

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire de Master

Présenté par

Melle. TAHRAOUI Louiza

En vue de l'obtention du diplôme de Master en physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

De L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau vers son Analogue non-relativiste

Soutenu publiquement le 30/06/2015 devant le jury suivant :

Président	Mr. HOUARI A.	MCA	U.A.M. Béjaia
Examineur	Mr. FOUGHALI T.	MCB	U.A.M. Béjaia
Examineur	Mr. ZENIA H.	MCB	U.A.M. Béjaia
Rapporteur	Mr. KASRI Y.	MCA	U.A.M. Béjaia

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible, grâce à la contribution de plusieurs personnes, à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais d'abord adresser ma gratitude au promoteur Monsieur Y.Kasri, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui m'ont aidé à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier Monsieur A. Houari, d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens à remercier vivement mes deux enseignants T. Foughali et H. Zenia, qui ont beaucoup apporté à ma formation, et qui m'ont incité à travailler d'avantage, et surtout d'avoir accepté de contribuer en leur qualité d'examineur à l'enrichissement et l'évaluation de notre travail.

Et à l'occasion, je remercie tout mes autres enseignants.

Sans oublier bien sur de dire un grand Merci à ma famille et tous mes amis et camarades, en particulier Samir, Nabil , Redha.

Table des matières

Introduction	1
1 Survol des équations d'onde	3
1.1 Conventions et définitions diverses	3
1.2 L'équation fondamentale de la mécanique quantique	5
1.3 Equation de conservation de l'énergie	7
1.3.1 L'équation de Klein-Gordon	7
1.3.2 Le courant correspondant à l'équation de Klein- Gordon	9
1.4 Forme linéaire de l'équation de Klein-gordon	10
1.4.1 Linéarisation suivant Dirac	10
1.4.2 Linéarisation suivant Duffin-Kemmer-Petiau	14
1.4.3 L'équation de Feshbach-Villars	18
2 Formes linéaires de l'équation de Schrödinger	20
2.1 Problématique	20
2.1.1 Procédure d'indentification de Dirac	20
2.2 Solution de Lévy-Leblond	21
2.2.1 Procédure d'indentification de Dirac revisitée	22
2.3 Dérivation d'une nouvelle solution	23
2.3.1 Analogie avec l'équation DKP	26
2.3.2 Théorème d'Ehrenfest à partir du nouveau formalisme	28
3 Application à l'oscillateur harmonique	30
3.1 L'oscillateur harmonique de Dirac	30
3.2 L'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau	32
3.3 L'oscillateur de Lévy-Leblond	35
3.4 l'oscillateur harmonique de l'analogue non relativiste de DKP	37
4 Formalisme Lagrangien	39
4.1 Densité lagrangienne et équations de mouvement	39
4.2 Formulation lagrangienne de Shrödinger	42
4.3 Champ de Klein-Gordon	43
4.4 Lagrangien de Feshbach-Villars	44

Table des matières	1
4.5 Champ de Dirac	45
4.6 Champ Duffin-Kemmer-Petiau	46
4.7 Formulation lagrangienne de l'analogue non relativiste de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau	47
Conclusion	50

Introduction

A travers ce modeste travail, de fin de cycle (Master 2), on se propose de survoler le ciel de la mécanique quantique, et avec un peu plus de vitesse le ciel de la mécanique quantique relativiste, en présentant les équations d'onde maitresses de la physique ondulatoire, et la base de la théorie des champs quantiques. Commencant dans un premier chapitre par l'équation au rôle fondamental en mécanique quantique, portant le nom de son concepteur le physicien autichien Erwin Schrödinger, établie à la fin de l'année 1925, puis publié en 1926, dont la contribution est énorme en physique et en chimie dans la description de l'électron et la résolution de l'atome d'hydrogène.

Frôlant ensuite le champs relativiste, en introduisant la démarche naturelle de généraliser le concept d'onde en mécanique relativiste, suivie par les physiciens de l'époque, en voulant décrire l'électron dans un cadre relativiste d'une manière naïve on abouti à l'équation de Klein-Gordon issue après plusieurs tentatives de différents scientifiques, le soviét Valdimir Fock, l'allmand Walter Gordon, l'hongrois Janos Kudar, le belge Thophile de Donder, qui finalement décrira une particule de spin ($s = 0$). Puis nous introduisons la méthode de linérisation ; l'idée ingénieuse du physicien britannique Paul Dirac, qui permettra de décrire une particule avec un degré de liberté interne($s = 1/2$).

Comme les fermions, de spin demi-entier ont pu être décrits grace à l'équation de Dirac, on se demande immédiatement qu'en est il pour les particules de spin entier ? Trois physiciens le russe Nicholas Kemmer [1], un américain Richard James Duffin [2] et le belge Gérard Petiau [3] se sont intéressés, indépendement au milieu des années 30 au problème et parvinrent à formuler l'équation portant leurs noms l'équation de

Duffin-Kemmer-Petiau, qu'on va présenter d'une manière large pour un spin ($s = 0$). Et à la fin de ce chapitre on verra une autre forme linéaire de l'équation de Klein-Gordon établie pour surmonter quelques difficultés trouvées lors de l'interprétation de cette dernière, qui est une formulation hamiltonienne dite de Feshbach et Villars [4].

Dans la deuxième partie du travail, en s'inspirant de la fameuse formulation linéaire de Dirac, un avril 1967 [5] le physicien français J-M Lévy-Leblond reprit la même procédure de linéarisation mais dans un cadre non relativiste, ce qui lui permit de graver son nom sur une équation analogue à l'équation de Dirac non relativiste.

Le coeur de notre travail, culmine dans la généralisation de la méthode de linéarisation, qui nous permettra de construire une nouvelle formulation non relativiste à l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, dont l'étude est présentée d'une manière simple et détaillée.

Pour illustrer l'utilité de ces grandes équations, dans le large domaine d'applications de la physique, on se propose d'étudier le modèle de l'oscillateur harmonique; le modèle test pour toutes les théories introduites plus haut, en commençant d'abord par l'oscillateur de Dirac [6] qui a connu un grand succès depuis son établissement en 1989, qui est une source d'inspiration pour la construction de l'oscillateur DKP [7] et d'une manière devenue rituelle on passe à l'application dans le cadre non relativiste avec l'oscillateur de Lévy-Leblond, et pour appuyer la validité de notre équation établie en haut on consolidera notre travail par l'examen d'une particule soumise au potentiel de l'oscillateur harmonique, qui s'avèrera identique à l'oscillateur DKP dans la limite non relativiste.

Et dans le dernier chapitre, on atterrit sur les terres du formalisme lagrangien, qui est une porte vers la seconde quantification en théorie des champs quantiques, où on présente les densités lagrangiennes de chaque théorie, en dérivant ensuite les équations d'Euler-Lagrange qui seront rien d'autre, que les équations de mouvement de chaque particule rencontrée plus haut. Ce qui achèvera notre voyage.

Chapitre 1

Survol des équations d'onde

Ce chapitre, est une escapade en mécanique quantique, où on présente d'importantes équations d'onde de matière, une idée qui a valu le prix Nobel à son fondateur, le physicien français Louis de Broglie [8], durant le travail de sa thèse en 1924.

On rappelle certaines équations vues dans les cours de graduation, comme l'équation de Schrödinger [9], Klein-Gordon, et Dirac. On verra également d'autres équations, celles décrivant les particules massives de spin ($s = 0$ et $s = 1$), appelées équation de Duffin-Kemmer-Petiau ainsi que l'équation de Feshbach-Villars.

1.1 Conventions et définitions diverses

Cette petite section nous permet de mieux percevoir, les équations écrites en notations covariantes.

Toutes les expressions figurant dans la suite sont écrites en posant : $\hbar = c = 1$

★ Les objets écrits en gras représentent des grandeurs à caractère vectoriel.

Coordonnées :

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.1)$$

où

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \text{ et } i = 1, 2, 3.$$

Tenseur métrique, indices covariants et contravariants.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu, \quad (1.2)$$

il convient de distinguer entre vecteurs covariants (qui se transforment comme $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$), et vecteurs contravariants (qui se transforment comme x^μ)

A^μ : vecteur contravariant (indice en haut)

A_μ : vecteur covariant (indice en bas)

Le passage d'un vecteur covariant à un vecteur contravariant se fait comme suit

$$\begin{cases} A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \end{cases} . \quad (1.3)$$

Sommation d'Einstein

La convention de sommation d'Einstein ou notation d'Einstein est un raccourci utile pour la manipulation des équations concernant des coordonnées, on somme sur tout les indices repetés

Exemple

$$A = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3.$$

Trivecteur, Quadrivecteur, Produit scalaire

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}), \quad (1.4)$$

$$A^1 = A_x, A^2 = A_y, A^3 = A_z. \quad (1.5)$$

Produit scalaire

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B_0 - \mathbf{AB}. \quad (1.6)$$

La norme de A^μ

$$A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.7)$$

Gradient, opérateurs différentiels

on adopte les notations suivantes

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.8)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (1.9)$$

Gradient covariant

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (1.10)$$

Gradient contravariant

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (1.11)$$

Le dalembertien

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta = \square. \quad (1.12)$$

1.2 L'équation fondamentale de la mécanique quantique

Six ans après la première guerre mondiale, le célèbre physicien français Louis de Broglie soutna sa thèse, où il a étendu la dualité onde-matière à tous les corpuscules de [17] à [24]. L'adaptation de ce concept dispersa la communauté scientifique. L'équation, établie par le physicien Erwin Schrödinger en 1925 [14], est une fonction d'onde qui généralise l'approche de De Broglie, elle peut être vue comme une équation aux dérivées partielles, qui décrit comment l'état quantique, d'un système physique évolue dans temps.

L'interprétation physique de la fonction d'onde de Schrödinger ne fut donnée qu'en 1926 par Max Born. En raison du caractère probabiliste qu'elle introduisait, la mécanique ondulatoire de Schrödinger suscita initialement de la méfiance chez quelques

physiciens de renommée comme Albert Einstein, pour qui « Dieu ne joue pas aux dés ».

