

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire de Master

Présenté par

Mr. Mehdaoui Nabil

En vue de l'obtention du diplôme de Master en physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

Problème à Deux Corps En Relativité Générale

Soutenu publiquement le 03/12/2015 devant le jury suivant :

Président	Mr. GHARBI A.	MCA	U.A.M. Béjaïa
Examineur	Mr. FOUGHALI T.	MCB	U.A.M. Béjaïa
Rapporteur	Mr. AOUDIA S.	MCB	U.A.M. Béjaïa

A la mémoire de mon grand père . . .

Remerciements

Je voudrais d'abord adresser ma gratitude et exprimer mon profond respect à mon encadreur Monsieur AOUDIA Sofiane, pour sa patience sa disponibilité et surtout ses précieux conseils, et je le remercie de m'avoir fait confiance et m'accompagner durant tout le travail.

Je désire aussi remercier Monsieur GHARBI d'avoir accepter de présider le jury de ma soutenance. Et je remercie aussi monsieur T.FOUGHALI d'avoir accepter de contribuer en sa qualité d'examineurs à l'enrichissement et l'évaluation de mon travail.

Je tient à remercier vivement mes enseignants, H.ZENIA, K.ADEL et M.MEZIANI, qui ont contribuer a ma formation et m'ont inciter à travailler d'avantage, Et à l'occasion je remercie tout mes autres enseignants.

Sans oublier de remercier tout mes amis et collègues, en particulier Hamida, Waamar, Halim, Louiza, Redha et tout les membres du club scientifique de physique.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Approche Newtonienne du problème a Deux Corps	8
2.1	Equation de Mouvement dans Le Référentiel du Centre de Masse	8
2.2	Les Equations de Mouvements	10
2.3	Énergie Totale Du Système	12
2.4	Le Potentiel Effectif	13
2.5	Relation Entre Les Deux Coordonnées Polaires Qui Décrivent le Mouvement	15
3	Les Equations d'Einstein Linéaires	21
3.1	Les Equations d'Einstein	21
3.2	La Théorie De La Linéarisation	22
3.3	Linéarisation des Equations d'Einstein	23
3.4	Transformation De jauge	25
3.5	La Jauge Harmonique	26
3.6	Equations d'Einstein Dans La Jauge Harmonique	27
3.7	La Limite Newtonienne Et l'Invariant Relativiste	29
4	La Solution De Schwarzschild	31
4.1	Métrie De Schwarzschild	31
4.1.1	Invariant Relativiste Pour La Symétrie Sphérique	31
4.1.2	Calcul du Tenseur De Ricci	32
4.1.3	Métrie De Schwarzschild	33
4.2	Potentiel Effectif De Schwarzschild	34
4.2.1	Trouver L'équation $(dr/d\tau)^2$	34
4.2.2	Identification Du Potentiel Effectif	35
4.2.3	Etude Du Comportement Du Potentiel Effectif De Schwarzschild . .	37
4.3	Périhelion Shift (Le Décalage Du Périhélie)	38
5	Ondes Gravitationnelles	42
5.1	La Métrie Des Ondes Gravitationnelles	42
5.1.1	Propagation Des Ondes Gravitationnelles	42

5.1.2	La Jauge Transverse-Traceless	43
5.2	Etude De L'effet Des Ondes Gravitationnelles sur une Particule	44
5.3	Effet De L'onde Gravitationnelle Sur Un Anneau Circulaire	45
5.4	Energie Des Ondes Gravitationnelles	46
5.4.1	Séparation Des Ondes Gravitationnelles De La Métrique de Fond	47
5.4.2	Comment Les Ondes Gravitationnelles Courbe La Métrique De Fond	47
5.4.3	Le Tenseur Energie-Impulsion Des Ondes Gravitationnelles	50
5.5	Moment Quadripolaire	53
5.5.1	Amplitude Et Distribution Angulaire	55
5.5.2	Energie Rayonné	57
5.5.3	Le Moment Angulaire Rayonné	58
6	Applications	60
6.1	Ondes Gravitationnelles émises par une binaire circulaire	60
6.2	Orbite Spirante	62
7	Conclusion générale	69
	Bibliographie	72

Chapitre 1

Introduction

La Relativité Générale est l'un des piliers de la physique moderne. Elle est l'oeuvre d'art du génie allemand Albert Einstein, dont la théorie consiste à expliquer l'une des quatre interactions fondamentales, à savoir l'interaction gravitationnelle.

L'idée de la gravitation est apparue pour la première fois en Angleterre. L'illustre Isaac Newton révolutionne le monde avec sa découverte d'une nouvelle force appelée gravitation. En 1685, il rédigea son opuscule « De motu corporum in gyrum » dans lequel il décrit sa loi, la loi de la gravitation universelle, unifiant ainsi la mécanique terrestre et la mécanique céleste. Néanmoins, à cette époque, l'origine de cette force reste méconnue.

En 1915, Albert Einstein publie sa théorie de la relativité générale où il traite cette question qui est restée longtemps dans l'obscurité. Il a donné naissance à une nouvelle physique qui permet de comprendre mieux le fonctionnement de notre univers, et ses idées concernant les notions du temps et de l'espace sont les clés du succès de sa théorie. Einstein proposa quelques tests classiques pour mettre en évidence sa magnifique oeuvre d'art, les plus connus son :

- L'avance du périhélie de Mercure.
- La déviation de la lumière par le champ gravitationnelle du Soleil.
- L'effet Shapiro.

En 1919, l'astrophysicien britannique Sir Arthur Eddington a pu mesurer l'angle de déviation de la lumière, en provenance d'une source lointaine, par le champ de gravitation du Soleil lors d'une éclipse du Soleil, et confirme alors le test proposé par Einstein.

La Relativité Générale a connu une période difficile, malgré son immense succès, elle a été devancée par les autres théories, comme la Mécanique Quantique et la Théorie Quantique des Champs, ceci est dû à la difficulté de l'observation. Mais, elle a retrouvé son éclat dès le début des années 60.

En 1963, le mathématicien néo-zélandais Roy Patrick Kerr apporte du nouveau, il a pu trouver une solution aux équations d'Einstein décrivant un trou noir en rotation. Bien avant, le trou noir de Schwarzschild sans rotation existait, mais cette solution est considérée uniquement à l'extérieure d'une étoile. Alors dès les années 60, de nouveaux éclaircissements

apparaissent, et ouvrent ainsi les portes à d'autres questions.

Cette époque marque aussi le début des expériences modernes de la gravitation, notamment, par la vérification précise en laboratoire du décalage gravitationnelle vers le rouge par Pound et Rebka (1960). A la même époque, on tentait la détection du rayonnement gravitationnel à l'aide d'un cylindre métallique résonnant appelé maintenant « Barre de Weber ». En effet, en 1918, Albert Einstein a prédit l'existence d'ondes gravitationnelles, qui sont produites par de très grands objets massifs très denses comme les étoiles à neutrons ou les trous noirs avec de grandes accélérations.

En 1974, Russell Hulse et Joseph Taylor ont fourni une preuve indirecte de l'existence de ces ondes gravitationnelles en observant le Pulsar binaire PSR B 1913+16 et montrent que sa période orbitale décroît précisément comme le prédit la théorie si l'on considère que ce système perd son énergie par émission gravitationnelle. Ce résultat a valu à ces deux chercheurs américains un prix Nobel de physique en 1993.

Nous sommes actuellement presque sûr que ces rayonnements gravitationnelles existent. Plusieurs tentatives ont été faites dans le but de les détecter, mais à nos jours, les scientifiques ne sont pas arrivés à les détecter d'une manière directe, et ceci malgré les avancées technologiques remarquables qu'a connu ce domaine.

En mars 2014, les résultats obtenus par le télescope BICEP2 du Centre d'astrophysique Harvard-Smithsonian se sont montrés insatisfaisants. Cette étude est toutefois remise en cause plusieurs mois plus tard.

Aujourd'hui, il existe une première génération de détecteurs appelés « Détecteur Interférométriques terrestres » dans plusieurs pays du monde, mais les plus connus sont sous la direction des deux projets américain et franco-italien LIGO et VIRGO. Tous captent la distorsion de l'espace-temps qu'exerce une onde gravitationnelle en mesurant avec une grande précision la différence de longueur δL du chemin optique suivi par deux faisceaux laser se propageant dans deux directions orthogonales.

Une seconde génération de détecteurs avancés dix fois plus sensibles que la première est en cours d'installation. Advanced LIGO doit effectuer une première prise de données fin 2015 et Advanced Virgo devrait être opérationnel en 2016.

Pour comprendre les différentes propriétés des ondes gravitationnelles, il est nécessaire d'étudier le problème à deux corps ainsi avoir une image claire de la manière dont ces ondes se créent dans un système binaire formé de grands corps massifs.

On sait qu'en théorie de Newton le problème à deux corps est intégrable, En relativité générale ceci reste un mystère, on ne peut pas écrire de façon exacte les équations de mouvements et encore moins les résoudre, vu que les équations d'Einstein sont non-linéaires, ce qui rend très difficile la séparation entre le mouvement et ses effets sur la courbure de l'espace-temps et vice versa. Le problème à un corps en revanche admet une solution exacte qui est donnée par la métrique du trou noir de Schwarzschild.

Dans ce travail, on cherche à étudier le problème des deux corps en relativité générale, et voir comment les ondes gravitationnelles influent sur le mouvement du système en étudiant le cas d'une binaire circulaire formée d'étoile à neutron ou de trou noir.

Le mémoire est organisé comme suit :

- Le chapitre 2 sera consacré à l’approche du problème à deux corps dans le cadre Newtonien.
- Dans les régions où le champ de gravitation est de faible intensité, il est possible d’adopter une approche perturbative de la théorie de la Relativité Générale. Au premier ordre de perturbation, il est possible d’étudier l’écart de la métrique de l’espace-temps par rapport à la métrique plate de Minkowski. Dans ce cas, il y a apparition de phénomènes très intéressants. Et ceci va être vu au cours du 3^{ème} chapitre.
- On s’intéresse dans le chapitre 4 à une distribution matérielle statique dotée d’une symétrie sphérique, et on va résoudre les équations d’Einstein dans le cas extérieur $R_{\mu\nu} = 0$ de telle sorte à exploiter les symétries du problème pour restreindre la forme de la solution $g_{\mu\nu}$.
- Dans les chapitres 4 et 5, on va réunir les résultats des chapitres précédents pour étudier les ondes gravitationnelles et extraire leur propriétés. Des applications seront faites dans ce but.

Chapitre 2

Approche Newtonienne du problème à Deux Corps

Le but de ce chapitre est l'étude du mouvement de deux corps sous l'influence d'une force centrale mutuelle ou il est judicieux de réduire le système au problème à un seul corps, et ceci est possible si on se met dans le référentiel du centre de masse. En s'est appuyer principalement au cour de ce chapitre sur les références [1][2][3].

2.1 Equation de Mouvement dans Le Référentiel du Centre de Masse

On considère un système composé de deux masse ponctuelles m_1 et m_2 , où les seuls forces qui régissent ce système sont celles dues au potentiel d'interaction U . leur position respective sont données par r_1 et r_2 . On propose de se mettre dans le référentiel du centre de masse, tel que R est le centre de masse et r'_1, r'_2 sont les rayons vecteurs relatifs au centre de masse. $r = |r'_2 - r'_1|$ est la distance entre les deux particules. Le Lagrangien de notre système s'écrit sous la forme suivante :

$$L = T(\dot{R}, \dot{r}) - U(r) \quad (2.1)$$

L'énergie cinétique T du système peut être écrite comme une somme des énergies cinétiques du mouvement du centre de masse et celles des deux particules autour du centre de masse.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{r}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}'_2{}^2 \quad (2.2)$$

Et on a :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}'_1 + m_2\vec{r}'_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

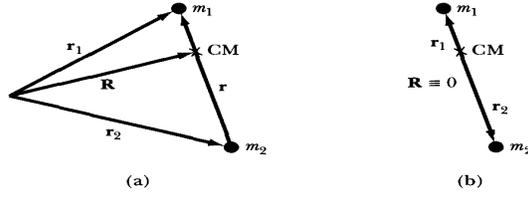


FIGURE 2.1 – le système a deux corps

Maintenant, on fait translater notre système de sorte que l'origine soit le centre de masse du système, c'est à dire :

$$\vec{R} = \vec{0}$$

Dans ce cas, le Lagrangien va s'écrire comme ceci :

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2'^2 - U(r) \tag{2.4}$$

A partir de la figure (2.1), on peut facilement vérifier que :

$$\vec{r} = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \tag{2.5}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{r}_2' &= \vec{r} + \vec{r}_1' \\ \vec{r}_1' &= \vec{r}_2' - \vec{r} \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats dans l'équation (2.3), on obtiendra les equations suivantes :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1' + m_2(\vec{r} + \vec{r}_1')}{m_1 + m_2} = \vec{r}_1' + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{2.6}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1(\vec{r}_2' - \vec{r}) + m_2\vec{r}_2'}{m_1 + m_2} = \vec{r}_2' - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{2.7}$$

Dans le référentiel du centre de masse on a $\vec{R} = \vec{0}$, alors à partir des équations (2.6) et (2.7) on aura :

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{2.8}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{2.9}$$

On injecte les équations (2.8) et (2.9) dans l'expression du Lagrangien et on obtient :

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \dot{r}^2 - U(r) \tag{2.10}$$

On pose $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$. C'est ce qu'on appelle la masse réduite du système. A travers ce résultat, on voit que le mouvement des deux corps l'un par rapport à l'autre est identique à celui d'une particule fictive de masse μ dans un référentiel d'inertie.

A partir des relations (2.8) et (2.9), on peut vérifier que :

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (2.11)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (2.12)$$

Et à partir des équations (2.11) et (2.12), on peut voir que les quantités de mouvements sont données par :

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = -\mu \vec{v} \quad (2.13)$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = \mu \vec{v} \quad (2.14)$$

On voit tout de suite que :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$$

A partir des résultats précédents, on peut vérifier que le moment cinétique total s'écrit alors comme ceci :

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (2.15)$$

Notre problème a une symétrie sphérique, n'importe quelle rotation autour des axes n'aura aucun effet sur la solution, ce qui fait que le moment cinétique total est conservé à cause de cette propriété.

A partir des résultats précédents, on déduit que tout se passe comme si une des particules est fixe et l'autre a une masse μ , donc le système à deux corps est réduit à un système à un seul corps.

2.2 Les Equations de Mouvements

Maintenant on va écrire les équations du mouvement du système, sachant que le Lagrangien du système s'écrit comme ceci :

$$L = \frac{1}{2} \mu v^2 - U(r) \quad (2.16)$$

En utilisant les coordonnées polaires on aura :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

d'où

$$v^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Alors le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (2.17)$$

Notre Lagrangien ne dépend pas explicitement de θ , donc elle est une variable cyclique, Alors on a :

$$p_\theta = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (2.18)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0 \quad (2.19)$$

A partir de la relation (2.18) et du fait que θ est cyclique, les équations d'Euler-Lagrange se réduisent à :

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{d\theta}(\mu r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) nous indique que la quantité $r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement qu'on appellera constante des aires et qu'on notera par A .

Maintenant on va démontrer que la dérivée par rapport au temps de la surface S balayée par le vecteur position est une constante égale à $A/2$.

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} | \vec{r} \wedge d\vec{r} | \\ &= \frac{1}{2} | r\vec{e}_r \wedge dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r | \\ &= \frac{1}{2} | r\vec{e}_r \wedge rd\theta\vec{e}_\theta | \\ &= \frac{1}{2} r^2 d\theta \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{2}$$

Ce résultat explique que pendant des durées égales, le vecteur position balaie des aires égales.

On continue nos calculs, mais sans oublier les équations relatives à la variable r . Donc de même, les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{r}} &= \mu\dot{r} \\ \frac{dL}{dr} &= \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU(r)}{dr} \end{aligned}$$

Finalement, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mu\ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{dU(r)}{dr} = 0 \quad (2.21)$$

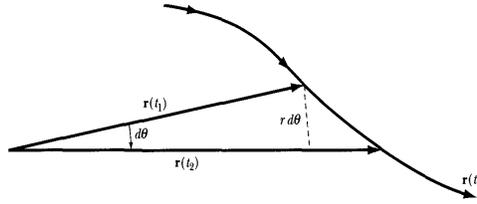


FIGURE 2.2 – la surface balayer par le vecteur position

On pose

$$l = \mu r^2 \dot{\theta}$$

et

$$f(r) = -dU(r)/dr$$

On aura :

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \tag{2.22}$$

2.3 Énergie Totale Du Système

Pour trouver l'expression de l'énergie totale de notre système, on utilise le théorème de Noether.

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} - L = \left(\dot{r} \frac{dL}{dr} + \dot{\theta} \frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - L \tag{2.23}$$

En utilisant l'équation (2.23), l'expression de l'énergie totale du système prendra la forme suivante :

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \tag{2.24}$$

A partir de l'équation (2.24), on peut extraire celle de \dot{r}^2 et elle prendra la forme suivante :

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} \right) \tag{2.25}$$

On a alors :

$$\left(\frac{dr}{dt} \right) = \left(\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right) \right)^{1/2}$$

On déduit que :

$$dt = dr / \left(\frac{2}{\mu} (E - U - (l^2/2\mu r^2)) \right)^{1/2} \tag{2.26}$$

A $t = 0$, r prend la valeur initiale r_0 . A partir de l'équation précédente, on peut déduire le temps que la particule prendra pour aller de r_0 à r comme ceci :

$$t = \int_{r_0}^r dr / \left(\frac{2}{\mu} \left(E - V - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right) \right)^{1/2} \quad (2.27)$$

2.4 Le Potentiel Effectif

Selon le théorème de la conservation de l'énergie, on a :

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

d'où

$$v^2 = \frac{2}{\mu}(E - U(r))$$

Par analogie avec l'équation (2.25), on va identifier le potentiel effectif de notre problème, et il aura la forme suivante :

$$U' = U + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (2.28)$$

On propose maintenant d'étudier le comportement de ce potentiel effectif en fonction de la distance r et le comparer avec le potentiel Newtonien d'un seul corps. L'équation du mouvement (2.22) comprend seulement r et ses dérivées et ceci est la même équation que l'on obtiendrait pour une particule fictive de masse μ soumise à une force de la forme $f' = f + (l^2)/(\mu r^3)$, sachant que $f = -dU/dr$ et $f' = -dU'/dr$.

La signification du terme additionnel est claire, si on l'écrit de cette forme : $\mu r \dot{\theta}^2 = \mu v_\theta^2 / r$ qui n'est autre que la force centrifuge.

Le théorème de la conservation de l'énergie de notre système prend la forme suivante :

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U' \quad (2.29)$$

Pour une illustration de cette méthode d'examen du mouvement, on propose de tracer le graphe de V' en fonction de r .

