partial_r w_j + \frac{1}{r} v_j \partial_\theta w_j + w_j \partial_z w_j \\
& = -\frac{1}{\rho_j} \partial_z p_j + g + \frac{1}{\rho_j} \mu_j (\nabla^2 w_j)
\end{aligned} \tag{II.6}$$

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles d'ordre deux en espace pour les fluides visqueux. A ces équations il faut ajouter les conditions aux limites qui sont l'adhérence aux parois et des conditions sur les contraintes et vitesses à l'interface fluide-fluide .

II.3.2 Conditions aux limites

Condition d'adhérence à la paroi du cylindre

$$\mathbf{U}_2 = 0 \text{ en } r = R_2 \tag{II.7}$$

Conditions à l'interface fluide-fluide

Les conditions à l'interface sont de deux types : une condition sur les contraintes ou conditions dynamiques et une condition cinématique qui traduit l'imperméabilité de l'interface. On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers cette interface ni de gradient de concentration.

Avant de détailler ces différentes conditions à l'interface, il est indispensable de définir les vecteurs unitaires tangents \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 et \mathbf{n} la normale extérieure à l'interface. L'interface est définie géométriquement par une courbe dont l'équation est :

$H(r, \theta, z, t) = r - h(\theta, z, t)$ (figure II.2). Leurs coordonnées s'expriment par :

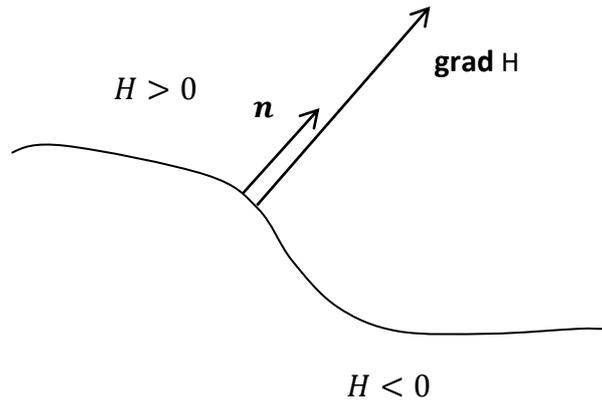


Fig.II.2 : Définitions géométriques

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{grad} H}{|\mathbf{grad} H|}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2 + h_z^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{r}h_\theta \\ -h_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + h_z^2}} \begin{pmatrix} h_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{r}h_\theta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où le gradient en coordonnées cylindriques est $\mathbf{grad} = \partial_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta + \partial_z \mathbf{e}_z$

Condition cinématique

L'interface entre deux fluides est une surface matérielle, en d'autres termes, la vitesse normale à l'interface sera la même de part et d'autre de l'interface.

Différentiant $H(r, \theta, z, t) = 0$

Il vient $\frac{DH}{Dt} = 0$, où $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_r + \frac{1}{r}v\partial_\theta + w\partial_z$ est la dérivée matérielle.

Il vient alors :

$$u_j = h_t + \frac{1}{r} v_j h_\theta + w h_z \quad (\text{II.8})$$

Cette condition traduit l'absence de transfert de masse à l'interface.

Conditions dynamiques

Condition de continuité des vitesses

Le vecteur vitesse est continue à la traversée de l'interface, cette condition est imposée par la viscosité de l'écoulement.

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 \quad (\text{II.9})$$

Condition sur les contraintes tangentielles à l'interface :

On suppose une interface entre deux fluides newtoniens possédant une tension interfaciale σ constante

En introduisant le tenseur des contraintes T_j dans chaque fluide :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

Où

\mathbf{I} est le tenseur unité

\mathbf{T} est le tenseur des contraintes

$\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) - \frac{2}{3}\mu(\text{div}\mathbf{U})\mathbf{I}$$

Pour les fluides newtoniens le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{S}$$

Avec \mathbf{S} le tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses en coordonnées cylindriques sont données par les relations suivantes

$$\tau_{rr} = 2\mu u_r$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu w_z$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu(w_r + u_z)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} u_\theta \right)$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \mu \left(v_z + \frac{1}{r} w_\theta \right)$$

Les conditions de continuité des contraintes tangentielles dont les forces proviennent des efforts de cisaillement dus à la viscosité à l'interface s'écrivent

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.11})$$

Condition sur les contraintes normales à l'interface

A l'interface, il existe une différence de pression entre les deux fluides qui est due à la tension superficielle .