Elle peut être dérivée via le principe de correspondance ; elle prendra pour une particule libre la forme

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = \frac{1}{2m}(-i\nabla)^2\psi(x, t). \quad (1.13)$$

Sa solution (1.13) est une équation d'onde plane

$$\psi = Ce^{\pm i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})}. \quad (1.14)$$

En injectant l'expression de la solution dans(1.13) de la manière suivante

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) &= iC(-iE)e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})} \\ &= ECe^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})} = E\psi(x, t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi(x, t) &= c(-p^2)e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})} \\ &= -p^2\psi(x, t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

On retrouve l'équation de la conservation de l'énergie

$$E - \frac{p^2}{2m} = 0. \quad (1.17)$$

Le courant de probabilité de l'équation de Schrödinger

Pour calculer le courant de l'équation de Shrödinger on prend l'équation (1.13), on multiplie par le conjugué hermitique ψ^* (à gauche)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -\frac{\nabla^2}{2m}\psi, \\ i\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \frac{-1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Par conjugaison hermetique on prend l'équation adjointe de (1.13) et on multiplie par ψ (à droite)

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi^*,$$

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} \psi^*\right) \psi = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} \psi^*\right) \psi. \quad (1.19)$$

On fait une soustraction membre à membre de (1.18) et (1.19) on obtient

$$i \left[\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^*\right) \psi \right] = \frac{-1}{2m} [\psi^* \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \psi^*) \psi], \quad (1.20)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi = \frac{-\nabla}{2m} [\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi],$$

on obtient l'équation de continuité

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{1}{2m} \nabla \left[\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi \right] = 0. \quad (1.21)$$

La densité de probabilité de présence est

$$\rho = \psi^* \psi = |\psi|^2,$$

Le courant est ainsi donné

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2m} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi). \quad (1.22)$$

1.3 Equation de conservation de l'énergie

1.3.1 L'équation de Klein-Gordon

L'année 1926 a connu un extraordinaire développement, lors de la fusion de relativité restreinte et la mécanique quantique, qui était un centre d'intérêt de beaucoup de physiciens qui voulaient donner une allure relativiste à l'équation de Schrödinger.

Le fruit de plusieurs tentatives, donna naissance à l'équation décrivant des particules massives de spin nul. Bienque les noms étaient nombreux cette équation porta

celui de Klein-Gordon [10] considérée comme l'entrée vers la mécanique quantique relativiste [13].

Elle peut être obtenue, en utilisant l'équation relativiste donnant l'énergie d'une particule libre ($\hbar = c = 1$)

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

Via le principe de correspondance

$$\begin{aligned} (i\frac{\partial}{\partial t})^2\phi(x) &= (-i\nabla)^2\phi(x,t) + m^2\phi(x), \\ \frac{-\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) &= (-\nabla^2 + m^2)\phi(x), \end{aligned} \quad (1.23)$$

qui s'écrit

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - m^2)\phi(x) = 0, \quad (1.24)$$

et sous la forme covariante

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (1.25)$$

C'est une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. Il faut donc connaître simultanément ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ à l'instant initial pour que ψ , soit complètement déterminée à tout instant ultérieur.

Si on cherche les ondes planes solutions de l'équation (1.23)

$$\phi = e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})}, \quad (1.26)$$

on trouve après substitution

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}. \quad (1.27)$$

Il existe donc des solutions d'énergie négative $-\sqrt{p^2 + m^2}$, qui est une des difficultés de l'adoption de l'équation .n

1.3.2 Le courant correspondant à l'équation de Klein- Gordon

Pour pouvoir interpréter l'équation d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence ρ et une densité de courant \mathbf{j} satisfaisant à l'équation de continuité

On prend l'équation (1.23) on multiplie par ϕ^* (à droite)

$$\phi^*(\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi) = 0. \quad (1.28)$$

On prend le conjugué de (1.23) et on multiplie par ϕ (à gauche)

$$(\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + m^2\phi^*)\phi = 0. \quad (1.29)$$

La soustraction membre à membre on obtient

$$\phi^*(\partial_\mu\partial^\mu\phi) - (\partial_\mu\partial^\mu\phi^*)\phi = 0, \quad (1.30)$$

$$\partial_\mu[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi] = 0. \quad (1.31)$$

donc

$$\begin{cases} \rho = \phi^*\partial^0\phi - (\partial^0\phi^*)\phi \\ j^i = \phi^*\partial^i\phi - (\partial^i\phi^*)\phi, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.32)$$

En analysant l'expression de ρ et \mathbf{j} dans (1.32), une remarque s'impose ; la densité $\rho(r, t)$ n'est pas définie positive, du fait qu'elle dépend d'une dérivée temporelle, qui présente une difficulté majeure qui vient s'ajouter à la présence des énergies négatives.

Pour retenir l'équation de Klein-Gordon, Pauli et Weisskopf [24] ont réinterprété le quadrivecteur j^μ , en multipliant par une charge (e) $\rightarrow e j^\mu$, ceux-ci représentent alors $e \mathbf{j}$ comme vecteur densité de courant, et $e\rho(r, t)$ est la densité de charge électrique. Par contre, le nombre de particules ne se conserve pas, c'est à dire on peut toujours créer ou annihiler des paires de particules, phénomènes dont seule la théorie des champs quantique rend compte de manière fidèle, $\rho \mathbf{j}$ peuvent être associés à la différence entre le nombre de charges positives, et le nombre de charges négatives, la théorie donc peut être vue, comme une théorie à une charge totale et non pas une théorie à une particule.

1.4 Forme linéaire de l'équation de Klein-gordon

1.4.1 Linéarisation suivant Dirac

Vu l'impossibilité de construire une densité de probabilité définie positive à partir de l'équation de Klein-Gordon, les physiciens ont cherché à obtenir une équation du premier ordre selon les dérivées par rapport au temps et qui respecte l'invariance de Lorentz, et ce en partant de l'équation de Klein-Gordon. Ce développement était accompli par Dirac en 1928 [25], [26]. La première étape consiste à poser un hamiltonien linéaire dans les dérivées temporelles. Il est normal de supposer que la dépendance de l'hamiltonien selon les dérivées spatiales sera également linéaire.

Dirac essaya de trouver une équation qui possède la forme linéaire comme celle de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H_s \psi(x, t), \quad (1.33)$$

et à l'aide de l'expression relativiste de l'énergie

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = [(-i \nabla)^2 + m^2] \psi,$$

On pose

$$H_D = \boldsymbol{\alpha}(-i \nabla) + \beta m. \quad (1.34)$$

et on cherche $\boldsymbol{\alpha}$ et β

$$\begin{aligned} H_D^2 &= \left[\sum_i \alpha_i (-i \nabla_i) + \beta m \right] \left[\sum_j \alpha_j (-i \nabla_j) + \beta m \right] \\ &= \underbrace{\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j (-i \nabla_i) (-i \nabla_j)}_{(1)} + \underbrace{\sum_i \alpha_i \beta (-i \nabla_i) m + \sum_j \beta \alpha_j (-i \nabla_j) m + \beta^2 m^2}_{(2)}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Le première terme se laisse développer de la sorte

$$\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j (-i \nabla_i) (-i \nabla_j) = \sum_i \alpha_i^2 (-i \nabla_i)^2 + \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (-i \nabla_i) (-i \nabla_j). \quad (1.36)$$

Pour le second terme on trouve

$$\sum_i \alpha_i \beta (-i \nabla_i) m + \sum_j \alpha_j \beta (-i \nabla_j) m = \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) (-i \nabla_i) m. \quad (1.37)$$

En remplaçant l'expression des deux termes dans (1.35) on obtient

$$H_D^2 = \sum_i \alpha_i^2 (-i \nabla_i)^2 + \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j (-i \nabla_i) (-i \nabla_j) + \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) (-i \nabla_i) m + \beta^2 m^2. \quad (1.38)$$

Par identification on aboutit au système suivant

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = 1 \\ \beta^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \end{cases}. \quad (1.39)$$

La 3ème équation du système de conditions nous permet d'écrire

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0. \quad (1.40)$$

Où $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ est l'anticommutateur entre α_i et α_j .

Tandis que la première nous donne

$$\alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_i + \alpha_i \alpha_i = 2, \quad (1.41)$$

De ces deux équations (1.40) et (1.41) on déduit

$$\left. \begin{cases} \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 & i \neq j \\ \{\alpha_i, \alpha_i\} = 2 & i = j \end{cases} \right\} \rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (1.42)$$

On peut facilement vérifier que les matrices α et β sont des matrices hermitiques, de trace nulle, linéairement indépendantes et de dimension 4.

On les définit comme suit

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Où σ sont les matrices de Pauli et I la matrice identité.