Si on considère une force attractive de la forme $f = -(k)/(r^2)$ tel que $k > 0$ sachant que le signe (-) assure que la force soit vers le centre, d'où $U = -(k)/(r)$, c'est ce qu'on appelle un potentiel Newtonien. En ce qui concerne notre particule fictive le potentiel s'écrit comme suite : $U' = -(k/r) + (l^2)/(2\mu r^2)$.

On propose de tracer les graphes relatifs aux particules et étudier leurs comportements.

On considère tout au long de notre analyse le mouvement d'une particule possédant différentes énergies comme montrée sur la figure (2.3), et pour chaque énergie essayer de déduire l'allure que peut avoir l'orbite de cette particule.

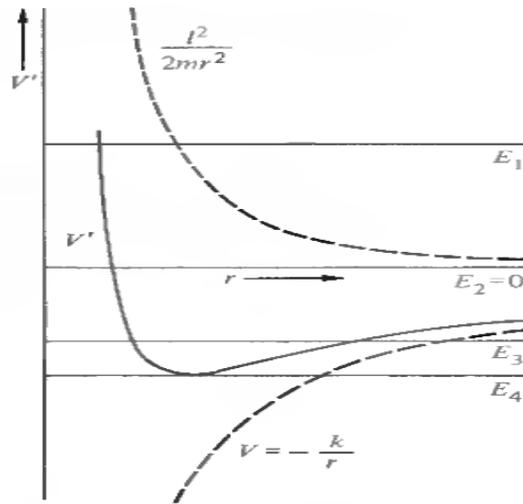


FIGURE 2.3 – Le Potentiel Effectif En Fonction de r

- Si la particule a une énergie E_1 (voir la figure (2.3)), il est clair qu'elle ne pourra pas avoir un rayon inférieur à r_1 (voir la figure (2.4)), parce que si $r < r_1$, le potentiel U' va être supérieur à E et d'après l'équation (2.29) l'énergie cinétique sera négative, chose qui nous laisse penser à une vitesse imaginaire !. Cependant l'énergie cinétique s'annule au point d'inflexion r_1 . Alors on pourra interpréter tout ça comme ceci : La particule vient de l'infini, puis en atteignant la barrière de potentiel centrifuge répulsive, elle sera déviée et voyagera de nouveau vers l'infini. Toutes ces informations nous donnent une image approximative de l'orbite que peut avoir la particule, et la forme de l'orbite est illustrée sur la figure (2.4).
- Si la particule possède une énergie E_2 , on voit directement à partir de la figure (2.3) que c'est la même situation que le cas précédent. Par conséquent, on aura la même

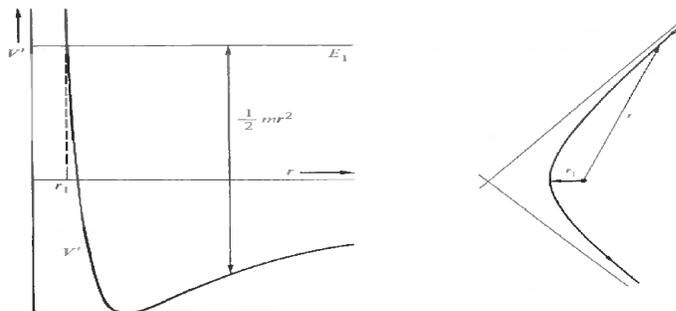


FIGURE 2.4 – Orbite Pour l'Énergie E_1

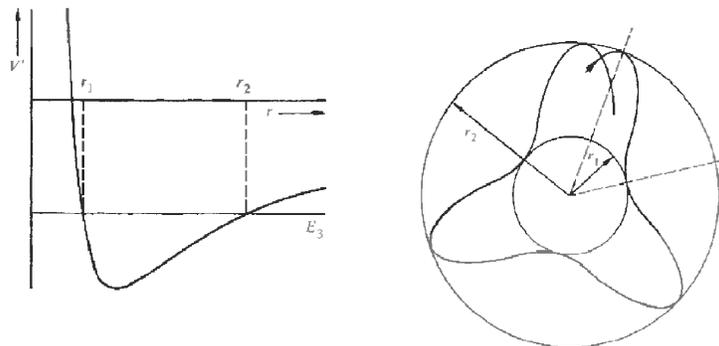


FIGURE 2.5 – Orbite Pour l’Energie E_3

forme de l’orbite que le premier cas.

- Si la particule possède une énergie E_3 , (voir la figure (2.3)), on a une valeur r_1 pour laquelle la particule ne peut pas se rapprocher plus, mais aussi une valeur maximale r_2 que la particule ne peut pas dépasser (voir la figure (2.5)). Dans ce cas, on dira que la particule sera piégée entre deux cercles concentriques de rayons r_1 et r_2 . Toutefois, l’orbite n’est pas fermée même si elle possède deux points d’inflections. Elle aura la forme montrée sur la figure (2.5).
- Si la particule possède une énergie E_4 , égale au minimum du potentiel effectif, le mouvement est possible seulement dans un seul rayon r , et l’orbite est circulaire.

2.5 Relation Entre Les Deux Coordonnées Polaires Qui Décrivent le Mouvement

On a vu précédemment que pendant des durées égales, le vecteur position balaie des aires égales, et comme on a une force centrale qui opère dans notre problème, alors ceci implique que le mouvement s’effectue sur un plan. On va donc chercher la relation qui lie les deux coordonnées polaires r et θ qui décrivent ce mouvement. On a

$$l dt = \mu r^2 d\theta$$

alors on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \tag{2.30}$$

On utilise la relation précédente pour convertir l’équation du mouvement (2.22) en une équation différentielle. En la substituant dans l’équation (2.22), on aura une équation différentielle de second ordre :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) \tag{2.31}$$

Maintenant, on pose $u = (1/r)$ et on aura l'équation suivante :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{d}{du} U \left(\frac{1}{u} \right) \quad (2.32)$$

sachant que :

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr \quad (2.33)$$

On utilise la relation précédente dans l'équation (2.25), et on obtient ce qui suit :

$$d\theta = \frac{l dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2})}} \quad (2.34)$$

On intègre la dernière équation en effectuant le changement de variable $u = 1/r$ et on aboutira au résultat suivant :

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu U}{l^2} - u^2}} \quad (2.35)$$

En général, les potentiels les plus importants sont ceux de la forme $U = kr^{n+1}$. La force dans ce cas varie à la puissance n de r , alors dans ce cas l'équation précédente devient :

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu k}{l^2} u^{-n-1} - u^2}} \quad (2.36)$$

Dans notre cas $V = -(k)/(r)$. Pour calculer l'intégrale (2.35), on remplace U dans l'équation différentielle (2.32), mais une autre approche plus simple existe. Elle consiste à utiliser l'équation (2.36) en posant $n = -2$, on aura alors :

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu k}{l^2} u - u^2}} \quad (2.37)$$

l'intégrale est indéfinie et θ' apparaissant dans l'équation précédente est une constante d'intégration déterminée par les conditions initiales. Elle n'est pas nécessairement la même que θ_0 à $t=0$. Notre intégrale possède la forme générale suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\delta}} \right) \quad (2.38)$$

sachant que $\delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, où :

$$\begin{aligned} \alpha &= (2\mu E)/(l^2) \\ \beta &= (2\mu k)/(l^2) \\ \gamma &= -1 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\delta = \left(\frac{2\mu k}{l^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \right)$$

Alors notre intégrale prend la forme suivante :

$$\theta = \theta' - \arccos \left(\left(\frac{l^2 u}{\mu k} - 1 \right) / \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) \quad (2.39)$$

Maintenant on remplace u par sa valeur $(1/r)$ et on aura ceci :

$$\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta') = - \left(\frac{l^2}{\mu k r} - 1 \right) \quad (2.40)$$

On aura finalement :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta') \right) \quad (2.41)$$

L'équation précédente est celle d'une conique avec un seul foyer à l'origine et on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r} = c(1 + e \cos(\theta - \theta')) \quad (2.42)$$

$$e = \sqrt{1 + (2El^2)/(\mu k^2)}$$

Où e est l'excentricité. La nature de l'orbite dépendra seulement de e qui est elle-même fonction de l'énergie. On aura donc les cas suivants :

- si $e > 1$, $E > 0$ hyperbole .
- si $e = 1$, $E = 0$ parabole .
- si $e < 1$, $E < 0$ ellipse .
- si $e = 0$, $E = -(\mu k^2)/(2l^2)$ cercle .

D'après l'étude faite précédemment, pour avoir un mouvement circulaire, il faudra que l'énergie soit égale au minimum du potentiel effectif, et il faut que T et U soient des constantes dans le temps.

$$E = T + V = -\frac{U}{2} + U = \frac{U}{2} = \frac{-k}{2r_0} \quad (2.43)$$

Pour que l'orbite soit un cercle, il faudra que la force effective soit égale à la force centrale $f(r)$. On a identifié que $(l^2)/(\mu r^3)$ est la force effective, donc on a $(k)/(r_0^2) = (l^2)/(\mu r_0^3)$ d'où $r_0 = (l^2)/(\mu k)$. On injecte r_0 dans l'équation (2.43) et on obtiendra :

$$E = \frac{-\mu k^2}{2l^2} \quad (2.44)$$

ceci est la condition pour avoir une orbite circulaire .

Dans le cas d'une orbite elliptique, le demi-grand axe est égal à la moitié de la distance entre r_1 et r_2 (voir la figure (2.5)), et par définition la vitesse radiale est nulle en ces points. L'équation (2.27) devient ainsi :

$$E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} = 0 \quad (2.45)$$

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2\mu E} = 0 \quad (2.46)$$

Le demi-grand axe est donné par :

$$\alpha = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{-k}{2E}$$

d'où l'excentricité e est donnée par :

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu k \alpha}}$$

A partir de l'équation (2.46), on aura l'équation suivante :

$$r = \frac{\alpha(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')} \quad (2.47)$$

Maintenant, on se met a chercher les lois de Kepler. On remarque que l'équation (2.27) peut se réduire à ce qui suit :

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}} \quad (2.48)$$

Sachant que θ et t sont connectés via la conservation du moment angulaire $dt = (mr^2)/(l)d\theta$, en utilisant l'équation (2.38), on aura :

$$t = \frac{l^3}{\mu k^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta'))^2} \quad (2.49)$$

Cette intégrale est complexe à calculer et la recherche de r ou θ en fonction de t, par inversion, est fortement problématique. Pour contourner ce problème, on propose de se mettre dans le cas d'un mouvement parabolique, c'est-à-dire $e = 1$. Pour cela, on prend $\theta' = 0$ dans l'équation (2.49) par convention. On aura ainsi l'identité suivante :

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Donc l'équation (2.49) se réduit à :

$$t = \frac{l^3}{4\mu k^2} \int_0^\theta \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (2.50)$$

En faisant le changement de variable $x = \tan(\theta/2)$, on aura alors :

$$t = \frac{l^3}{2\mu k^2} \int_0^{\tan(\theta/2)} (1+x^2) dx \quad (2.51)$$

Il suffit de faire un petit calcul pour constater qu'elle a la valeur suivante :

$$t = \frac{l^3}{2\mu k^2} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{3} \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (2.52)$$

Dans ce résultat $-\pi < \theta < \pi$, la particule vient de l'infini et elle est localisée à $\theta = -\pi$. Puis à $t=0$, on a $\theta=0$ au périhélie, sachant que le périhélie est le point le plus proche c'est à dire le minimum de r . Finalement $t \rightarrow \infty$ correspond à $\theta \rightarrow \pi$, Ce résultat donne le temps en fonction de θ .

Dans le cas de l'ellipse, on utilise par convention la variable ψ , connue comme étant l'anomalie excentrique, et donnée par :

$$r = \alpha(1 - e \cos \psi) \quad (2.53)$$

En comparant avec le résultat trouvé précédemment, il est clair que ψ couvre l'intervalle de 0 à 2π et elle correspond à un tour complet de θ . Donc le périhélie est à $\psi=0$ et l'aphélie pour $\psi = \pi$.

En exprimant E et L en terme de α , e et k , l'équation (2.48) devient :

$$t = -\sqrt{\frac{\mu}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2\alpha} - \frac{\alpha(1-e^2)}{2}}} \quad (2.54)$$

En suivant la convention qui fait que r_0 est la distance du périhélie, la substitution de r en terme de ψ de l'équation (2.53) réduit l'intégrale (2.54) à la forme suivante :

$$t = \sqrt{\frac{\mu\alpha^3}{k}} \int_0^\psi 1 - e \cos(\psi) d\psi \quad (2.55)$$

Sachant qu'à partir de la conservation du moment angulaire, on a :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu}$$

L'aire A de l'orbite s'obtient en effectuant une intégrale de 0 à τ qui est la période du mouvement :

$$A = \int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = \frac{l\tau}{2\mu} \quad (2.56)$$

L'aire d'une ellipse est $A = \pi\alpha\beta$, où par définition le demi-petit axe β est relié à α par la formule suivante :

$$\beta = \alpha\sqrt{1 - e^2}$$

et l'excentricité est donnée par :

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu k \alpha}}$$

Alors

$$\beta = \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}}$$

Donc

$$A = \pi\alpha\alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}} = \frac{l\tau}{2\mu}$$

Finalement :

$$\tau = 2\pi\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (2.57)$$

De l'équation (2.57), on tire que le carré de la période est proportionnelle au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique et elle correspond à la 3^e loi de Kepler.

Maintenant si on prend m_1 comme étant la masse d'une planète et m_2 celle du Soleil, la loi de la gravitation s'écrit comme étant $f = (-Gm_1m_2)/(r^2)$. On pose $k = Gm_1m_2$, alors l'équation (2.57) devient :

$$\tau = \frac{2\pi\alpha^{(3/2)}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \simeq \frac{2\pi\alpha^{(3/2)}}{\sqrt{Gm_2}} \quad (2.58)$$

On a eu ce résultat en négligeant la masse m_1 par rapport à m_2 , d'où cette proportionnalité est valable pour toutes les planètes du système solaire, c'est la 3^e loi de Kepler, d'après ce qui précède, on conclut que les trois lois de Kepler sont vérifiées.

- toute planète décrit une orbite elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.
- pour chacune des planètes, le rayon vecteur, dont l'origine est le Soleil et l'extrémité est la planète elle-même, balaie des aires égales pendant des durées égales.
- le rapport du carré de la période τ d'une révolution sur le cube du demi-grand axe α de la trajectoire elliptique est égale à la même constante pour toutes les planètes du système solaire.

Chapitre 3

Les Equations d'Einstein Linéaires

Le but de cette partie est de retrouver l'approximation Newtonienne des équations d'Einstein linéaires. Mais avant, il va falloir linéariser les équations d'Einstein et aussi les retrouver dans le cas de la jauge harmonique, ceci nous montrera comment les ondes gravitationnelles émergent de la théorie de la Relativité Générale. On s'appuiera principalement sur [4][5][8][11][7][12][14][16][18][20][21][22][23].

3.1 Les Equations d'Einstein

L'action gravitationnelle est donnée par $S = S_E + S_M$, sachant que S_E est l'action d'Einstein, et S_M est l'action de la matière.

$$S_E = \left(\frac{c^3}{16\pi G} \right) \int d^4x \sqrt{|-g|} R \quad (3.1)$$

Le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ de la matière est défini à partir de la variation de S_M sous la transformation de la métrique qui suit :

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

On a alors :

$$\delta S_M = \left(-\frac{1}{2c} \right) \int d^4x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Et la variation de l'action d'Einstein est donnée par :

$$\delta S_E = -\gamma \int d^4x \sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Avec : $\gamma = (c^3)/(16\pi G)$. En prenant la variation de l'action totale, on construit l'équation d'Einstein comme ceci :

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(-\gamma \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) \quad (3.4)$$

On a :

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} &= g^{\mu l} g^{\nu k} T_{lk} \delta g^{\mu\nu} \\
 &= -T_{lk} (-g^{\mu l} g^{\nu k} \delta g_{\mu\nu}) \\
 &= -T_{lk} \delta g^{lk} \\
 &= -T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède, on abouti à l'équation qui suit :

$$-\gamma \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \left(\frac{1}{2c} T_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{3.5}$$

Finalement, l'équation d'Einstein s'écrit de la manière suivante :

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

3.2 La Théorie De La Linéarisation

La Relativité Générale est invariante sous un large groupe de symétries. Sous une transformation de coordonnées :

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu(x)$$

la métrique se transforme comme ceci :

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(\hat{x}) = \frac{dx^\rho}{d\hat{x}^\mu} \frac{dx^\sigma}{d\hat{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \tag{3.7}$$

On considère cette symétrie comme étant la symétrie de jauge de la Relativité Générale. Le champ étant faible loin de la source, nous pouvons alors l'exprimer par rapport à la métrique de Minkowski, en ajoutant une perturbation supposée très petite comme ceci :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad | h_{\mu\nu} | \ll 1$$

On définit la transformation de Lorentz comme étant une transformation des coordonnées x^μ vers les coordonnées x'^μ , et ceci se fait comme suit :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

Telle que Λ^μ_{ν} est la matrice de la transformation de Lorentz et elle a la forme suivante :

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

On procède à une transformation de Lorentz de la métrique $g_{\mu\nu}$ et on aboutira ainsi au résultat suivant :

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}h_{\rho\sigma}(x) \quad (3.9)$$

On déduit de l'équation (3.9) que :

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}h_{\rho\sigma}(x) \quad (3.10)$$

A partir de l'équation (3.10) il est clair que $h_{\mu\nu}$ se comporte comme un tenseur sous la transformation de Lorentz. C'est sûr qu'il ne l'est pas, c'est juste une partie de la métrique $g_{\mu\nu}$. Alors dans ce cas, cette partie de la métrique peut être vue comme un tenseur défini dans un espace de Minkowski. En d'autres termes, on peut penser à une légère courbure de l'espace-temps comme étant un espace-temps plat avec un tenseur $h_{\mu\nu}$ défini dedans. Vu que l'information physique est contenue dans $h_{\mu\nu}$, on peut avoir une image du champ [schutz] gravitationnel faible comme étant décrit par le champ symétrique $h_{\mu\nu}$ dans un espace-temps plat.

Maintenant on veut trouver les $g^{\mu\nu}$ au 1^{ier} ordre, on pose :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}$$

Sachant que $f^{\mu\nu}$ est un terme du 1^{ier} ordre qu'on va déterminer à l'aide des identités suivantes :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} &= \delta_{\mu}^{\rho} \\ \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} &= \delta_{\mu}^{\rho} \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} + f^{\nu\rho}) \approx \delta_{\mu}^{\rho}$$

Après développement, tout en négligeant les termes du 2^{ème} ordre, et en contractant par $\eta^{\mu\sigma}$, on aura :

$$\delta_{\nu}^{\sigma}f^{\nu\rho} + h^{\sigma\rho} = 0$$

Enfin

$$f^{\sigma\rho} = -h^{\sigma\rho}$$

Ainsi, au 1^{ier} ordre de la perturbation, les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ de la métrique s'écrivent :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

3.3 Linéarisation des Equations d'Einstein

On se met à linéariser les équations d'Einstein, en effectuant un développement au 1^{ier} ordre de la perturbation de l'équation (3.6). On commence d'abord par linéariser les

différentes quantités qui la compose.