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} = \sigma K \quad (\text{II.12})$$

On peut calculer la courbure de l'interface, soit $K = -div \mathbf{n}$

$$K = -div \mathbf{n} = \frac{1 - h_{\theta\theta} - h_{zz}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} h_\theta \right)^2 + h_z^2}} + \frac{h_\theta^2 + h_\theta^2 h_{\theta\theta} + h_z^2 h_{zz}}{r^3 \left(1 + \left(\frac{1}{r} h_\theta \right)^2 + h_z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

II.4 Intégration des équations relatives à l'écoulement de base

Lorsque l'écoulement est stationnaire et uniforme $h(\theta, z, t) = R_1$, voir la figure (II,3) la vitesse de l'écoulement se réduit à la composante axiale $w(r)$ qui est fonction uniquement de la composante radiale r . Un régime permanent uniforme est établi où il y a équilibre entre forces visqueuses et force motrice qui est représentée par la gravité. Dans ces conditions les équations de Navier-Stokes prennent la même forme que les équations ((II, 4)-(II ,6)) avec $(u = v = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0)$. Ces équations admettent une solution simple.

L'équation de continuité est automatiquement satisfait et les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

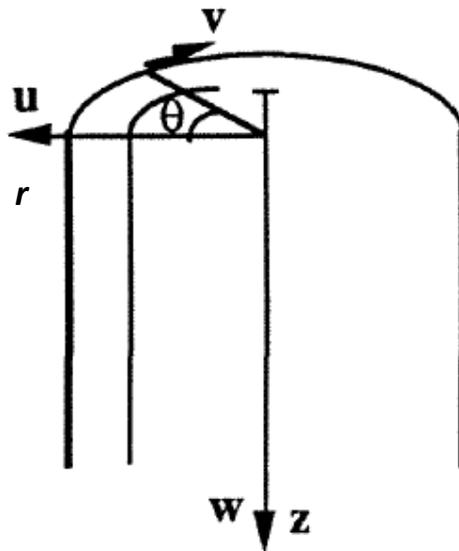


Fig.II.3 : *composantes de la vitesse U (u, v, w) de l'écoulement de films annulaires en coordonnées cylindriques*

Equations pour le fluide(1)

$$g + \frac{\mu_1}{\rho_1} \left(w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r} \right) = 0 \quad (\text{II} .13)$$

Equations pour le fluide(2)

$$g + \frac{\mu_2}{\rho_2} \left(w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r} \right) = 0 \quad (\text{II} .14)$$

Par intégration des équations ((II , 13), (II, 14)) on obtient les solutions suivantes

$$0 \leq r \leq R_1 \quad w_1(r) = -\frac{\rho_1}{4\mu_1} gr^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{II .15})$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad w_2(r) = -\frac{\rho_2}{\mu_2} g + C_1' \ln r + C_2' \quad (\text{II .16})$$

Les conditions aux limites nous permettent de déterminer les constantes C_1, C_2, C_1' et C_2' .

On suppose la vitesse est définie en 0, on prend alors $w_1(0)$ finie ce qui impose de prendre $C_1 = 0$

La vitesse est nulle à la paroi c'est-à-dire en $r = R_2 : w_2(R_2) = 0$

$$-\frac{\rho_2 R_2^2}{\mu_2 4} g + C_1' \ln R_2 + C_2' = 0 \quad (\text{II .17})$$

La continuité des vitesses en $r = R_1$ nous permet d'écrire la relation suivante

$$-\frac{\rho_1 R_1^2}{\mu_1 4} g + C_2 = -\frac{\rho_2 R_1^2}{\mu_2 4} g + C_1' \ln R_1 + C_2' \quad (\text{II .18})$$

La continuité des contraintes tangentielles permet d'écrire

$$-\rho_1 \frac{R_1^2}{2} g = -\rho_2 \frac{R_1^2}{2} g + \mu_2 C_1' \quad (\text{II .19})$$

Ce système d'équations obtenu à l'aide des conditions aux limites nous permet de donner les constantes d'intégration :

$$C_1' = \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2}$$

$$C_2' = \frac{\rho_2}{\mu_2} g \frac{R_2^2}{4} - \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2} \ln R_2$$

$$C_2 = \frac{\rho_2}{4\mu_2} g (R_2^2 - R_1^2) + \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2} \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\rho_1}{\mu_1} g \frac{R_1^2}{4}$$

Cette solution met en évidence deux échelles caractéristiques du problème étudié qui sont l'épaisseur R_1 du fluide 1 et la vitesse $w_1(0)$ du fluide 1. On obtient

$$w_1 = \frac{w_1(r)}{w_1(0)} = 1 - a_1 r^{*2} \quad (\text{II .20})$$

$$w_2 = \frac{w_2(r)}{w_1(0)} = a_2 r^{*2} + b_2 \ln R + c_2 \quad (\text{II .21})$$

Avec :

$$a_1 = \frac{\mu}{[\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d]}$$

$$a_2 = \frac{-\rho}{[\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d]}$$

$$b_2 = \frac{-2(1 - \rho)}{[\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d]}$$

$$c_2 = \frac{\rho d^2 + 2(1 - \rho) \ln d}{[\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d]}$$

On pose : $r^* = \frac{r}{R_1}$, $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ et $d = \frac{R_2}{R_1}$

Pour des raisons de simplification l'Astérisque a été omis dans l'écriture des équations.

