

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A. Mira – BEJAIA



Faculté de Technologie  
Département de Génie Électrique

## Mémoire

Présente en vue de l'obtention du diplôme de Master en Electrotechnique

### Option

Electromécanique

### Thème

*Influence de la charge mécanique sur les amortisseurs en élastomère*

Présenté par :

**M<sup>r</sup> : Bellahsene Yacine**

**M<sup>r</sup> : Haddouche Madjid**

Proposé et dirigé par :

**M<sup>r</sup> : Amri Athmane**

**Promotion 2014**

# REMERCIEMENTS

*Au terme de ce travail, nous tenons à remercier Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience pour achever ce travail.*

*Nous adressons toute notre gratitude au Président du jury et aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner ce modeste travail.*

*Nous avons l'honneur et le plaisir de présenter notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à M Amri, pour son précieux aide, ses orientations et sa gentillesse afin de permettre le bon déroulement de notre travail.*

*Nous tenons à remercier l'ensemble du personnel de l'atelier mécanique Hall Technologie de l'université Abderrahmane Mira de Béjaïa.*

*Nos remercions également tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à l'achèvement de notre Travail.*

*Enfin, nos remerciements sont adressés plus particulièrement à nos familles et nos amis(es) qui ont su nous soutenir, nous encourager, nous aider et nous supporter tout au long des années.*

# DEDICACES

*Ce projet s'achève avec l'aide de Dieu, le tout puissant ;*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents, qui se sont sacrifié pour m'offrir un climat idéal de travail, qui n'ont jamais cessé de me témoigner leur affection et de m'apporter leurs soutient depuis toujours. Notre refuge qui me rattache lors des moments difficile, vous m'avez appris que s'instruire est l'héritage le plus important dans la vie et j'espère vous faire honneur et que vous serez toujours fier de moi*

*Et à tous mes amis de prés ou de loin*

*A tous mes collègues de la promotion 2013/2014*

*Yacine*

# DEDICACES

*Ce projet s'achève avec l'aide de Dieu, le tout puissant ;*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents, qui se sont sacrifié pour m'offrir un climat idéal de travail, qui n'ont jamais cessé de me témoigner leur affection et de m'apporter leurs soutient depuis toujours. Notre refuge qui me rattache lors des moments difficile, vous m'avez appris que s'instruire est l'héritage le plus important dans la vie et j'espère vous faire honneur et que vous serez toujours fier de moi*

*Et à tous mes amis de prés ou de loin*

*A tous mes collègues de la promotion 2013/2014*

*Madjid*

# Sommaire

---

<b>Introduction général</b> .....	1
<b>Chapitre I : Généralité sur les amortisseurs</b>	
<b>I.1.Introduction</b> .....	2
<b>I.2. définition d'un amortisseur</b> .....	2
<b>I.3. quelques types d'amortisseurs</b> .....	2
I.3.1. Les amortisseurs à film fluide .....	2
I.3.2. La suspension magnéto-rhéologique .....	3
I.3.3. Les suspensions monotube .....	4
I.3.4. Les amortisseurs bitubes .....	5
I.3.5. le système électronique d'amortissement continuellement variable .....	5
<b>I.4. les suspensions élastique</b> .....	6
I.4.1. Bref historique sur l'origine des élastomères .....	6
I.4.2. Les caractéristiques d'une suspension élastique .....	7
I.4.2.1. Caractéristique élastique .....	7
I.4.2.2. Caractéristique d'amortissement .....	7
I.4.3. Propriété principales des amortisseurs en élastomère .....	7
I.4.4. fonctionnement d'une suspension élastique .....	8
I.4.4.1. fonction statique .....	8
I.4.4.2. fonction dynamique .....	8
I.4.5. les différents types d'amortisseurs en élastomère .....	8
I.4.5.1. Amortisseur pneumatique .....	8
I.4.5.2. Support moteur .....	9
I.4.5.3. Support SC .....	9
I.4.5.4. Les suspensions de machine .....	10
<b>I.5. Conclusion</b> .....	11
<b>Chapitre II : Les vibrations</b>	
<b>II.1. Introduction</b> .....	12

# Sommaire

---

<b>II.2.Définition d'une vibration</b> .....	12
II.2.1. Les caractéristique de la vibration .....	12
II.2.1.1. La fréquence .....	12
II.2.1.2. Amplitude .....	12
II.2.2. Les harmoniques .....	12
II.2.3. La nature d'une vibration .....	13
II.2.4. Les type des vibrations .....	13
II.2.4.1. Les vibrations périodiques .....	14
II.2.4.2. Les vibrations apériodique .....	14
II.2.5. Quelque notion fondamentale .....	15
<b>II.3.Principe d'analyse</b> ... ..	17
II.3.1.La Résolution par les méthodes des énergies .....	17
II.3.2.La Résolution par la méthode de Lagrange .....	17
II.3.3.La résolution par les équations fondamentales de la dynamique .....	17
<b>II.4.Etude des systèmes mécaniques en vibration</b> .....	18
II.4.1. Oscillation libre d'un système non amortie a un degré de liberté .....	18
II.4.2. .Oscillation Forcé d'un système non amortie a un degré de liberté .....	20
II.4.3.Oscillation amortie d'un système a un degré de liberté .....	22
II.4.3.1. 1 <sup>er</sup> cas : Mouvement apériodique : $\varepsilon > w_0$ (amortissement fort) .....	24
II.4.3.2. 2 <sup>eme</sup> cas : Mouvement critique (amortissement critique) .....	24
II.4.3.3. 3 <sup>eme</sup> cas : Mouvement oscillatoire amortie : $\varepsilon < w_0$ (amortissement faible) ..	25
II.4.4. oscillation amortie forcée d'un système à un degré de liberté .....	27
II.4.4.1 Recherche le régime permanente .....	28
II.4.4.2 Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation cas de résonanse .....	29
II.4.4.3.Etude du déphasage en fonction de la pulsation .....	31
<b>II.5.Conclusion</b> .....	32

# Sommaire

---

## Chapitre III : Modélisation des amortisseurs

<b>III.1 Introduction</b> .....	33
<b>III.2. Les différentes déformations soumises aux matériaux viscoélastiques</b> .....	33
III.2.1 La contrainte .....	33
III.2.2 La traction .....	33
III.2.3 La copression .....	33
III.2.4 Le cisaillement .....	34
III.2.5 La torsion .....	34
III.2.6 La flexion .....	35
<b>III.3 Le Module de Young</b> .....	35
<b>III.4 Le coefficient de poisson</b> .....	35
<b>III.5 Viscoélasticité linéaire</b> .....	36
<b>III.6. Modélisation des amortisseurs</b> .....	40
<b>III.6.1 Modèle de Kelvin-Voigt</b> .....	41
<b>III.6.2 Modèle de Maxwell</b> .....	44
<b>III.6.3 Modèle de Zener</b> .....	48
<b>III.6.4 Modèle de maxwell généralisé</b> .....	50
<b>III.5. Conclusion</b> .....	50

## Chapitre IV : Partie expérimentale

<b>IV.1. Introduction</b> .....	51
<b>IV.2. Matériels utilisé</b> .....	51
<b>IV.3. Manipulation</b> .....	51
IV.3.1. Première partie .....	51
IV.3.1.1. Premier essai .....	51
IV.3.1.2. Deuxième essai .....	51
IV.3.2. Deuxième partie .....	51
IV.3.2.1. Premier essai .....	51

# Sommaire

---

IV.3.2.2. Deuxième essai.....	52
IV.3.2.3. Troisième essai.....	52
IV.3.2.4. Quatrième essai.....	52
<b>IV.4. La méthode d'analyse.....</b>	<b>52</b>
<b>IV.5. Les résultats obtenus.....</b>	<b>53</b>
IV.5.1. Première partie (première et deuxième essai).....	53
IV.5.2. Deuxième partie.....	55
<b>IV.5.2.1. Premier et deuxième essai.....</b>	<b>55</b>
<b>IV.5.2.2. troisième et quatrième essai.....</b>	<b>57</b>
<b>IV.6. Etudes et analyse des graphes.....</b>	<b>59</b>
<b>IV.6.1. Première partie.....</b>	<b>59</b>
<b>IV.6.2. Deuxième partie.....</b>	<b>60</b>
<b>IV.7. Comparaison entre les essai.....</b>	<b>60</b>
<b>IV.8. Conclusion.....</b>	<b>64</b>

# Liste des figures

---

## Chapitre I

**Figure (I.1) :** Amortisseur à film fluide

**Figure (I.2) :** Amortisseur magnéto-rhéologique

**Figure (I.3) :** Amortisseur monotube

**Figure (I.4) :** Amortisseur bitube

**Figure (I.5) :** Amortisseur CDC

**Figure (I.6) :** Amortisseur pneumatique

**Figure (I.7) :** Support moteur

**Figure (I.8) :** Support SC

**Figure (I.9) :** Les suspensions de machine MINIX

## Chapitre II

**Figure (II.1) :** Représentation des harmoniques

**Figure (II.2) :** vibration transitoire

**Figure(II.3) :** système à un degré de liberté

**Figure(II.4) :** système à plusieurs degrés de liberté

**Figure (II.5):** ressort a spiral

**Figure (II.6) :** Oscillation libre d'un système non amortie

**Figure(II.7) :** système masse ressort avec une force excitatrice

**Figure(II.8) :** Oscillation Forcé d'un système non amortie

**Figure(II.9)** système masse-ressort avec un amortisseur

**Figure (II.10) :** le régime apériodique

**Figure(II.11)** Oscillation amortie (régime pseudo périodique)

**Figure(II.12) :** Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation

**Figure(II.13) :** Variation de déphasage  $\varphi$  en fonction de  $w$

## Chapitre III

**Figure(III.1) :** représentation graphique de module de Young

**Figure(III.2) :** effet de contrainte

## Liste des figures

---

**Figure(III.3)** : un matériau avant et après la déformation

**Figure (III.4)** : contrainte et déformation représenté sur le plant  $(\sigma, \varepsilon)$  cycle d'hystérésis

**Figure(III.5)** : représentation schématique de module dynamique dans le plan complexe

**Figure(III.6)** :courbe caractéristique de fluage

**Figure(III.7)** : courbe caractéristique de relaxation

**Figure(III.8)**:Modèle de Kelvin-Voigt

**Figure(III.9)** :l'évolution de la déformation  $\varepsilon = f(t)$

**Figure(III.10)** : Modèle de maxwell

**Figure(III.11)** :l'évolution de la contrainte  $\sigma = f(t)$

**Figure(III.12)** : Modèle de Zener

**Figure(III.13)** : Le modèle de Maxwell généralisé

# Liste des symboles

---

## Liste des symboles pour le chapitre II

<b><i>A</i></b>	L'amplitude
<b><i>c</i></b>	La constante de tension
<b><i>E<sub>c</sub></i></b>	L'énergie cinétique [N.m]
<b><i>E<sub>m</sub></i></b>	Énergie mécanique
<b><i>F</i></b>	la fréquence
<b><i>f</i></b>	La force d'excitation
<b><i>g</i></b>	Accélération gravitationnelle [ $m/s^2$ ]
<b><i>H</i></b>	La hauteur [m]
<b><i>I<sub>Δ</sub></i></b>	Le moment d'inertie
<b><i>K</i></b>	La constante de raideur [N/M]
<b><i>l</i></b>	La longueur [m]
<b><i>Δl</i></b>	Le degré d'allongement [m]
<b><i>m</i></b>	La masse [kg]
<b><i>U</i></b>	Énergie potentielle [N.m]
<b><i>r</i></b>	Les racines de l'équation
<b><i>t</i></b>	Le temps
<b><i>T<sub>0</sub></i></b>	La pulsation naturelle
<b><i>T</i></b>	Le pseudo périodique
<b><i>V(t)</i></b>	La vitesse instantanée
<b><i>w</i></b>	La pulsation de la force d'excitation
<b><i>ω</i></b>	La vitesse angulaire
<b><i>w<sub>0</sub></i></b>	La pulsation propre du système
<b><i>w<sub>R</sub></i></b>	La pulsation de résonance
<b><i>x(t)</i></b>	La position instantanée
<b><i>ẋ</i></b>	La première dérivée de la distance instantanée
<b><i>ẍ</i></b>	La seconde dérivée de la distance instantanée
<b><i>γ(t)</i></b>	L'accélération instantanée
<b><i>φ</i></b>	Le déphasage
<b><i>θ</i></b>	L'allongement angulaire [degré]
<b><i>δ</i></b>	Le décrétement logarithmique
<b><i>Re</i></b>	La partie réelle d'un nombre complexe
<b><i>α</i></b>	Le coefficient de frottement
<b><i>ε</i></b>	Le Coefficient d'amortissement dans le chapitre [II]
<b><i>Δ</i></b>	Décrétement réduit
<b><i>Ω</i></b>	La pulsation