On commence par linéariser les symboles de Christoffel comme suit :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \approx \frac{1}{2} (\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda}) (\partial_{\mu} (\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) + \partial_{\nu} (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu}) - \partial_{\lambda} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}))$$

Du fait que $\partial_{\mu}\eta^{\alpha\beta} = 0$, on peut le réécrire comme suit :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \approx \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}) \quad (3.12)$$

Pour linéariser le tenseur de courbure donné par l'expression suivante :

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\lambda} = \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}$$

on utilise l'équation (3.12) tout en négligeant les termes du 2^{ème} ordre et on aboutira à l'équation suivante :

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\lambda} \approx \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\rho}^{\lambda} + \partial_{\sigma} \partial^{\lambda} h_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \partial^{\lambda} h_{\nu\sigma}) \quad (3.13)$$

La linéarisation du tenseur de Riemann s'obtient en utilisant l'équation (3.13) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\approx \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\rho}^{\lambda} + \partial_{\sigma} \partial^{\lambda} h_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \partial^{\lambda} h_{\nu\sigma}) \\ &\approx \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma}) \\ &\approx \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} + \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A l'aide des équations (3.11), (3.14), on va maintenant linéariser le tenseur de Ricci en contractant le tenseur de Riemann au 1^{ier} ordre avec la métrique à l'ordre 0 comme suit :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\approx (\eta^{\sigma\lambda} - h^{\sigma\lambda}) R_{\sigma\mu\lambda\nu} \\ &\approx \eta^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\nu} \end{aligned}$$

En introduit la trace de la perturbation :

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\mu}$$

Et aussi le d'Alembertien :

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = -\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Nous arrivons au résultat suivant :

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu}^{\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} h - \square h_{\mu\nu}) \quad (3.15)$$

De la même manière que le tenseur de Ricci, la courbure scalaire se linéarise en contractant l'équation (3.15) au 1^{ier} ordre avec la métrique à l'ordre 0.

$$\begin{aligned}
 R &\approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
 &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \\
 &\approx \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - \eta^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu})
 \end{aligned}$$

Finalement

$$R \approx \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.16)$$

On peut maintenant linéariser l'équation d'Einstein (3.6) en utilisant les équations (3.15) et (3.16) et on aboutira au résultat suivant :

$$\frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma + \partial_\nu \partial_\sigma h_\mu^\sigma - \partial_\nu \partial_\mu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\lambda h^{\sigma\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h) \approx \left(\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \quad (3.17)$$

3.4 Transformation De jauge

On considère une transformation infinitésimale de coordonnées permettant de passer du système de coordonnées $\{x^\mu\}$ vers le système $\{x'^\mu\}$ comme suit :

$$x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \quad | \zeta^\mu | \ll 1 \quad (3.18)$$

Les $\zeta^\mu(x)$ sont 4 fonctions arbitraires du même ordre que $h_{\mu\nu}$. La transformation inverse de coordonnées est donnée par :

$$x^\mu = x'^\mu - \zeta'^\mu \quad \text{tel que} \quad \zeta^\mu(x'^\rho) = \zeta'^\mu(x^\rho) \quad (3.19)$$

Dans le nouveau système de coordonnées $\{x'^\mu\}$, les composantes du tenseur métrique sont données par l'équation (3.7). On se met dans l'approximation linéaire et on va essayer de trouver l'expression de $h_{\mu\nu}$ dans le nouveau système de coordonnées x'^μ .

$$\begin{aligned}
 \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &\approx \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &\approx (\delta_\mu^\alpha - \partial'_\mu \zeta'^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial'_\nu \zeta'^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &\approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\beta} \partial'_\nu \zeta'^\beta - h_{\mu\beta} \partial'_\nu \zeta'^\beta - \eta_{\alpha\nu} \partial'_\mu \zeta'^\alpha - h_{\alpha\nu} \partial'_\mu \zeta'^\alpha
 \end{aligned}$$

En négligeant les terme du 2^{ème} ordre, et du fait de l'invariance de la métrique $\eta_{\mu\nu}$ sous la transformation arbitraire (3.18), on aura finalement :

$$h'_{\mu\nu}(x'^\sigma) \approx h_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial'_\nu \zeta'_\mu(x^\sigma) - \partial'_\mu \zeta'_\nu(x^\sigma) \quad (3.20)$$

Maintenant on veut trouver toutes les quantités de l'équation (3.20) au point x^σ . Ceci est possible en effectuant un développement de Taylor au 1^{ier} ordre de ζ^σ , on aura :

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu}(x'^\sigma) &= h'_{\mu\nu}(x^\sigma + \zeta^\sigma) \\ &= h'_{\mu\nu}(x^\sigma) + \zeta^\rho \partial_\rho h'_{\mu\nu}(x^\sigma) + O(\zeta^2) \end{aligned}$$

En négligeant les termes du 2^{ème} ordre, on se ramène à :

$$h'_{\mu\nu}(x'^\sigma) \approx h'_{\mu\nu}(x^\sigma) \quad (3.21)$$

Donc l'équation (3.20) se réduit à :

$$h'_{\mu\nu}(x^\sigma) \approx h_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial'_\nu \zeta'_\mu(x^\sigma) - \partial'_\mu \zeta'_\nu(x^\sigma) \quad (3.22)$$

Le calcul de $\partial'_\alpha \zeta'^\mu$ au 1^{ier} ordre en tenant compte de l'équation (3.19) va donner :

$$\begin{aligned} \partial'_\alpha \zeta'^\mu &= \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \\ &\approx \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\beta} (\delta_\alpha^\beta - \partial'_\alpha \zeta'^\beta) \\ &\approx (\partial_\beta \zeta^\mu) \delta_\alpha^\beta - (\partial_\beta \zeta^\mu) (\partial'_\alpha \zeta'^\beta) \end{aligned}$$

On néglige le terme du 2^{ème} ordre, il s'en suit que :

$$\partial'_\alpha \zeta'^\mu \approx \partial_\alpha \zeta^\mu \quad (3.23)$$

Enfin l'équation (3.22) devient :

$$h'_{\mu\nu}(x^\sigma) \approx h_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial_\nu \zeta_\mu(x^\sigma) - \partial_\mu \zeta_\nu(x^\sigma) \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) peut être vue comme étant une transformation de jauge plutôt qu'une transformation de coordonnées, c'est à dire qu'on est dans le même système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et on définit dedans un nouveau tenseur $h'_{\mu\nu}$ dont les composantes sont données par (3.24).

Après calcul de la variation du tenseur de Riemann (3.14), on conclut que ce dernier est invariant sous la transformation de jauge (3.24), de même pour le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. En admettant l'invariance du tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ sous la transformation de jauge, on déduit que les équations d'Einstein sont invariantes.

3.5 La Jauge Harmonique

L'invariance du tenseur d'Einstein sous la transformation de jauge (3.24) nous offre la liberté de choisir une jauge. En d'autres termes, si on connaît pour une distribution de matière $T_{\mu\nu}$ donnée, une solution particulière $h_{\mu\nu}$ des équations d'Einstein linéaires, alors il

est possible d'obtenir une autre solution qui décrit exactement la même situation physique en effectuant une transformation de jauge, mais celle-ci n'est pas définie de manière unique. Par conséquent, on possède une liberté totale pour fixer la jauge.

Un choix judicieux consiste à travailler dans la jauge Harmonique qui est par définition spécifiée par les 3 conditions spatiales ($\rho = i = 1, 2, 3$) et une temporelle ($\rho = 0$) comme suit :

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad (3.25)$$

Si on développe au 1^{ier} ordre de la perturbation l'équation (3.25), puis en contractant par $g^{\alpha\beta}$, on obtient la condition de jauge linéarisée suivante :

$$\partial_{\mu}h_{\beta}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\beta}h = 0 \quad (3.26)$$

3.6 Equations d'Einstein Dans La Jauge Harmonique

On va se mettre à écrire les équations d'Einstein linéarisées (3.17) en utilisant la jauge Harmonique (3.26). On aura ce qui suit :

$$\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)T_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\square\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) \quad (3.27)$$

A ce stade, on est contraint de faire un changement de métrique afin d'avoir une équation de propagation de la perturbation. On définit alors $\bar{h}_{\mu\nu}$ comme ceci :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (3.28)$$

Calculons la trace de $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) \\ &= h - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}h \\ &= -h \end{aligned} \quad (3.29)$$

A partir des équations (3.28) et (3.29), on obtient :

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (3.30)$$

En contractant les membre de (3.30) par $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}$, on aura :

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\bar{h} \quad (3.31)$$

En utilisant l'équation (3.30), on aura l'expression des équations d'Einstein linéaires dans la jauge Harmonique :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \approx -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

On va maintenant écrire la jauge harmonique en fonction de la nouvelle métrique. L'équation (3.26) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\partial_\mu \left(h^\mu_\beta - \frac{1}{2} \delta^\mu_\beta h \right) = 0 \quad (3.33)$$

Ceci n'est rien que :

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu_\beta = 0 \quad (3.34)$$

D'une autre manière :

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.35)$$

La condition de jauge Harmonique, l'équation (3.32), ainsi que la définition de la métrique constituent les équations fondamentales de la théorie linéaire dans la jauge Harmonique. Maintenant il reste à déterminer la transformation de coordonnées (3.18) qui permet de passer d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ au système de coordonnées $\{x'^\mu\}$ de telle sorte que la condition de jauge Harmonique (3.35) soit valable. En utilisant les équations (3.24), (3.28) on a :

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h' \\ &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\eta^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta}) \\ &= (h_{\mu\nu} - \partial_\nu \zeta_\mu - \partial_\mu \zeta_\nu) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \zeta_\beta - \partial_\beta \zeta_\alpha) \\ &= (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h) - \partial_\nu \zeta_\mu - \partial_\mu \zeta_\nu + \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \zeta_\beta \end{aligned}$$

Finalement

$$\bar{h}_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} \approx \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \zeta_\mu - \partial_\mu \zeta_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \zeta^\alpha \quad (3.36)$$

On fait monter les indices libres μ et ν avec $\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}$ on va avoir :

$$\bar{h}^{\rho\sigma} \longrightarrow \bar{h}'^{\rho\sigma} \approx \bar{h}^{\rho\sigma} - \eta^{\nu\sigma} \partial_\nu \zeta^\rho - \eta^{\mu\rho} \partial_\mu \zeta^\sigma + \eta^{\rho\sigma} \partial_\alpha \zeta^\alpha \quad (3.37)$$

En appliquant une dérivée contractée à (3.37), on aura :

$$\partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} \longrightarrow \partial'_\sigma \bar{h}'^{\rho\sigma} = \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \square \zeta^\rho \quad (3.38)$$

Pour assurer que la jauge Harmonique soit valable dans le nouveau système de coordonnées, il suffit d'imposer que :

$$\square \zeta^\rho = \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} \quad (3.39)$$

Donc si l'on passe d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ où la jauge Harmonique est vérifiée à un autre système de coordonnée $\{x'^\mu\}$ dans lequel la jauge harmonique reste vérifiée, alors l'équation (3.39) devient :

$$\square \zeta^\rho = 0 \tag{3.40}$$

Les ζ^ρ représentent de petites ondulations dans le système de coordonnées $\{x^\mu\}$ induisant ainsi une perturbation de la métrique $\eta_{\mu\nu}$. La relation (3.40) peut être vue comme étant l'équation de propagation de ces perturbations, et l'appellation de jauge Harmonique revient au fait que l'équation (3.40) admet des solutions harmoniques.

La solution générale de l'équation (3.32) est donnée par :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x, t) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(x', t - \frac{|x-x'|}{c})}{|x-x'|} \tag{3.41}$$

La solution (3.41) est certainement compatible avec la condition de jauge $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ et c'est due à la conservation du tenseur énergie-impulsion.

Cette solution est similaire à la solution retardée des équations pour le 4-potentiel électromagnétique en fonction du 4-courant et de manière analogue à ce dernier cas, la relation (3.41) explicite la propagation de l'action gravitationnelle d'un point de la source x' au point x , du champ, et ce à la vitesse de la lumière c .

L'intérêt des équations d'Einstein linéarisées est multiple, d'abord elles permettent des calculs simples et des interprétations physiques assez directes lorsque les effets de la gravitation constituent de petites corrections à l'espace de Minkowski de la Relativité Restreinte, en suite l'équation (3.32) avec $T_{\mu\nu} \approx 0$ montre l'existence d'un rayonnement gravitationnelle pouvant se propager même en dehors de la source.

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.42}$$

Autrement dit, même dans le vide le champ gravitationnel peut ne pas être identiquement nul. L'équation (3.42) possède des solutions différentes de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Donc la théorie d'Einstein linéaire nous montre que de petites perturbations gravitationnelles peuvent se propager à la vitesse de la lumière dans un espace-temps de Minkowski. En fait, on peut également montrer que de petites perturbations peuvent se propager sur un espace-temps courbe quelconque. Nous nous limiterons, toutefois, au petites perturbations de l'espace-temps de Minkowski, ce qui fourni un aperçu suffisant.

3.7 La Limite Newtonienne Et l'Invariant Relativiste

La gravité Newtonienne est connue pour être valide lorsque le champ gravitationnel est faible et que la source se déplace avec une vitesse faible devant celle de la lumière : $|\Phi| \ll 1$ et $|v| \ll 1$

Dans cette situation, la Relativité Générale donne la même prédiction que la gravité Newtonienne. Le fait que les vitesses sont petites implique que les composantes du tenseur

énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ obéissent à la condition suivante :

$$| T^{00} | \gg | T^{0i} | \gg | T^{ij} | \quad (3.43)$$

A cause de l'équation (3.32), les inégalités précédentes sont transférées à $\bar{h}^{\mu\nu}$. alors nous aurons :

$$| \bar{h}^{00} | \gg | \bar{h}^{0i} | \gg | \bar{h}^{ij} | \quad (3.44)$$

Le champ Newtonien dominant est ainsi donné par l'équation suivante :

$$\square \bar{h}^{00} = -16\pi\rho \quad (3.45)$$

Sachant que $T^{00} = \rho + O(\rho v^2)$. Pour des champs qui varient uniquement à cause du déplacement de la source avec une vitesse v , $\partial/\partial t$ est du même ordre que $v\partial/\partial x$. Le D'Alembertien s'écrit alors :

$$\square = \nabla^2 + O(v^2\nabla^2) \quad (3.46)$$

Alors notre équation devient :

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = -16\pi\rho \quad (3.47)$$

En comparant cette équation avec celle de poisson qui est issue de la théorie de Newton et qui est donnée par :

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (3.48)$$

On peut identifier que

$$\bar{h}^{00} = -4\phi$$

Toutes les autres composantes de $\bar{h}^{\mu\nu}$ sont négligeables à cet ordre .

On a :

$$h = h^\mu_\mu = -\bar{h}^\mu_\mu = \bar{h}^{00}$$

Ceci implique que :

$$h^{00} = -2\phi \quad (3.49)$$

$$h^{xx} = h^{yy} = h^{zz} = -2\phi \quad (3.50)$$

D'où :

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.51)$$

Cet invariant nous donne les lois correctes du mouvement dans le cas Newtonien, alors cette démonstration qui découle des équations d'Einstein complète la preuve que la gravité Newtonienne est un cas particulier de la Relativité Générale.

Chapitre 4

La Solution De Schwarzschild

Le but est l'étude du mouvement d'une particule test baignée dans une métrique de Schwarzschild. Pour cela, il faudra premièrement trouver la métrique de Schwarzschild décrivant l'espace-temps autour d'une sphère homogène.

On s'est appuyer principalement sur les references [4][8][11][7][12][14][17][16][21][22][23].

4.1 Métrique De Schwarzschild

4.1.1 Invariant Relativiste Pour La Symétrie Sphérique

Pour une distribution matérielle statique dotée d'une symétrie sphérique, on propose de déterminer la métrique de l'espace-temps à l'extérieur de cette source. La démarche à suivre consiste à résoudre l'équation d'Einstein dans le cas extérieur $R_{\mu\nu} = 0$ de telle sorte à exploiter les symétries du problème pour restreindre la forme de la solution $g_{\mu\nu}$.

Pour un champ de gravitation extérieur isotrope et stationnaire, la forme des composantes de la métrique est soumise à quelques restrictions. L'isotropie s'exprime par le fait que l'intervalle $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ soit invariant pour tous les points équidistants du centre, de sorte que sa dépendance spatiale ne se manifeste qu'à travers les termes r'^2 , $r'dr$ et dr'^2 . Le régime stationnaire implique des composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ sans dépendance explicite du temps. De plus, l'invariance de ds^2 par renversement du temps $x^0 \rightarrow -x^0$ conduit à l'annulation des composantes $g_{0i} = 0$.

Pour déterminer la forme la plus générale des composantes de la métrique qui satisfait toute ces exigences, nous allons nous placer d'abord dans le cas de la métrique de Minkowski plate exprimée en coordonnées sphériques sous la forme :

$$ds^2 = (cdt^2) - dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d^2\phi) \quad (4.1)$$

La relation (4.1) nous conduit à déterminer en coordonnées sphériques la forme la plus générale d'une métrique isotrope et statique suivante :

$$ds^2 = c^2 D(r') dt^2 - E(r') dr'^2 - F(r') r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.2)$$

telles que $D(r')$, $E(r')$, $F(r')$ sont des fonctions arbitraires qu'on va déterminer par la suite. Pour réduire le nombre de fonctions arbitraires, on introduit la variable radiale $r = r' \sqrt{F(r')}$, alors la relation (4.2) prend la forme suivante :

$$ds^2 = c^2 A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

Avec $A(r)$ et $B(r)$ sont les nouvelles fonctions arbitraires.

4.1.2 Calcul du Tenseur De Ricci

Maintenant on se met à déterminer les composantes du tenseur métrique, en suite calculer les symboles de Christoffel non nuls qui sont du nombre de neuf. D'après l'équation (4.3), il est clair que les seules composantes non nulles de la métrique sont :

$$g_{tt} = A(r) \quad (4.4)$$

$$g_{rr} = -B(r) \quad (4.5)$$

$$g_{\theta\theta} = -r^2 \quad (4.6)$$

$$g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (4.7)$$

Les éléments de la métrique inverse sont :

$$g^{tt} = 1/A(r) \quad (4.8)$$

$$g^{rr} = -1/B(r) \quad (4.9)$$

$$g^{\theta\theta} = -1/r^2 \quad (4.10)$$

$$g^{\phi\phi} = -1/(r^2 \sin^2 \theta) \quad (4.11)$$

Après calcul des neuf symboles de Christoffel non nuls, on se met à calculer les éléments non nuls du tenseur de Ricci en contractant le tenseur de Riemann comme suite :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \quad (4.12)$$

On aboutira aux équations suivantes [8] :

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{B} = 0 \quad (4.13)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{B} = 0 \quad (4.14)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{B} = 0 \quad (4.15)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0 \quad (4.16)$$

Sachant que A' est la dérivée par rapport à r de A ; de même pour les autres fonctions.