Finalement l'équation de Dirac prend la forme

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\alpha(-i \nabla) + \beta m) \psi \quad (1.44)$$

Matrices γ

Introduisons les matrices γ de la manière suivante

$$\gamma^0 = \beta \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \beta \boldsymbol{\gamma} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \quad (1.45)$$

de l'équation (1.44)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (\boldsymbol{\alpha}(-i \nabla) + \beta m) \psi, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (\gamma^0 \boldsymbol{\gamma}(-i \nabla) + \gamma^0 m) \psi. \end{aligned} \quad (1.46)$$

On multiplie cette dernière équation par γ^0

$$\begin{aligned} i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (\gamma^0 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}^i(-i \nabla_i) + \gamma^0 \gamma^0 m) \psi, \\ i \gamma^0 \partial_0 \psi &= [-i \gamma^i \partial_i + m] \psi, \end{aligned} \quad (1.47)$$

A la fin on obtient

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0.$$

Les matrices sont données par

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Les matrices γ vérifient l'algèbre de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.49)$$

Le courant dans le formalisme de Dirac

En suivant la même méthode, déjà utilisée dans le calcul du courant associé à l'équation de Schrödinger et à celle de Klein-Gordon, pour écrire l'équation de continuité correspondant à l'équation de Dirac, on reprend son expression

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \boldsymbol{\alpha} \nabla \psi + m \beta \psi. \quad (1.50)$$

La formule de l'équation adjointe se met sous la forme

$$i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = i \boldsymbol{\alpha} \nabla \psi^+ + m \beta \psi^+ \quad (1.51)$$

(1.50)-(1.51) nous donne l'équation de continuité

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) + i \nabla (\psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi) = 0 \quad (1.52)$$

La densité de probabilité est

$$\rho = \psi^+ \psi. \quad (1.53)$$

Le courant de continuité est

$$\mathbf{j} = \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (1.54)$$

Le courant de Dirac (formulation covariante) On donne

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \psi^+ = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*),$$

On multiplie l'équation trouvée dans (1.47) par ψ^+

$$\psi^+ (i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi) = 0, \quad (1.55)$$

On multiplie le conjugué de (1.47) par ψ

$$(-i \partial_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ - m \psi^+) \psi = 0, \quad (1.56)$$

par soustraction on obtient

$$i [\psi^+ \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ \psi] = 0. \quad (1.57)$$

Remarque : on est incapable d'écrire l'équation de continuité sous la forme covariante

Pour contourner cette subtilité, on définit l'adjoint du spineur ψ comme suit

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0, \quad \text{avec} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Cette fois ci on multiplie l'équation (1.47) par $\bar{\psi}$ et on obtient

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \psi = 0, \quad (1.59)$$

l'équation vérifiée par l'adjoint spineur s'écrira

$$\begin{aligned} -i(\overline{\partial_\mu\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi} &= 0, \\ -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.60)$$

on multiplie l'équation trouvée dans (1.60) par ψ

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\psi = 0, \quad (1.61)$$

on soustrait (1.61) de (1.59) on aboutit à l'équation de continuité

$$i[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] = 0, \quad (1.62)$$

ou encore

$$i\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] = 0.$$

donc la densité de probabilité est

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^+\psi. \quad (1.63)$$

et le courant de continuité est

$$j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.64)$$

La densité de probabilité est définie positive.

1.4.2 Linéarisation suivant Duffin-Kemmer-Petiau

Après le succès, qu'a connu l'équation de Dirac décrivant les particules à spin $s = \frac{1}{2}$, les physiciens se sont mis à chercher une équation d'onde similaire à celle de Dirac, qui décrira les bosons.

On montre qu'une autre méthode d'identification (que celle employée par Dirac), nous mène à une solution différente, qui est l'équation d'onde portant le nom de ces concepteurs Duffin-Kemmer-Petiau en 1936, qui décrit à la fois une particule massive de spin 0 et de spin 1, ayant la forme

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (1.65)$$

On remarque qu'elle possède une forme identique à celle de Dirac, mais faisant intervenir les matrices β^μ de Kemmer, au lieu des matrices γ^μ de Dirac.

L'établissement de l'équation DKP à (s=0)

En introduisant les champs auxiliaires dans l'équation de Klein-Gordon, on peut reproduire l'équation(DKP) de spin 0

$$\begin{cases} \varphi = \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t} \phi \\ \mathbf{u} = \frac{i}{m} \nabla \phi \end{cases}, \quad (1.66)$$

à l'aide de ces nouvelles variables de champs l'équation de Klein-Gordon prend la forme

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi - i \nabla \cdot \mathbf{u} = m \phi,$$

ce qui nous mène au système

$$\begin{pmatrix} 0 & E & -\mathbf{p} \\ E & 0 & 0 \\ \mathbf{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi = m \psi, \quad \text{avec } \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

qu'on peut écrire sous une forme covariante comme suit

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (1.68)$$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \Theta & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \boldsymbol{\rho} \\ -\boldsymbol{\rho}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

avec $\hat{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{0}}, \mathbf{0}$ sont des matrices de composantes nulles de dimensions respectivement $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3$, et

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre DKP

L'algèbre introduite par Duffin, Kemmer et Petiau [1], dans l'année 1936 est l'algèbre générée par les matrices β^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, c'est cette forme matricielle de l'équation dite (DKP) qui fournit la description relativiste d'une particule à ($s=0$) et ($s=1$). Elle est désignée comme l'algèbre des mesons aussi définie comme suit

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu. \quad (1.70)$$

Conservation de l'énergie

Nous allons montrer ici, que les composantes de la fonction d'onde, vérifient l'équation de conservation de l'énergie. Pour ce faire on prend l'équation vérifiée par la fonction d'onde ϕ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\phi = 0, \quad (1.71)$$

En multipliant par $\left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t}\right)$ on obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right) \cdot \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial t}\right)\phi = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\phi = 0, \quad (1.72)$$

En multipliant par $\left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ on obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right) \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)u_1 = 0, \quad (1.73)$$

et de même pour les autres composantes u_2, u_3 .

Le courant associé à l'équation DKP

Comme pour toute équation d'onde physique, celle de DKP possède un courant qui vérifie l'équation de continuité.

On a l'équation (DKP)

$$i\beta^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (1.74)$$

Par conjugaison hermitique on obtient

$$-i\partial_\mu \psi^+ (\beta^\mu)^+ - m\psi^+ = 0. \quad (1.75)$$

Multiplions la première par ψ^+ et la deuxième par ψ et faisons la soustraction

$$i\psi^+ \beta^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^+ \psi = 0, \quad (1.76)$$

$$-i(\partial_\mu \psi^+) (\beta^\mu)^+ \psi - m \psi^+ \psi = 0, \quad (1.77)$$

De (1.76) et (1.77) on a

$$i(\psi^+ \beta^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \psi^+) (\beta^\mu)^+ \psi) = 0. \quad (1.78)$$

Remarque : on voit clairement qu'en procédant d'une manière directe dans le calcul du courant, l'équation de continuité ne peut s'écrire sous la forme covariante.

Pour surmonter cette difficulté, on définit l'adjoint de ψ comme suit

$$\bar{\psi} = \psi^+ \eta^0, \quad (1.79)$$

On multiplie l'équation (DKP) par $\bar{\psi}$

$$i\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = 0, \quad (1.80)$$

l'équation vérifiée par le spineur adjoint est

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu - m \bar{\psi} = 0, \quad (1.81)$$

On multiplie (1.81) par ψ

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = 0, \quad (1.82)$$

De (1.81) et (1.82) on aura

$$i(\bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi) = 0, \quad (1.83)$$

l'équation de continuité aura la forme

$$i\partial_\mu (\bar{\psi} \beta^\mu \psi) = 0, \quad (1.84)$$

d'où la densité de probabilité est

$$\rho = \bar{\psi} \beta^0 \psi = \psi^+ \psi, \quad (1.85)$$

et le courant de probabilité

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \boldsymbol{\beta} \psi. \quad (1.86)$$

1.4.3 L'équation de Feshbach-Villars

L'intérêt de cette section, est de montrer que pour surmonter les difficultés trouvés lors de l'interprétation de l'équation de (KG), il est possible de séparer des deux degrés de liberté.

On impose à la fonction d'onde d'être linéaire en $(\frac{\partial}{\partial t})$, ce qui va nous permettre de déterminer l'hamiltonien du système.

Formulation Hamiltonienne de l'équation de Klein-Gordon

On postule que l'état dynamique du système, à un instant donné n'est pas représenté par la fonction d'onde ψ seulement, mais par l'ensemble des deux fonctions ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, ceci revient à postuler que l'état du système est représenté par une fonction d'onde à deux composantes u et v .

Cherchons à transformer ces deux équations, de manière à rendre ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ plus symétriques. Pour ce faire on pose

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(\psi - \chi) = \frac{1}{2}(\psi + \frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}\psi) \\ v = \frac{1}{2}(\psi + \chi) = \frac{1}{2}(\psi - \frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}\psi) \end{cases} \quad (1.87)$$

D'où

$$\psi = u + v \quad \text{et} \quad \chi = v - u, \quad (1.88)$$

Ainsi les équations dans (1.87) prennent la forme

$$\begin{cases} (v - u) = -\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}(u + v) & \text{(a)} \\ \frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}(u - v) = (\Delta - m^2)(u + v) & \text{(b)} \end{cases}, \quad (1.89)$$

en multipliant la première équation (a) par m^2

$$\begin{cases} m^2(v - u) = -im\frac{\partial}{\partial t}(u + v) \\ \frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial t}(u - v) = \Delta(u + v) - m^2(u + v) \end{cases}, \quad (1.90)$$

en faisant la somme on obtient

$$i\frac{\partial}{\partial t}u = mu - \frac{1}{2m}\Delta(u + v),$$

et par la soustraction

$$i\frac{\partial}{\partial t}v = -mv - \frac{1}{2m}\Delta(u + v),$$

on introduit le vecteur colonne

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

et les matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ainsi le système d'équation s'écrit

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = H \phi, \tag{1.91}$$

avec H l'hamiltonien de Feshbach et Villars

$$H = -(\sigma_3 + i\sigma_2) \frac{P^2}{2m} + m\sigma_3.$$

Nous venons d'élaborer l'équation de Feshbach-Villars, qui n'est rien d'autre que la forme hamiltonienne de l'équation de KG.

Chapitre 2

Formes linéaires de l'équation de Schrödinger

2.1 Problématique

Dans cette partie du travail, on se propose de rechercher les formes linéaires de l'équation de Schrödinger, c'est à dire de trouver des équations qui ne sont pas quadratiques en \mathbf{p} , notre étude se limitera aux particules de spin $s = \frac{1}{2}$ et $s = 0$.

On impose à l'équation d'onde, d'être du premier ordre par rapport à toutes ses dérivées spatiotemporelles de la forme

$$(AE + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + C)\psi = 0. \quad (2.1)$$

Où A, B, C sont des opérateurs linéaires de dimension qu'on suppose être finie, indépendants des variables E et \mathbf{p} . La résolution du problème se résume à la détermination de ces inconnues A, \mathbf{B} , et C .

2.1.1 Procédure d'indentification de Dirac

On va dériver une équation d'onde non relativiste, qui décrira les particules de spin ($s = 1/2$), en utilisant l'idée heuristique que Dirac avait employé avec succès, pour établir son équation.