# Liste des symboles

---

## La table du symbole pour le chapitre III

$p$	Il représente les forces de contact
$S$	Il représente une section
$\tau$	Il Représente la contrainte de cisaillement.
$G$	Il Représente Module de cisaillement.
$\sigma$	Il Représente la contrainte.
$\Delta E$	Il Représente Énergie dissipée.
$\eta$	il représente la viscosité.
$\Delta x$	C'est l'allongement
$E$	Il représente le module d'élasticité
$\gamma$	C'est la déformation en cas de cisaillement
$\dot{\epsilon}$	Il représente la vitesse de déformation
$a$	Il Représente la constante de temps
$s_g$	La solution générale
$s_p$	La solution particulière
$s_f$	La solution forcée

## Introduction générale

Les moyens créés par l'être humain facilite sa vie dans beaucoup de domaines, on prend par exemple le domaine de l'industrie qui est très large et très compliqué, et dans nos jour il y a le développement et l'améliorations mais les problèmes existent toujours et face à ceux-ci les gens cherchent à les éliminer ou les réduire au minimum de la manière la plus efficace et la moins couteuse, parmi ces problèmes on trouve les problèmes des vibrations et des bruits ceux-ci peuvent être gênant pour les machines, mais aussi pour son environnement et même pour la vie de l'être humain

Un des exemples les plus célèbres illustrant ces propos est le pont de Tacoma (Etats-Unis, 1940) qui fut détruit suite à une excitation par le vent, un autre exemple plus léger de conséquence, nous concerne dans la vie de tous les jours à bord d'un moyen de transport, notre corps est mécaniquement couplé au système qui nous transporte, ainsi si celui-ci est soumis à des excitations mécaniques de fréquences particulières, nous sommes victimes du mal des transports. Dans son article, **Moreau** nous indique deux plages de sensibilité du corps humain, une première plage de sensibilité entre 4 et 8 Hz selon la direction verticale ; et une seconde plage de sensibilité entre 0 et 0,8 Hz où un sujet en position assise et excité par sa base sera victime du mal des transports.

Dès lors la dynamique et l'étude des vibrations ont pris une place considérable dans la conception des structures et des systèmes mécaniques afin de garantir leur bon fonctionnement pendant une longue durée de vie et d'assurer le confort des passagers. Connaissant mieux les phénomènes vibratoires et leur impact sur la pérennité des systèmes, des méthodes permettant de lutter contre ceux-ci se sont alors développées.

Un système soumis à une excitation extérieure se met à vibrer à une certaine fréquence, ainsi si la fréquence de vibration correspond à la fréquence propre du système, alors celui-ci entre en résonance, l'amplitude des vibrations augmente, l'effort résultant augmente et peut mener à la destruction du système.

De manière intuitive si nous voulons éviter la destruction ou la détérioration du système, nous devons éviter de se trouver à la fréquence propre et minimiser l'amplitude des vibrations du système pour ce faire il faut faire recours à des méthodes antivibratoire qui nous permettent d'isoler notre système ou bien de diminuer les amplitudes de ces vibrations. Parmi ces méthodes on cite la méthode de suspension et dans notre modeste travail on va voir l'influence de la charge sur les amortisseurs en élastomère et notre plan est comme ceci : le premier chapitre on va parler sur des généralités sur les amortisseurs, le deuxième chapitre sur l'étude théorique des vibrations, troisième chapitre sur la modélisation des amortisseurs et enfin le dernier chapitre si la partie expérimentale.

*Chapitre I*  
*Généralité sur les amortisseurs*

## I.1. Introduction

L'étude des vibrations induites par des sollicitations mécaniques externes ou internes et la conception des systèmes antivibratoires concernent beaucoup de domaines, bien qu'il y ait une grande diversité en terme d'applications, l'ensemble des méthodes antivibratoires ont pour principales raisons d'être l'augmentation de la durée de vie des machines et de leurs performances.

Différents phénomènes entrent alors en jeu ; soit la fatigue mécanique des éléments composant le système excité soit le phénomène de résonance qui engendre une instabilité du système, dans tous les cas cela génère des conséquences plus ou moins importantes et peut mener jusqu'à la destruction prématurée du système.

De manière intuitive si nous voulons éviter la destruction ou la détérioration du système, nous devons éviter de se trouver à la fréquence propre et minimiser l'amplitude des vibrations du système, pour ce faire nous avons recours à des méthodes antivibratoires et parmi elles la méthode des suspensions.

## I.2. Définition d'un amortisseur

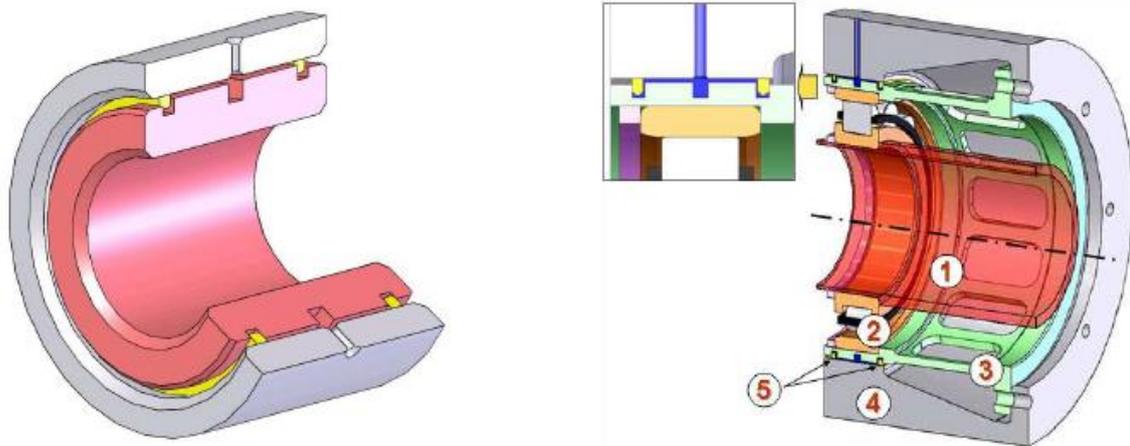
Un **amortisseur** est un système destiné à limiter, voire supprimer les oscillations d'un objet ou à l'isoler de vibrations par dissipation d'énergie au cours d'oscillations. L'amortisseur dissipe une partie de l'énergie cinétique, le plus souvent en chaleur, de nombreux principes physiques peuvent être utilisés : pertes de charge d'un fluide, frottement, comportement hystérétique, etc.

## I.3. Quelques types d'amortisseurs

### I.3.1. Les amortisseurs à film fluide [1]

Les amortisseurs à film fluide ("squeeze film dampers" ou SFD) sont connus pour leur capacité de limiter la réponse dynamique des rotors guidés par des roulements [1]. Pour remédier à ces problèmes, l'amortisseur à film écrasé, appelé également film fluide amortisseur, traduction du terme anglais *squeeze film damper* (SqF), constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces trente dernières années, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité d'amortissement. Il consiste en une lame fluide interposé entre des paliers de la machine et le bâti, comme illustre dans la figure (I.1). Les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du fluide, généralement une huile, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor, d'améliorer la stabilité du système et de réduire la transmissibilité.

La structure du l'amortisseur a film fluide ressemble à celle des paliers hydrodynamiques, la différence étant que ceux-ci assurent la portance du rotor outre la fonction d'amortissement.



Amortisseur à film fluide (1 rotor, 2 roulement, 3 cage d'écureuil, 4 stator, 5 segments)

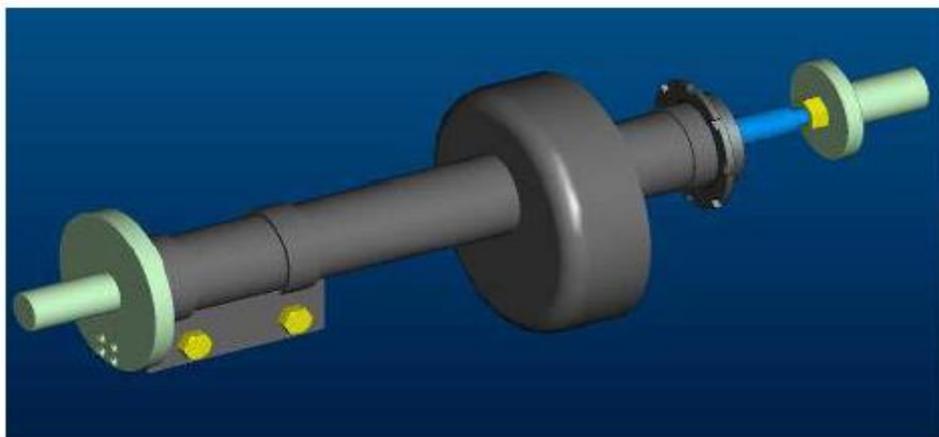
**Figure (I.1)**

### I.3.2. La suspension magnéto-rhéologique [2]

Le rôle d'une suspension intelligente, est d'ajuster l'amortissement en un temps très court. Ceci est rendu possible grâce à l'utilisation des fluides magnéto-rhéologiques qui contiennent des particules magnétiques, dont la taille est voisine de 1  $\mu\text{m}$ , en suspension dans un fluide. Lorsque ces particules sont soumises à un champ magnétique, le liquide devient presque instantanément (10 ms) plus visqueux, ce qui rend l'amortisseur plus ferme. En situation réelle, la tenue de route et la maniabilité sont particulières.

L'inclinaison de la carrosserie en virage peut être réduite et les ajustements constants de la suspension magnétique optimisent le confort et le contrôle, même en conduite sportive sur les revêtements routiers détériorés. Les lois d'amortissement sont simplement fonction de l'intensité électrique appliquée au fluide magnéto-rhéologique ou MR.

L'effet MR consiste donc en une augmentation brusque des propriétés mécaniques (viscosité, plasticité, élasticité) du MR sous l'effet du champ magnétique.