La vitesse le long de l'axe de symétrie est donnée par $w_1(0) = C_2$ soit :

$$w_1(0) = \frac{\rho_1 g R_1^2}{4\mu_2} [\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d] \quad (\text{II .22})$$

Ainsi les solutions des équations ((II, 3)- (II, 6)) sont données par la composante axiale de la vitesse dans chaque couche de fluide :

$$w_1(r) = \frac{w_1}{w_1(0)} = \frac{\mu r^2}{(\rho(1-d^2)-2(1-\rho) \ln d - \mu)} + 1 \quad (\text{II .23})$$

$$w_2(r) = \frac{w_2}{w_1(0)} = \frac{\rho(r^2-d^2)+2(1-\rho) \ln R - 2(1-\rho) \ln d}{(\rho(1-d^2)-2(1-\rho) \ln d - \mu)} \quad (\text{II .24})$$

III.5 Système complet

Toutes les équations obtenues sont résumées dans le tableau suivant :

<p>Equations de Navier –Stokes</p> $\frac{1}{r} \partial_r (ru_j) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_j + \partial_z w_j = 0$ $\partial_t u_j + u_j \partial_r u_j + \frac{1}{r} v \partial_\theta u_j + w_j \partial_z u_j - \frac{1}{r} v_j$ $= -\frac{1}{\rho_j} \partial_r P_j + \frac{1}{\rho_j} \mu_j \left(\nabla^2 u_j - \frac{u_j}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_j \right)$ $\partial_t v + u_j \partial_r v_j + \frac{1}{r} v_j \partial_\theta v_j + w_j \partial_z v_j + \frac{1}{r} u_j v_j$ $= -\frac{1}{\rho_j} \frac{1}{r} \partial_\theta P_j + \frac{1}{\rho_j} \mu_j \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_j - \frac{1}{r^2} v_j \right)$ $\partial_t w_j + u_j \partial_r w_j + \frac{1}{r} v_j \partial_\theta w_j + w_j \partial_z w_j = -\frac{1}{\rho_j} \partial_z P_j + g + \frac{1}{\rho_j} \mu_j (\nabla^2 w_j)$
<p>Condition d'adhérence = R_2</p> $U_2 = 0$
<p>Condition cinématique</p> $u_j = h_t + \frac{v_j}{r} h_\theta + w h_z$
<p>Condition de continuité des vitesses</p> $U_1 = U_2$
<p>Conditions de continuité des contraintes tangentielles</p> $t^1 \cdot T_1 \cdot n - t^1 \cdot T_2 \cdot n = 0$ $t^2 \cdot T_1 \cdot n - t^2 \cdot T_2 \cdot n = 0$
<p>Condition sur les contraintes normales à l'interface</p> $n \cdot T_1 \cdot n - n \cdot T_2 \cdot n = \sigma K$

CHAPITRE III

ADIMENTIONNEMENT DES EQUATIONS 2D

III.1 Introduction

L'étude adimensionnelle de manière générale permet de déterminer les ordres de grandeur respectifs de chacun des termes des équations développées au chapitre précédent, dans le but de ne conserver que les termes les plus importants dans le problème considéré. Notons que chaque auteur établit son propre adimensionnement ce qui rend difficile l'étude comparative des résultats obtenus.

III.2 Ecoulement axisymétrique

Pour décrire la stabilité d'un écoulement de deux couches de fluides dans une conduite cylindrique, les équations de Navier-Stokes incompressibles sont trop complexes. On s'intéresse dans notre travail à un écoulement axisymétrique, où l'épaisseur des fluides reste constante autour du cylindre voir la figure III.1. Cette approximation nous permet de réduire le problème tridimensionnel introduit au chapitre précédent à un problème bidimensionnel en prenant les dérivées locales par rapport à la variable θ nulles $\frac{\partial u_j}{\partial \theta} = 0$ et la composante azimutale du vecteur vitesse dans chaque fluide $v_j = 0$. Le modèle d'écoulement étudié est constitué des équations du mouvement et des conditions aux limites écrites sous forme :