4.1.3 Métrique De Schwarzschild

On va exploiter les équations de (4.13) jusqu'à (4.16). L'équation (4.16) ne contient aucune nouvelle information par rapport à (4.15). Au lieu d'utiliser les deux équations (4.13) et (4.14) séparément, calculons plutôt l'expression suivante :

$$\frac{R_{rr}}{B} + \frac{R_{tt}}{A} = \frac{1}{rB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (4.17)$$

Après résolution par séparation de variables, on aura :

$$AB = k \quad (4.18)$$

Où k est une constante. Maintenant on fixe la valeur de cette constante en exigeant que la métrique de l'espace-temps tend à devenir Minkowskienne très loin de la source, c'est-à-dire nous imposons que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad (4.19)$$

de sorte que $k = 1$, donc $AB = 1$, alors

$$A(r) = \left(\frac{1}{B(r)} \right)$$

En utilisant cette relation dans l'équation (4.15), non utilisée jusqu'à présent, on trouve :

$$R_{\theta\theta} = 1 - A - rA' = 1 - \left(\frac{d}{dr} rA \right) = 0$$

Donc :

$$\left(\frac{d}{dr} rA \right) = 1$$

On déduit que :

$$A(r) = 1 + \frac{k}{r} \quad (4.20)$$

Pour fixer la constante d'intégration k , nous rappelons qu'à de très grandes distances de la masse centrale M , la composante $g_{tt} = A(r)$ tend vers $(1 + (2\phi/c^2))$ avec ϕ est le potentiel Newtonien, donné par $\phi = -(MG)(r)$, alors la constante d'intégration est donnée par $k = -(2GM)/(c^2)$. A est donc donnée par :

$$A(r) = 1 - \left(\frac{2GM}{c^2 r} \right)$$

Finalement la solution de Schwarzschild est donnée par :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.21)$$

4.2 Potentiel Effectif De Schwarzschild

L'importance de la métrique de Schwarzschild est le fait qu'elle représente le champ gravitationnel d'une étoile, mais son importance ne se limite pas uniquement à ça. Elle est aussi la géométrie d'un trou noir sphérique. Une étude soigneuse d'une particule test de masse m et celle d'un photon qui suivent un mouvement géodésique est la clé de la compréhension de l'importance physique de cette métrique .

4.2.1 Trouver L'équation $(dr/d\tau)^2$

Sachant que quand l'espace-temps a une certaine symétrie, alors il y a toujours conservation d'une impulsion le long de la trajectoire. Notons que notre espace-temps a quelques symétries (indépendance du temps et la symétrie sphérique), les valeurs des quantités conservées peuvent, à elles seules, déterminer complètement la trajectoire. Nous allons traiter le problème pour une particule et un photon en parallèle.

La métrique est indépendante du temps, cela signifie que P_0 est une constante de la trajectoire. On définit ces constantes reliées à P_0 .

$$\text{Particule} \longrightarrow E_1 = \frac{-P_0}{m} \tag{4.22}$$

$$\text{Photon} \longrightarrow E_2 = -P_0 \tag{4.23}$$

Vu l'indépendance de la métrique de l'angle ϕ , alors P_ϕ est une constante, on définit encore :

$$\text{Particule} \longrightarrow L_1 = \frac{P_\phi}{m} \tag{4.24}$$

$$\text{Photon} \longrightarrow L_2 = P_\phi \tag{4.25}$$

A cause de la symétrie sphérique, le mouvement s'effectue sur un seul plan, on peut choisir ce plan comme étant le plan équatorial, alors $\theta = (\pi/2)$ pour l'orbite

Donc $(d\theta)/(d\lambda) = 0$, tel que λ est un paramètre quelconque de l'orbite, par conséquent P_θ va être nulle. Les composantes de l'impulsion sont alors :

Pour la particule :

$$P^0 = g^{00}P_0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E_1 \tag{4.26}$$

$$P^r = m \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \tag{4.27}$$

$$P^\phi = g^{\phi\phi}P_\phi = \left(\frac{m}{r^2}\right) L_1 \tag{4.28}$$

Pour le photon :

$$P^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E_2 \quad (4.29)$$

$$P^r = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) \quad (4.30)$$

$$P^\phi = \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) = \left(\frac{L_2}{r^2}\right) \quad (4.31)$$

L'équation p^r du photon doit être regardée comme étant une définition du paramètre λ . On a l'équation $\vec{P} \cdot \vec{P} = -m^2$ ceci implique :

Pour la particule :

$$-m^2 E_1^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + m^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{m^2 L_1^2}{r^2}\right) = -m^2 \quad (4.32)$$

Pour le photon :

$$-E_2^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{L_2}{r^2}\right) = 0 \quad (4.33)$$

Ceci peut être résolue pour avoir les équations d'orbites suivantes :

$$Particule \longrightarrow (dr/d\tau)^2 = E_1^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L_1^2}{r^2}\right) \quad (4.34)$$

$$Photon \longrightarrow (dr/d\lambda)^2 = E_2^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L_2^2}{r^2}\right) \quad (4.35)$$

4.2.2 Identification Du Potentiel Effectif

Les deux équations (4.34) et (4.35) ont la même forme générale, alors on définit le potentiel comme suit :

$$Particule \longrightarrow V_1^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L_1^2}{r^2}\right) \quad (4.36)$$

$$Photon \longrightarrow V_2^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L_2^2}{r^2}\right) \quad (4.37)$$

On propose de tracer les courbes relatives à la particule et au photon du potentiel V_i^2 ($i = 1, 2$) en fonction de r , avec un moment angulaire L fixé, on aboutira au deux allures illustrées sur les figures (4.1) et (4.2) suivantes :

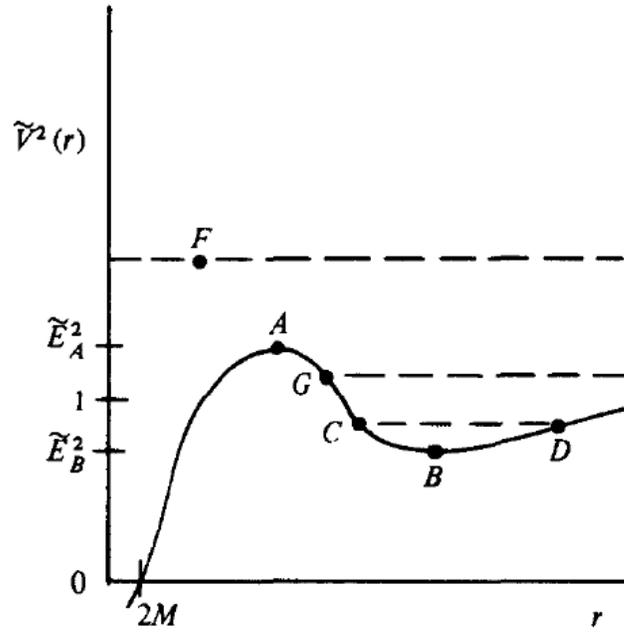


FIGURE 4.1 – le potentiel en fonction de r pour la particule

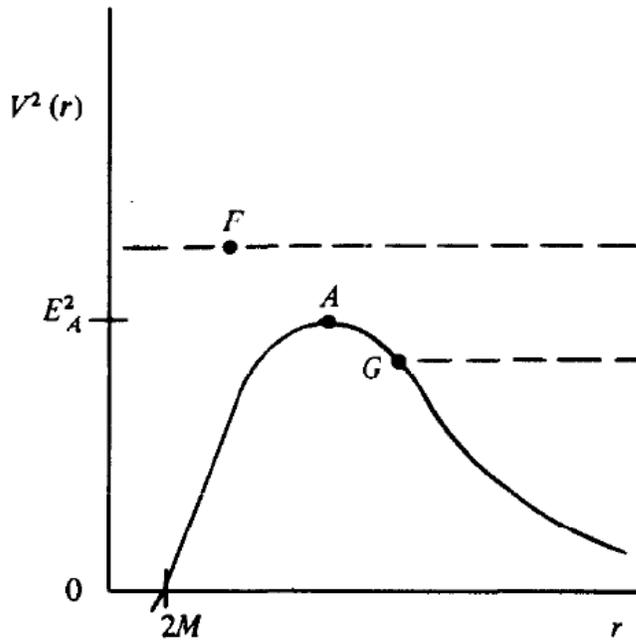


FIGURE 4.2 – le potentiel en fonction de r pour le photon

4.2.3 Etude Du Comportement Du Potentiel Effectif De Schwarzschild

Les équations (4.34) et (4.35) impliquent que tant que le terme de gauche est positif ou nul, l'énergie de la particule ne sera jamais inférieure à V , ainsi pour une orbite d'énergie E donnée, la gamme des rayons est limitée à des rayons pour lesquels V est plus petit que E .

On considère une trajectoire qui a une valeur de E indiquée par le point G sur les figures (4.1) et (4.2). En partant de $r = \infty$, on ne pourra pas avoir un r plus petit que le point où les pointillés coupent la courbe de V^2 au point G des deux figures précédentes. Ce point G est appelé « point tournant ». Au point G on a $E_i^2 = V_i^2$ pour les deux cas ($i=1,2$).

On a :

$$Particule \longrightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E_1^2 - V_1^2 \quad (4.38)$$

$$Photon \longrightarrow \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E_2^2 - V_2^2 \quad (4.39)$$

En faisant la différentiation on aura :

$$Particule \longrightarrow 2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) = - \left(\frac{dV_1^2}{dr}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \quad (4.40)$$

$$Photon \longrightarrow 2 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) \left(\frac{d^2r}{d\lambda^2}\right) = - \left(\frac{dV_2^2}{dr}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) \quad (4.41)$$

A partir des équations (4.40) et (4.41), on aboutira à ce qui suit :

$$Particule \longrightarrow \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} V_1^2(r)\right) \quad (4.42)$$

$$Photon \longrightarrow \left(\frac{d^2r}{d\lambda^2}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} V_2^2(r)\right) \quad (4.43)$$

Les équations (4.42) et (4.43) sont l'analogie en Relativité Générale de l'équation suivante :

$$ma = -\vec{\nabla}\phi$$

où ϕ est le potentiel d'une force.

Il est claire d'après les équations (4.42) et (4.43) que l'orbite circulaire est possible seulement au minimum ou au maximum de V^2 . Le minimum et le maximum sont définis comme étant B et A , respectivement. Comme illustré sur les figures (4.1) et (4.2), le max A est cependant instable, vu que n'importe quel changement de r résultera en une accélération loin du maximum par les équations (4.42) et (4.43).

Donc pour la particule, on a une orbite circulaire stable en B et une autre instable en A pour cette valeur de L_1 . Pour le photon, il y a une seule orbite instable pour cette valeur de L_2 représentée par A sur la figure (4.2). On peut évaluer tout ça par :

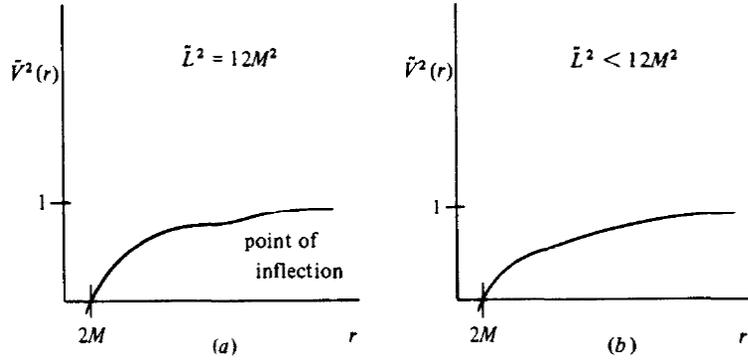


FIGURE 4.3 – le potentiel en fonction de r dans les cas ou $L_1^2 = 12M^2$ et $L_1^2 < 12M^2$

$$Particule \longrightarrow \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L_1^2}{r^2}\right) \right] = 0 \quad (4.44)$$

$$Photon \longrightarrow \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L_2^2}{r^2}\right) \right] = 0 \quad (4.45)$$

Ceci va respectivement donner :

$$Particule \longrightarrow r = \frac{L_1^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{12M^2}{L_1^2}\right)} \right) \quad (4.46)$$

$$Photon \longrightarrow r = 3M \quad (4.47)$$

Pour la particule, on a deux rayons comme prévu. Ceci est le cas seulement si $L_1^2 > 12M^2$, et les deux rayons sont identiques pour $L_1^2 = 12M^2$, et ils n'existent pas pour tout $L_1^2 < 12M^2$. Les différentes valeurs de L_1^2 font changer la forme de la courbe, les deux cas $L_1^2 = 12M^2$ et $L_1^2 < 12M^2$ sont illustrés sur la figures (4.3).

Notons que pour le minimum de L_1^2 , pour une orbite circulaire, on aura aussi le minimum de r . Ceci est obtenu en prenant $L_1^2 = 12M^2$ dans l'équation (4.46), et on arrive au $r_{min} = 6M$. Pour le photon, l'orbite circulaire instable est toujours au même rayon $r = 3M$ sans tenir compte de L_2 .

L'autre type d'orbites qu'on a besoin de traiter est celui pour lequel l'énergie est donnée par la ligne qui passe par le point F des figures (4.1), (4.2). Toutefois, la courbe du potentiel ne coupe nulle part la ligne, cette orbite plonge droit devant $r = 2M$ ($2M$ est l'horizon) et elle ne va plus jamais revenir.

4.3 Périhelion Shift (Le Décalage Du Périhélie)

Une particule qui suit une orbite circulaire autour d'une étoile va faire un tour complet et revenir au même point. C'est ce qu'on appelle la période T, cette période peut être

déterminée comme suite :

A partir de l'équations (4.46), il s'en suit que l'orbite est circulaire de rayon r avec un moment angulaire :

$$L_1^2 = \frac{Mr}{\left(1 - \frac{3M}{r}\right)}$$

Et vu que $E_1^2 = V_1^2$ pour l'orbite circulaire, alors l'énergie est :

$$E_1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 / \left(1 - \frac{3M}{r}\right)$$

Maintenant nous avons :

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \equiv U^\phi = g^{\phi\phi} \left(\frac{p_\phi}{m}\right) = (L_1/r^2) \tag{4.48}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right) \equiv U^0 = g^{00} \left(\frac{p_0}{m}\right) = \left(E_1 / \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right) \tag{4.49}$$

Nous obtiendrons la vitesse angulaire par :

$$\left(\frac{dt}{d\phi}\right) = \left(\frac{dt/d\tau}{d\phi/d\tau}\right) = \left(\frac{r^3}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.50}$$

La période est donc obtenue en intégrant de 0 à 2π et on aura :

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{r^3}{M}\right)} \tag{4.51}$$

Cette expression est identique à l'expression Newtonienne de la période. Une orbite légèrement non circulaire oscillera autour du rayon r . Dans la gravité Newtonienne, l'orbite est une ellipse parfaite. Ce qui veut dire entre autres, qu'après une certaine valeur du temps fixée, la particule retourne au même point (r et ϕ). Par contre dans le cadre de la Relativité Générale, ceci n'est plus vrai. Lorsque les effets de la relativité sont petits et l'orbite est presque circulaire, l'orbite relativiste doit être presque fermée, elle doit ressembler à une ellipse dont les axes tournent lentement. Pour voir ceci, il faut regarder le périhélie de l'orbite.

Le périhélie tourne autour de l'étoile d'une certaine façon, et un observateur peut le mesurer. D'ailleurs il a été mesuré pour Mercure et nous allons essayer de la calculer ici. La mesure de la précession de Mercure qui est de 43'' par siècle n'est pas expliquée par la théorie Newtonienne et Einstein a démontré que sa théorie prédit exactement cette valeur et ceci est la première évidence en faveur de sa théorie.

On a les expressions de $dr/d\tau$ et $d\phi/d\tau$ alors :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left[\frac{E_1^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L_1^2}{r^2}\right)}{\left(L_1^2/r^4\right)}\right] \tag{4.52}$$

Il est convenant de définir $U = 1/r$, on obtient :

$$\left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E_1^2}{L_1^2}\right) - (1 - 2MU) \left(\frac{1}{L_1^2} + U^2\right) \quad (4.53)$$

On retrouve l'orbite Newtonienne en négligeant U^3

$$Newton \longrightarrow \left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E_1^2}{L_1^2}\right) - \left(\frac{1}{L_1^2}\right) (1 - 2MU) - U^2 \quad (4.54)$$

L'orbite circulaire de la théorie Newtonienne a un $U = M/L_1^2$. De l'équation (4.46), on met le terme de la racine égal à 1, et on définit :

$$Y = U - \left(\frac{M}{L_1^2}\right) \quad (4.55)$$

Où Y représente la déviation de la circularité, on aura alors :

$$\left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E_1^2 - 1}{L_1^2}\right) + \left(\frac{M^2}{L_1^4}\right) - Y^2 \quad (4.56)$$

Cette équation est satisfaite par :

$$Newton \longrightarrow Y = \left[\frac{E_1^2 + (M^2/L_1^2) - 1}{L_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\phi + \beta) \quad (4.57)$$

β est arbitraire. Quand ϕ avance de 2π , Y retourne à sa valeur et la constante β détermine l'orientation initiale de l'orbite, en résolvant pour r on aura :

$$Newton \longrightarrow \left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{M}{L_1^2}\right) + \left[\frac{E_1^2 + (M^2/L_1^2) - 1}{L_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\phi + \beta) \quad (4.58)$$

Ceci est l'équation d'une ellipse. On considère le cas Relativiste et on met la même définition de Y , au lieu de négliger le U^3 de l'équation (4.53), nous assumons que l'orbite est presque circulaire avec un petit Y , et on néglige seulement le terme en Y^3 alors on aura :

$$\left(\frac{dY}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E_1^2 + (M^2/L_1^2) - 1}{L_1^2}\right) + \left(\frac{2M^4}{L_1^6}\right) + \left(\frac{6M^3}{L_1^2}\right) Y + \left(\frac{6M^2}{L_1^2} - 1\right) Y^2 \quad (4.59)$$

Par analogie à l'équation (4.56), la solution est :

$$Y + Y_0 + A \cos(K\phi + \beta) \quad (4.60)$$

Sachant que :

$$K = (1 - 6M^2/L_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.61)$$

$$Y_0 = (3M^3/K^2 L_1^2) \quad (4.62)$$

$$A = \frac{1}{KL_1} \left[\left(E_1^2 + \left(\frac{M^2}{L_1^2} \right) - L^2 \right) + \left(\frac{2M^4}{L_1^4} \right) - Y_0^2 L_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.63)$$

L'existence de la constante Y_0 veut dire que l'orbite oscille non pas autour de $Y = 0$ mais autour de $Y = Y_0$. L'équation (4.50) n'utilise pas le rayon correct pour une orbite circulaire en Relativité Générale. L'amplitude A est quelque peu différente, mais ce qui nous intéresse ici c'est le fait que K n'est pas 1. L'orbite retourne au même r quand $K\phi$ va faire 2π , donc la variation de ϕ d'un périhélie à un autre est donnée par :

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{K}\right) = 2\pi \left(1 - \frac{6M^2}{L_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour une orbite approximativement Newtonienne, elle est donnée par :

$$\Delta\phi \approx 2\pi \left(1 + \frac{3M^2}{L_1^2}\right)$$

Le décalage du périhélie d'une orbite à une autre est :

$$\Delta\phi = 6\pi \left(\frac{M^2}{L_1^2}\right) \text{ rad/orbite}$$

Si on considère l'étoile étant non-relativiste, alors on peut faire un approximation du moment angulaire L_1 comme suit :

$$L_1^2 = \left(\frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}}\right) \approx Mr$$

De telle sorte que :

$$\Delta\phi = 6\pi \left(\frac{M}{r}\right)$$

L'orbite de Mercure possède les données suivantes :

$$r = 5,55.10^7 km \tag{4.64}$$

$$M = 1,47km = 1M_* \tag{4.65}$$

$$(\Delta\phi)_{mercure} = 4,99.10^{-7} \text{ rad/orbite}$$

Chaque orbite prend 0.24 années, donc le décalage du périhélie de Mercure est :

$$(\Delta\phi)_{mercure} = 43'' \text{ d'arc/siecle}$$

Chapitre 5

Ondes Gravitationnelles

Contrairement à la théorie Newtonienne, les solutions des équations d'Einstein linéaires suggèrent l'existence d'ondes gravitationnelles, comme ces ondes dissipent de l'énergie et du moment angulaire du système, les ondes gravitationnelles influencent donc le mouvement des deux corps, alors elles sont d'un grand intérêt pour notre étude.