**Figure (I.2) : Amortisseur magnéto-rhéologique**

### I.3.3. Les suspensions monotube

Dans le cas des amortisseurs a gaz de construction monotube, le cylindre de travail est rempli d'huile et de gaz, qui sont exposés a une pression d'environ 25 a 30 bars. L'huile et le gaz sont hermétiquement séparés l'un de l'autre par le piston de séparation mobile. Les soupapes d'amortissement pour le palier de détente et de compression sont agencés sur le piston. les forces d'amortissement pour les paliers de détente et de compression sont réglées indépendamment l'une de l'autre par des rondelles élastiques des orifices d'étranglement, la tige de piston, le guidage et le joint sont des composantes d'une extrême précision qui assurent l'étanchéité absolue du cylindre de travail en présence d'une pression d'huile élevée, que le tirage du piston soit immobile ou mobile, grâce au processus de superfinition de traitement de la surface. La tige de piston est l'une des pièces de véhicule qui a fait l'objet de l'usinage le plus sophistiqué.

**Fonctionnement** : Les soupapes d'amortissement qui agissent dans le sens de la compression et de la détente réagissent en fonction de la vitesse à laquelle l'amortisseur est respectivement comprimé ou détendu. Plus la vitesse augmente, plus la force d'amortissement augmente elle aussi. Le volume de l'huile compense le volume de gaz déplacé par la tige de piston qui s'élève et s'abaisse alternativement. Selon le cas, le piston de séparation se déplace alors vers le bas ou vers le haut.

Le niveau de pression élevé de 25 à 30 bars est nécessaire pour soutenir les forces d'amortissement dans le sens de la compression. La haute pression a un effet avantageux grâce à la réaction exacte des soupapes, même en cas de déplacement extrêmement réduit, une bonne isolation phonique, car toute cavitation est exclue, même si le piston se déplace extrêmement vite.

Une partie de l'énergie d'oscillation est transformée en chaleur dans l'huile. Selon les sollicitations survenant lors de la conduite, l'amortisseur s'échauffe plus ou moins.

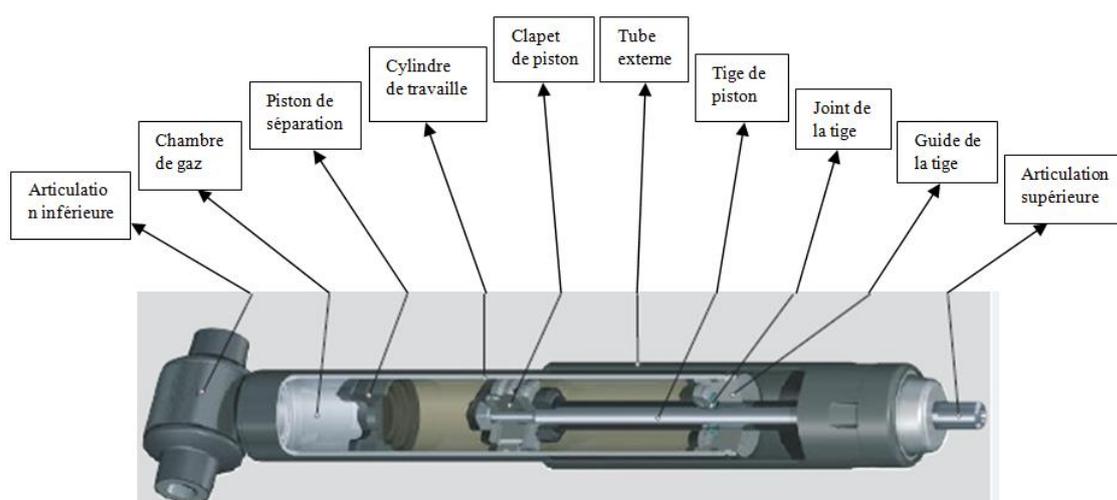
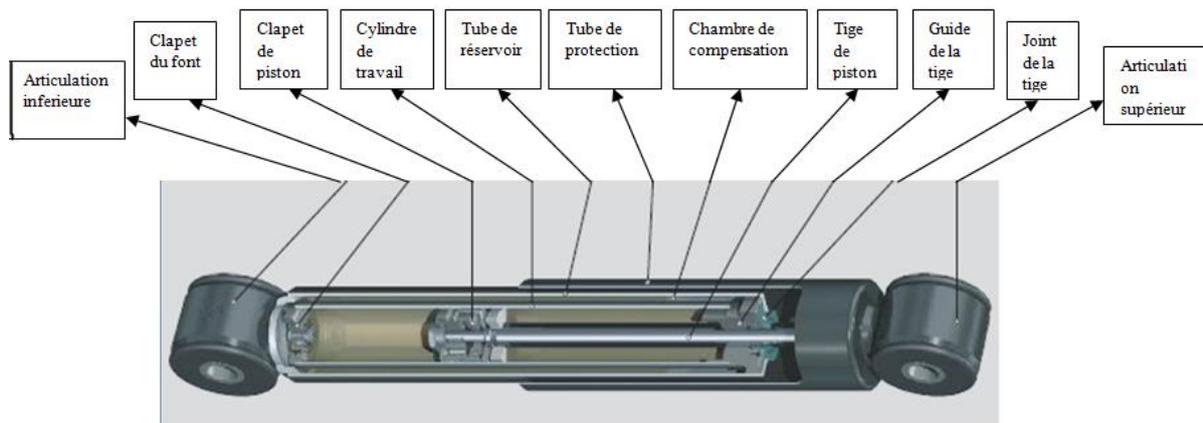


Figure (I.3) : Amortisseur monotube

### I.3.4. Les amortisseurs bitubes

Les amortisseurs bitubes comportent deux compartiments remplis d'huile : la chambre de travail, dans laquelle se déplacent le piston et sa tige, et la chambre de compensation. La chambre de compensation est agencée entre le cylindre de travail et le tube de réservoir. Il est rempli aux 2/3 d'huile et à 1/3 d'air ou de gaz. De ce fait, par rapport aux amortisseurs à gaz de construction monotube, les amortisseurs bitubes offrent l'avantage d'être plus courts. Les amortisseurs bitubes peuvent également être conçus comme des amortisseurs à gaz, la pression intérieure peut alors être de 6 à 8 bars. Les avantages sont alors comparables à ceux d'un amortisseur bitube. Les clapets d'amortissement, clapet de fond et clapet de piston consistent en un système de petites rondelles élastiques et de corps de clapet avec des orifices d'étranglement. Comme dans le cas de l'amortisseur monotube, la tige de piston, le guide et le joint sont des composants d'une extrême précision.

**Fonctionnement :** les soupapes d'amortissement conçues de sorte que la force d'amortissement soit modulée automatiquement en fonction de la vitesse du piston. Cela veut dire que lorsque le piston se déplace rapidement, la force d'amortissement générée augmente.



**Figure(I.4) : Amortisseur bitube**

### **I.3.5. Le système électronique d'amortissement continuellement variable :**

Les systèmes d'amortissement variable permettent de mieux contrôler le véhicule tout en autorisant une conduite dynamique, sportive, confortable et plus souple, de concert avec une sécurité sans le moindre compromis.

**L'amortisseur CDC :** Le **Continuous Damping Control** possède une **soupape d'amortissement proportionnel** à commande électronique, selon la position de la soupape, l'orifice de passage de l'huile s'élargit (assouplissement) ou se rétrécit (durcissement).

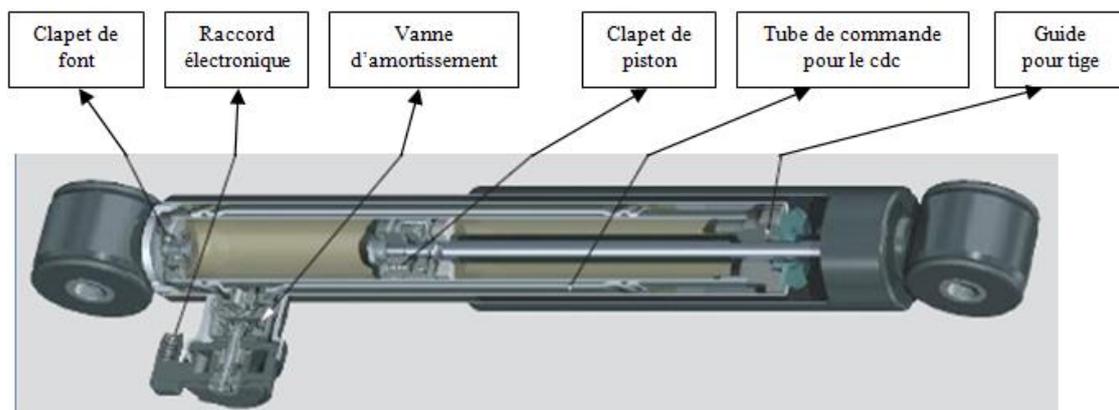
Des capteurs surveillent tous les facteurs d'influence comme l'état du revêtement, le chargement, les mouvements du véhicule lors des accélérations ou du freinage, lors du franchissement de virages et selon les actions du conducteur.

Les signaux émis par les capteurs sont traités dans un boîtier électronique, Toutes les deux millisecondes, il calcule les forces d'amortissement nécessaires et transmet les données à la soupape d'amortissement proportionnel. C'est cette soupape qui se charge alors de la modulation automatique en continu des forces d'amortissement en fonction de la situation de conduite respective et de l'état du revêtement. Dans les situations de conduite difficile, l'amortissement se durcit automatiquement.

Grâce à cet amortissement optimisé, le conducteur bénéficie d'un soutien actif tant en terme de sécurité que de conduite.

**Avantage :**

- Sécurité accrue par l'optimisation de l'amortissement.
- Réduction des mouvements de tangage et de roulis ainsi que des oscillations.
- Plus courtes distances de freinage grâce à une meilleure adhérence.
- Réactions plus rapides de la direction.
- Meilleur contrôle en cas de changement de voie.



**Figure (I.5) : Amortisseur CDC**

## I.4. Les suspensions élastiques

### I.4.1. Bref historique sur l'origine des élastomères

La quasi-totalité du caoutchouc naturel provient des latex sécrétés par l'hévéa. En présence d'air ce latex sèche et devient caoutchouc. Grossièrement, le latex ne contient qu'un tiers de caoutchouc et le reste est essentiellement de l'eau. En fait les propriétés physiques des élastomères sont très semblables car il est plastique mais ne peut reprendre sa forme initiale. C'est dans les années 1839 que les frères Charles et Nelson Goodyear inventent la vulcanisation avec le soufre, qui permet au caoutchouc à température ambiante d'être étiré et de revenir à l'état initial sans déformation permanente. Goodyear appela son nouveau matériau du caoutchouc vulcanisé en 1909. Les élastomères artificiels font leurs premières

apparitions et sont synthétisés à partir de l'isoprène qui est le principal constituant du caoutchouc. De nos jours les élastomères représentent un grand nombre d'applications industrielles (propriétés en isolation vibratoire, en acoustique en étanchéité, en électricité, en thermique).

Les suspensions élastiques d'une machine consistent à intercaler des supports élastiques entre la machine et ses assises (plancher ; massifs ; châssis). Les types de supports, leur nombre, leur répartition, leur disposition et leurs caractéristiques individuelles seront fonction des caractéristiques de l'ensemble à donner à la suspension pour obtenir les résultats recherchés.