Equations pour le fluide 1 dans le domaine $0 < r < h(z, t)$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r u_1) + \partial_z w_1 = 0 \quad (\text{III .1})$$

$$\partial_t u_1 + u_1 \partial_r u_1 + w_1 \partial_z u_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_r p_1 + \frac{\mu_1}{\rho_1} \left(\nabla^2 u_1 - \frac{u_1}{r^2} \right) \quad (\text{III .2})$$

$$\partial_t w_1 + u_1 \partial_r w_1 + w_1 \partial_z w_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_z p_1 + g + \frac{\mu_1}{\rho_1} (\nabla^2 w_1) \quad (\text{III .3})$$

Equation pour le fluide 2 dans le domaine $h(z, t) < r < a$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r u_2) + \partial_z w_2 = 0 \quad (\text{III .4})$$

$$\partial_t u_2 + u_2 \partial_r u_2 + w_2 \partial_z u_2 = -\frac{1}{\rho_2} \partial_r p_2 + \frac{\mu_2}{\rho_2} \left(\nabla^2 u_2 - \frac{u_2}{r^2} \right) \quad (\text{III .5})$$

$$\partial_t w_2 + u_2 \partial_r w_2 + w_2 \partial_z w_2 = -\frac{1}{\rho_2} \partial_z p_2 + g + \frac{\mu_2}{\rho_2} (\nabla^2 w_2) \quad (\text{III .6})$$

Conditions aux limites en zéro et à la paroi : $r = R_2$:

$$u_2(r = R_2, z, t) = w_2(r = R_2, z, t) = 0 \quad (\text{III .7})$$

$$u_1(r = 0, z, t) = w_1(r = 0, z, t) \text{ vitesse finie} \quad (\text{III .8})$$

Conditions aux limites à l'interface : $r = h(z, t)$:

-Continuité des vitesses

$$w_1 = w_2 \quad (\text{III .9})$$

$$u_1 = u_2 \quad (\text{III.10})$$

-Condition normale

$$p_2 - p_1 + \frac{2}{1+h_z^2} ((\mu_1 u_{1r} - \mu_2 u_{2r}) + 2h_z^2 (\mu_1 w_{1z} - \mu_2 w_{2z})) + 2\mu_1 (u_{1z} + w_{1r}) h_z - 2\mu_2 (u_{2z} + w_{2r}) = \sigma K \quad (\text{III .11})$$

-Condition tangentielle

$$[2\mu_1 h_z (u_{1r} - w_{1z}) + \mu_1 (u_{1z} + w_{1r})(1 - h_z^2)] - [2\mu_2 h_z (u_{2r} - w_{2z}) + \mu_2 (u_{2z} + w_{2r})(1 - h_z^2)] = 0 \quad (\text{III .12})$$