On définit l'opérateur Ω tel que [25]

$$\Omega\psi \stackrel{Def}{=} (AE + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + C)\psi = 0. \quad (2.2)$$

La solution de (2.2) doit obéir à l'équation de Schrödinger définie

$$S\psi \stackrel{Def}{=} \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta\right)\psi = \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\psi, \quad (2.3)$$

$$S\psi = 0. \quad (2.4)$$

On postule, qu' il existe un certain opérateur $\Omega' = A'E + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{p} + C'$, dont la multiplication par Ω , doit donner l'équation de Schrödinger

$$\Omega'\Omega = 2mS \quad (2.5)$$

Après développement on obtient

$$(A'A)E^2 + B'Bp^2 + (A'B + B'A)E\mathbf{p} + (A'C + C'A)E + (B'C + C'B)\mathbf{p} + C'C = 2m\left(S - \frac{p^2}{2m}\right), \quad (2.6)$$

par indentification des différents monomes en E et p, on obtient le système de conditions suivant

$$\begin{cases} A'A = 0 \\ A'C + C'A = 2m \\ C'C = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A'B_i + B'_iA = 0 \\ B'_iB_j + B'_jB_i = -2\delta_{ij}, \\ C'B_i + B'_iC = 0 \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad . \quad (2.7)$$

2.2 Solution de Lévy-Leblond

Lévy-Leblond a résolu le système précédent et a trouvé, après la définition de nouveaux opérateurs comme suit

$$\begin{aligned} B_4 &= i\left(A + \frac{1}{2m}C\right), & B'_4 &= i\left(A' + \frac{1}{2m}C'\right), \\ B_5 &= A - \frac{1}{2m}C, & B'_5 &= A' - \frac{1}{2m}C', \end{aligned} \quad (2.8)$$

sachant que le système de conditions (2.7) peut être écrit

$$B'_\mu B_\nu + B'_\nu B_\mu = -2\delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1 \text{ à } 5), \quad (2.9)$$

toutes les représentations d'une telle algèbre, peuvent être déduite de celles de l'algèbre de Clifford à 4 dimensions

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1 \text{ à } 4).$$

En ne s'intéressant qu'aux représentations irréductibles, on est amené à utiliser les résultats standards de l'algèbre de Dirac

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

telle que

$$\mathbf{B}_{1,2,3} : 4 \times 4$$

$$B_{4,5} : 2 \times 2$$

La fonction d'onde est ainsi un objet à 4 composantes, qu'on écrit comme

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

φ et χ sont eux même des fonctions à deux composantes.

Notre équation finalement est donnée par

$$\begin{cases} E\varphi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi = 0 \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi + 2m\chi = 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

ou sous forme matricielle [5]

$$\left[E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} + \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \psi = 0. \quad (2.12)$$

2.2.1 Procédure d'indentification de Dirac revisitée

On pose maintenant $\Omega' = A'E - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{p} + C'$ et de la même manière et après identification avec l'équation de Schrödinger $(2mE - P^2)\psi = 0$ on obtient

$$\begin{cases} A'A = C'C = 0 \\ A'C + C'A = 2m \end{cases}, \quad \begin{cases} A'B_i - B_iA = 0 \\ C'B_i - B_iC = 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

ainsi que l'équation

$$B_j B_i p_j p_i = p^2, \quad (2.14)$$

il est facile de montrer que l'équation (2.14) est équivalente à

$$\begin{cases} B_j B_i + B_i B_j = 0 & i \neq j \\ B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 = 1 \end{cases}, \quad (2.15)$$

Dans le cas présent et dans le but d'établir, une solution différente de celle dérivée par Lévy-Leblond, on prend en compte ψ dans l'équation (2.14), ce qui revient à poser

$$B_j B_i p_j \psi = p_i \psi,$$

ce qui garantira la satisfaction de

$$B_j B_i p_j p_i \psi = p^2 \psi, \quad (2.16)$$

Maintenant, il s'agit de rechercher tout d'abord les matrices \mathbf{B} , vérifiant (??). Pour ce faire multiplions par B_k on aura

$$B_k B_j B_i p_j p_i \psi = B_k p^2 \psi \quad (2.17)$$

expression qui peut être réécrite comme suit

$$B_i B_j B_k p_j p_k \psi = B_i p^2 \psi. \quad (2.18)$$

La somme terme à terme des ces deux équations conduit à

$$(B_i B_j B_k + B_k B_j B_i) p_j \psi = (B_k \delta_{ij} + B_i \delta_{jk}) p_j \psi \quad (2.19)$$

il suffit que [30]

$$B_i B_j B_k + B_k B_j B_i = B_k \delta_{ij} + B_i \delta_{jk} \quad (2.20)$$

pour satisfaire la condition (??)

2.3 Dérivation d'une nouvelle solution

La dernière équation ne fait intervenir que les matrices \mathbf{B} (d'où son intérêt). En effet elle représente les relations de commutations de ces matrices, celles-ci sont similaires à l'algèbre DKP.

On peut sans grande difficulté, et en s'inspirant des matrices DKP ($s = 0$) prendre les expressions des \mathbf{B} comme suit

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho^1 \\ \rho_T^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 \\ \rho_T^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & \rho^3 \\ \rho_T^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

il s'agit maintenant d'examiner de plus près la relation $B_j B_i p_j p_i \psi = p^2 \psi$

nous avons

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} = B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3, \quad (2.23)$$

qu'on écrit sous forme explicite

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

après multiplication

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ 0 & p_2 p_1 & p_2^2 & p_2 p_3 \\ 0 & p_3 p_1 & p_3 p_2 & p_3^2 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

nous posons

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

et prenons en considération $B_j B_i p_j p_i \psi = p^2 \psi$, on aboutit à

$$\begin{cases} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\varphi = p^2 \varphi \\ p_1^2 u_1 + p_1 p_2 u_2 + p_1 p_3 u_3 = p^2 u_1 \\ p_2 p_1 u_1 + p_2^2 u_2 + p_2 p_3 u_3 = p^2 u_2 \\ p_3 p_1 u_1 + p_3 p_2 u_2 + p_3^2 u_3 = p^2 u_3 \end{cases}. \quad (2.26)$$

La première équation de ce système est triviale, mais les 3 autres équations constituent des contraintes sur le spineur introduit plus haut comme nous allons le montrer.

Pour que la deuxième équation du système soit remplie, il faut que

$$p_1 u_2 = p_2 u_1 \text{ et } p_1 u_3 = p_3 u_1 \quad (2.27)$$

la même analyse des deux dernières équations de (2.26), nous permet d'écrire les conditions suivantes

$$\begin{cases} p_1 u_2 = p_2 u_1 \\ p_1 u_3 = p_3 u_1 \\ p_2 u_3 = p_3 u_2 \end{cases}. \quad (2.28)$$

On verra que ces contraintes seront satisfaites automatiquement, lorsque les opérateurs A et C sont déterminés.

Sachant que les solutions découlent de $(AE + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + C)\psi = 0$ et les matrices \mathbf{B} sont données plus haut, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{2}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

En regroupant toutes les matrices A, B, C .

$$\begin{pmatrix} E & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & -2m & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & -2m & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.30)$$

autrement dit

$$\begin{cases} E\varphi = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3 \\ 2m u_1 = p_1 \varphi \\ 2m u_2 = p_2 \varphi \\ 2m u_3 = p_3 \varphi \end{cases}, \quad (2.31)$$

Remarque

Le développement montre clairement, le caractère véc toriel de \mathbf{u} , et le caractère scalaire de φ .

On peut voir le système de cette façon

$$\begin{cases} 2m \mathbf{u} = \mathbf{p} \varphi \\ \mathbf{p} \mathbf{u} = E \varphi \end{cases}, \quad (2.32)$$

de l'équation (2.32), on déduit que

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2m} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \varphi) = 0 \quad (2.33)$$

par conséquent

$$\begin{cases} p_1 u_2 = p_2 u_1 \\ p_1 u_3 = p_3 u_1 \\ p_2 u_3 = p_3 u_2 \end{cases}.$$

Pour achever la construction de la solution, il nous reste à déterminer A', C' . Revenons au système (2.7)

$$\begin{cases} A'A = C'C = 0 \\ A'C + C'A = 2m \end{cases}, \begin{cases} A'B_i - B_i A = 0 \\ C'B_i - B_i C = 0 \end{cases},$$

en résolvant ce système on aura

$$\begin{aligned} A' &= \frac{C}{2m} \\ C' &= 2mA \end{aligned} \quad (2.34)$$

Après avoir trouvé A, \mathbf{B}, C et A', C' nous avons achevé la construction, d'une nouvelle solution au problème posé.

Finalement l'équation d'onde s'écrit sous la forme [30]

$$\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) E + \left(\begin{array}{cc} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho}_T & \mathbf{0} \end{array} \right) \mathbf{p} + m \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{2}_{3 \times 3} \end{array} \right) \right] \psi = 0. \quad (2.35)$$

C'est une équation d'onde non relativiste dont la fonction d'onde possède 4 composantes.

2.3.1 Analogie avec l'équation DKP

Au même titre que la solution de Lévy-leblond est l'analogue non-relativiste de l'équation de Dirac, on peut affirmer que, la nouvelle solution représente l'analogue non-relativiste à l'équation DKP spin 0 [30]. Tant que les matrices \mathbf{B} répondent aux relations d'anticommutation similaires à celles de DKP mais à une dimension de moins. Nous pouvons remarquer également que le fonction d'onde ψ dans l'équation (2.35) est constitué d'un champ vectoriel et d'un champ scalaire. Cette situation est analogue au spineur DKP spin zéro qui, pour rappel, était formé d'un champ vectoriel et de deux composantes scalaires. Nous terminons cette comparaison en citant l'exemple de l'oscillateur harmonique que nous exposerons en détails dans le chapitre suivant. En effet, nous verrons que la limite non-relativiste de l'oscillateur DKP coïncide parfaitement avec l'équation d'onde obtenue via (2.35).

Nous passons maintenant à la détermination de la densité de probabilité associée à l'équation (2.35).

Densité de probabilité et courant de continuité

Avant d'appliquer notre équation, à l'analyse des problèmes en physique, on doit

connaitre certaine forme sesquilinéaire de la fonction d'onde, qui peut être utiliser comme densité de probabilité.