Les problèmes qui se posent plus fréquemment sont des problèmes de vibration, ils conditionnent au premier chef les caractéristiques des suspensions, c'est pourquoi il est nécessaire au préalable de s'entendre sur la terminologie employée et de rappeler les définitions et les principes les plus utilisés.

## **I.4.2. Les caractéristiques d'un support élastique en élastomère**

**I.4.2.1. Caractéristique élastique** : ce sont les paramètres qui définissent les possibilités de déformation du support dans les différentes directions.

**I.4.2.2 Caractéristique d'amortissement** : le paramètre intéressant à connaître est le taux 'd'amortissements caractéristique' de l'élastomère utilisé, notion qui sera définie pour les suspensions. Le taux d'amortissement caractéristique d'un support étant le même que celui de la suspension.

## **I.4.3. Propriétés principales des amortisseurs en élastomère**

La plupart des plots standards sont en caoutchouc naturel, celui-ci est choisi en raison de ses bonnes qualités dynamiques.

Dans des conditions normales d'utilisation, les formules de caoutchouc garantissent une bonne tenue dans le temps et en particulier limitent le fluage.

Les supports comportant de l'élastomère (naturel ou synthétique) présentent toujours à la fois de l'élasticité pure et de l'amortissement visqueux, la dénomination «amortisseurs» qui leur est communément appliquée est tout à fait impropre, les deux caractéristiques élasticité et amortissement sont en effet essentiellement différentes, on peut assimiler une suspension sur caoutchouc à la suspension d'un véhicule automobile dans laquelle les deux fonctions sont assurées par des organes différents travaillant en parallèle :

- La suspension élastique proprement dite par les ressorts.
- L'amortissement par des amortisseurs hydrauliques.

## **I.4.4. Fonctionnement d'une suspension élastique**

### **I.4.4.1. Fonction statique**

Une suspension élastique permet une meilleure répartition des charges statiques. Si une machine repose sur ses assises par des contacts "solide" en plus de trois points il est impossible de prévoir les charges imposées sur chaque points (le montage est hyperstatique).

Une suspension élastique absorbe sans difficulté de petite différence d'entraxe de fixation. Quelle que soit le nombre de fixations, un assemblage rigide par boulons par exemples, exige pour éviter des contraintes locales exagérées, une conformité très correcte des entraxes et de surfaces de pose de la machine et de son assise.

#### **I.4.4.2.Fonction dynamique**

C'est le rôle essentiel des suspensions élastiques, dans le cas de vibration ou de chocs, les rigidités linéaires des suspensions restent constantes. Ceci est vrai pour les suspensions élastiques à base d'élastomère dans le domaine normal d'utilisation (vibration mécanique, température normale).

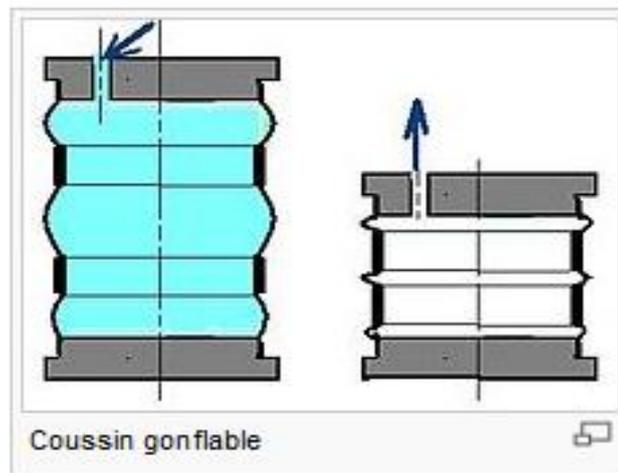
#### **I.4.5. Les différents types d'amortisseurs en élastomère**

Les supports comportant de l'élastomère (naturel ou synthétique) présentent toujours à la fois de l'élasticité pure et de l'amortissement visqueux. La dénomination «amortisseurs» qui leur est communément appliquée est tout à fait importante. Les deux caractéristiques, élasticité et amortissement sont en effet différentes.

##### **I.4.5.1. Amortisseur pneumatique**

Fondé sur le principe du vérin ou du coussin gonflable, cet amortisseur a un emploi très diversifié dans les domaines suivants :

- *Le transport* : Suspension de véhicules de transport (modèle *Stradair* de Berliet) ou suspension de cabines des gros camions (TIR).
- *Le sismique* : pour l'amortissement des mouvements sismiques appliqués aux installations et immeubles. Ces amortisseurs sont placés sous l'installation en position verticale et horizontale.
- *Isolation* des installations fonctionnant avec des systèmes à vibrations (ex: grille de décochage de fonderie, transporteur vibrant)



**Figure (I.6) : Amortisseur pneumatique**

### I.4.5.2. Support moteur

Le support moteur est constitué d'un élément en élastomère de forme conique, inséré entre deux armatures en fonte, une vis butée réglable solidaire du couvercle assure la limitation des déplacements, il existe plusieurs variante qui diffèrent par le types de fixation, ce support est conçu pour toute suspension motrice selon des gammes de charge.



*Support moteur*

**Figure (I.7)**

### I.4.5.3. Support SC

Il est constitué d'un anneau en caoutchouc adhérent à deux armatures concentriques, l'armature extérieure est un cylindre avec collerette.

**Fonctionnement** : la conception du support SC lui confère les propriétés suivantes :

- une élasticité axiale quatre fois plus importante que l'élasticité radiale
- travail du caoutchouc en cisaillement
- effet de butte progressive dans le cas de choc ou de surcharge accidentelle
- permet de réaliser des montages plus sécurisés.



**Figure (I.8) : Support SC**

#### **I.4.5.4. Les suspensions de machine**

Elles sont composées d'une semelle en élastomère présentant une surface nervurée antidérapante et d'une tige filtrée permettant la mise à niveau précise des équipements

Applications :

- armoires électrique ou électronique
- matériels de conditionnement
- matériels de control et de mesure
- matériels pour industrie agroalimentaire
- matériels de laboratoire
- appareils électroménagers

Exemple de ces amortisseurs :



**Figure (I.9) Les suspensions de machines de machine MINIX**

**I.5. Conclusion**

Dans ce chapitre on a vu le rôle des amortisseurs et leurs importances pour la protection des machines contre les vibrations et les chocs, et on a cité quelques types d'amortisseurs et leur principe de fonctionnement.

*Chapitre II*  
*Etude théorique*

## II.1 Introduction

L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours de ces dernières années un développement rapide et grand en raison de développement des technique de plus en plus sophistiquées et des besoins les plus variés dans des différents domaines (mécanique, acoustique, transmissions, etc.).

Le domaine des vibrations est devenu un champ extrêmement vaste et de complexité croissante, les objectifs de travail ont pour but de mettre à la disposition de ceux qui vont l'utiliser un outil de travail qui leur permettra de comprendre les théories mathématiques indispensables aux compréhensions des notions de vibration mécanique.

## II.2. Définition d'une vibration

Un système mécanique est dit en vibration lorsqu'il est animé d'un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre ou d'un point d'équilibre. il y a des vibrations libres et des vibrations Forcées, et les caractéristiques des vibrations sont : (sa fréquence, son amplitude et sa nature).

### II.2.1. Les caractéristique d'une vibration [5]

#### II.2.1.1. La fréquence (F)

C'est le nombre de fois qu'un phénomène se répète en un temps donné, il est exprimé en Hertz [HZ]

#### II.2.1.2. Amplitude

On appelle amplitude d'une onde vibratoire la valeur de ses écarts par rapport au point d'équilibre et on peut définir :

- l'amplitude maximale par rapport au point d'équilibre
- l'amplitude efficace avec sa formule générale

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$$

$A_{eff}$  Valeur efficace de l'amplitude

$T$  C'est la période (la durée) d'une onde qui est égale :

$$T = \frac{2\pi}{F}; \quad \text{Son unité est la seconde (s)}$$

$X^2(t)$  La variation instantanée de l'amplitude

### II.2.2. Les harmoniques : [6]

La figure ci-dessous représente plusieurs allures en fonction du temps. On suppose que le déplacement est représenté sur l'axe des Y et que la courbe en gras est

constituée depuis des autres allures numérotées. Ces allures représentent les harmoniques de cette courbe.

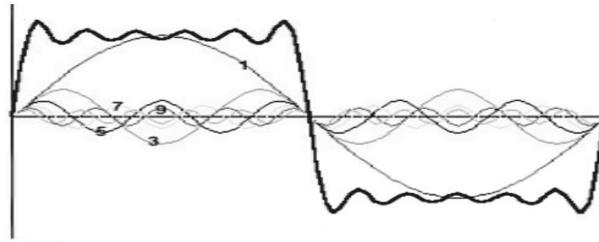


Figure (II.1) : Représentation des harmoniques

### II.2.3. La nature d'une vibration

Nature des vibrations	Représentation temporelle des vibrations
<b>a</b> Périodique de type sinusoïdal simple	
<b>b</b> Périodique de type sinusoïdal complexe	
<b>c</b> Périodique de type impulsion el	
<b>d</b> Aléatoire de type impulsion el	

### La nature de la vibration

#### II.2.4. Les type des vibrations : [7]

D'après la définition des vibrations, elles sont liées aux efforts qui les génèrent, et peuvent êtres soit périodiques, soit apériodiques.

### II.2.4.1 Les vibrations périodiques :

Elles peuvent correspondre à un mouvement sinusoïdal pur, ou plus généralement à un mouvement complexe périodique que l'on peut décomposer en une somme de mouvements sinusoïdaux, plus faciles à analyser.

#### a) vibration harmonique (sinusoïdale pures) :

Les mouvements sinusoïdaux élémentaires sont appelés (composantes harmoniques) et leurs fréquences sont des multiples entiers de la fréquence du mouvement étudié qui est appelée (fréquence fondamentale) ou fréquence de l'harmonique d'ordre 1. Elles sont décrites par la formule suivante.

$$x(t) = X \sin(\omega t + \theta)$$

$x(t)$  La position instantanée

$X$  La position maximale par rapport au point d'équilibre

$\omega$  La pulsation de mouvement

$\theta$  La position initiale de système

#### b) vibration complexes périodique :

Deux ou plusieurs vibrations périodiques peuvent se superposer et donner comme résultat un mouvement qui est la composition de tous les mouvements élémentaires. Une telle vibration est créée par une excitation, elle-même périodique. C'est le cas le plus fréquent rencontré sur les machines.

### II.2.4.2 Les vibrations aperiodiques :

#### a) Les vibrations aléatoires :

C'est une vibration continue pour laquelle il est possible de déterminer une période de répétition. Cette vibration ne peut être représentée par une fonction mathématique exacte. D'où l'utilisation des lois de probabilité pour la caractériser.