Condition cinématique

$$u_j = h_t + w_j h_t \quad (\text{III .13})$$

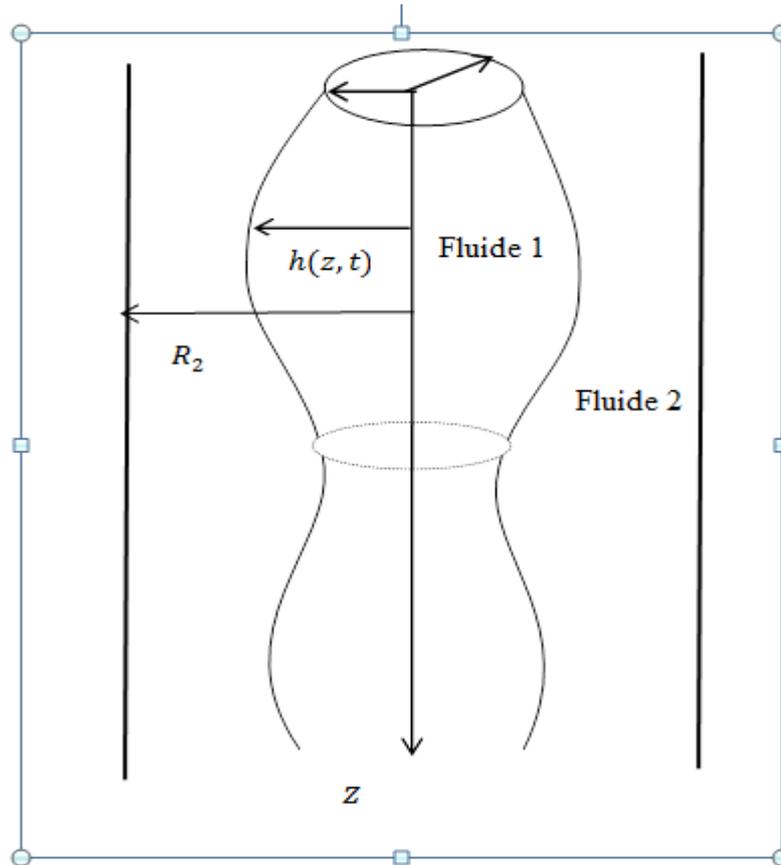


Fig. III. 1 Géométrie d'un écoulement axisymétrique de deux fluides

III.3 Equations adimensionnées

L'écoulement de base calculé au chapitre précédent, nous permet de mettre en évidence les échelles caractéristiques du problème. Ces grandeurs sont données par l'épaisseur R_1 et la densité ρ_1 du fluide 1 ainsi que la composante de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie $w_1(0)$:

$$w_1(0) = \frac{\rho_1 g R_1^2}{4\mu_2} [\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d] \quad (\text{III} .14)$$

La mise sous forme adimensionnelle du système ((III.1)–(III. 13)) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

$$w^* = \frac{w}{w(0)}, r^* = R = \frac{r}{R_1}, z^* = \frac{z}{\lambda}, u^* = \frac{u\lambda}{R_1 w(0)}, t^* = \frac{tw(0)}{\lambda}, p^* = \frac{pR_1^2}{\mu_1 w(0)\lambda}$$

où λ est la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement.

Pour tenir compte de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = \frac{R_1}{\lambda}$. Ce paramètre traduit le fait que l'écoulement est mince et dans ce

cas la hauteur de l'écoulement étant faible devant son étalement. On prend alors

$\varepsilon \ll 1$ qui correspond à ce qu'on appelle l'hypothèse de grande longueur d'onde.

On négligera alors dans les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites correspondantes les termes d'ordre supérieur à ε^2 .

- Le fluide 1 : $0 < R < h$

$$R_e \varepsilon p_{1R} = \varepsilon^2 \left(u_{1RR} + \frac{1}{R} u_{1R} - \frac{u_1}{R^2} \right) \quad (\text{III .15})$$

$$R_e \varepsilon (w_{1t} + u_1 w_{1R} + w_1 w_{1Z}) = -\varepsilon R_e p_{1Z} + \left(w_{1RR} + \frac{1}{R} w_{1R} + \varepsilon^2 w_{1ZZ} \right) + G \quad (\text{III .16})$$

$$\frac{u_1}{R} + u_{1R} + w_{1Z} = 0 \quad (\text{III .17})$$

- Le fluide 2 : $h < R < d$

$$R_e \varepsilon p_{2R} = \mu \varepsilon^2 \left(u_{2RR} + \frac{1}{R} u_{2R} - \frac{u_2}{R^2} \right) \quad (\text{III .18})$$

$$\rho R_e \varepsilon (w_{2t} + u_2 w_{2R} + w_2 w_{2Z}) = -\varepsilon R_e p_{2Z} + \mu \left(w_{2RR} + \frac{1}{R} w_{2R} + \varepsilon^2 w_{2ZZ} \right) + \rho G \quad (\text{III .19})$$

$$\frac{u_2}{R} + u_{2R} + w_{2Z} = 0 \quad (\text{III .20})$$

$$\text{Ou : } \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, G = \frac{gh(0)R_e}{w^2(0)}$$

-condition d'adhérence à la paroi

$$u_2(d) = w_2(d) = 0 \quad \text{en } R = d \quad (\text{III .21})$$

Vitesse finie en $R = 0$ pour le fluide 1

-La condition de saut cinématique à l'interface 2D est la suivante

$$u = h_t + w h_z \quad \text{en } R = h(z, t) \quad (\text{III .22})$$

-Conditions aux limites à l'interface fluide-fluide en $R=h(z,t)$

-Continuité des vitesses

$$w_1 = w_2 \quad (\text{III .23})$$

$$u_1 = u_2 \quad (\text{III .24})$$

-Condition normale

$$p_2 - p_1 = \frac{2\varepsilon}{R_e}(\mu u_{2R} - u_{1R}) - \frac{2\varepsilon h_Z}{R_e}(\mu w_{2R} - w_{1R}) + \varepsilon W \left[\frac{1}{h} - \frac{\varepsilon^2 h_Z^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{ZZ} \right] \quad (\text{III .25})$$

-Condition tangentielle

$$w_{1R} - \mu w_{2R} = \{2h_Z(w_{1Z} - \mu w_{2Z}) - 2h_Z(u_{1R} - \mu u_{2R}) - (u_{1Z} - \mu u_{2Z})\} \quad (\text{III .26})$$