Ecrivons la fonction d'onde sous la forme

$$\begin{cases} E\varphi - \mathbf{p}\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{p}\varphi - 2m\mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + i\nabla\mathbf{u} = 0 \\ -i\nabla\mathbf{u}\varphi = 2m\mathbf{u} \end{cases}, \quad (2.36)$$

la première équation de ce système suffit pour l'obtention de l'équation de continuité, on multiplie cette dernière par φ^* on a

$$i\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi + i\varphi^* \nabla\mathbf{u} = 0, \quad (2.37)$$

on prend son conjugué hermitique et on le multiplie par φ

$$-i\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right)\varphi - i\nabla\cdot\mathbf{u}\varphi = 0. \quad (2.38)$$

Après soustraction on a

$$i\left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right)\varphi\right) + i(\varphi^* \nabla\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{u}\varphi) = 0, \quad (2.39)$$

qu'on peut réécrire

$$i(\partial_t\varphi^*\varphi) + i\nabla(\varphi^*\mathbf{u} + \mathbf{u}\varphi) = 0, \quad (2.40)$$

alors on a

$$\begin{cases} \rho = \varphi^*\varphi \\ \mathbf{j} = \varphi^*\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}\varphi \end{cases}. \quad (2.41)$$

Equation de continuité vérifiée par la fonction d'onde ψ

on prend l'équation d'onde que nous avons construit un peu plus haut et on multiplie par ψ^+

$$\overline{\psi}(AE + \mathbf{B}\mathbf{p} + C)\psi = 0, \quad (2.42)$$

l'équation vérifiée par ψ^+ s'écrit

$$\psi^+(-A\underline{E} - \mathbf{B}\underline{\mathbf{p}} + C) = 0, \quad (2.43)$$

on multiplie par ψ

$$\psi^+(A\underline{E} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{p}} + C)\psi = 0, \quad (2.44)$$

la flèche en bas indique que les deux operateurs \mathbf{p} et E agissent sur ψ^+ .

Par soustraction l'équation de continuité se met sous la forme

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ A \psi) + \nabla (\psi^+ \mathbf{B} \psi) = 0.$$

2.3.2 Théorème d'Ehrenfest à partir du nouveau formalisme

Le théorème d'Ehrenfest relie la dérivée temporelle de la valeur moyenne d'un opérateur quantique au commutateur de cet opérateur avec le hamiltonien H du système.

$$\frac{d \langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [O, H] \rangle, \quad (2.45)$$

Appliquons maintenant, ce théorème à notre nouvelle équation, rappelons d'abord sa forme

$$(AE + \mathbf{B}\mathbf{p} + mC)\psi = 0$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho}_T & 0 \end{pmatrix}, C = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{2}_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

et

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

la valeur moyenne d'un opérateur O dans le nouveau formalisme s'écrira

$$\langle O \rangle = \int \psi^+ O A \psi dv \quad (2.46)$$

la dérivation par rapport au temps donne

$$\frac{d \langle O \rangle}{dt} = \int \frac{\partial \psi^+}{\partial t} O A \psi dv + \int \psi^+ \frac{dO}{dt} A \psi dv + \int \psi^+ O A \frac{d\psi}{dt} dv, \quad (2.47)$$

Sachant que

$$\begin{cases} \frac{i\partial A}{\partial t} \psi = (-\mathbf{B}\mathbf{p} - mC)\psi \\ -\frac{i\partial A^+}{\partial t} \psi^+ = (+\mathbf{B}^+ \mathbf{p} - mC)\psi^+ \end{cases} \text{ avec } \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

En soulignant que les compensantes ψ vérifient l'équation de Schrödinger, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \frac{i\partial}{\partial t}\varphi = \frac{-p^2}{2m}\varphi + V\varphi = H\varphi \\ \frac{-i\partial}{\partial t}\varphi^* = \frac{p^2}{2m}\varphi^* + V\varphi^* = H^*\varphi^* \end{cases}, \quad (2.49)$$

on insère dans l'expression de la valeur moyenne

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \frac{1}{i} \int -H^*\psi^+ O A \psi dv + \frac{1}{i} \int \psi^+ O A H \psi dv, \int \psi^+ \frac{dO}{dt} A \psi dv. \quad (2.50)$$

Puisque l'opérateur hamiltonien H et la matrice A , sont hermetiques on peut simplifier l'expression

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = -\frac{1}{i} \int \psi^+ H A O \psi dv + \frac{1}{i} \int \psi^+ O H A \psi dv + \left\langle \frac{dO}{dt} \right\rangle \quad (2.51)$$

ce qui revient à écrire

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = -\frac{1}{i} \langle HO \rangle + \frac{1}{i} \langle OH \rangle + \left\langle \frac{dO}{dt} \right\rangle. \quad (2.52)$$

Finalement le théorème d'Ehrenfest sous le nouveau formalisme s'écrit

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \frac{1}{i} \langle [O, H] \rangle + \left\langle \frac{dO}{dt} \right\rangle. \quad (2.53)$$

Après l'établissement du théorème d'Ehrenfest avec notre équation, l'analogie non relativiste à l'équation DKP, on conclut que la construction de la nouvelle solution avec la méthode de linéarisation s'avère féconde, car nous venons juste de trouver une autre formulation à plusieurs composantes de l'équation de Schrödinger, qui peut servir à la description d'une particule de spin zéro.

Chapitre 3

Application à l'oscillateur harmonique

Le modèle de l'oscillateur harmonique bien qu'il soit une idéalisation, est d'une importance fondamentale en Physique. L'intérêt d'un tel modèle est la description de l'évolution de n'importe quel système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable, ce qui en fait un outil transversal utilisé dans de nombreux domaines : mécanique, électricité et électronique, optique, matière condensée, et plus particulièrement la mécanique quantique qui est le champ de notre travail.

En pratique, de tels oscillateurs ne sont approchés que dans des cas rares pour lesquels les forces dissipatives (frottement) sont négligées. Pour que leurs amplitudes restent constantes, il est nécessaire d'entretenir les oscillations en fournissant de l'énergie.

Ce chapitre en fait, est une application directe qui complètera, le travail introductif fait dans les précédents chapitres.

3.1 L'oscillateur harmonique de Dirac

L'équation de Dirac, est déjà un grand pas, dans l'avancée de la Physique, puisque les mystérieuses particules qu'elle décrit, sont présentes dans toutes les structures de la matière, et depuis des lointains millénaires grâce à leur stabilité, et qui transversent les champs de toutes les disciplines. La fabuleuse idée eue par les physiciens mexicains,

M.Moshinsky et A Szczepaniak dans leur article soumis un 8 juin 1989 [11] ne manque pas de génie ni de grandeur, l'établissement de l'oscillateur harmonique dit de Dirac, est un succès énorme qu'on présente dans cette section de notre travail.

Rappelons d'abord la forme de l'équation linéaire de Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\psi + m\beta\psi, \quad (3.1)$$

où t est le temps et

$$\mathbf{p} = -i\nabla, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de pauli qui vérifient la propriété suivante

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (3.3)$$

Maintenant on passe à la substitution, qui est le génie de ce travail et qui se traduit comme suit

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

Appliquons cela, directement dans l'équation (3.1), on aura

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}) + m\beta]\psi. \quad (3.5)$$

On peut rapidement remarquer, que l'opérateur entre cochet est hermitique, et en introduisant la fonction d'onde de Dirac comme suit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

on peut appeler la composante ψ_1 comme composante supérieure, et ψ_2 comme la composante inférieure du spineur de Dirac.

Et après le développement on retrouve, en explicitant d'abord la substitution

$$im\omega r \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} im\omega\mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -im\omega\mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

en regroupant les formules on obtient

$$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{cases} (E - m)\psi_1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\psi_2 \\ (E + m)\psi_2 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - im\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\psi_1 \end{cases}. \quad (3.9)$$

On résout ce système, en multipliant la première équation par $(E + m)$, puis utilisons la deuxième et la définition (3.3) on obtient l'expression de l'énergie ayant la forme [6]

$$(E^2 - m^2)\psi_1 = \left[(p^2 + m\omega^2 r^2) - 3\hbar\omega m - 4m\frac{\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{s} \right] \psi_1. \quad (3.10)$$

où $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ est le moment cinétique orbital,

et $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ est le moment cinétique de spin.

Limite non relativiste de l'oscillateur de Dirac

On considère maintenant $E = m + \varepsilon$, le terme gauche de la dernière équation s'écrira

$$E^2 = \varepsilon^2 + 2m\varepsilon \quad (3.11)$$

à la limite non relativiste $\varepsilon \ll m$ l'expression de l'énergie aura la forme

$$\varepsilon\psi = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2}{\hbar}\omega\mathbf{L}\cdot\mathbf{s} \right] \psi. \quad (3.12)$$

Ainsi dans la limite non relativiste l'énergie ε peut être vue comme une valeur propre de l'opérateur appaissant, dans (3.10) divisé par $2m$, ce qui correspond à l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique de fréquence ω avec couplage spin orbite. Vu ce comportement dans la limite non relativiste l'équation introduite au début (3.5) est l'équation donnant l'oscillateur de Dirac.

3.2 L'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau

L'oscillateur DKP, est une formulation basée sur le génie et le succès de l'oscillateur de Dirac, faite par Y.Nedjadi et R.C.Barret en 1998 [12], qui ont suivi une manière similaire, en introduisant une substitution de la forme

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\eta}^0\mathbf{r}, \quad (3.13)$$

Avec $\eta^0 = 2(\beta_0)^2 - 1$, dans l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, puis on calcul l'énergie elle devrait reproduire d'une manière fidèle l'expression de l'oscillateur harmonique dans la limite non relativiste.