#### b) Les vibrations transitoires:

C'est une vibration non continue qui n'est observable que pendant un temps très bref. Ce type de vibration se rencontre lors d'un impact ou d'un choc

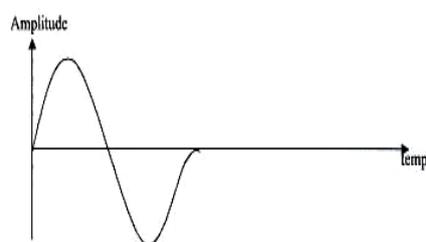
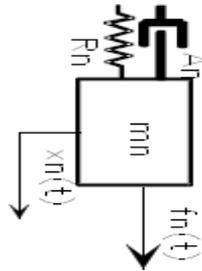


Figure (II.2) : vibration transitoire

### II.2.5. Quelques notions fondamentales

#### ❖ Nombre de degrés de liberté

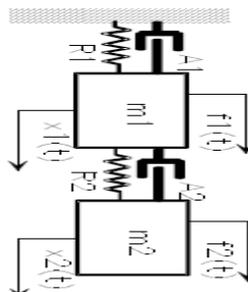
On appelle le nombre de degré de liberté d'un système mécanique, le nombre de paramètre de configuration minimum nécessaires pour définir complètement l'état du système.



Figure(II.3) : système à un degré de liberté

#### ❖ Systèmes à plusieurs degrés de liberté:

Les systèmes à un seul degré de liberté ne sont pas souvent suffisants pour exprimer avec suffisamment de richesse les phénomènes vibratoires. On est alors conduit à modéliser des systèmes avec plusieurs degrés de liberté, donc on met "bout à bout", des systèmes à un degré de liberté. Comme celui qui est indiqué ci dessus. Soit le système à n degrés de liberté suivant:[27]



Figure(II.4) : système à plusieurs degrés de liberté

#### ❖ Fréquence d'excitation

C'est le nombre d'oscillations par unité de temps d'une force extérieure ou d'un déplacement extérieur appliqué à un système vibrant.

#### ❖ Fréquence naturelle

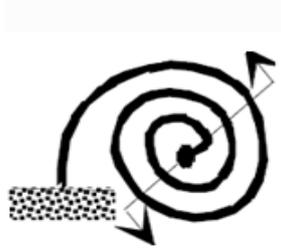
C'est le nombre d'oscillations qu'un système accomplit au cours d'une unité de temps lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre et si on le laisse vibrer librement.

❖ **Fréquence de résonance**

C'est la fréquence d'excitation pour laquelle la force (déplacement) transmise est maximale pour une fréquence d'excitation donnée.

❖ **La constante de raideur K**

C'est une grandeur qui caractérise les matériaux qui peuvent se déformer sans détérioration, son unité dans le **SI** et le  $[N/M]$



**Figure (II.5):** ressort à spirale

Sa formule mathématique est  $K = \frac{E.I}{L}$

Où L représente la longueur développée du ressort à spirale, I le moment quadratique de la section, et E représente une caractéristique du matériau que l'on appelle module de YOUNG, il est exprimé en GPA (Giga Pascal).

❖ **Energie cinétique [N.m]**

C'est la quantité de mouvement qui est utilisée par un système pour passer d'un point à l'autre, Cette Energie est la somme de toutes les énergies cinétiques et partielles des molécules qui constituent le système.

-cas de translation  $E_c = \frac{1}{2} m V^2$

-cas de rotation  $E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$

❖ **Energie potentielle**

C'est l'énergie interne de système et on distingue ces énergies suivantes :

-énergie potentielle gravitationnelle  $U = mgh$  [N.m]

-énergie potentielle élastique  $U = \frac{1}{2} Kx^2$  [N.m]

-énergie potentielle de torsion  $U = \frac{1}{2} c\theta^2$  [N.m]

❖ **Energie mécanique**

Cette énergie est due à la somme des énergies cinétiques et des énergies potentielles

$$E_m = E_c + U$$

### II.3.Principe d'analyse

Très souvent, le problème posé par l'étude d'un mouvement oscillatoire, consiste à rechercher la pulsation propre, et pour ça il existe différentes méthodes de résolution.

#### II.3.1. La Résolution par les méthodes des énergies

Cette méthode permet de mettre en place une équation de bilan énergétique où entrent en compte l'énergie potentielle du système et l'énergie cinétique s'il y a l'amortissement.

Notre objectif est de mettre en place une équation différentielle qui nous permettra de déterminer le comportement dynamique du système ; c'est à dire ses fréquences de résonance, et ses réponses à des sollicitations périodiques.

#### II.3.2. La Résolution par la méthode de Lagrange

On peut aborder les mêmes problèmes par celle de Lagrange. Le formalisme de Lagrange est basé sur trois points :

- La mécanique analytique permet d'obtenir très rapidement les équations du mouvement en fonction des forces appliquées.
- On considère Les liaisons entre les différentes parties d'un système complexe comme parfaites (les forces de liaison ne travaillent pas).
- On introduit des coordonnées dites généralisées, car elles représentent des déplacements linéaires et angulaires.

Cette méthode de Lagrange est définie par L'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{P}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial P} \right) = 0$$

Avec :  $L = E_c - U$  ; C'est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentiel  
 Cette équation est appliquée dans le cas où L'énergie de système est conservative.

Si en plus des forces conservatives il existe des forces non conservatives (dissipatives)  
 Comme les frottements :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{P}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial P} \right) = f$$

$f$  Représente les forces qui ne dérivent pas d'un potentiel.

#### II.3.3.La résolution par les équations fondamentales de la dynamique

Dans Cette méthode on introduit les lois de newton (la deuxième loi **RFD**) pour la translation et le théorème du moment cinétique(**TMC**) pour la rotation.

**-Loi de RFD :**  $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{m}\vec{v}}{dt} = \vec{m}\vec{a}$  ;

**-Loi de TMC :**  $\sum \vec{M}_0 = J \frac{d\vec{\theta}}{dt}$  ;

## II.4. Etude des systèmes mécaniques en vibration :

Dans notre étude on s'intéresse à des systèmes en translation avec un degré de liberté (1DDL).

### II.4.1. Oscillation libre d'un système non amortie a un degré de liberté

On utilise la **RFD** (méthode de Newton) pour étudier ce phénomène. Une masse  $m$  est attachée à l'une des extrémités d'un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur initiale  $l_0$  l'autre extrémité est fixée. Soit  $\Delta l$  l'élongation du ressort sous l'effet du poids de la masse  $m$  et prenons le sens positif du mouvement du haut vers le bas (voir figure.6).

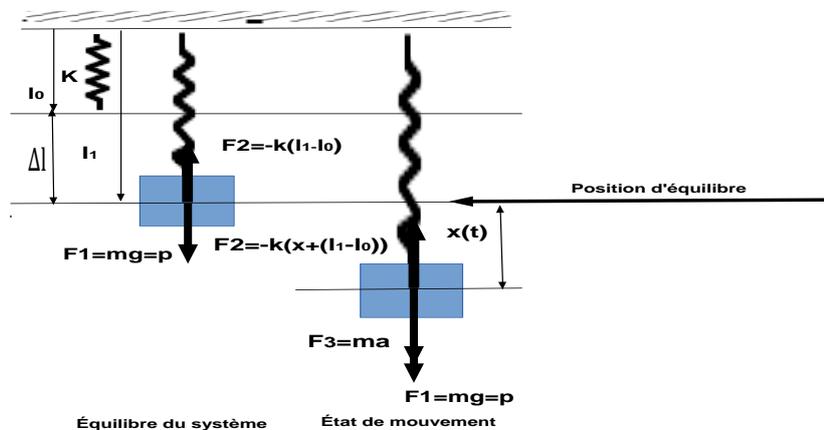


Figure (II.6) : Oscillation libre d'un système non amortie

#### ○ A L'équilibre :

Il y a deux forces qui agissent sur la masse  $m$ , son poids et la tension due au ressort :

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

En fait la projections selon le sens positive on trouve

$$F_1 - F_2 = 0$$

$$mg - k\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta l$$

Cette relation s'appelle la condition d'équilibre de système (masse-ressort), elle reste toujours vérifiée même en mouvement.

#### ○ En mouvement :

Il y a trois forces qui agissent sur  $m$ , son poids, la force de rappel et la force d'inertie.

D'après la loi de **RFD** :

$$\sum F_i = m\vec{\gamma}$$

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{\ddot{x}}$$

Avec  $\gamma = \ddot{x}$  c'est l'accélération de système

En fait la projections selon le sens positive on trouve

$$mg - k(x - \Delta l) = m\ddot{x}$$

on utilise la condition d'équilibre précédente on obtient :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{De la forme } a\ddot{x} + cx = 0 \quad (\text{II.1})$$

Elle s'appelle l'équation différentielle du mouvement qu'on peut écrire sous la forme standard suivante :

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (\text{II.2})$$

La résolution de l'équation différentielle

on cherche la solution de la forme  $x(t) = e^{rt}$ , on calcule la première et deuxième dérivée par rapport au temps.

$$\dot{x}(t) = re^{rt}$$

$$\ddot{x}(t) = r^2 e^{rt}$$

Si on remplace la dérivée dans l'équation (4.2) on obtient :

$$ar^2 e^{rt} + ce^{rt} = 0$$

En mettant ( $e^{rt}$ ) en facteur, et on pose  $w_0^2 = \frac{a}{c}$ , on obtient l'équation caractéristique de mouvement :

$$(r^2 + w_0^2)e^{rt} = 0$$

On remarque que le terme exponentiel ne s'annule pas donc on prend :

$$(r^2 + w_0^2) = 0$$

Cette équation admet deux racines complexes :  $r_1 = jw_0$  et  $r_2 = -jw_0$

Donc la solution de (4.2) admet deux solutions :  $x_1(t) = e^{jw_0 t}$  et  $x_2(t) = e^{-jw_0 t}$

Donc :  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$$x(t) = c_1 [\cos(w_0 t) + j \sin(w_0 t)] + c_2 [\cos w_0 t + j \sin(w_0 t)]$$

$$= (c_1 + c_2) \cos(w_0 t) + j(c_1 - c_2) \sin(w_0 t)$$

$$\text{on pose } \begin{cases} c_1 + c_2 = c' \\ c_1 - c_2 = c'' \\ u = c' \cos(\omega_0 t) \\ v = c'' \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Soit  $x(t) = u(t) + jv(t)$

on dérive cette équation par rapport au temps

$$\ddot{u} + j\ddot{v} + \omega_0^2(u + jv) = 0$$

$$(\ddot{u} + \omega_0^2 u) + j(\ddot{v} + \omega_0^2 v) = 0$$

Un nombre complexe est nul si la partie réelle est nulle en même temps que la partie imaginaire.

$u(t)$  et  $v(t)$  Sont des solutions de l'équation différentielle (II.2)

$$\begin{aligned} x(t) &= c'_1 u(t) + c'_2 v(t) \\ &= c'_1 c' \cos(\omega_0 t) + c'_2 c'' \sin(\omega_0 t) \\ &= a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\text{En pose : } A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \arccos\left[\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$$

Avec :

$A$  Représente l'amplitude

$\varphi$  Représente déphasage

Ou  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre du système

La période est donné par :  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

La période naturelle ou propre est une grandeur caractéristique du système, elle est indépendante de l'amplitude.

La solution générale de la relation (II.2) est :

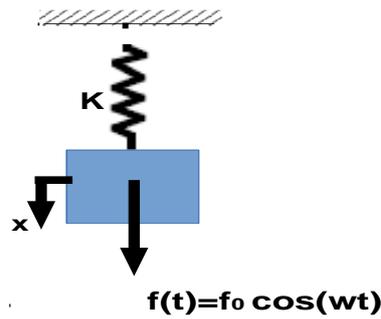
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{II.3})$$

Avec :  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes qui sont calculés à partir des conditions initiales.