III.4 Nombres adimensionnés

Les équations précédentes font apparaitre un grand nombre de paramètres sans dimension qui sont :

- Le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho_1 R_1 w(0)}{\mu_1}$, qui mesure l'importance de l'inertie par rapport à la viscosité.
 - Le nombre de Weber $= \frac{\sigma}{\mu_1 w(0)}$, W compare la tension superficielle et la contrainte normale générée par la gravité à l'interface
 - Les rapports des viscosités, des densités et des épaisseurs
- $$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad d = \frac{R_2}{R_1}$$
- $G = \frac{g R_1^2 \rho_1}{\mu_1 w(0)}$
 - La stabilité de l'écoulement de deux couches de fluides est une étude paramétrique lourde car elle fait intervenir six nombres sans dimension

CHAPITRE IV
ANALYSE ASYMPTOTIQUE A FAIBLE
NOMBRE DE REYNOLDS

IV.1-Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des développements asymptotiques aux équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement annulaire axisymétrique de deux couches de fluides. Nous allons suivre la démarche initiée par Benney [7] pour l'écoulement plan d'une seule couche de fluide. Notons que cette démarche a fait l'objet d'un grand nombre de travaux sur l'écoulement d'un film mince sur un plan incliné, elle a été aussi adaptée à l'écoulement de deux couches de fluides.

IV.2 Hypothèse onde longue

Les couches de fluides en écoulement sont supposées minces, il est donc possible de résoudre asymptotiquement les équations de Navier-Stokes autour de la solution d'équilibre. On développe la vitesse et la pression par rapport à un petit paramètre $\varepsilon = \frac{h}{\lambda}$ appelé paramètre de l'onde. Rappelons que ε est le rapport de l'interface et la longueur d'onde caractéristique. La hauteur h de l'écoulement étant faible devant son étalement, on a donc $h \ll \lambda$. Cette hypothèse est appelée hypothèse onde longue. On obtient alors des modèles selon l'ordre de la précision souhaitée. Au faible nombres de Reynolds l'hypothèse $\varepsilon R_e \ll 1$ permet de négliger les termes inertiels devant les effets visqueux. On regardera l'influence de la tension superficielle sous la condition $\varepsilon^2 W = \mathcal{O}(1)$ ce qui nous permettra de considérer de grande tension superficielle ce qui correspond à la plupart des fluides usuels.

Les champs de vitesses et de pressions peuvent donc être exprimés sous forme d'une série asymptotique en ε .

-le fluide (1)

$$w_1(r, z, t) = w_1^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon w_1^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .1a})$$

$$u_1(r, z, t) = u_1^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon u_1^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .1b})$$

$$p_1(r, z, t) = p_1^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon p_1^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .1c})$$

-le fluide (2)

$$w_2(r, z, t) = w_2^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon w_2^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .2a})$$

$$u_2(r, z, t) = u_2^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon u_2^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .2b})$$

$$p_2(r, z, t) = p_2^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon p_2^{(1)}(r, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{IV .2c})$$

IV.3 Résolution à l'ordre 0

On reporte dans les équations ((IV ,1)-(IV ,2)) de notre problème les solutions écrites sous la forme ((III, 14)-(III, 25)). Ensuite on regroupe les termes suivant les puissances croissantes du petit paramètre ε , ce qui permet de résoudre le problème successivement aux différents ordre.

A l'ordre zéro les termes de droite des équations ((III, 15) -(III, 16)) et ((III, 17)- (III, 18)) correspondant aux termes inertiels non linéaires sont négligés devant les termes visqueux. Les équations à résoudre forment un système linéaire qui se met sous la forme suivante :

$$p_{1z}^{(0)} - w_{1rr}^{(0)} - \frac{w_{1r}^{(0)}}{r} - G = 0 \quad (\text{IV .3a})$$

$$p_{1r}^{(0)} = 0 \quad (\text{IV .3b})$$

$$p_{2z}^{(0)} - \mu (w_{2rr}^{(0)} + \frac{w_{2r}^{(0)}}{r}) - \rho G = 0 \quad (\text{IV .3c})$$

$$p_{2r}^{(0)} = 0 \quad (\text{IV .3d})$$

$$w_1^{(0)}(0) = B_2 \quad (\text{IV .3e})$$

$$w_2^{(0)}(d) = 0 \quad (\text{IV .3f})$$

$$w_1^{(0)}(h) = w_2^{(0)}(h) \quad (\text{IV .3g})$$

$$w_{1r}^{(0)}(h) = \mu w_{2r}^{(0)}(h) \quad (\text{IV .3h})$$

$$p_1^{(0)} - p_2^{(0)} + R_e W \left(h_{zz} + \frac{1}{2} \frac{h_z^2}{h} \right) \quad (\text{IV .3i})$$