On reprend l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.14)$$

avec

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \check{O} \\ \bar{O} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ -\boldsymbol{\rho}_T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

en appliquant la substitution

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = [\beta(\mathbf{p} - im\omega\eta^0\mathbf{r}) + m]\psi, \quad (3.16)$$

la fonction d'onde DKP peut prendre la forme à deux composantes comme suit

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\approx} \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\approx} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

La substitution s'explique de la sorte

$$im\omega\mathbf{r} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \check{O} \\ \bar{O} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} im\omega\mathbf{r}\mathbf{1}_{2 \times 2} & \check{O} \\ \bar{O} & -im\omega\mathbf{r}\mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}?$$

avec $\check{O}, \bar{O}, \mathbf{0}$, sont définies comme des matrices de composantes 0 de dimensions resp : $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3$,

et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

on peut écrire alors

$$\mathbf{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ -\boldsymbol{\rho}_T & 0 \end{pmatrix} - im\omega\mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\rho}\mathbf{1}_{3 \times 3} \\ -\boldsymbol{\rho}_T\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

c'est à dire [7]

$$E \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\approx} \\ \psi \end{pmatrix} = \left[\mathbf{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ -\boldsymbol{\rho}_T & 0 \end{pmatrix} - im\omega\mathbf{r} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\rho}\mathbf{1}_{3 \times 3} \\ -\boldsymbol{\rho}_T\mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} + m \right] \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\approx} \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

après développement et simplification, on abouti à un système d'équations donné comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} E\varphi = m\phi \\ E\varphi + i(p_1 + im\omega r_1)u_1 + i(p_2 + im\omega r_2)u_2 + i(p_3 + im\omega r_3)u_3 \\ (p_1 + im\omega r_1)\phi = imu_1 \\ (p_2 + im\omega r_2)\phi = imu_2 \\ (p_3 + im\omega r_3)\phi = imu_3 \end{array} \right. . \quad (3.21)$$

D'une manière plus simple

$$\left\{ \begin{array}{l} E\varphi = m\phi \\ E\varphi + i(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\mathbf{u} = m\phi \\ (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\phi = im\mathbf{u} \end{array} \right. . \quad (3.22)$$

Pour calculer l'énergie de l'oscillateur harmonique en utilisant 3.22 , on élimine les autre composante (les champs auxiliares) en faveur du champ ϕ , puis on remplace dans la deuxième équation du système comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{E}{m}\phi \\ \mathbf{u} = \frac{-i(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})}{m}\phi \end{array} \right. \quad (3.23)$$

En remplaçant les expressions de φ et de \mathbf{u} dans la deuxième équation du système (3.22) on aura

$$m\phi = E\left(\frac{E}{m}\phi\right) + i(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\left(-i(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})/m\right)\phi, \quad (3.24)$$

$$m^2\phi = E^2\phi + (p^2 + m^2\omega^2 r^2 + im\omega(-\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{p}))\phi, \quad (3.25)$$

qu'on peut écrire

$$m^2\phi = E^2\phi + (p^2 + m^2\omega^2 r^2 + im\omega[\mathbf{r}, \mathbf{p}])\phi,$$

ce qui nous donne finalement [7]

$$(E^2 - m^2)\phi = [p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 3\hbar m\omega]\phi. \quad (3.26)$$

Limite non relativiste

En considérant que l'énergie est égale à

$$E = \varepsilon + m \quad (3.27)$$

En remplaçant dans(??)

$$E^2 = \varepsilon^2 + 2m\varepsilon + m^2,$$

en remplaçant l'expression de l'énergie dans l'équation (??) on aura

$$[(\varepsilon^2 + 2m\varepsilon + m^2) - m^2] \phi = [p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 3\hbar m\omega] \phi,$$

à la limite non relativiste $\varepsilon \ll mc^2$, ε^2 devient négligeable devant $2m\varepsilon$ ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} (2m\varepsilon)\phi &= [p^2 + m^2\omega^2 r^2 - 3\hbar m\omega] \phi, \\ \varepsilon\phi &= \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega \right] \phi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

qui est l'énergie de l'oscillateur harmonique non relativiste, qui nous permet de dire que la substitution choisie par Y. Nedjadi et R. C. Barret, formule un oscillateur harmonique à l'équation de Duffin-Kemmer-Pétiau.[7]

3.3 L'oscillateur de Lévy-Leblond

On passe à l'application dans la cadre non relativiste, on exposons le l'oscillateur de l'équation de Lévy-Leblond après avoir vu l'expression linéaire de l'équation au deuxième chapitre, qui est de la forme

$$(AE + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + c)\phi = 0. \quad (3.29)$$

Choisissons la substitution comme suit

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta\mathbf{r} \quad (3.30)$$

avec

$$\eta = 2A^2 - 1 \quad (3.31)$$

on incorpore d'une façon directe la substitution (3.30) on obtient

$$[AE + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) + C] \psi = 0 \quad (3.32)$$

où

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

après calcul on obtient

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2m \\ E & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} - im\omega\boldsymbol{\beta} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \mathbf{r} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.33)$$

sachant que $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}$ est le produit scalaire entre le vecteur \mathbf{p} et les matrices $\boldsymbol{\sigma}$ comme suit $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$

après développement on abouti au système d'équations suivant

$$\begin{cases} E\psi_1 = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\psi_2 \\ 2m\psi_2 = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\psi_1 \end{cases}, \quad (3.34)$$

en multipliant la deuxième équation par $(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})$, et considérant la première on aura

$$2m\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\psi_2 = -\sigma_i(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\sigma_j(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\psi_1, \quad (3.35)$$

qu'on peut écrire

$$2mE\psi_1 = [\sigma_i\sigma_j(p_i + im\omega r_i)(p_j - im\omega r_j)] \psi_1, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.36)$$

en utilisant la propriété des matrices $\boldsymbol{\sigma}$ telleque

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (3.37)$$

on se ramène

$$2mE\psi = \left[p^2 + m^2\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - 2m\omega\epsilon_{ijk}\sigma_k(r_i p_j) \right] \psi, \quad (3.38)$$

à l'aide de l'expression de produit vectoriel $\epsilon_{ijk}r_i p_j = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_k$. et $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ on peut écrire finalement [5]

$$E\psi = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2\omega}{\hbar}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{s}) \right] \psi. \quad (3.39)$$

Cette équation décrivant l'oscillateur harmonique, dit de Lévy-Leblond ressemble exactement à celle de l'oscillateur de Dirac à la limite non relativiste, de qui nous confirme une fois de plus que l'équation établie par ce dernier est une version non relativiste à l'équation de Dirac.

3.4 l'oscillateur harmonique de l'analogie non relativiste de DKP

Il est temps de tirer, des conclusions plus explicites, de notre équation d'onde. Considérons l'effet d'une substitution de l'oscillateur harmonique linéaire en \mathbf{r} comme suit

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta^0 \mathbf{r}, \quad (3.40)$$

à notre équation donné en haut

$$(EA + \mathbf{B}\mathbf{p} + C)\psi = 0,$$

$$(EA + \mathbf{B}(\mathbf{p} - im\omega\eta^0 \mathbf{r}) + C)\psi = 0, \quad (3.41)$$

Avec $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, et $\eta^0 = 2B_0^2 - 1$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, im\omega\eta^0 \mathbf{r} = \begin{pmatrix} im\omega \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -im\omega \mathbf{r} \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

la fonction d'onde se laisse écrire

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ i\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho}^T & 0 \end{pmatrix}, C = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{2}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

Après simplification on aboutit à

$$\begin{pmatrix} E & -(p_1 - im\omega r_1) & -(p_2 - im\omega r_2) & -(p_3 - im\omega r_3) \\ p_1 + im\omega r_1 & -2m & 0 & 0 \\ p_2 + im\omega r_2 & 0 & -2m & 0 \\ p_3 + im\omega r_3 & 0 & 0 & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ iu_1 \\ iu_2 \\ iu_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

de manière plus simple et compacte :

$$\begin{cases} E\phi - (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\mathbf{u} = 0 \\ (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\phi - 2m\mathbf{u} = 0 \end{cases}, \quad (3.46)$$

Calcul de l'énergie de l'oscillateur harmonique on élimine \mathbf{u} en faveur de ϕ et remplace dans la première équation du système (3.46)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}}{2m}, \quad (3.47)$$

$$E\phi = \frac{(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})}{2m}\phi$$

après développement

$$E\phi = \left(\frac{\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2 - 3\hbar m\omega}{2m} \right)\phi,$$

Ce qui donne finalement

$$E\phi = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega \right]\phi. \quad (3.48)$$

Qui est exactement l'énergie de l'oscillateur harmonique de l'équation DKP à spin 0, dans la limite non relativiste, ce qui confirme une fois de plus, que l'équation qu'on vient d'établir est bien l'analogue non relativiste de l'équation de Duffin, Kemmer, Petiau à $s = 0$.

Chapitre 4

Formalisme Lagrangien

Ce formalisme n'est rien d'autre qu'une autre présentation élégante, parfaitement adaptée à la description des systèmes([27]) où les mouvements sont soumis à des contraintes

l'utilisation de techniques de perturbations explique son succès, elle est souvent d'un usage infiniment plus pratique que les formulations plus élémentaires.

4.1 Densité lagrangienne et équations de mouvement

Les théories quantiques des champs, utilisées pour décrire les interactions des particules élémentaires, peuvent être formulées à partir, d'un principe d'action, qui est une simple généralisation à la mécanique analytique classique, on peut tirer les équations dynamiques de l'action(Les équations d'Euler-Lagrange) comme point de départ du formalisme auquel on se limite dans cette section, mais il s'avère que l'utilisation de l'action simplifie la quantification de la théorie ([28]).

En mécanique classique, les équations de mouvement d'un système de particules, sont obtenues à partir de l'action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (4.1)$$

où L est la fonction de lagrange.

L'action S est une fonctionnelle de l'ensemble de coordonnées $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_{3N}(t)\}$

des N particules du système à 3 dimensions, et leurs vitesses $\dot{q}(t) = \{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{3N}(t)\}$ au temps t .