#### II.4.2. Oscillation Forcé d'un système non amortie a un degré de liberté

Pour étudier ce type d'oscillation on ajoute une force excitatrice de la forme

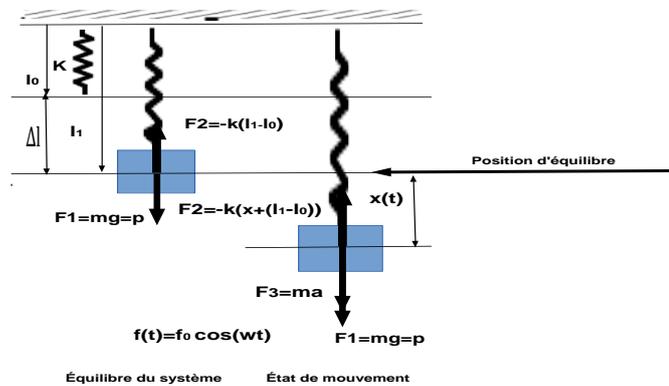
$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \text{ Qui agit sur le système comme le montre la Figure 7.}$$



Figure(II.7) : système masse ressort avec une force excitatrice

o A l'équilibre

Le système m est soumis à trois forces son poids, la force de tension due au ressort k, et la force excitatrice  $f(t)$  :



Figure(II.8) : Oscillation Forcé d'un système non amortie

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

On fait la projection selon le sens positive on trouve

$$F_1 - F_2 = 0$$

$$mg - k\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta l$$

o En mouvement

On utilise la **RFD** (méthode de newton) pour étudier ce phénomène, une masse m est attachée à l'une des extrémités d'un ressort de constante de raideur k et de longueur initiale  $l_0$  et l'autre extrémité est fixée. Soit  $\Delta l$  l'élongation du ressort sous l'effet du point de la masse m et une force excitatrice, prenons le sens positif du mouvement du haut vers le bas (voir figure.5).

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$$

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{\ddot{x}}$$

on fait la projection selon le sens positive

$$mg - k(x - \Delta l) + f(t) = \ddot{x}$$

on utilisant la condition d'équilibre précédente on obtient :

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad (\text{II.4})$$

Elle s'appelle l'équation différentielle du mouvement qu'on peut écrire sous la forme standard suivante :

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t) \quad (\text{II.5})$$

Où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre du système

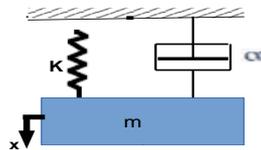
La période est donné par :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

La période naturelle ou propre est une grandeur caractéristique du système, elle est indépendante de l'amplitude.

La solution générale de la relation (II.5) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{II.6})$$

### II.4.3. Oscillation amortie d'un système à un degré de liberté



Figure(II.9) système masse-ressort avec un amortisseur

#### o Etude de système

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$$

$$m\ddot{x} = -k(\Delta l + x) + mg - \alpha\dot{x}$$

on utilise la condition d'équilibre

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{II.7})$$

Donc l'équation différentielle est de la forme suivante

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + w_0^2x = 0 \quad (\text{II.8})$$

Avec

$$-\varepsilon = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{coefficient d'amortissement}$$

$$-w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{la pulsation propre du système}$$

○ **Solution de l'équation différentielle**

Prenons :  $x(t) = Ae^{rt}$ , est on calcule la première et deuxième dérivé et on les remplace dans l'équation différentielle (4.8), on obtient l'équation :

$$x(t) = e^{rt}$$

$$\dot{x}(t) = re^{rt}$$

$$\ddot{x}(t) = r^2e^{rt}$$

Après le remplacement on obtient :

$$(r^2 + 2\varepsilon r + w_0^2)e^{rt} = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$(r^2 + 2\varepsilon r + w_0^2) = 0 \quad (\text{II.10})$$

L'équation (4.10) est une équation de second ordre

Avec :

$$a = 1, \quad b = 2\varepsilon, \quad c = w_0^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2\varepsilon)^2 - 4.1.w_0^2$$

on concéder  $r_1, r_2$  les solutions de l'équation

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - w_0^2}$$

La solution  $x(t)$  et la nature du mouvement dépendent du signe discriminant  $(\varepsilon^2 - w_0^2)$  de l'équation caractéristique.

#### II.4.3.1. 1<sup>er</sup> cas : Mouvement apériodique : $\varepsilon > w_0$ (amortissement fort)

L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives :

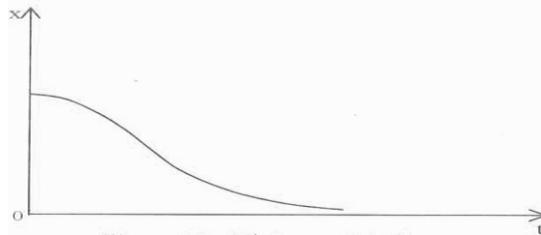
$$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - w_0^2},$$

Et la solution générale de l'équation s'écrit :

$$x(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t} = ae^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - w_0^2}} + be^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - w_0^2}} \quad (\text{II.11})$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont déterminés par les conditions initiales sur le déplacement  $x_0(t)$  et la vitesse  $\dot{x}_0(t)$ .

Le régime apériodique  $x(t)$  décroît exponentiellement, plus le coefficient d'amortissement est grand plus le temps d'arrêt est petit.



**Figure (II.10) :** le régime apériodique

#### II.4.3.2. 2<sup>eme</sup> cas : Mouvement critique (amortissement critique) :

L'équation caractéristique admet la racine double :

$$\Delta = 0 \quad \text{Donc} \quad \varepsilon = w_0;$$

$$r_{1,2} = -\varepsilon$$

Et la solution générale de l'équation différentielle s'écrit

$$x(t) = (at + b)e^{-\varepsilon t} \quad (\text{II.12})$$

L'amortissement est dit amortissement critique. Le régime critique joue un rôle important dans certaines applications pratiques, et la construction d'appareils de mesure car, après une perturbation, le système retourne rapidement à sa position de repos.

On utilise les conditions initiales données dans le 1<sup>er</sup> cas  $x_0$  et  $\dot{x}_0$ , on détermine les constantes :

### II.4.3.3. 3<sup>ème</sup> cas : Mouvement oscillatoire amorti : $\varepsilon < w_0$ (amortissement faible)

Le discriminant est négatif :  $\Delta < 0$

Les deux racines s'écrivent :

$$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}$$

La solution générale est donnée par :

$$x(t) = \left[ a e^{jt\sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}} + b e^{-jt\sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}} \right] e^{-\varepsilon t} = [a e^{j\Omega t} + b e^{-j\Omega t}] e^{-\varepsilon t}$$

Posons  $\Omega^2 = w_0^2 - \varepsilon^2$

Si on utilise les formules d'Euler,  $x(t)$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= [a e^{j\Omega t} + b e^{-j\Omega t}] e^{-\varepsilon t} \\ &= e^{-\varepsilon t} [(a + b) \cos(\Omega t) + j(a - b) \sin(\Omega t)] \\ &= e^{-\varepsilon t} [c_1 \cos(\Omega t) + j c_2 \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

On pose que :

$$u = c_1 e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t)$$

$$v = c_2 e^{-\varepsilon t} \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = u + jv$$

Si  $(u + jv)$  est une solution de l'équation différentielle (II.10), on démontre que  $u$  et  $v$  sont des solutions

$$x(t) = u + jv$$

$$\dot{x} = \dot{u} + j\dot{v}$$

$$\ddot{x} = \ddot{u} + j\ddot{v}$$

On remplace les trois relations données ci-dessus dans l'équation (II.10) on obtient :

$$(\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + w_0^2 u) + j(\ddot{v} + 2\varepsilon\dot{v} + w_0^2 v) = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} (\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + w_0^2 u) = 0 \\ (\ddot{v} + 2\varepsilon\dot{v} + w_0^2 v) = 0 \end{cases}$$

Donc  $u$  et  $v$  sont des solutions de l'équation différentielle (II.10) :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c'_1 u + c'_2 v \\
 &= c'_1 c_1 e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t) + c'_2 c_2 e^{-\varepsilon t} \sin(\Omega t) \\
 &= [c'_1 c_1 \cos(\Omega t) + c'_2 c_2 \sin(\Omega t)] e^{-\varepsilon t}
 \end{aligned}$$

On pose :

$$a = c'_1 c_1$$

$$b = c'_2 c_2$$

La solution  $x(t)$  prend la forme :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a' e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t) + b' e^{-\varepsilon t} \sin(\Omega t) \\
 &= \sqrt{a'^2 + b'^2} e^{-\varepsilon t} \left[ \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \cos(\Omega t) + \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \sin(\Omega t) \right]
 \end{aligned}$$

$A = \sqrt{a'^2 + b'^2}$  Représente l'amplitude ou le module

$\varphi = \arccos \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$  Représente le déphasage

Donc la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = A e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (\text{II.13})$$

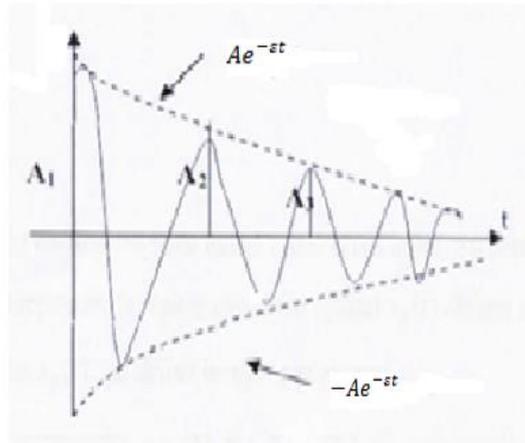
Tel que  $x(t)$  est réel, les constantes  $A$  et  $\varphi$  sont déterminées par les conditions initiales  $x_0$  et  $\dot{x}_0$

Le déplacement  $x(t)$  de la masse  $m$  s'annule pour  $\cos(\Omega t + \varphi) = 0$ , C'est-à-dire à des instants séparés par des intervalles égaux

Pour  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  et  $\Omega = \sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}$  on obtient

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}} \quad T = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{w_0^2}}}$$

Alors :  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}}}$  avec  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $T$  est appelé le pseudo période et on a toujours  $T > T_0$ .



**Figure(II.11)** Oscillation amortie (régime pseudo périodique)

- **Le décrement logarithmique :**

Le décrement logarithmique  $\delta$  est un logarithme naturel du rapport des amplitudes  $x(t)$  et  $x(t + T)$  de deux elongations successives, il caractérise donc la décroissance de l'amplitude pendant une période.

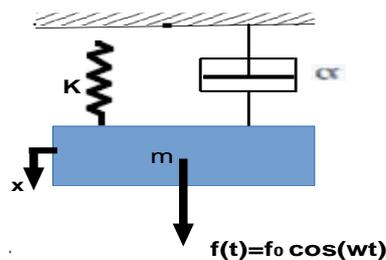
$$\begin{aligned}\delta &= \text{Ln} \left[ \frac{x(t)}{x(t+T)} \right] \\ &= \text{Ln} \left[ \frac{x(t)}{x(t)e^{-\epsilon T}} \right] \\ &= \epsilon T\end{aligned}$$

$T$  Représente le pseudo période

#### II.4.4. oscillation amortie forcée d'un système à un degré de liberté

Pour étudier ce type d'oscillation, on considère un oscillateur harmonique amorti sur lequel agit une force extérieure, ou une force excitatrice, de la forme :

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$



**Figure(II.12)** système masse-ressort avec un amortissement et une force excitatrice

on applique la loi de Newton **RFD** sur le système

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t) \quad (\text{II.14})$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t)$$

Donc l'équation différentielle est de la forme suivante

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t) \quad (\text{II.15})$$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est la somme de la solution générale  $x_h(t)$  de l'équation homogène et de la solution particulière  $x_p(t)$  :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$  : solution harmonique

$x_p(t)$  : solution particulière

La limite de  $x_h(t)$  est toujours nulle quand  $t$  tend vers l'infini.