Par intégration des équations (IV, 3a) et (IV, 3c) on obtient les solutions du système

$$w_1^{(0)}(r, z, t) = \frac{1}{4}r^2 p_{1z}^{(0)} - \frac{1}{4}r^2 G + B_1 \ln(r) + B_2 \quad (\text{IV .4})$$

$$w_2^{(0)}(r, z, t) = \frac{1}{4\mu}r^2 p_{2z}^{(0)} - \frac{1}{4\mu}r^2 \rho G + B_3 \ln(r) + B_4 \quad (\text{IV .5})$$

Où les constantes sont déterminées à l'aide des conditions aux limites (IV,3a)-(IV,3i) aux quelles on ajoute le débit total exprimé par la relation suivante :

$$Q_0 = \int_0^h 2\pi w_1^{(0)}(r, z, t) dr + \int_h^d 2\pi w_2^{(0)}(r, z, t) dr$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = -\frac{1}{4} \frac{1}{\pi\mu(\mu h^4 + a^4 - h^4)} (2h^6 \pi + 2\pi G h^6 \ln(a) - 2h^6 \mu \pi G - 2h^6 \pi \rho G - 2G h^6 \pi \ln(h) - 4\pi G h^4 a^2 + 2\pi G h^2 a^4 + 2G h^6 \pi \ln(h) \mu + 4\pi \rho G h^4 a^2 + 2\pi G h^2 a^4 \ln(a) \rho - 2\pi G h^2 a^4 \rho + 3\pi G h^4 \mu a^2 - G h^2 \pi \mu a^4 - 2G h^2 \pi \ln(h) \rho a^4 + G h^2 \pi \mu a^4 \rho + 2h^6 \mu \pi \rho G + 2G h^2 \pi \ln(h) a^4 + 2G h^6 \pi \ln(h) \rho - 2G h^6 \pi \ln(h) \rho \mu - 3\pi G h^4 \mu a^2 \rho - 2\pi G h^6 \ln(a) - 2\pi G h^6 \mu \ln(a) - 2\pi G h^2 a^4 \ln(a) - 2\pi G h^6 \ln(a) \rho + 8h^2 Q_0 \mu - 8Q_0 \mu a^2 - 8h^2 \mu^2 Q_0$$

$$B_3 = \frac{G h^2 (-1 + \rho)}{2\mu}$$

$$B_4 = -\frac{1}{4} \frac{1}{\pi\mu(\mu h^4 + a^4 - h^4)} (-\pi G h^4 \mu a^2 \rho - 2\pi G h^6 \ln(a) + 2\pi G h^6 \ln(a) \rho - 2\pi G h^2 a^4 \ln(a) + \pi G h^4 \mu a^2 + 2\pi G h^6 \ln(a) - 2\pi G h^6 \ln(a) \rho - 2\pi G h^2 a^4 + 2\pi G h^2 a^4 \rho + 2\pi G h^2 a^4 + 2\pi G h^2 a^4 \ln(a) \rho - 2\pi G h^2 a^4 \rho - 8Q_0 \mu a^2)$$

IV.4 Résolution à l'ordre 1

Les équations de Navier-Stokes à l'ordre un sont données par le système suivant :

$$Re \left(w_{1t}^{(0)} + w_1^{(0)} w_{1z}^{(0)} + u_1^{(0)} w_{1r}^{(0)} \right) = -p_{1z}^{(1)} + w_{1rr}^{(1)} + \frac{1}{r} w_{1r}^{(1)} \quad (\text{IV .6})$$

$$p_{1r}^{(1)} = 0 \quad (\text{IV .7})$$

$$Re \left(w_{2t}^{(0)} + w_2^{(0)} w_{2z}^{(0)} + u_2^{(0)} w_{2r}^{(0)} \right) = -p_{2z}^{(1)} + w_{2rr}^{(1)} + \frac{1}{r} w_{2r}^{(1)} \quad (\text{IV .8})$$

$$p_{2r}^{(1)} = 0 \quad (\text{IV .9})$$

Le système à résoudre est constitué des équations(IV .6)- (IV .9)) auxquelles il faut adjoindre les conditions aux limites(III.21-III.26) écrites également à l'ordre 1.