Le principe de moindre action postule, que les trajectoires physiques sont celles, pour lesquelles la fonctionnelle d'action S , possède un extremum, en générale un minimum, il en découle un ensemble d'équations différentielles (Les équations d'Euler-Lagrange), qui sont les équations du mouvement du système, elles déterminent son évolution temporelle, pour les obtenir, supposons que la fonctionnelle S , est stationnaire pour $q(t) = Q(t)$, et considérons des trajectoires différant peu de $Q(t)$ de la forme

$$q_\varepsilon(t) = Q(t) + \varepsilon \delta q(t), \quad (4.2)$$

la quantité ε est un paramètre, nous supposons que $\varepsilon \delta q(t)$ s'annule aux temps t_1 et t_2 , dans ce cas là

$$q_\varepsilon(t) = Q(t), \quad (4.3)$$

la valeur de l'action pour les trajectoires q_ε est une fonction du paramètre ε , et la stationnarité de l'action (4.3), peuvent s'exprimer comme suit

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} S[q_\varepsilon] \right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S[q_\varepsilon] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

En intégrant S par partie, avec $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, puisque $\delta q_i(t)$ est arbitraire pour $t_1 < t < t_2$, la condition de stationnarité implique les équations différentielles

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (4.5)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange du système décrit par l'action S , elles forment un système $3N$ équations différentielles du deuxième ordre au plus couplées et non linéaires.

L'extension de ce formalisme à la dynamique de champs, est immédiate. Considérons le cas le plus simple de champ classique, une fonction de l'espace-temps $\phi(x)$ à valeurs dans les nombre réels ou complexes.

Maintenant le système physique possède un nombre infini de degrés de libertés au lieu de $3N$ coordonnées $q_i(t)$, on considère à chaque temps t , les valeurs du champ en chaque point de l'espace, comme l'action est une fonction de Lagrange

$$S[\phi] = \int dt L, \quad (4.6)$$

il convient d'utiliser également une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, avec

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (4.7)$$

le volume d'intégration ne sera pas spécifié, il dependra du système physique considéré donc

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (4.8)$$

le principe de moindre action, stipule que les champs physique du système $\phi(x)$ correspondent aux extremum de l'action S .

Par analogie avec le cas discret étudié plus haut, on considère l'action $S[\phi_\varepsilon]$, avec $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon \phi$ où $\varepsilon \phi$ est un champ arbitraire, s'annulant aux bord du volume d'intégration. Puisque S est stationnaire en ϕ

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} S[\phi_\varepsilon] \right]_{\varepsilon=0} = 0. \quad (4.9)$$

Après intégration utilisant l'annulation de S aux bords du volume d'intégration, la dérivée sera

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\phi_\varepsilon] = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right] = 0, \quad (4.10)$$

comme le champ $\varepsilon \phi$ est quelconque, la condition de stationnarité conduit à l'équation

$$\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right] = 0. \quad (4.11)$$

où les champs physiques ϕ_μ , sont solutions.

Au fait on a une infinités d'équations d'Euler-Lagrange, qui sont vues comme des équations différentielles dans le temps, en chaque point spatial du volume du système physique considéré, elles déterminent la dynamique spatio-temporelle du champs $\phi(x)$, puisque leurs solutions sont précisément les champs physiques $\phi(x)$.

Lorsque la densité lagrangienne est une fonction, du champ et de ces dérivées premières uniquement, les équations d'Euler-Lagrange, sont au plus du 2^{ème} ordre, ceci est suffisant pour décrire les interactions du champ quantique quantifiés.

La généralisation au cas d'une action dépendant de plusieurs champs, notés collectivement

$$\phi^i(x) \quad , i = 1, \dots, M, \quad (4.12)$$

se fait encore une fois, à l'aide de la stationnarité de l'action par rapport aux champs $\phi^i(x)$, comme suit

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} S[\phi_\varepsilon^i] \right]_{\varepsilon=0} = 0, \quad (4.13)$$

où $\phi_\varepsilon^i(x) = \phi^i(x) + \varepsilon \delta\phi^i(x)$.

Cette équation est vraie pour les variations $\varepsilon \delta\phi^i(x)$, indépendantes et arbitraires de chaque champ, s'annulant au bord du volume d'intégration, on aura donc une équation d'Euler-Lagrange pour chaque champ $\phi_i(x)$ présent dans la densité lagrangienne

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) = 0 \quad , i = 1, \dots, M.$$

4.2 Formulation lagrangienne de Shrödinger

On assume que la densité lagrangienne de l'équation de Schrödinger est de la forme

$$\mathcal{L} = \frac{-1^2}{2m} (\nabla \psi^*) (\nabla \psi) - \frac{1}{2i} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi) - \psi^* V \psi \quad (4.14)$$

En utilisant les équations différentielles d'Euler-Lagrange, on montre que la variation du lagrangien, mène à l'équation de Schrödinger, ces équations ballaient les compo-

santes de l'espace et du temps c'est à dire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^i)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\sigma} = 0 \quad (4.15)$$

où la sommation se fait sur l'indice i telque $i = 1, 2, 3$, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \psi_\sigma)} \quad (4.16)$$

on fait une variation par rapport à ψ^* on aura

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma^*} = \frac{-1}{2i} \frac{\partial \psi}{\partial t} - V \psi \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\sigma^*} = \frac{1}{2i} \psi \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \psi_\sigma)} = \frac{-1}{2m} (\nabla_i \psi) \quad (4.19)$$

donc l'équation de mouvement pour ψ s'écrira comme suit

$$i\dot{\psi} + \frac{1^2}{2m} \nabla_i^2 \psi - V \psi = 0 \quad (4.20)$$

d'une manière analogue, on dérive l'équation du champ ψ^* en faisant la variation suivant ψ , on abouti à

$$-i\dot{\psi}^* + \frac{1}{2m} \nabla_i^2 \psi^* - V \psi^* = 0 \quad (4.21)$$

on peut réécrire les deux équations obtenues, sous la forme

$$i\dot{\psi} = \frac{-1}{2m} \nabla_i^2 \psi + V \psi \equiv H \psi \quad (4.22)$$

$$-i\dot{\psi}^* = \frac{-1}{2m} \nabla_i^2 \psi^* + V \psi^* \equiv H^+ \psi^* \quad (4.23)$$

avec H l'hamiltonien du système

$$H = \frac{-1}{2m} \Delta + V(x) \quad (4.24)$$

4.3 Champ de Klein-Gordon

Pour une particule chargée, on admet que la densité lagrangienne ([29]) s'écrit

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial \psi / \partial x^\mu, \partial \psi^* / \partial x^\nu) = \frac{1}{2m} (g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - m^2 \psi^* \psi) \quad (4.25)$$

l'équation donnant le champ ψ^* est obtenue, en dérivant \mathcal{L} par rapport à ψ

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x^\nu)} - \frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} + m^2 \psi^* \right) = 0 \quad (4.26)$$

or

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi^* + m^2 \psi^* = 0 \quad (4.27)$$

et quand on dérive par rapport à ψ^* on obtient l'équation pour le champ ψ

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi^* / \partial x^\nu)} - \frac{\partial}{\partial \psi^*} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \right) = 0 \quad (4.28)$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (4.29)$$

d'où la densité lagrangienne donnée en haut, mène à l'équation de Klein-Gordon pour le champ ψ comme pour le champ ψ^* .

4.4 Lagrangien de Feshbach-Villars

Dans le but de déterminer la densité lagrangienne, de l'équation de Klein-Gordon dans la représentation de Feshbach-Villars, on admet d'abord la densité lagrangienne donnée par [10]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \partial_t \psi - \frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi} (\sigma_3 + i\sigma_2) \nabla \psi - m\bar{\psi} \sigma_3 \psi \quad (4.30)$$

où le vecteur ψ possède deux composantes $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, et $\psi^+ = \begin{pmatrix} \phi^* & \chi^* \end{pmatrix}$.

et on a défini $\bar{\psi} \stackrel{Def}{=} \psi^+ \sigma_3$.

Pour prouver que cette densité lagrangienne est valable, on fait appel au principe variationnel de l'action S telle que

$$S = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (4.31)$$

en utilisant la méthode standard

$$\frac{\partial S}{\partial \psi_\alpha} = 0, \quad (4.32)$$

ce qui implique

$$\partial_v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_v \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = 0, \quad (4.33)$$

ou d'une manière plus explicite

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = 0, \quad (4.34)$$

ce qui nous donne

$$i\partial_t \psi_\alpha = \frac{-1}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla^2 \psi_\alpha + m\sigma_3 \psi_\alpha = 0 \quad , (\alpha = 1, 2). \quad (4.35)$$

d'une manière similaire, la variation de ψ , donne comme résultat l'équation de mouvement correspondante à $\bar{\psi}$.

$$\frac{\partial S}{\partial \psi_\alpha} = 0. \quad (4.36)$$

On aura

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \dot{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} = 0 \quad , (\alpha = 1, 2) \quad (4.37)$$

finalement l'équation pour le champ $\bar{\psi}$ aura la forme

$$-i\partial_t \bar{\psi}_\alpha = \frac{-1}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla^2 \bar{\psi}_\alpha + m\sigma_3 \bar{\psi}_\alpha = 0 \quad , (\alpha = 1, 2). \quad (4.38)$$

4.5 Champ de Dirac

On assume que la densité lagrangienne, de l'équation de Dirac possède la forme suivante

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (4.39)$$

avec $\bar{\psi} \stackrel{Def}{=} \psi^\dagger \gamma^0$ et $\gamma^i = \begin{cases} \gamma^0 = \beta \\ \gamma^i = \beta \alpha^i \end{cases}$, comme on l'a définie un peu plus haut.

On peut aussi écrire la densité lagrangienne (4.39) comme suit

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger i\partial_0 \psi + i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi - m\psi^\dagger \gamma^0 \psi, \quad (4.40)$$

ou encore

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_0 + i\alpha^i \partial_i - m\beta)\psi. \quad (4.41)$$

En introduisant les matrices α^i et β à travers les matrices γ^μ , la densité \mathcal{L} prend une forme simple, de laquelle on déduit immédiatement que c'est une bonne densité lagrangienne pour le champ de Dirac.

on varie \mathcal{L} par rapport à ψ^+ nous donne

$$i\partial_0\psi = (i\alpha^i\partial_i + m\beta)\psi \equiv H_D\psi. \quad (4.42)$$

De la même manière, en variant \mathcal{L} par rapport à ψ

$$i\partial_0\psi^+ = \psi^+(i\alpha^i\partial_i + m\beta) \equiv H_D^+\psi. \quad (4.43)$$

où H_D et H_D^+ , sont respectivement l'hamiltonien et l'adjoint hamiltonien de Dirac.