Au début du mouvement de  $x(t)$  si  $x_p(t)$  qui définit le régime permanent.

les oscillations permanentes

$$x_p(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{II.16})$$

sont appelées les oscillations forcées.

#### II.4.4.1 Recherche du régime permanent

Soit l'équation différentielle (4.16)

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t)$$

On cherche  $x(t)$  pour la forme suivante :

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

La notation complexe permet d'écrire :

$$\underline{x}(t) = A(\omega) e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

Avec :  $j^2 = -1$  et  $x = \text{Re}(\underline{x})$

Et :  $x = \text{Re}(\underline{x})$

$$\text{ona} : \frac{f_0}{m} \cos(\omega t) = \text{Re}\left(\frac{f_0}{m} e^{j\omega t}\right)$$

$$\text{Et} : \dot{x} = \text{Re}(\dot{\underline{x}}) = \text{Re}(j\omega A(\omega) e^{j\omega t} e^{j\varphi})$$

$$\text{Puit} : \ddot{x} = \text{Re}(\ddot{\underline{x}}) = \text{Re}(-\omega^2 A(\omega) e^{j\omega t} e^{j\varphi})$$

$$\text{L'équation différentielle s'écrit} : \text{Re}(\ddot{\underline{x}} + 2\varepsilon\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x}) = \text{Re}\left(\frac{f_0}{m} e^{j\omega t}\right)$$

$$\text{Ou} : \ddot{\underline{x}} + 2\varepsilon\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{f_0}{m} e^{j\omega t} \quad (\text{II.17})$$

Il suffit alors de déterminer  $\underline{x}$  et d'utiliser  $x = \text{Re}(\underline{x})$ .

On obtient ainsi :

$$(-\omega^2 + 2j\varepsilon\omega + \omega_0^2)A(\omega) e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \frac{f_0}{m} e^{j\omega t} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Soit} : (-\omega^2 + 2j\varepsilon\omega + \omega_0^2)A(\omega) e^{j\varphi} = \frac{f_0}{m} \quad (\text{II.19})$$

On calcule le module de l'amplitude

$$A(\omega) = \frac{\frac{f_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Et} : \tan\varphi = -\frac{2\varepsilon\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{II.21})$$

Avec :  $\varphi$  est le déphasage entre la force extérieure (excitation) et la réponse  $x(t)$  ou déplacement de l'oscillateur.

#### II.4.4.2 Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation cas de résonance

$$\text{Soit} : A(\omega) = \frac{\frac{f_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2}}$$

L'amplitude  $A(\omega)$  est maximale quand le dénominateur de la relation (II.21) est minimal, on dit qu'il y a Résonance.

$$\text{On pose} : F(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2 \quad (\text{II.22})$$

Pour qu'il en soit ainsi, la dérivée de la fonction précédente par rapport à  $\omega$  doit pouvoir s'annuler en  $\omega = \omega_R$ .

$$\frac{dF}{d\omega} = 4\omega[(2\varepsilon^2 - \omega^2) + \omega^2]$$

$$\frac{dF}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon^2} \end{cases}$$

La deuxième pulsation n'existe que si :

$$w_0^2 - 2\varepsilon^2 > 0 \Rightarrow \varepsilon < \frac{w_0}{\sqrt{2}}$$

Il est minimal ou maximal selon le signe de la deuxième dérivée :

$$\frac{d^2F}{dw^2} = -4w_0^2 + 12w^2 + 8\varepsilon^2$$

Pour  $w = 0$   $\frac{d^2F}{dw^2} = 4(2\varepsilon^2 - w_0^2) < 0$

Pour  $w = \sqrt{w_0^2 - 2\varepsilon^2}$   $\frac{d^2F}{dw^2} = 8(w_0^2 - 2\varepsilon^2) > 0$

Donc  $F(w)$  est minimal quand  $w = \sqrt{w_0^2 - 2\varepsilon^2}$  et  $A(w)$  est maximal.

Le maximum de résonance est donné par :

$$w_R = \sqrt{w_0^2 - 2\varepsilon^2} \tag{II.23}$$

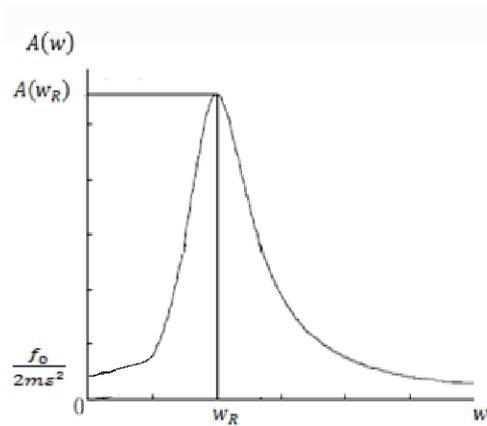
La valeur de l'amplitude de la résonance est donnée par :

$$A(w_R) = \frac{f_0}{2m\varepsilon\sqrt{w_0^2 - \varepsilon^2}} \tag{II.24}$$

○ **Tableau de la variation de l'amplitude  $A(w_R)$  :**

$w$	0	$w_R$	$+\infty$
		0	
	+	-	
$w_R$			

○ **La Courbe de l'amplitude :**



Figure(II.12) : Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation

**II.4.4.3. Etude du déphasage en fonction de la pulsation :**

En régime permanent, l'oscillation présente une différence de phase  $\varphi$  sur la force excitatrice.

$\varphi$  Dépend de la pulsation suivant la relation :

$$\tan\varphi = -\frac{2\varepsilon w}{w_0^2 - w^2}$$

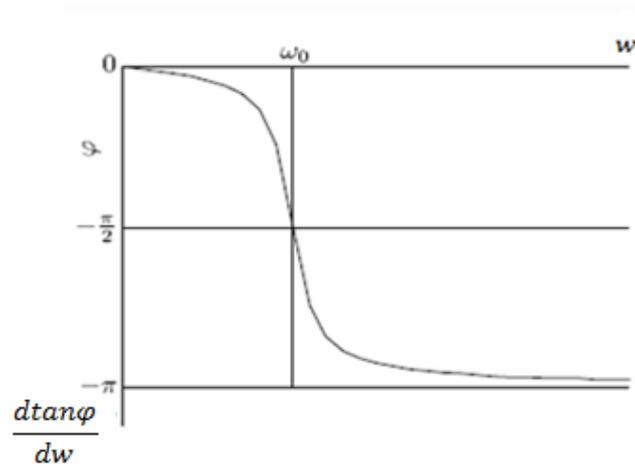
Donc :  $\varphi = \text{Arc tan} \left( -\frac{2\varepsilon w}{w_0^2 - w^2} \right)$

$$\frac{d\varphi}{dw} = -\frac{2\varepsilon(w_0^2 + w^2)}{(w_0^2 - w^2)^2}$$

- **Tableau de variation du déphasage en fonction de la pulsation**

$W$	0		$+\infty$
$\tan\varphi$	0	$-\infty$	$+\infty$ 0
$\frac{d\tan\varphi}{dw}$	-		-
	-		
	0	$-\pi$	

- Représentation graphique de la variation du déphasage en fonction de La pulsation :



Figure(II.13) : Variation de déphasage  $\varphi$  en fonction de  $w$

### II.5. Conclusion :

Dans ce chapitre on a vu l'étude théorique des vibrations et leurs effets sur le fonctionnement des systèmes, comme ces vibrations sont néfastes pour ces systèmes, il faut chercher un moyen à les éliminer.

# *Chapitre III*

## *Modélisation des amortisseurs*

### III.1 Introduction :

IL est néfaste de lisser les vibrations libres aux cours de fonctionnement des systèmes, car elles provoquent des dégâts importants et couteux. Donc il faut chercher à les éliminer, pour cela on utilise des amortisseurs.

Pour étudier les amortisseurs il faut chercher à donner des modèles mathématiques qu'ils représentent, le comportement de ses matériaux, afin de faciliter la compréhension physique et les principes de fonctionnement, pour ça on va donner quelques modèles qui existent et qui expriment la modélisation des amortisseurs viscoélastiques.

### III.2. Les différentes déformations soumises aux matériaux viscoélastiques [11]

Aux cours de fonctionnements des machines et d'autres systèmes, il y a des déformations sur les amortisseurs dues à des forces et a des vibrations, et ces déformations sont créés en toute direction.

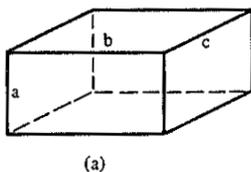
#### III.2.1 La contrainte :

Les actions intermoléculaires dites forces de cohésion permettent à un corps solide de conserver sa forme propre sous l'action d'une sollicitation extérieure.

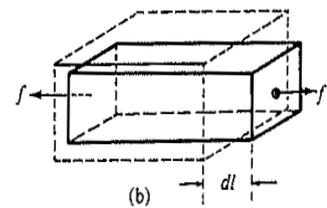
#### III.2.2 La traction :

La traction consiste à allonger une pièce sous l'effet de deux forces ( $f$ ) opposées.

Si on applique une force de traction  $F$  sur une éprouvette comme suit



La piece avant la sollicitation



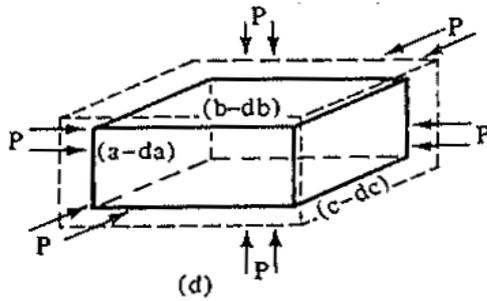
La piece après la sollicitation

✚ Donc l'allongement de l'éprouvette proportionnellement à sa longueur initiale  $x_0$

$$\text{Et } \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0}$$

#### III.2.3 La compression

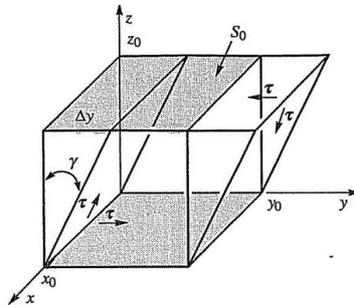
Un corps est sollicité a la compression lorsque il'est soumis à des forces opposés qui tendent à la meme direction comme suit :



Une pièce soumise à la compression

### III.2.4 Le cisaillement

Un corps est sollicité au cisaillement lorsqu'il est soumis à deux forces  $F$  opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissants l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section.



Une pièce soumise au cisaillement

$s_0$  La section cisailée

$\Delta y$  L'allongement suivant  $y$

$\gamma$  L'angle de cisaillement qui égale

$\tau$  La contrainte de cisaillement : 
$$\tau = \frac{F}{s_0}$$

$F$  La force qui muni a la pièce et qui est parallèle a la section  $s_0$

$\tau = Gt\gamma \approx G\gamma$  (Pour les petites déformations)

$G$  Module de cisaillement

### III.2.5 La torsion :

Un corps est sollicité à la torsion lorsqu'il est soumis à deux couples  $C$  dont les plans sont perpendiculaires à son axe géométrique.