On s'est appuyer principalement sur les references [15][5][7][12][6][9][14][19][4][21][22][23].

5.1 La Métrique Des Ondes Gravitationnelles

Dans cette section on va chercher la métrique des ondes gravitationnelles dans la théorie linéaire de la Relativité Générale, pour cela il est judicieux de travailler dans la jauge TT.

5.1.1 Propagation Des Ondes Gravitationnelles

Dans certaines régions de l'espace-temps le champ gravitationnel est faible mais non pas stationnaire, ceci peut être le cas loin d'une source relativiste qui fait des changements rapides et va produire des perturbations qui vont atteindre ces régions considérées. Pour étudier ce problème, on doit utiliser les équations du champ faible. Dans le chapitre 3, on a vu que l'équation d'Einstein linéaire, avec $T_{\mu\nu} = 0$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{5.1}$$

On considère la solution en ondes planes de la forme :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{5.2}$$

Où $\epsilon_{\mu\nu}$ est le tenseur polarisation de l'onde gravitationnelle, un ensemble de constantes qui forment le tenseur symétrique :

$$\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$$

Et k^α est le 4-vecteur d'onde :

$$k^\alpha = (\omega/c, \vec{k})$$

En substituant (5.2) dans (5.1) on aura :

$$k^2 \epsilon_{\mu\nu} e^{ikx} = 0$$

Ainsi le $k^2 = k_\alpha k^\alpha$ doit être nul, par conséquent la relation de dispersion de l'onde s'écrit :

$$k^2 = k_\alpha k^\alpha = -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0$$

L'onde gravitationnelle se propage à la même vitesse $\omega / |\vec{k}| = c$ que l'onde électromagnétique. En raison de la validité de l'équation d'onde (5.1) seulement dans les coordonnées qui satisfont la condition de jauge harmonique (3.35), le tenseur de polarisation doit être « transverse », c'est-à-dire $\epsilon_{\mu\nu}$ doit être orthogonal à k^μ .

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0 \tag{5.3}$$

5.1.2 La Jauge Transverse-Traceless

On a vu dans le chapitre 3 que sous la transformation de jauge (3.18), la condition de jauge harmonique (3.35) est préservée lorsque $\square\zeta^\rho = 0$ comme le montre l'équation (3.40). Mais ce qu'on n'a pas mentionné c'est que l'équation (3.35) ne fixe pas complètement la jauge.

$\bar{h}_{\mu\nu}$ étant symétrique possède dix composantes indépendantes mais la condition de jauge harmonique (3.35) lui impose quatre autres contraintes, ce qui fait que $\bar{h}_{\mu\nu}$ se réduit à six composantes indépendantes.

Si on passe d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ où la jauge harmonique est vérifiée à un autre système $\{x'^\mu\}$ dans lequel toujours la jauge harmonique est vérifiée, alors il faut que :

$$\square\zeta_\rho = 0 \tag{5.4}$$

L'équation (3.36) nous informe qu'on peut choisir les quatre fonctions arbitraires ζ_ρ de telle sorte à imposer quatre autres conditions à $\bar{h}_{\mu\nu}$, ce qui va épuiser d'avantage la liberté de jauge, et ainsi simplifier le tenseur de polarisation.

On choisit les ζ_ρ de façon à avoir un $\epsilon_{\mu\nu}$ de trace nulle, autrement dit « Traceless ».

$$\epsilon^\mu{}_\mu = 0 \tag{5.5}$$

$$\epsilon_{\mu 0} = \epsilon_{0\mu} = 0 \tag{5.6}$$

La solution de l'équation (5.4) peut être écrite sous la forme $\zeta_\mu = \psi_\mu e^{ikx}$ tel que k^α est un vecteur nul. On peut vérifier que les quatre constantes ψ_μ peuvent être choisies de façon à avoir un tenseur polarisation sans trace et par conséquent l'annulation des composantes

$\epsilon_{\mu 0}$ comme suite :

On injecte la solution de (5.4) et l'équation (5.2) dans l'équation (3.36) on aura :

$$\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} - ik_{\mu}\psi_{\nu} - ik_{\nu}\psi_{\mu} + i\eta_{\mu\nu}(k^{\sigma}\psi_{\sigma}) \quad (5.7)$$

Ceci implique la relation suivante :

$$\epsilon'^{\mu}_{\mu} = \epsilon_{\mu}^{\mu} - 2ik^{\mu}\psi_{\mu} \quad (5.8)$$

Ceci veut dire que si on commence par un $\epsilon_{\mu\nu}$ qui n'est pas de trace nulle, il va l'être $\epsilon'^{\mu}_{\mu} = 0$ dans le nouveau système de coordonnées si ψ_{μ} est choisi de façon à satisfaire la condition $2ik^{\mu}\psi_{\mu} = \epsilon_{\mu}^{\mu}$.

Maintenant, à partir de l'équation (5.7) on a :

$$\epsilon'_{\mu 0} = \epsilon_{\mu 0} - ik_{\mu}\psi_0 - ik_0\psi_{\mu} + i\eta_{\mu 0}(k^{\sigma}\psi_{\sigma}) \quad (5.9)$$

Formellement, $\epsilon'_{\mu 0} = 0$ représente quatre conditions, en raison des relations $k^{\mu}\epsilon_{\mu 0} = 0$ et $k^2 = 0$, on fait une contraction avec k^{μ} on aura :

$$k^{\mu}\epsilon_{\mu 0} - ik^2\psi_0 - ik_0(k^{\sigma}\psi_{\sigma}) + ik_0(k^{\sigma}\psi_{\sigma}) = 0$$

Ainsi $\epsilon'_{\mu 0} = 0$ reste avec trois relations indépendantes.

Ce choix particulier de coordonnées est appelé « Transverse-Traceless jauge » qui sont un sous ensemble qui satisfont la condition de jauge harmonique.

Finalement le tenseur polarisation possède seulement deux éléments indépendants, par conséquent l'onde gravitationnelle possède deux états de polarisation indépendants. On oriente nos axes spatiaux de façon que l'onde se propage dans la direction z c'est à dire $k^{\alpha} = (\omega, 0, 0, \omega)/c$. Les équations (5.3) avec (5.6) implique que $\omega\epsilon_{3\nu} = 0$ et $\epsilon_{3\nu} = \epsilon_{\nu 3} = 0$, en combinant tout ça avec (5.5) et (5.6) la métrique de la perturbation aura la forme suivante :

$$h_{\mu\nu}(z, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(z-ct)/c} \quad (5.10)$$

h_{+} et h_{\times} sont respectivement les deux amplitudes « plus » et « cross ».

5.2 Etude De L'effet Des Ondes Gravitationnelles sur une Particule

On considère la situation où une particule initialement dans une région de l'espace-temps rencontre une onde gravitationnelle, cette particule test est au repos avec un 4-vecteur vitesse $u^{\mu} = (c, 0, 0, 0)$. L'effet de l'onde gravitationnelle sur cette particule test est déterminé par l'équation de la géodésique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = 0 \quad (5.11)$$

Vu que seulement u^0 est initialement non nul, l'équation (5.11) se réduit à l'expression de l'accélération initiale suivante :

$$\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \tau}\right)_0 = -c^2 \Gamma_{00}^\mu = -c^2 \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\nu 0,0} + h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}) \quad (5.12)$$

A partir de l'équation (5.10) $h_{\nu 0}$, qui est maintenant dans la jauge TT, est nulle, alors initialement l'accélération est nulle. Ceci signifie que la particule sera toujours au repos un moment plus tard. Avec le même argument, l'accélération va rester égale à zéro un moment plus tard, le résultat c'est que la particule restera au repos indéfiniment sans se soucier de l'onde.

Cependant, au repos, signifie rester à une position constante, mais il ne faut pas se précipiter par cette interprétation. Tout ce qu'on a découvert, c'est qu'en choisissant la jauge TT, qui veut dire faire des ajustements particuliers des agitations de nos coordonnées, nous avons trouvé un système de coordonnées qui est attaché à une particule individuelle, mais en aucun cas cette interprétation n'est invariante du point de vue géométrique. Pour faire une bien meilleure mesure de l'effet de l'onde, on considère deux particules proches, l'une à l'origine et l'autre à $(x = \epsilon, y = z = 0)$, toutes les deux sont initialement au repos. La distance propre entre elles est alors :

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int |ds^2|^{\frac{1}{2}} \\ &= \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} dx \\ &\approx |g_{xx}(x=0)|^{\frac{1}{2}} \epsilon \\ &\approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0)\right] \epsilon \end{aligned} \quad (5.13)$$

Vu que h_{xx}^{TT} n'est pas généralement nulle, la distance propre (contrairement à la distance de coordonnée) va changer avec le temps. Ceci est une illustration de la différence entre le calcul du nombre qui dépend des coordonnées (position de la particule) et le nombre indépendant des coordonnées (distance propre). L'effet de l'onde est clairement vu lors du calcul de la distance propre.

5.3 Effet De L'onde Gravitationnelle Sur Un Anneau Circulaire

On considère une boucle de particules initialement au repos dans le plan (xy), on suppose que $h_{xx}^{TT} \neq 0$, $h_{xy}^{TT} = 0$, alors les particules vont bouger (en terme de distance propre relative a la particule au centre) selon la figure suivante :

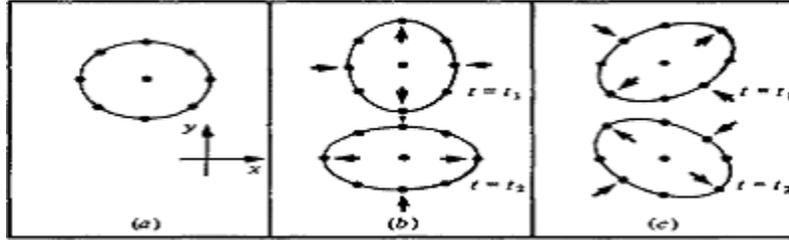


FIGURE 5.1 – Effet de l'onde sur l'anneau circulaire

- (a) Le cercle de particules libres devant une onde qui voyage dans la direction z qui va les atteindre.
- (b) Une distorsion du cercle est produite par l'onde qui a la polarisation (+). Les deux figures représentent la même onde avec une séparation de phase de 180° . Les particules sont positionnées suivant leur distances propres l'une par rapport à l'autre.
- (c) Comme (b) mais avec une polarisation (\times).

Si au lieu que l'onde ait $h_{xy}^{TT} \neq 0$ mais $h_{xx}^{TT} = h_{yy}^{TT} = 0$ alors, l'image va se déformer comme sur le cadran (c) de la figure précédente. Vu que h_{xx}^{TT} et h_{xy}^{TT} sont indépendants donc, (b) et (c) produisent une représentation de deux polarisations linéaires différentes. Notons que les deux états sont simplement tournés de 45° l'un par rapport à l'autre. Ces deux polarisations sont dues au fait que la gravité est représentée par un tenseur symétrique du second ordre $h_{\mu\nu}$. Par contre l'électromagnétisme est représenté par le potentiel vecteur A^μ , ce qui explique le fait que les deux polarisations dans le cas électromagnétique sont séparées par un angle de 90° .

5.4 Energie Des Ondes Gravitationnelles

Le fait que les ondes gravitationnelles portent de l'énergie et de l'impulsion est clair : d'après l'étude faite précédemment sur l'effet des OGs sur l'anneau de particules test, on a vu qu'une OG qui rencontre dans son mouvement un anneau de particules initialement au repos, celle-ci transmet de l'énergie cinétique à ces masses. En fait, l'action de l'onde au voisinage des masses peut être décrite en terme de force Newtonienne.

Afin d'obtenir l'expression explicite du tenseur énergie-impulsion de l'OG, on peut suivre deux chemins différents, qui sont les suivants :

- En s'accordant à la Relativité Générale, toute forme d'énergie contribue à la courbure de l'espace-temps. On peut donc se demander si les OGs elles-mêmes sont une source de courbure de l'espace-temps.
- On peut traiter la gravité linéaire comme tout autre théorie classique des champs, et appliquer le théorème de Noether et utiliser les outils théoriques des champs pour trouver l'expression du tenseur impulsion-énergie des ces ondes.

5.4.1 Séparation Des Ondes Gravitationnelles De La Métrique De Fond

Jusqu'ici la définition des OGs est relativement claire, l'espace-temps est plat et les petites fluctuations autour s'appellent OG. Mais si on veut savoir si l'OG courbe réellement l'espace-temps, on peut pas la définir comme étant une perturbation de la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$, dès le départ on exclut cette possibilité. Cependant, on doit définir l'OG comme étant une perturbation sur un espace-temps de fond courbe et dynamique qu'on notera $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad | h_{\mu\nu} | \ll 1 \quad (5.14)$$

Ceci nous met dans une situation où on peut pas distinguer qu'elle est la partie de la métrique $g_{\mu\nu}$ qui est la fluctuation et qu'elle est la métrique de fond ou background ? Une distinction naturelle aura lieu dans le cas où dans un système de coordonnées on peut écrire la métrique sous la forme (5.14), sachant que $\bar{g}_{\mu\nu}$ a une échelle typique de variation L_B beaucoup plus grande que la longueur d'onde réduite de l'OG λ

$$\bar{\lambda} \ll L_B \quad \text{où} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (5.15)$$

Alternativement, une distinction peut être faite dans l'espace fréquentiel, si $\bar{g}_{\mu\nu}$ possède une fréquence maximum f_B qui est beaucoup plus petite que la fréquence typique des OGs f .

$$f \gg f_B \quad (5.16)$$

Dans ce cas l'espace-temps de fond (background) varie lentement alors que les OGs sont des variations à haute fréquences.

Les quantités L_B et f_B caractérisent le background mais elles ne sont pas reliées, alors les conditions (5.15) et (5.16) sont indépendantes, il nous suffit de satisfaire l'une d'elle. On peut maintenant poser deux questions :

- Comment ces hautes fréquences se propagent dans le background ? La réponse à cette question va justifier le fait que la perturbation $h_{\mu\nu}$ est appelée onde gravitationnelle.
- Comment cette perturbation affecte la métrique de fond elle-même ? La réponse à cette question va permettre d'associer un tenseur énergie-impulsion à cette ondes gravitationnelle.

5.4.2 Comment Les Ondes Gravitationnelles Courbe La Métrique De Fond

Dans le but de comprendre comment la perturbation $h_{\mu\nu}$ se propage et comment elle affecte la métrique de fond, on commence par développer les équations d'Einstein autour de la métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$. Dans notre développement on a deux petits paramètres ; le premier est l'amplitude typique $h \equiv O(| h_{\mu\nu} |)$ et le second est la fraction $\bar{\lambda}/L_B$ qui dépend de l'équation (5.15).