Les solutions à l'ordre un $w_1^{(1)}$ et $w_2^{(1)}$ sont obtenues de la même manière que les solutions à l'ordre zéro. La résolution ne présente pas plus de difficulté si ce n'est que les équations deviennent plus longues à cause du grand nombre de nombres sans dimension .W

Les solutions sont substituées dans la condition cinématique pour obtenir une équation d'évolution de l'interface $h(z,t)$.L'expression de équation de Benney à l'ordre 1 pour les deux couches de fluide en écoulement dans une conduite cylindrique est très compliquée car elle fait intervenir un grand nombre de paramètre sans dimension (ρ, μ, d, Re, W).

L'équation de Benney ne fait intervenir que l'épaisseur de l'interface $h(z,t)$ ainsi que ses dérivées spatiale et temporelle .Elle peut être écrite formellement sous la forme suivante :

$$h_t + w_1^{(0)} h_z - u_1^{(0)} + \varepsilon (w_1^{(1)} h_z - u_1^{(1)})$$

Dans le cas de l'écoulement d'une seule couche de fluide sur un plan incliné l'équation de Benney se met sous la forme suivante ou θ est l'inclinaison du plan

$$h_t + h^2 h_z + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{6}{5} Re h^6 - \cot \theta h^3 \right) h_z + \frac{WR_e}{3} h^3 h_{zzz} \right]_z$$

Noton que cette équation appelée équation de Benney (7) est non linéaire. La résolution linéaire de cette équation nous permet de déterminer le seuil de déclenchement de l'instabilité de manière précise.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de ce travail de mémoire est de formuler un modèle à une équation décrivant l'évolution de l'interface à partir d'un développement asymptotique. Cette formulation est obtenue dans une configuration annulaire d'un écoulement de deux couches de fluides visqueux en écoulement 2D vertical. A travers cette démarche plusieurs objectifs visés ont été atteints, on peut citer les points suivants :

- Etablir les équations de Navier-Stokes incompressibles et écrire les conditions aux limites d'un écoulement avec une interface.
- Comprendre la notion d'adimensionnalisation d'un système d'équations riche en termes de propriétés physiques.
- Appliquer la notion d'approximation sur un cas d'écoulement précis. Cette approximation est basée sur un développement asymptotique aux grandes ondes valide à faible nombre de Reynolds.

Cette configuration a montré que dans le cas d'un écoulement de deux couches de fluides une instabilité peut avoir lieu même à faible nombre de Reynolds. Ceci est intéressant car les études de stabilité d'un écoulement d'un seul fluide à l'intérieur d'une conduite cylindrique est toujours stable (écoulement de Poiseuille). On peut donc conclure que l'instabilité présente dans le cas de l'écoulement de deux couches de fluides présentant une interface à l'intérieur d'une conduite cylindrique est due à la stratification de la viscosité et de la densité.

Notons que les études basées sur les développements asymptotiques appliquées aux écoulements de films liquides minces permettent de déterminer de manière précise les conditions critiques du déclenchement de leurs instabilités.

Les résultats obtenus dans ce travail peuvent être appliqués à d'autres situations rencontrées dans l'industrie en incluant d'autres paramètres physiques :

- Considérer le cas des fluides non newtonien.
- Considérer une tension superficielle active.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] C. E. Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, *Phys. Fluids* **14**, 1971.
- [2] C.S. Yih, Instability due to viscous stratification, *J. Fluid Mech.* **27**, 337 (1967).
- [3] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, Improved modeling of flows down inclined planes, *Eur. Phys. J. B* **15**, 357 (2000).
- [4] P. L. Kapitza and S. P. Kapitza, *Wave flow of thin layers of a viscous fluid*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **19** (1949), 105–120.
- [5] Jun Liu, J. D. Paul, and J. P. Gollub, *Measurements of the primary instabilities of film flows*, *J. FluidMech.* 455 (1993).
- [6] C. Duprat, C. Ruyer-Quil, and F. Giorgiutti-Dauphiné, *Experimental study of the instability of a filmflowing down a vertical fiber*, *Eur. Phys. J. Special Topics* **166** (2009), 63–66.
- [7] D. J. Benney, *Long waves on liquid films*, *J. Math. Phys* **45** (1966), 150–155.
- [8] J.M. Floryan, S.H. Davis and R.E. Kelly, Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane, *Phys. Fluids* **30** (4), 983 (1987).
- [9] J. Plateau, *Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées*, *Bullet. de l'Acad. de Belgique 2ème série*, t. 24 (1867), 21.
- [10] S.G. Yiantsios and B.G. Higgins, Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids, *Phys. Fluids* **31**, 3225 (1988).
- [11] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201, 1989.