4.6 Champ Duffin-Kemmer-Petiau

Admettons que la densité lagrangienne, de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, est de la forme [10]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta_\mu\overleftrightarrow{\partial}^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (4.44)$$

Avec $\bar{\psi} = \psi^+\eta^0$, telle que $\eta^0 = 2\beta_0^2 - \mathbf{1}$

et $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ est un opérateur différentiel, qui agit comme suit

$$A\overleftrightarrow{\partial}^\mu B = A\overrightarrow{\partial}^\mu B - A\overleftarrow{\partial}^\mu B. \quad (4.45)$$

Vérifions, maintenant que la densité admise (4.44), redonne l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, introduite dans le chapitre (1).

La dérivation par rapport à $\bar{\psi}$ donne

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = \frac{i}{2}\beta_\mu\partial^\mu\psi - m\psi, \quad (4.46)$$

en dérivant par rapport à $\partial_\mu\psi$, on obtient

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = \frac{-i}{2}\beta_\mu\psi, \quad (4.47)$$

ainsi les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad (4.48)$$

s'écriront

$$(i\beta_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (4.49)$$

Qui est exactement l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, pour le champ ψ .

On peut aussi dériver l'équation pour le champ adjoint $\bar{\psi}$ en suivant la même procédure mais par rapport à ψ on obtient

$$-\bar{\psi}(m + i\beta_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu) = 0. \quad (4.50)$$

Qui est l'équation Duffin-Kemmer-Pétiau, pour le champ adjoint $\bar{\psi}$.

4.7 Formulation lagrangienne de l'analogie non relativiste de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

Comme pour toute équation de mouvement physique, existe un lagrangien, d'où l'on peut toujours la dériver, à l'aide des équations d'Euler-Lagrange [29], on se propose de formuler une densité lagrangienne, qui donnera comme équation de mouvement, notre équation établie dans le chapitre (2), qui est sensé être l'analogie non relativiste de l'équation DKP.

En suivant la méthode standard, nous posons \mathcal{L} , puis essayons de dériver notre équation en faisant la variation par rapport à ses champs, notre densité lagrangienne aura la forme

$$\mathcal{L} = \psi^+ (A\partial_t - i\mathbf{B}\nabla + C)\psi, \quad (4.51)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\rho}_T & 0 \end{pmatrix}, C = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{2}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mainteneant on fait varier par rapport ψ^+

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^+} = A \partial_t \psi - i \mathbf{B} \psi + C \psi, \quad (4.53)$$

et la variation par rapport à sa dérivée temporelle et spatiale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^+)} = -A \psi, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^+)} = i B_i \psi. \quad (4.55)$$

Ainsi les équations d'Euler-Lagrange s'écriront comme suit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^+} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^+)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^+)} = 0, \quad (4.56)$$

finalement on aura

$$(i A \partial_t - i \mathbf{B} \nabla + C) \psi = 0. \quad (4.57)$$

Qui n'est rien d'autre que l'équation analogue non relativiste à l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau.

Conclusion

Après cette tournée, riche en équations et légère par sa présentation, on sort notre album pour rappeler notre passage et pour se faire des conclusions sur les différentes stations et carrefours déjà empruntés. Commençons par le premier chapitre qui était une station importante où on a apprivoisé les équations d'onde qui portaient en elles ce principe de conservation de l'énergie de manière fidèle et naturelle. L'équation de Schrödinger qui a servi de point de départ pour l'introduction des équations d'onde relativistes élaborées lors d'une quête de celle qui décrira l'électron. L'équation de Klein-Gordon est un prélude en mécanique quantique relativiste, puis Dirac enchaîna les notes sur le solfège pour donner naissance à son éminente équation qui depuis son élaboration on arrête pas d'admirer. D'autres physiciens ont joué sur ces notes pour décrire les particules de spin entier, l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau était un autre succès avec laquelle on conclut ce premier chapitre qui au fait nous a aidé à mieux se familiariser avec l'aspect ondulatoire de la matière, ce qui motiva le reste de la balade.

En poursuivant notre traversée dans un deuxième chapitre, et en s'appuyant sur la linéarité des équations en E et p , on exhibe le chemin suivi par J. M. Lévy-Leblond pour décrire l'électron mais sur des terres non relativistes, avec la même démarche et en généralisant, nous avons montré qu'une autre solution était accessible, on s'attarde un peu pour l'apprécier et l'examiner, puis on constata vite qu'elle correspond à l'analogue de DKP, tant que ces matrices rimaient avec les relations de commutations de cette dernière.

Le troisième chapitre, était un carrefour d'applications, autour duquel toutes les

équations présentées en haut étaient mises à l'examen, et de manière rigoureuse redonnait la formule de l'oscillateur harmonique standard, qu'on a attaqué par le triomphe des mexicains M. Moshinsky et A. Szczepaniak avec leur oscillateur qui a éclairé le chemin à Y. Nedjadi et R. C. Barret dans la sutructuration de l'oscillateur correspondant à l'équation DKP, et par tradition nous nous sommes retournés au cadre non relativiste avec une substitution largement inspirée des autres modèles, que nous injectons à l'équation de J.M Lévy-Leblond pour revoir l'expression de l'oscillateur de Dirac à la limite non relativiste, résultat qui nous a incité de tenter une substitution du même genre à notre équation, où nous avons réussi avec tact et précision à construire l'analogue de l'oscillateur DKP à de faibles vitesses.

Les derniers pas de notre travail ont été fait sur le formalisme lagrangien, où on a pris une pause pour construire avec rigueur un lagrangien dont la dérivée à l'aide des équations d'Euler-Lagrange libère de façon exacte notre équation établie plus haut, le passage sur les terres lagrangienne a rendu l'élaboration de notre équation plus rationnelle ce qui ouvre le champs à plusieurs éventualités.

En rangeant l'album, on se rend compte que le séjour aurait pu être prolongé, pour visiter les théorie des champs en empruntant les intégrales du chemins, cette croisière est une perspective qu'on se propose au prochain voyage.

Bibliographie

- [1] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A 173 (1939) 91.
- [2] R.Y. Duč n, Phys. Rev. 54 (1938) 1114.
- [3] Petiau, Acad. R. Belg. Mem. Collect. 16 (1936).
- [4] H. Feshbach, F. Villars, Rev. Mod. Phys. 30, 24 (1958).
- [5] Commun. math. Phys. 6, 286-311 (1967).
- [6] M Moshinsky and A Szczepaniak 1989 J. Phys. A : Math. Gen. 22 L817
- [7] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 19 (1993) 87.
J. Math. Phys. 35 (1994) 4517.
- [8] M. A. Tonnelat, Louis de Broglie et la mécanique ondulatoire, Seghers, 1966,
200p.
- [9] A. Messiah, Quantum Mechanics, two volumes in one; paperback ed. (Dover, Mineola, New York, 1999).
- [10] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations, 3rd ed. (Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000).
- [11] J. Phys. A : Math. Gen. 22(1989)L817-L819.
- [12] Y.Nedjadi and R.C.Barret,J.Phys.A 31,6717(1998).
- [13] Relativistic quantum mechanics - James D. Bjorken, SidneyDavid Drell.
- [14] David J. Griffiths (2004). Introduction to Quantum Mechanics (2nd ed.). Benjamin Cummings.

-
- [15] David Halliday (2007). *Fundamentals of Physics* (8th ed.). Wiley.
- [16] Schrödinger, Erwin (December 1926). "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules".
Phys. Rev. 28 (6) : 1049–1070.
- [17] Louis De Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. *Physics [physics]. Migration - université en cours d'affectation*, 1924. French.
- [18] *Ondes et mouvements*, Gauthier-Villars, 1926 .
- [19] *Rapport au 5e Conseil de physique Solvay*, Bruxelles, 1927.
- [20] *La Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, 1928 .
- [21] *Matière et lumière*, Paris : Albin Michel, 1937 .
- [22] *La Physique nouvelle et les quanta*, Flammarion, 1937.
- [23] *Optique électronique et corpusculaire*, Herman, 1950.
- [24] D. Pauli and V. Weisskopf, *Helv Phys Acta* 7, 709 (1934).
- [25] P.A.M. Dirac (1981). *Principles of Quantum Mechanics* (4th ed.). Clarendon Press. ISBN 9-780198-520115.
- [26] P.A.M. Dirac (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. Courier Dover Publications. ISBN 0-48641-7131.
- [27] Ryder L.H. *Quantum Field Theory* 1996.
- [28] Steven Weinberg *Quantum theory of fields. Foundations Volume 1* 2005.
- [29] Edgard Elbaz *Quantum_ the quantum theory of particles, fields, and cosmology* 1997.
- [30] Kasri. Yazid *Traitement exact de certains problèmes de mécanique quantique et obtention de certaines équations relativistes* 2010.

Résumé

Lors de la fusion de la relativité restreinte et de la mécanique quantique en 1926, les physiciens se sont intéressés à la description relativiste des particules, ce qui donna naissance à l'équation de Klein-Gordon ($s=0$), de Dirac ($s= 1/2$), et celle de Duffin-Kemmer-Petiau ($s=0$ et $s=1$).

Soixante ans après, le physicien J. M. Lévy-Leblond, emprunta la démarche inverse pour construire une formulation non relativiste aux particules ($s=1/2$).

Ce travail montre, que tout en suivant la même démarche que cette dernière, on arrive à dériver une nouvelle solution pour les particules ($s=0$) ; équivalente à l'équation de Schrödinger mais une représentation matricielle.

Abstract

During the merger of relativity and quantum mechanics in 1926, physicists were interested to give a relativistic description of particles, which gave birth to the Klein- Gordon equation ($s = 0$), Dirac ($s = 1/2$), and the Duffin - Kemmer - Petiau ($s = 0$ and $s = 1$).

Sixty years later, the physicist JM Lévy- Leblond, borrowed the opposite approach to build a non-relativistic particles in the formulation ($s = 1/2$).

This work shows that while following the same approach as the last one, we get to derive a new solution for particles ($s = 0$); equivalent to the Schrödinger equation but with matrix representation.