On développe les équations d'Einstein à l'ordre quadratique en $h_{\mu\nu}$. Mais avant il est convenant de les mettre sous la formes suivantes :

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (5.17)$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière, et T est sa trace. On développe le tenseur de Ricci à l'ordre $O(h^2)$:

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (5.18)$$

$\bar{R}_{\mu\nu}$ est construit uniquement de $\bar{g}_{\mu\nu}$ et donc contient le mode basse fréquence. $R_{\mu\nu}^{(1)}$ est à l'ordre linéaire contient seulement le mode hautes fréquences. $R_{\mu\nu}^{(2)}$ contient les deux modes hautes et basses fréquences. Cependant, les équations d'Einstein peuvent-être séparées en deux parties hautes et basses fréquences comme ceci :

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{basse} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{basse} \quad (5.19)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{haute} + \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{haute} \quad (5.20)$$

L'expression explicite de $R_{\mu\nu}^{(1)}$ est calculée, elle a la forme suivante :

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\bar{D}^\rho \bar{D}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{D}^\rho \bar{D}_\nu h_{\mu\rho} - \bar{D}^\rho \bar{D}_\rho h_{\mu\nu} - \bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h \right) \quad (5.21)$$

\bar{D}_μ est la dérivée covariante par rapport la métrique de fond. A l'ordre quadratique après un calcul on trouve que :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} &= (1/2) \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\alpha\beta} [(1/2) \bar{D}_\mu h_{\rho\alpha} \bar{D}_\nu h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_\rho h_{\nu\alpha}) (\bar{D}_\sigma h_{\mu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\sigma}) \\ &+ h_{\rho\alpha} (\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h_{\sigma\beta} + \bar{D}_\beta \bar{D}_\sigma h_{\mu\nu} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\mu h_{\nu\sigma}) \\ &+ ((1/2) \bar{D}_\alpha h_{\rho\sigma} - \bar{D}_\rho h_{\alpha\sigma}) (\bar{D}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{D}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\nu})] \end{aligned} \quad (5.22)$$

En posant $T_{\mu\nu} = 0$ on constate de l'équation (5.19) que $\bar{R}_{\mu\nu}$ est déterminé seulement par $[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{low}$. A partir de l'expression explicite (5.22), on voit bien que $R_{\mu\nu}^{(2)}$ est la somme de termes de l'ordre $(\partial h)^2$ et d'autres d'ordre $h\partial^2 h$. Quand on calcul la projection sur le mode faibles fréquences, ces deux termes donnent une contribution du même ordre de grandeur, d'où $[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{low}$ est de l'ordre $(\partial h)^2$, donc dans l'absence de champ de matière l'équation (5.19) exprime le fait que la dérivée de la perturbation affecte la courbure de la métrique de fond $\bar{g}_{\mu\nu}$ et aussi on déduit que :

$$\bar{R}_{\mu\nu} \sim (\partial h)^2 \quad (5.23)$$

L'échelle de variation de $\bar{g}_{\mu\nu}$ est L_B et celui de h est $\bar{\lambda}$, donc :

$$\partial \bar{g}_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L_B} \quad (5.24)$$

On prend $\bar{g}_{\mu\nu} = O(1)$ tant que :

$$\partial h \sim \frac{h}{\bar{\lambda}} \quad (5.25)$$

Vu que la courbure de fond $\bar{R}_{\mu\nu}$ est construite à partir de la dérivée seconde de la métrique de fond. L'équation (5.24) implique que :

$$\bar{R}_{\mu\nu} \sim \partial^2 \bar{g}_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L_B^2} \quad (5.26)$$

Alors que l'équation (5.25) nous donne $(\partial h)^2 \sim (h/\bar{\lambda})^2$, ainsi l'équation (5.23) nous donne la relations suivante :

$$\frac{1}{L_B} \sim \left(\frac{h}{\bar{\lambda}}\right)^2 \quad (5.27)$$

Ce qui nous informe que la courbure produite par l'onde gravitationnelle est de l'ordre :

$$h \sim \frac{\bar{\lambda}}{L_B} \quad (5.28)$$

On considère maintenant la limite opposée quand $T_{\mu\nu}$ est non nulle, et la contribution des OGs est négligeable comparée à la contribution de la source de matière alors :

$$\frac{1}{L_B^2} \sim \frac{h^2}{\bar{\lambda}^2} + (\text{contribution de la matiere}) \gg \frac{h^2}{\bar{\lambda}^2}$$

L'équation précédente implique que la courbure déterminée par la matière est de l'ordre :

$$h \ll \frac{\bar{\lambda}}{L_B} \quad (5.29)$$

On peut comprendre à partir des équations (5.28) et (5.29) que la notion d'onde gravitationnelle est bien définie seulement pour de petite amplitude $h \ll 1$. Si h devient de l'ordre 1, la distinction entre les OGs et le la courbure de fond devient impossible. En général, il n'y a pas d'onde gravitationnelle d'amplitude arbitraire.

Maintenant on va faire une projection sur le mode des basses fréquences, pour cela on introduit une échelle \bar{l} tel que $\bar{\lambda} \ll \bar{l} \ll L_B$ et on prend la moyenne sur un volume spatial de côté \bar{l} . De cette manière les modes de hautes fréquences d'ordre $\bar{\lambda}$ vont osciller très rapidement et ont de ce fait une moyenne nulle. Et ceci nous mène à écrire (5.19) comme suite :

$$\bar{R}_{\mu\nu} = - \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \rangle$$

$\langle \dots \rangle$, veut dire la moyenne spatiale sur différentes longueurs d'ondes réduites $\bar{\lambda}$

Maintenant on définit le tenseur énergie-impulsion effectif de la matière qu'on notera par $\bar{T}^{\mu\nu}$, comme

$$\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \rangle = (\bar{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T}) \quad (5.30)$$

sachant que \bar{T} est la trace. Par définition $\bar{T}^{\mu\nu}$ est une quantité purement basse fréquence ; pour l'instant, quand la séparation aura lieu via la condition $\bar{\lambda} \ll L_B$, on peut la visualiser comme étant une version macroscopique du tenseur énergie-impulsion, alors que $T_{\mu\nu}$ est la version microscopique ou fondamentale.

On définit la quantité $t_{\mu\nu}$ comme étant :

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \rangle \quad (5.31)$$

On définit sa trace :

$$t = \bar{g}^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \langle R^{(2)} \rangle \quad (5.32)$$

On insère l'équation (5.32) dans (5.31) et utilisant le fait que $\bar{g}_{\mu\nu}$ est constante lors du calcul de la moyenne parce que elle est par définition une quantité basse fréquence, on obtiendra :

$$-\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{8\pi G}{c^4} (t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}t) \quad (5.33)$$

On peut donc réécrire $\bar{R}_{\mu\nu}$ sous la forme suivante :

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}t) + \frac{8\pi G}{c^4} (\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}) \quad (5.34)$$

Où d'une façon équivalente :

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4} (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (5.35)$$

Cette équation est appelée la forme « Granuleuse » des équations d'Einstein, elle exprime la dynamique de $\bar{g}_{\mu\nu}$ qui est la partie basse fréquence de la métrique, en terme de la partie basse fréquence du tenseur énergie-impulsion de la matière et du tenseur $t_{\mu\nu}$ qui ne dépend pas de la matière externe mais seulement du champ gravitationnelle lui-même et il est quadratique en $h_{\mu\nu}$.

On peut conclure que :

- Le terme de gauche de l'équation (5.35) est le tenseur d'Einstein pour une métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$ de fond qui varie lentement. Et dans celui de droite on a trouvé une version lisse du tenseur énergie-impulsion $\bar{T}_{\mu\nu}$.
- L'aspect le plus important de l'équation (5.35), c'est qu'on voit que l'effet des OGs sur la courbure de l'espace-temps de fond est formellement identique à celui de la matière avec le tenseur énergie-impulsion $t_{\mu\nu}$, donc nous sommes capable d'associer un tenseur énergie-impulsion pour l'onde gravitationnelle.

5.4.3 Le Tenseur Energie-Impulsion Des Ondes Gravitationnelles

On s'intéresse à l'énergie-impulsion portée par l'OG à des distances lointaine de la source, là où on peut approximativement avoir une métrique de fond plate. Dans ce cas,

on remplace les \bar{D}^μ par ∂^μ dans l'équation (5.22).

L'équation qu'on va obtenir peut être considérablement simplifiée, en observant qu'à l'intérieur des valeurs moyennes spatiales ou temporelles la dérivée ∂_μ peut être intégrée par partie en négligeant les termes des limites d'intégration.

En effectuant l'intégration par partie en utilisant la condition de jauge $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, $h = 0$ et l'équation $\square h_{\alpha\beta} = 0$, on voit immédiatement que tout les termes tendent vers zéro sauf les deux premiers termes, qui vont donner :

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (5.36)$$

Le $\langle R^{(2)} \rangle$ s'annul par voie de l'intégrale par partie, et en utilisant l'équation du mouvement $\square h_{\alpha\beta} = 0$ et on aura :

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (5.37)$$

On peut maintenant vérifier que ζ_μ , qui est le mode de jauge résiduelle vu dans les sections précédentes, ne contribue pas dans cette expression. De ce fait, sous la transformation de jauge (3.24) la variation de $t_{\mu\nu}$ est :

$$\delta t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \left(\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial^\alpha \zeta^\beta \rangle + \langle \partial_\nu h_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial^\alpha \zeta^\beta \rangle \right) \quad (5.38)$$

Ceci s'annule, vu qu'à l'intérieur de $\langle \dots \rangle$ on peut intégrer par partie ∂^α et on peut utiliser la condition de jauge harmonique. Cependant $t_{\mu\nu}$ dépend seulement des modes physiques h_{ij}^{TT} . et on peut simplifier en remplaçant $h_{\mu\nu}$ par $h_{\mu\nu}^{TT}$. En particulier, la densité d'énergie qui est invariante de jauge est :

$$t^{00} = \left(\frac{c^2}{32\pi G} \right) \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (5.39)$$

Le \dot{h}_{ij}^{TT} veut dire $\partial_t = (1/c)\partial_0$, et on terme de h_+ et h_\times on a :

$$t^{00} = \left(\frac{c^2}{16\pi G} \right) \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (5.40)$$

Pour une onde plane qui voyage dans la direction de l'axe z , h_{ij}^{TT} est une fonction de $(t - z/c)$, alors $t^{01} = t^{02} = 0$, alors que, $\partial_z h_{ij}^{TT} = -\partial_0 h_{ij}^{TT} = \partial^0 h_{ij}^{TT}$ donc :

$$t^{03} = t^{00} \quad (5.41)$$

On observe que le terme de gauche de l'équation (5.35) est conservé d'une manière covariante, c'est à dire, $\bar{D}(\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}) = 0$, ceci à cause de l'identité de Bianchi, alors nous avons :

$$\bar{D}^\mu(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0 \quad (5.42)$$

Le fait que la somme de $T_{\mu\nu}$ et $t_{\mu\nu}$ est conservée, et chacun séparément est covariament conservé, reflète le fait qu'il y a un échange d'impulsion et d'énergie entre la source et l'onde gravitationnelle. Très loin de la source la métrique tend vers la métrique plate, d'où \bar{D}^μ tend vers ∂^μ , cependant $\bar{T}_{\mu\nu} = 0$ en dehors de la source l'équation (5.42) se réduit à :

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0 \quad (5.43)$$

On cherche l'énergie des OGs dissipée par unité de temps par unité de surface sur une distance lointaine de la source, on commence par la conservation du tenseur énergie-impulsion $\partial_\mu t^{\mu\nu}$, qui implique que :

$$\int_V \partial^3 x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 \quad (5.44)$$

où V est le volume d'une région spatiale lointaine limitée par une surface S. L'énergie de l'OG dans ce volume est :

$$E_V = \int_V \partial^3 x t^{00} \quad (5.45)$$

L'équation (5.44) peut être écrite comme suite :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_V}{\partial t} = - \int_V \partial^3 x \partial_i t^{0i} = - \int_S \partial A n_i t^{0i} \quad (5.46)$$

Avec n_i est le vecteur normal à la surface S, ∂A est l'élément de surface. Encore, en dehors de la source, on peut imposer la jauge TT. Soit S une surface sphérique à une grande distance r de la source. Son élément de surface $\partial A = r^2 \partial \Omega$, et sa normale $\hat{n} = \hat{r}$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale. Alors l'équation (5.46) nous donne :

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = -c \int \partial A t^{0r} \quad (5.47)$$

avec

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT} \rangle \quad (5.48)$$

L'onde gravitationnelle se propage radialement. A une distance r suffisante, elle a la forme suivante :

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r/c) \quad (5.49)$$

f_{ij} est une fonction retardée avec $t_{ret} = t - r/c$. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r/c) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c) \quad (5.50)$$

Cependant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) &= -\partial_0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r^2) \\ &= \partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r^2) \end{aligned} \quad (5.51)$$

A partir de l'équation (5.48), à une distance r lointaine de la source $t^{0r} = t^{00}$, ce qui peut être déduit plus simplement de l'équation (5.41). Alors l'énergie à travers le volume V satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_V = -c \int \partial A t^{00} \quad (5.52)$$

Le fait que E_V diminue veut dire que l'OG entraîne avec elle un flux d'énergie :

$$\frac{\partial E}{\partial A \partial t} = c t^{00} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (5.53)$$

Si on écrit l'élément de surface $\partial A = r^2 \partial \Omega$, on aura :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int \partial \Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (5.54)$$

En terme de h_+ et h_\times , on peut réécrire le résultat comme :

$$\frac{\partial E}{\partial A \partial t} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (5.55)$$

L'énergie totale dissipée à travers ∂A entre $t - \infty$ et $+\infty$ est :

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial t \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (5.56)$$

5.5 Moment Quadripolaire

Pour une source non-relativiste $v \ll c$ et la longueur d'onde réduite est très grande devant les dimensions du système, il est physiquement clair qu'on a pas besoin de connaître le mouvement interne de la source dans tous ces détails. Alors l'émission de radiations est gouvernée par les moments multipolaires les plus petits.

Pour effectuer un développement multipolaire de la radiation gravitationnelle, on utilise l'expression de h_{ij}^{TT} à des distances lointaines de la source donnée par :

$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int \partial^3 x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{n}}{c}, x' \right) \quad (5.57)$$

En écrivant T_{kl} en terme de sa transformée de Fourier on a :

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{n}}{c}, x' \right) = \int \frac{\partial^4 k}{(2\pi)^4} \bar{T}_{kl}(\omega, k) e^{(-i\omega(t-r/c+x' \cdot \hat{n}/c) + ikx')} \quad (5.58)$$

Pour une source non-relativiste, le tenseur énergie-impulsion est non nul qu'à l'intérieur de la source. Alors l'intégrale (5.57) est restreinte à $|x'| \leq d$, où d est la dimension de la source. Donc la contribution dominante de h_{ij}^{TT} vient des fréquences ω qui satisfont :

$$\frac{\omega}{c} x' \cdot \hat{n} \leq \frac{\omega_s d}{c} \ll 1 \quad (5.59)$$

Maintenant, en développant l'exponentiel de l'équation (5.58), on aura :

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{n}}{c}, x' \right) \simeq T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, x' \right) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_0 T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_0^2 T_{kl} + \dots \quad (5.60)$$

Toutes les dérivées sont évaluées au point $(t - r/c, x')$. On définit les Moments du tenseur T^{ij} comme suit :

$$S^{ij}(t) = \int \partial^3 x T^{ij}(t, x) \quad (5.61)$$

$$S^{ij,k}(t) = \int \partial^3 x T^{ij}(t, x) x^k \quad (5.62)$$

$$S^{ij,kl}(t) = \int \partial^3 x T^{ij}(t, x) x^k x^l \quad (5.63)$$

On insert l'équation (5.60) dans l'équation (5.57) on aura :

$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]_{ret} \quad (5.64)$$

L'indice "ret" veut dire que les équations (5.61), (5.62) et (5.63) sont évaluées à un temps retardé $(t - r/c)$, l'équation précédente est à la base du développement multipolaire.

A partir des définitions (5.61) et (5.62), on remarque qu'ils ont un facteur additionnel $x^m \sim O(d)$, alors que chaque dérivée temporelle produit un facteur $O(\omega_s)$, d'où, par rapport à S^{kl} , le tenseur $\dot{S}^{kl,m}$ possède un facteur additionnel $O(\omega_s d)$.

Le sens physique de ce développement sera plus clair si on élimine le moment T^{ij} en faveur du moment de la densité d'énergie T^{00} et celui de l'impulsion linéaire, on définit le moment de T^{00}/c^2 comme suite :

$$M = \frac{1}{c^2} \int \partial^3 x T^{00}(t, x) \quad (5.65)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int \partial^3 x T^{00}(t, x) x^i \quad (5.66)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int \partial^3 x T^{00}(t, x) x^i x^j \quad (5.67)$$

$$M^{ijk} = \frac{1}{c^2} \int \partial^3 x T^{00}(t, x) x^i x^j x^k \quad (5.68)$$

Alors on définit le moment de la densité d'impulsion $(1/c)T^{0i}$ comme suit :

$$P^i = \frac{1}{c} \int \partial^3 x T^{0i}(t, x) \quad (5.69)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int \partial^3 x T^{0i}(t, x) x^j \quad (5.70)$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c} \int \partial^3 x T^{0i}(t, x) x^j x^k \quad (5.71)$$

On peut maintenant combiner tout ça, et on peut exprimer $\dot{S}^{ij,k}$, S^{ij} ...etc en terme de $\{M, M^i, M^{ij}, \dots\}$ et $\{P^i, P^{i,j}, \dots\}$ qui ont une interprétation physique immédiate, on aura le résultat suivant :

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij} \quad (5.72)$$

$$\dot{S}^{ij,k} = \frac{1}{6} \ddot{\dot{M}}^{ijk} + \frac{1}{3} \left(\ddot{P}^{i,jk} + \ddot{P}^{j,ik} - 2\ddot{P}^{k,ij} \right) \quad (5.73)$$

5.5.1 Amplitude Et Distribution Angulaire

En utilisant l'équation (5.72), le terme dominant dans l'équation (5.64) est :

$$[h_{ij}^{TT}(t, x)]_{quad} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (5.74)$$

Comme chaque tenseur symétrique avec 2 indices, le tenseur M_{kl} est décomposé en deux représentation irréductible comme suite :

$$M^{kl} = \left(M^{kl} - \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \quad (5.75)$$

M_{ii} est la trace de M_{ij} . Le 1^{er} terme est sans trace par construction, le 2^e terme est une trace donc un scalaire. Vu que le tenseur $\Lambda_{ij,kl}$ donne zéro quand il est contracté avec δ_{kl} , seulement le 1^{er} terme contribue. On utilise la notation :

$$\rho = \frac{1}{c^2} T^{00} \quad (5.76)$$

A l'ordre le plus faible en v/c , ρ devient la densité de masse. On introduit le Moment Quadripolaire :

$$\begin{aligned} Q^{ij} &\equiv M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} \\ &= \int \partial^3 x \rho(t, x) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

L'équation (5.74) devient :

$$\begin{aligned} [h_{ij}^{TT}]_{quad} &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &\equiv \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Pour obtenir la forme de l'onde émise dans une direction arbitraire \hat{n} , en principe on remplace l'expression explicite du tenseur $\Lambda_{ij,kl}$ dans l'équation (5.86), et on effectue une

contraction avec \ddot{Q}_{kl} .

La forme explicite de $\Lambda_{ij,kl}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) &= \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l\end{aligned}\quad (5.79)$$

Cependant, si on impose que la direction de propagation \hat{n} de l'OG est \hat{z} et sachant que p_{ij} est le projecteur sur le plan (x,y), qui est une matrice diagonale (1,1,0). Si on écrit $\Lambda_{ij,kl}$ en terme de p_{ij} pour une matrice arbitraire A_{kl} 3×3 on aura :

$$\Lambda_{ij,kl}A_{kl} = \left[p_{ik}p_{jl} - \frac{1}{2}p_{ij}p_{kl} \right] A_{kl} = (pAp)_{ij} - \frac{1}{2}p_{ij}tr(pA)\quad (5.80)$$

Si on impose à p d'avoir la forme suivante :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On aura :

$$\Lambda_{ij,kl}A_{kl} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{22})/2 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & -(A_{11} - A_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}\quad (5.81)$$

Alors quand $\hat{n} = \hat{z}$ on a :

$$\Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (5.82)$$

On a écrit le résultat en terme du second moment de masse M_{ij} au lieu de les écrire en termes du moment quadripolaire Q_{ij} , parce que $\Lambda_{ij,kl}Q_{kl} = \Lambda_{ij,kl}M_{kl}$. Toutefois, Il est beaucoup plus pratique d'utiliser M_{ij} pour faire des calculs explicites.

A partir de l'équation précédente, les deux amplitudes de polarisation de l'ondes gravitationnelles se propageant dans la direction z sont :

$$h_+ = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})\quad (5.83)$$

$$h_\times = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} \ddot{M}_{12}\quad (5.84)$$

Où il est bien clair que les termes de droites sont bien calculés à un temps retardé ($t - r/c$). A partir de l'équation (5.78), on voit que le terme dominant est celui du quadripôle, il n'y a ni radiation monopolaire ni dipolaire pour les ondes gravitationnelles.

5.5.2 Energie Rayonné

On insert l'équation (5.78) dans l'équation (5.54) et on utilise la propriété de Λ suivante :

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad (5.85)$$

On retrouvera la puissance de radiation par unité d'angle solide dans l'approximation quadripolaire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \Omega}\right)_{quad} &= \left(\frac{r^2 c^3}{32\pi G}\right) \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \\ &= \left(\frac{G}{8\pi c^5}\right) \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle \end{aligned} \quad (5.86)$$

Comme d'habitude la moyenne est la moyenne temporelle sur différentes périodes de l'onde gravitationnelle. et \ddot{Q}_{ij} est évalué à un temps retardé $(t - r/c)$. La dépendance en \hat{n} est seulement dans $\Lambda_{ij,kl}$, alors la puissance de radiation totale, ou en d'autre termes la luminosité gravitationnelle totale de la source, dans l'approximation quadripolaire est :

$$P_{quad} = \left(\frac{G}{5c^5}\right) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (5.87)$$

Parfois il est pratique d'utiliser dans des calculs explicites M_{ij} au lieu de Q_{ij} . Donc :

$$P_{quad} = \left(\frac{G}{5c^5}\right) \langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} \ddot{M}_{kk}^2 \rangle \quad (5.88)$$

L'énergie rayonné par unité d'angle solide est obtenue en intégrant la puissance (5.86) par rapport au temps. On écrit le moment quadripolaire en terme de sa transformée de Fourier

$$Q_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{Q}_{ij}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (5.89)$$

En intégrant l'équation (5.86) par rapport au temps, on aura :

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \Omega}\right)_{quad} = \left(\frac{G}{8\pi^2 c^5}\right) \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int_0^\infty d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega)$$

En intégrant sur l'angle solide on obtiendra, l'énergie total rayonnée :

$$E_{quad} = \left(\frac{G}{5\pi c^5}\right) \int_0^\infty d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega) \quad (5.90)$$

5.5.3 Le Moment Angulaire Rayonné

Le taux d'émission de moment angulaire dû à l'OG est donnée par : [5]

$$\frac{dJ^i}{dt} = \frac{c^3}{32\pi G} \int r^2 d\Omega < -\epsilon^{ikl} \dot{h}_{\alpha\beta}^{TT} x^k \partial^l h_{\alpha\beta}^{TT} + 2\epsilon^{ikl} \dot{h}_{\alpha l}^{TT} h_{\alpha k}^{TT} > \quad (5.91)$$

Le moment angulaire par unité de temps porté par l'onde gravitationnelle peut être obtenu en injectant l'équation (5.78) dans (5.91). Sachant que le 1^{er} terme de l'équation (5.91) est la contribution du moment angulaire orbitale L^i de l'OG, et le 2^e terme provient du spin S^i de la configuration du champ, on écrit :

$$\frac{dJ^i}{dt} = \frac{dL^i}{dt} + \frac{dS^i}{dt} \quad (5.92)$$

Pour la partie orbitale, on substitue

$$h_{\alpha\beta}^{TT}(t, x) = \left(\frac{2G}{rc^4}\right) \Lambda_{ab,cd} \left(\hat{n} \ddot{Q}_{cd}(t - r/c)\right)$$

et en développant on aura :

$$\left(\frac{dL^i}{dt}\right)_{quad} = \left(\frac{2G}{15c^5}\right) \epsilon^{ikl} < \ddot{Q}_{k\alpha} \ddot{Q}_{l\alpha} > \quad (5.93)$$

Le calcul de la partie du spin va donner :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS^i}{dt}\right)_{quad} &= \frac{c^3}{16\pi G} \epsilon^{ikl} \int r^2 d\Omega < \dot{h}_{\alpha l}^{TT} h_{\alpha k}^{TT} > \\ &= \frac{G}{c^5} \epsilon^{ikl} < \ddot{Q}_{mn} \ddot{Q}_{cd} > \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Lambda_{\alpha l, mn} \Lambda_{\alpha k, cd} \end{aligned} \quad (5.94)$$

On a les identités suivantes :

$$\Lambda_{\alpha l, mn} \Lambda_{\alpha k, cd} = P_{ln} \Lambda_{mk, cd} - \frac{1}{2} P_{mn} \Lambda_{kl, cd} \quad (5.95)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.96)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.97)$$

En utilisant ces identités on aboutira à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS^i}{dt}\right)_{quad} &= \frac{G}{c^5} \epsilon^{ikl} \ddot{Q}_{mn} \ddot{Q}_{cd} \int \frac{d\Omega}{4\pi} P_{ln} \Lambda_{mk, cd} \\ &= \frac{4G}{15c^5} \epsilon^{ikl} < \ddot{Q}_{k\alpha} \ddot{Q}_{l\alpha} > \end{aligned} \quad (5.98)$$

En sommant les contributions orbitale et de spin, finalement le moment angulaire par unité de temps porté par l'OG est :

$$\left(\frac{dJ^i}{dt}\right)_{quad} = \frac{2G}{5c^5} \epsilon^{ikl} \langle \ddot{Q}_{k\alpha} \ddot{Q}_{l\alpha} \rangle \quad (5.99)$$

Rappelons encore une fois que la dérivée du moment quadripolaire est évalué à un temps retardé ($t - r/c$).

Chapitre 6

Applications

On s'est appuyer principalement sur les references [15][5][7][12][14][19][4][21][22][23].

6.1 Ondes Gravitationnelles émises par une binaire circulaire

Dans ce problème, on considère un système de deux masses m_1 et m_2 qui forment une binaire circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω_s , on choisi le référentiel (x,y,z) dans lequel l'orbite est liée au plan (x,y) , on a :

$$x_0(t) = R \cos\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.1)$$

$$y_0(t) = R \sin\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.2)$$

$$z_0(t) = 0 \quad (6.3)$$

La phase $\pi/2$ est un choix utile pour l'origine temporelle. On note $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ qui est la masse réduite du système.

Dans le référentiel du centre de masse, le moment d'ordre deux de masse est donné par :

$$M^{ij} = \mu x_0^i(t) x_0^j(t)$$

Alors :

$$M_{11} = \left(\frac{\mu R^2}{2}\right) (1 - \cos 2\omega_s t) \quad (6.4)$$

$$M_{22} = \left(\frac{\mu R^2}{2}\right) (1 + \cos 2\omega_s t) \quad (6.5)$$

$$M_{12} = -\left(\frac{1}{2}\right) \mu R^2 \sin 2\omega_s t \quad (6.6)$$

Les autres composantes sont nulles. A partir des équations précédentes, on tire alors que :

$$\ddot{M}_{11} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \cos(2\omega_s t) \quad (6.7)$$

$$\ddot{M}_{12} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \sin(2\omega_s t) \quad (6.8)$$

Et on a $\ddot{M}_{22} = -\ddot{M}_{11}$. Pour une onde qui se propage dans la direction \hat{n} on a [5] :

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [\ddot{M}_{11} (\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) \cos^2(\theta)) \\ &+ \ddot{M}_{22} (\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi) \cos^2(\theta)) \\ &- \ddot{M}_{33} \sin^2(\theta) - \ddot{M}_{12} \sin(2\phi) (1 + \cos^2(\theta)) \\ &+ \ddot{M}_{13} \sin(\phi) \sin(2\theta) + \ddot{M}_{23} \cos(\phi) \sin(2\theta)] \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \sin(2\phi) \cos(\theta) \\ &+ 2\ddot{M}_{12} \cos 2\phi \cos \theta \\ &- 2\ddot{M}_{13} \cos(\phi) \sin(\theta) + 2\ddot{M}_{23} \sin(\phi) \sin(\theta)] \end{aligned} \quad (6.10)$$

A partir de ces équations on obtient :

$$h_+(t, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left(\frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \right) \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (6.11)$$

$$h_\times(t, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left(\frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \right) \cos(\theta) \sin(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (6.12)$$

La radiation du quadripôle est le double de la fréquence ω_s de la source.

Du point de vue de l'observateur, nous avons seulement accès aux radiations émises par l'étoile binaire dans notre direction. L'angle θ est donc égal à l'angle ι entre la normale à l'orbite et la ligne de mire.

Durant l'observation on peut négliger le mouvement propre de la source et fixer ϕ , alors on a $\omega_s t_{ret} + \phi = \omega_s t + \alpha$ avec $\alpha = \phi - \omega_s r/c$ est une constante fixée.

Ainsi on peut translater l'origine du temps $2\omega_s t + 2\alpha \rightarrow 2\omega_s t$ plus un multiple de 2π . Alors $\cos(2\omega_s t + 2\alpha) \rightarrow \cos(2\omega_s t)$ et $\sin(2\omega_s t + 2\alpha) \rightarrow \sin(2\omega_s t)$.

Donc l'observateur peut écrire l'amplitude de l'onde reçue par un système binaire comme étant :

$$h_+(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 l}{2} \right) \cos(2\omega_s t) \quad (6.13)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos(l) \sin(2\omega_s t) \quad (6.14)$$

La distribution angulaire de la puissance de la radiation dans l'approximation quadripolaire, est obtenue à partir de l'équation (5.86) :

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{quad} = \left(\frac{r^2 c^3}{16\pi G} \right) < \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 > \quad (6.15)$$

On insert les équations (6.13), (6.14) dans (6.15) et en utilisant $\langle \cos^2 2\omega_s t \rangle = \langle \sin^2 2\omega_s t \rangle = 1/2$, on obtient :

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{quad} = \left(\frac{2G\mu^2 R^4 \omega_s^6}{\pi c^5} \right) g(\theta) \quad (6.16)$$

avec

$$g(\theta) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta \quad (6.17)$$

La radiation est maximale à $\theta = 0$, c'est-à-dire dans la direction normale au plan de l'orbite. La fonction $g(\theta)$ ne s'annule jamais. Quelque soit l'angle θ dans lequel l'observateur est situé, il y a toujours une composante du mouvement de la source orthogonale à la ligne de mire de l'observateur.

On intègre l'équation (6.16) sur l'angle solide, on obtient la puissance de radiation total dans l'approximation quadripolaire.

$$P_{quad} = \left(\frac{32 G\mu^2}{5 c^5} \right) R^4 \omega_s^6 = \left(\frac{1}{10} \frac{G\mu^2}{c^5} \right) R^4 \omega^5 \quad (6.18)$$

ou $\omega = 2\omega_s$ est la fréquence de l'OG. En posant $v = \omega_s R$, l'énergie rayonnée dans une période de $T = 2\pi/\omega_s$ du mouvement de la source sera donc donnée par

$$\langle E_{quad} \rangle_T = \left(\frac{64\pi G\mu^2}{5 R} \right) \left(\frac{v}{c} \right)^5 \quad (6.19)$$

6.2 Orbite Spiralante

On considère un système binaire composé de deux étoiles compactes, par exemple d'étoiles à neutrons ou de trous noirs, et on les traite comme des points de masses m_1 et m_2 et de position r_1 et r_2 .

Dans l'approximation Newtonienne et au référentiel du centre de masse, la dynamique se réduit à un problème à un seul corps avec une masse réduite $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Et l'équation de mouvement est $\ddot{\vec{r}} = -(Gm/r^3)\vec{r}$.

On considère au départ le cas d'une orbite circulaire, la fréquence orbitale ω_s est reliée au rayon orbital R par $v^2/R = Gm/R^2$ avec $v = \omega_s R$, alors on aura la loi de Kepler :

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3} \quad (6.20)$$

L'amplitude de l'onde gravitationnelle est donnée par les équations (6.11), (6.12). Dans ces expressions on élimine R en faveur de ω_s et en utilisant l'équation (6.20) tout en introduisant la masse M_c qu'on appelle la « Chirp Mass » défini par :

$$M_c = \mu^{3/5} m^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (6.21)$$

les équations (6.11) et (6.12) deviennent :

$$h_+(t) = \left(\frac{4}{r}\right) \left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}\right) \cos(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (6.22)$$

$$h_\times(t) = \left(\frac{4}{r}\right) \left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \cos \theta \sin(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (6.23)$$

Le résultat est exprimé en terme de $f_{gw} = \omega_{gw}/(2\pi)$ avec $\omega_{gw} = 2\omega_s$. A l'ordre le plus bas de l'approximation Newtonienne, les amplitudes h_+ et h_\times des OGs émises dépendent des masses m_1 et m_2 seulement à travers la combinaison M_c .

On introduit le rayon de Schwarzschild associé à la « Chirp Mass » :

$$R_c \equiv \left(\frac{2GM_c}{c^2}\right) \quad (6.24)$$

et en utilisant la longueur d'onde réduite des OGs $\bar{\lambda} = c/\omega_{gw}$, les équations (6.22) et (6.23) deviennent :

$$h_+(t) = A [(1 + \cos^2 \theta)/2] \cos(\omega_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (6.25)$$

$$h_\times(t) = A \cos \theta \sin(\omega_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (6.26)$$

Sachant que :

$$A = \left(\frac{1}{2^{1/3}}\right) \left(\frac{R_c}{r}\right) \left(\frac{R_c}{\bar{\lambda}}\right)^{2/3} \quad (6.27)$$

A partir de l'équation (6.16), la puissance rayonnée des OGs par unité d'angle solide peut être écrite sous la forme :

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{c^5}{G}\right) \left(\frac{G M_c \omega_{gw}}{2c^3}\right)^{10/3} g(\theta) \quad (6.28)$$

sachant que :

$$g(\theta) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}\right)^2 + \cos^2 \theta \quad (6.29)$$

On remarque que la moyenne $\langle \cos^2(2\omega t + 2\phi) \rangle = 1/2$ est indépendante de ϕ , alors la distribution angulaire de la puissance rayonnée qui est proportionnelle à $\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle$ est aussi indépendante de ϕ . La moyenne angulaire de $g(\theta)$ est :

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} g(\theta) = \frac{4}{5} \quad (6.30)$$

Alors la puissance rayonnée totale est :

$$P = \left(\frac{32 c^5}{5 G}\right) \left(\frac{G M_c \omega_{gw}}{2c^3}\right)^{10/3} \quad (6.31)$$

Les équations (6.22) et (6.23) nous donne l'amplitude de l'OG en assumant que le mouvement de la source est dans une orbite Keplerienne circulaire fixe. Mais l'émission d'OG coûte une énergie, l'énergie rayonnée étant extraite à la fois de l'énergie cinétique et potentielle de l'orbite dont la somme est :

$$E_{orbite} = E_c + E_p = -\frac{Gm_1m_2}{2R} \quad (6.32)$$

Pour compenser l'énergie perdue par l'émission des OGs, R doit décroître dans le temps, alors E_{orbit} devient de plus en plus négative.

A partir de l'équation (6.20), si R diminue alors ω_s augmente, ou d'une autre manière si ω_s augmente la puissance rayonnée de l'OG augmente aussi. Alors R doit décroître encore et encore. Sur une longue échelle de temps, ce processus nous mènera à une coalescence du système binaire. Tant que :

$$\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2 \quad (6.33)$$

on est dans un régime dit quasi-circulaire. En effet, en utilisant l'équation (6.20), on voit que la vitesse radiale \dot{R} peut être écrite comme :

$$\dot{R} = -\frac{2}{3}R\frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s} = -\frac{2}{3}(\omega_s R)\frac{\dot{\omega}_s}{\omega^2} \quad (6.34)$$

Ainsi, tant que la condition (6.33) est vérifiée, $|\dot{R}|$ serait beaucoup plus petite que la vitesse tangentielle $\omega_s R$, et l'approximation de l'orbite circulaire avec des petites variations du rayon est applicable.

En utilisant l'équation (6.20), pour éliminer R en faveur de ω_{gw} dans l'équation (6.32), et on aura :

$$E_{orbit} = -\left(G^2 M_c^5 \omega_{gw}^2 / 32\right)^{1/3} \quad (6.35)$$

On observe qu'à ω_{gw} fixe, la dépendance des masses est seulement à travers M_c . En utilisant (6.31), on obtient :

$$\dot{\omega}_{gw} = \left(\frac{12}{5} 2^{1/3}\right) \left(\frac{G M_c}{c^3}\right)^{5/3} \omega_{gw}^{11/3} \quad (6.36)$$

ou en terme de $f_{gw} = \omega_{gw}/(2\pi)$:

$$\dot{f}_{gw} = \left(\frac{96}{5}\pi^{8/3}\right) \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} f_{gw}^{11/3} \quad (6.37)$$

En intégrant (6.37), on remarque que f_{gw} diverge au cours d'une valeur finie du temps, qu'on note t_{coal} qui est l'instant de coalescence. En terme de $\tau \equiv t_{coal} - t$ qui est le temps de coalescence. La solution de (6.37) sera donnée par :

$$f_{gw}(\tau) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau}\right)^{3/8} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{-5/8} \quad (6.38)$$

La divergence est coupée du fait que, quand la séparation des deux masses devient plus petite qu'une distance critique, les deux étoiles fusionnent. Afin d'avoir un ordre de grandeur, on insert des valeurs numériques dans l'équation (6.38) et on trouve que :

$$f_{gw}(\tau) \approx 134hz \left(\frac{1.21M_*}{M_c} \right)^{5/8} \left(\frac{1s}{\tau} \right)^{3/8} \quad (6.39)$$

où on a pris $1.21M_*$ comme la valeur de référence pour M_c , qui est la « Chirp Mass » du système des deux étoiles, chacune des masses étant de $1.4M_*$. D'une manière équivalente (6.39) s'écrit :

$$\tau \approx 2.18s \left(\frac{1.21M_*}{M_c} \right)^{5/3} \left(\frac{100hz}{f_{gw}} \right)^{8/3} \quad (6.40)$$

De ces valeurs références, on déduit qu'à 10 Hz (qui est l'ordre le plus faible des fréquences accessibles aux interféromètres terrestres) on obtient une radiation émise à $\tau = 17 \text{ min}$ de la coalescence. A 100 Hz on aura une radiation dans les 2 dernières secondes. A partir de la loi de Kepler (6.20), on trouve que quand $f_{gw} = 1 \text{ kHz}$, la séparation entre les deux corps de masses $m_1 = m_2 = 1.4M_*$ est $R \approx 33 \text{ km}$. De telles petites séparations peuvent être atteintes seulement par des corps très compacts comme une étoile à neutron ou un trou noir.

Quand la fréquence augmente, le rayon orbitale devient petit. A partir des équations (6.20) et (6.38), sachant que $d/dt = -d/d\tau$, on aura :

$$\frac{\dot{R}}{R} = - \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{\dot{\omega}_{gw}}{\omega_{gw}} \right) = \left(\frac{-1}{4\tau} \right) \quad (6.41)$$

Et par intégration, on trouve :

$$R(\tau) = R_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/4} = R_0 \left(\frac{t_{coal} - t}{t_{coal} - t_0} \right)^{1/4} \quad (6.42)$$

R_0 est la valeurs de R à un instant t_0 initial. La fonction $R(t)$ est représentée par la figure (6.1). On voit qu'il y a une phase où R diminue lentement, suivie par une phase où l'approximation quasi-circulaire de l'orbite n'est plus valide pour longtemps.

On insert (6.38) évaluée à un instant initial t_0 où $\tau = \tau_0$ dans (6.20), on trouve la relation entre le rayon initial R_0 et le temps à la coalescence τ_0 :

$$\tau_0 = \left(\frac{5}{256} \right) \left(\frac{c^5 R_0^4}{G^3 m^2 \mu} \right) \quad (6.43)$$

où m est la masse totale du système. En Exprimant le rayon initial R_0 en terme de la période orbitale initiale $T_0 = 2\pi/\omega_s(\tau_0)$ à travers la loi de Kepler $R_0^2 = Gm(T_0/2\pi)^2$ et en utilisant les valeurs numériques, on trouve :

$$\tau_0 \approx 9,829.10^6 \text{ yr} \left(\frac{T_0}{1hr} \right)^{8/3} \left(\frac{M_*}{m} \right)^{2/3} \left(\frac{M_*}{\mu} \right) \quad (6.44)$$

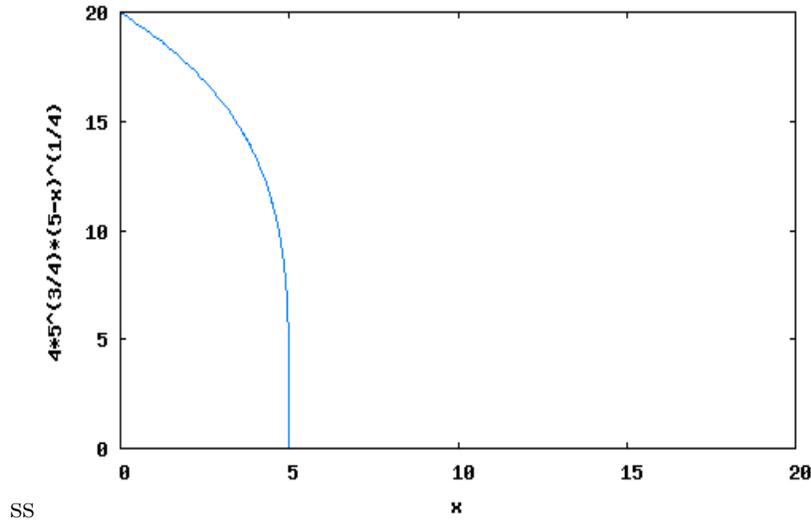


FIGURE 6.1 – La fonction $R(t)$ en fonction de t .

Cependant, sous notre supposition d’une orbite circulaire et de masses de l’ordre M_* , seulement une binaires qui a la une période orbitale initiale lors de sa formation qui est plus petite qu’un jour peut coaliser en émettant des OGs.

Pour l’instant, nous avons étudié comment la fréquence de l’OG évolue dans le temps dans un système binaire. Nous allons voir maintenant comment la forme de l’onde Gravitationnelle change.

Une particule qui se déplace sur une orbite quasi-circulaire dans le plan (x,y) avec un rayon $R = R(t)$ et une vitesse angulaire $\omega_s = \omega_s(t)$ a les coordonnées cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t) \cos \Phi(t)/2 \\ y(t) &= R(t) \sin \Phi(t)/2 \end{aligned}$$

où on a défini :

$$\Phi(t) = 2 \int_{t_0}^t dt \omega_s(t) = \int_{t_0}^t dt \omega_{gw}(t) \tag{6.45}$$

Comme on l’a déjà vu, \dot{R} est négligeable tant que $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$. En utilisant (6.36), la condition (6.33) se traduit à $GM_c \omega_s / c^3 \ll 0.5$. Ceci veut dire que \dot{R} est négligeable tant que $f_{gw} \ll 13kHz(1.2M_*/M_c)$.

Tant qu’on assume qu’on est dans la phase spirale, on peut simplement négliger le terme proportionnel à \dot{R} dans le calcul de la forme d’onde, au moins à l’ordre le plus faible. On aura :

$$h_+(t) = \left(\frac{4}{r}\right) \left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}(t_{ret})}{c}\right)^{2/3} \left(\frac{1 + \cos^2 l}{2}\right) \cos \Phi(t_{ret}) \tag{6.46}$$

$$h_\times(t) = \left(\frac{4}{r}\right) \left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}(t_{ret})}{c}\right)^{2/3} (\cos l \sin (\Phi(t_{ret}))) \tag{6.47}$$

On utilise l'équation (6.38) et on trouve que :

$$\Phi(r) = -2 \left(\frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} \tau^{5/8} + \Phi_0 \quad (6.48)$$

où $\Phi_0 = \Phi(r = 0)$ est une constante d'intégration égale à la valeur de Φ à la coalescence. Alors l'amplitude d'OG peut être exprimée directement en terme du temps de coalescence τ mesuré par l'observateur.

$$h_+(t) = \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2(\iota)}{2} \right) \cos \Phi(\tau) \quad (6.49)$$

$$h_\times(t) = \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} (\cos \iota \sin \Phi(\tau)) \quad (6.50)$$

On a vu qu'à la fois, la fréquence ainsi que l'amplitude augmente au fur et à mesure qu'on s'approche de la coalescence. Sachant que h_+ et h_\times sont définies seulement sur l'intervalle $-\infty < t < t_{coal}$, on peut donc calculer leur transformée de Fourier et le résultat n'est autre que :

$$\tilde{h}_+(f) = A e^{i\psi_+(f)} \left(\frac{c}{r} \right) \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/6} \left(\frac{1}{f^{7/6}} \right) \left(\frac{1 + \cos^2 l}{2} \right) \quad (6.51)$$

$$\tilde{h}_\times(f) = A e^{i\psi_\times(f)} \left(\frac{c}{r} \right) \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/6} \left(\frac{1}{f^{7/6}} \right) \cos l \quad (6.52)$$

où la constante A a la valeur :

$$A = \left(\frac{1}{\pi^{2/3}} \right) \left(\frac{5}{24} \right)^{1/2} \quad (6.53)$$

Les phases sont données par $\psi_\times = \psi_+ + (\pi/2)$ et :

$$\psi_+(f) = 2\pi f(t_c + r/c) - \Phi_0 - \left(\frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{GM_c}{c^3} 8\pi f \right)^{-5/3} \quad (6.54)$$

Les calculs qu'on a fait sont développés dans un espace-temps de fond de géométrie plate. Pour un système binaire formé de trou noir ou d'étoile à neutron, le champ gravitationnelle près de l'étoile est très fort, et ceci a une conséquence importante sur la dynamique du système binaire quand les deux corps sont très proches. Cependant la modification la plus importante de la dynamique vient du fait que, dans la géométrie de Schwarzschild, il y a une valeur minimale de la distance radiale au delà de laquelle l'orbite circulaire stable n'est plus permise. Dans les coordonnées de Schwarzschild, cette limite est localisée à $r = r_{ISCO}$ (Inner-most Stable Circular Orbit, L'orbite Interne Circulaire la Plus Stable) :

$$r_{ISCO} = \frac{6Gm}{c^2} \quad (6.55)$$

Ainsi, pour une binaire formée de trous noirs ou d'étoiles à neutrons, la phase spirale adiabatique, qui se met en place à travers une succession d'orbites quasi-circulaires tout en entraînant l'émission de radiations gravitationnelles, peut prendre place uniquement à des distances $r \gtrsim r_{ISCO}$. Quand le ISCO est approché, la dynamique sera dominée par l'effet du champ fort et les deux étoiles plongent l'une sur l'autre.

La forme de l'onde calculée précédemment est valide seulement au-dessus de la fréquence maximal f_{max} , au-delà de cette valeur, la phase spirale prend fin et les deux étoiles plongent l'une sur l'autre. A partir de la loi de Kepler (6.20), ceci veut dire que la phase spirale se termine quand la fréquence de la source f_s approche la valeur :

$$(f_s)_{ISCO} = \left(\frac{1}{6(2\pi)\sqrt{6}} \right) \left(\frac{c^3}{Gm} \right) \quad (6.56)$$

Si on insert des valeurs numériques, ceci donnera :

$$(f_s)_{ISCO} \simeq 2,2kHz \left(\frac{M_*}{m} \right) \quad (6.57)$$

Pour un système binaire formé d'étoiles à neutrons de masses $m_1 = m_2 = 1,4M_*$, on aura $(f_s)_{ISCO} \sim 800 \text{ hz}$. Pour une binaire de trou noir de masse $m = 10M_*$, on a $(f_s)_{ISCO} \approx 200 \text{ hz}$. La coalescence de deux trous noirs super-massifs avec $m \sim 10^6 M_*$ prend place quand f_s est dans la région du mHz.

Le spectre d'énergie dans la phase spirale dans l'approximation Newtonienne est donné par :

$$\left(\frac{dE}{df} \right) = \left(\frac{\pi^{2/3}}{3G} \right) (GM_c)^{5/3} f^{-1/3} \quad (6.58)$$

On intègre sur le maximum de la fréquence des OG f_{max} pour laquelle on est dans la phase spirale et on pourra estimer l'énergie totale rayonnée durant la phase spirale :

$$\Delta E_{rad} \sim \left(\frac{(\pi)^{2/3}}{2G} \right) (GM_c)^{5/3} f_{max}^{2/3} \quad (6.59)$$

En insérant les valeurs numériques, on trouve :

$$\Delta E_{rad} \sim 4,2 \cdot 10^{-2} M_* c^2 \left(\frac{M_c}{1.21 M_*} \right)^{5/3} \left(\frac{f_{max}}{1 \text{ kHz}} \right)^{2/3} \quad (6.60)$$

On met $f_{max} = 2(f_s)_{ISCO}$ et en utilisant l'équation (6.57), on voit que l'énergie totale rayonnée durant la phase spirale dépend seulement de la masse réduite μ du système :

$$\Delta E_{rad} \sim 8 \times 10^{-2} \mu c^2 \quad (6.61)$$

Pour des masses stellaires, cette valeur représente une énorme quantité d'énergie, ce qui classe la coalescence binaire comme étant l'une des plus intéressante sources d'ondes gravitationnelles.

Chapitre 7

Conclusion générale

On a traité le système à deux corps dans le cadre Newtonien, et on s'est mis dans le référentiel du centre de masse, ce qui a réduit notre problème constitué de deux corps à un problème à un seul corps. En écrivant les équations du mouvement de notre problème, on a aboutit à l'expression de l'énergie donnée par l'équation (2.24) et on a réussi à identifier le potentiel effectif de notre système.

Ceci nous a permis d'illustrer une examination du mouvement en traçant le graphe du potentiel effectif en fonction de r . Et on a conclu que pour différentes énergies E , la particule peut se permettre différentes orbites et l'équation de la conique (2.42) confirme ce résultat. Le dernier point qu'on a constaté, c'est que notre système vérifie bien les trois lois de Kepler.

Afin de retrouver l'approximation Newtonienne des équations d'Einstein linéaires, il est nécessaire de se placer dans le cas où le champ de gravité est de faible intensité, En effet, dans ces circonstances la courbure de l'espace-temps provoquée par un tel champ est suffisamment faible pour considérer la métrique comme celle d'un espace-temps légèrement courbé, offrant ainsi la possibilité d'effectuer une approche perturbative en écrivant la métrique comme une métrique plate Mikovskienne plus une perturbation de premier ordre. La linéarisation des équations d'Einstein a abouti à l'équation (3.17). L'invariance de jauge étant un critère nécessaire pour une interprétation physique de n'importe quelle théorie, il a été démontré qu'au premier ordre de la perturbation, l'équation (3.17) remplit effectivement ce critère. En effet, en faisant la transformation infinitésimale (3.18), on peut définir dans le même système de coordonnées $\{x^\mu\}$ un tenseur $h'_{\mu\nu}$ dont les composantes sont données par (3.24), et ceci laisse les équations d'Einstein invariantes. C'est pour cela que l'équation (3.24) est perçue comme une transformation de jauge induite par la transformation (3.18).

L'invariance de jauge est synonyme d'un choix particulier d'une jauge dans laquelle Il est souhaitable d'avoir une simplification des calculs. La jauge harmonique semble être le candidat parfait.

En exprimant les équations d'Einstein dans la jauge harmonique, on est arrivé à l'équation

(3.32), cette équation possède la solution (3.41) qui explicite la propagation de l'action gravitationnelle d'un point x' de la source au point x et ce à la vitesse de la lumière c .

L'équation (3.32) dans le vide montre que même dans le vide le champ de gravitation peut ne pas être identiquement nul. Donc des petites perturbations gravitationnelles peuvent se propager à la vitesse de la lumière dans un espace-temps de Minkowski.

La Relativité Générale prédit que lorsque la source se déplace avec une faible vitesse devant celle de la lumière et que le champ gravitationnel est faible, on retombe sur les résultats de la gravité Newtonienne. L'équation (3.47) confirme cette prédiction, et le résultat obtenu complète la preuve que la gravité Newtonienne est un cas particulier de la relativité générale.

La solution de Schwarzschild est donnée par l'équation (4.21). Pour comprendre l'importance physique de cette métrique, on a étudié le mouvement d'une particule test et celui d'un photon qui baignent dans cette métrique. On a conclu de l'équation (4.46) que la particule va suivre une trajectoire circulaire qui va dépendre de la valeur de L_1^2 , le rayon minimale que la particule va posséder est de $6M$.

On a réussi à faire une correction de l'orbite Newtonienne et vérifier que celle-ci n'est pas complètement fermée, mais elle possède un décalage dit du périhélie, chose qui est prédite par la relativité générale.

La solution des équations d'Einstein linéaire suggèrent l'existence d'ondes gravitationnelles. Et l'étude faite dans le chapitre 5 nous a permis de voir qu'elles possèdent deux états de polarisations h_+ et h_\times . Leur effet sur un anneau de particules est bien vu lorsque on s'intéresse aux distances propres entre les particules, et cet effet se traduit par une déformation de l'anneau selon l'état de polarisation de l'onde. Par conséquent l'onde gravitationnelle porte de l'énergie et de l'impulsion.

On a défini les OGs comme étant une perturbation sur un espace-temps courbe et dynamique $\bar{g}_{\mu\nu}$, pour arriver à la conclusion que l'espace-temps de fond varie lentement alors que les OGs sont des variations à hautes fréquences.

La forme Granuleuse des équations d'Einstein montre qu'on peut associer un tenseur énergie-impulsion aux OGs, et la relation (5.43) traduit le fait qu'il existe un échange d'impulsion et d'énergie entre la source et l'onde gravitationnelle.

L'émission de radiations est gouvernée par un moment multipolaire, mais en faisant ce développement on est arrivé à la conclusion que seul la radiation quadripolaire contribue, les radiations monopolaire et dipolaire sont nulle. C'est pour cette raison qu'on dit que le graviton est de spin 2.

Le dernier chapitre est l'application des résultats précédents à des systèmes binaires. On constate que la radiation quadripolaire est le double de la fréquence de la source, et ce résultat est confirmé lors de l'étude de la binaire elliptique.

L'étude de l'orbite spirale nous informe que notre système rentre dans une phase spirale qui se manifeste à travers une succession d'orbites quasi-circulaires, accompagnée d'émission de radiations gravitationnelles et ceci lorsque r est supérieur au rayon de Schwarzschild. Au voisinage de cette valeur, la dynamique sera dominée par l'effet du champ fort et les deux étoiles rentrent en coalescence.

L'équation (6.61) montre qu'une quantité énorme d'énergie est rayonnée lors de la phase

spirale. Ce qui rend la coalescence des systèmes binaires comme l'une des plus importantes sources d'ondes gravitationnelles.

Bibliographie

- [1] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko-Classical mechanics-Addison Wesley (2001).
- [2] Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion-Classical Dynamics of Particles and Systems-Brooks Cole (2004).
- [3] T.Damour, N.Deruelle. General Relativistic Celestial Mechanics of Binary Systems. The post Newtonian Motion. Annales de l'I.H.P, section A. tome A, p107-132, n° 1 (1985).
- [4] Bernard F. Schutz-A First Course in General Relativity-Cambridge University Press (1985)
- [5] Michele Maggiore-Gravitational Waves, Volume 1, Theory and Experiments-Oxford University Press, USA (2007)
- [6] L. Landau, E. Lifchitz, Théorie des champs, Edition Mir, 3ème édition (1970).
- [7] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons, 1ère Edition, 1972.
- [8] A.Belabbas, Les Interactions Fondamentales et la Structure de l'Espace-temps, Thèse de Doctorat, Université A.MIRA de Bejaia (2011).
- [9] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, chap. 4, John Wiley - Sons, Inc., New York (1962).
- [10] I.B. Khriplovich, General Relativity, Springer (2005).
- [11] L.Ryder, Introduction to general Relativity, Cambridge University press (2009).
- [12] Ta-Pei Cheng, Relativity and Cosmologie, a basic introduction, University of Missouri-st louis, (2005).
- [13] H.Remi, Gravitation Relativiste, CNRS Editions, 1^{iere} edition, (1994).
- [14] Hans C. Ohanian, Gravitation and Spacetime, Rensselaer Polytechnic institute, W.W. NORTON & COMPANY.
- [15] P.C. Peters, Gravitational Radiation and The Motion of Two Point Masses,Phy.Rev,Volume 136,N° 4B, (1964).
- [16] S.Carroll, Spacetime and Geometry, edition Wesley, San Francisco (2004)

- [17] A.Bouda, Notes de cours de Relativité Générale, Université A.Mira de Bejaia (2013-2014).
- [18] Norbert Straumann, General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1984).
- [19] J.Weber, General Relativity and Gravitational Waves, Dover Publications, INC. Mineola, New York.
- [20] Charles W MISNER, Stephen THORNE, John archibald WHEELER- W,H,FREEMAN AND COMPANY, San Francisco, (1973).
- [21] G.S Hall, J.R Polham, General Relativity, The scottish universities summer school in physics. (1996).
- [22] M.P.Hobson, G.P.Efstathiou, A.N. Lasenby, General Relativity an introduction for physicists, Cambridge University Press, (2006).
- [23] Joel Franklin, Reed College, Cambridge University Press, (2010).