### III.2.6 La flexion :

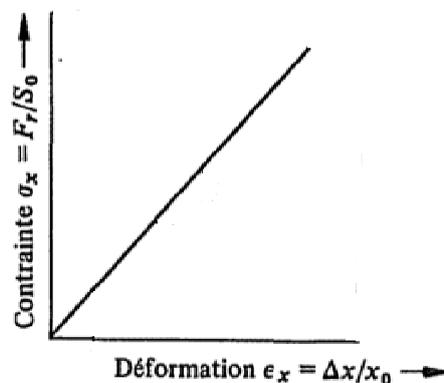
Un corps est sollicité à la flexion lorsqu'il est soumis à des forces coplanaires normales aux génératrices.

### III.3 Le Module de Young : [12]

Dans le domaine élastique du diagramme  $F = f(\Delta x)$  on peut écrire :  $\frac{F}{\Delta x} = cst$

En ramenant  $F$  à l'unité de surface :  $\frac{F}{S_0} = \sigma_x$  et en ramenant  $\Delta x$  à l'unité de longueur  $\frac{\Delta x}{x_0} = \varepsilon_x$

Comme la figure(1) suivante :



**Figure(III.1) :** représentation graphique de module de Young

Le rapport  $\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$  est encore une constante appelé module de Young ou module d'élasticité :

$$\mathbf{E} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$\Delta x$  Le degré d'allongement

### III.4 Le coefficient de poisson : [12]

Ce coefficient fait intervenir la contraction en diamètre de cylindre comme la figure(2):

$H_0$  La longueur initiale de cylindre avant déformation

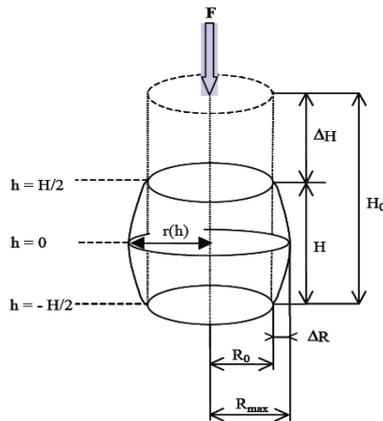
$H$  La longueur finale de cylindre après la déformation

$\Delta H$  Le degré de déformation

$R_0$  Le diamètre initial de cylindre avant la déformation

$R_{MAX}$  Le diamètre final de cylindre après la déformation

$\Delta R$  Le degré de déformation



**Figure(III.2)** : effet de contrainte

En l'appel :

$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H_0} > 0$$

Et :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta R}{R_0} < 0$$

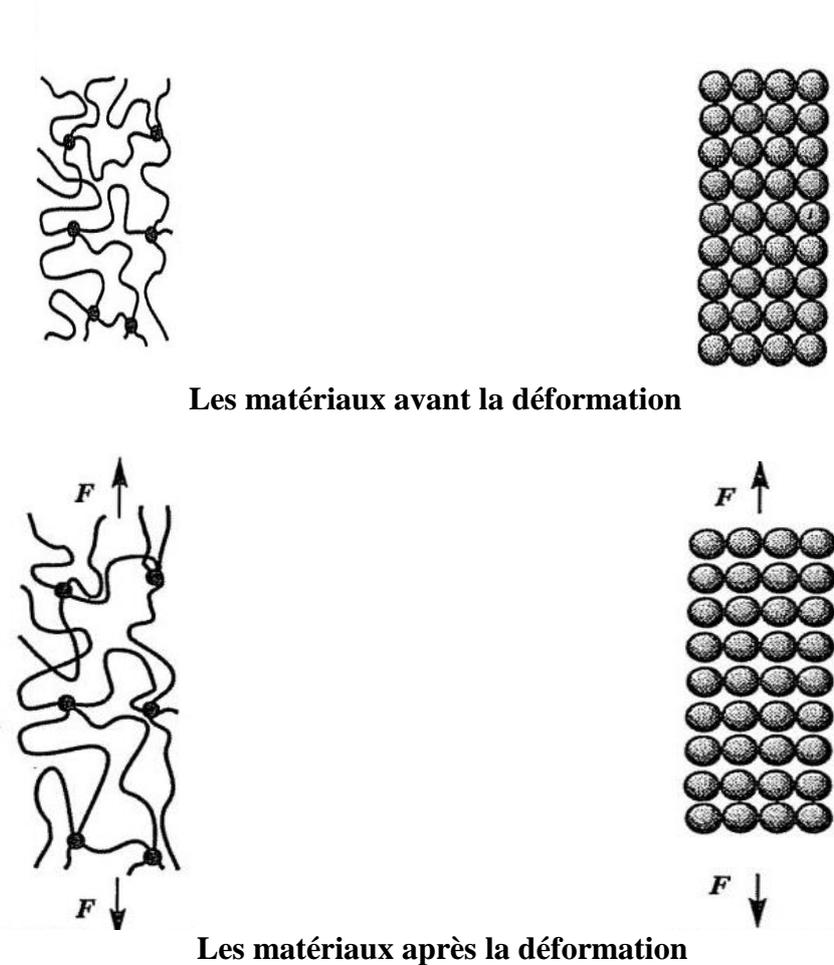
Le coefficient de poisson est défini par le rapport :

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

### III.5 Viscoélasticité linéaire: [12]

La viscoélasticité linéaire caractérise le comportement élastique et dissipatif d'un matériau en petites déformations. Celle-ci peut être considérée à différentes échelles. En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

- D'un point de vue moléculaire, quand un effort est appliqué sur un matériau viscoélastique, deux mécanismes atomiques interviennent. Les liaisons atomiques changent de longueur et d'angle. Les atomes sont alors déplacés à de nouvelles positions, avec une augmentation de l'énergie interne de façon extrêmement rapide.



**Figure(III.3) : un matériau avant et après la déformation**

Pour prendre connaissance des caractéristiques viscoélastiques de notre matériau, il faut le normaliser par le module de Young complexe sous forme du module (de son module complexe et de sa phase). Cette fonction est caractérisée dans le domaine fréquentiel.

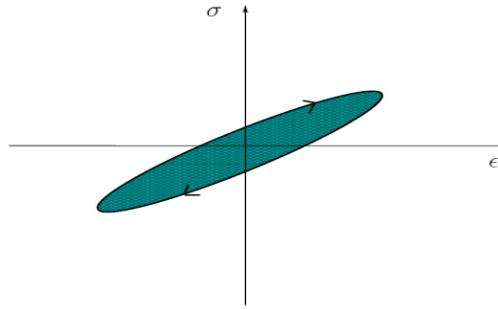
En Considérant le cas où un système est soumis à des déformations sinusoïdales cycliques

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{III.1})$$

Si on estime que la contrainte transmise répond de façon sinusoïdale avec un déphasage  $\delta$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (\text{III.2})$$

Et le cycle d'hystérésis de plan  $(\sigma, \varepsilon)$  est représentés comme suit :



**Figure (III.4) :** contrainte et déformation représenté sur le plant  $(\sigma, \epsilon)$  cycle d'hystérésis

Généralement, cette hypothèse, dite de première harmonique, la réponse en effort contient des harmoniques d'ordre supérieur, et la réponse réelle est du type :

$$\sigma(t) = \sum_k k \sigma_k \sin(k\omega t + \delta_k)$$

Avec :

$k$  C'est un nombre entier 1, 2, 3,...

Dans le cas de l'hypothèse de première harmonique, l'énergie dissipée au cours d'un cycle correspond à l'aire de l'ellipse représentée en figure (3) elle s'exprime comme suit :

$$U_c = \int \sigma d\epsilon = \sigma_0 \epsilon_0 \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t + \delta) dt = \pi \sigma_0 \epsilon_0 \sin(\delta)$$

A partir de la représentation complexe des équations (III.1) et (III.2), on définit le **module d'Young complexe** :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{j\omega t}$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{j(\omega t + \delta)} = \sigma_0 e^{j\omega t} e^{j\delta}$$

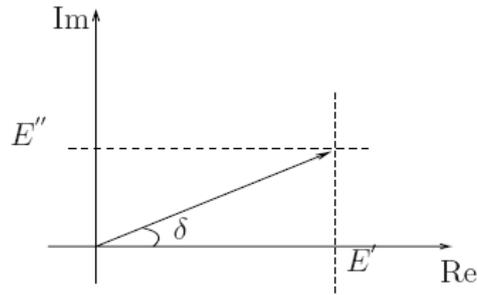
$$E^* = \frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} = \frac{\sigma_0 e^{j\omega t} e^{j\delta}}{\epsilon_0 e^{j\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{j\delta} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\cos\delta + j\sin\delta)$$

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos\delta + j \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin\delta$$

$$E^* = E' + jE''$$

$$E^* = E'(1 + tg\delta)$$

Est la représentation complexe dans la figure(5) suivante :



**Figure(III.5)** : représentation schématique de module dynamique dans le plan complexe

$E'$  : Est la partie réelle du module dynamique, Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en phase avec l'excitation. On l'appelle également **module de stockage** c'est en effet une mesure de l'énergie emmagasinée et restituée au cours d'un cycle.

$E''$  : Est la partie imaginaire du module dynamique. Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en quadrature de phase avec l'excitation. On l'appelle également **module de perte** c'est en effet une mesure de l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant le cycle.

Les caractéristiques de l'amortissement sont donc ( $E''$  et  $\delta$ ).

- Pour certains matériaux, la réponse à une déformation ou à une contrainte constante varie au cours du temps. Ces observations se font plus particulièrement dans les cas des essais de fluage et de relaxation.

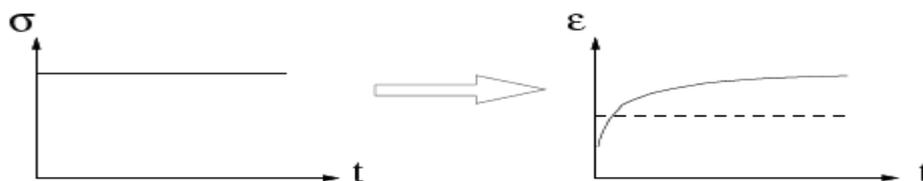
**-Pour un essai de fluage :**

Une contrainte constante est appliquée, il se produit une augmentation de la déformation au cours du temps.

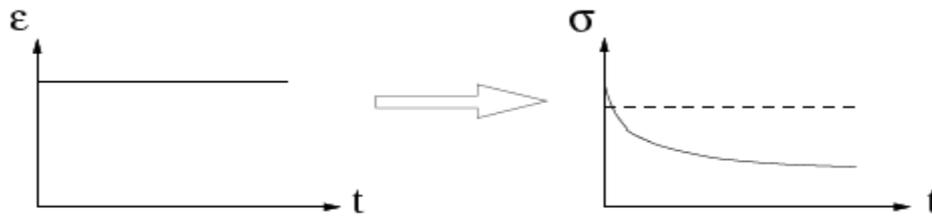
**- pour un essai de relaxation :**

C'est une déformation constante qui est imposée, et c'est alors une diminution de la contrainte qui apparaît au cours du temps.

Ces deux phénomènes sont présentés sur les figures (5) et (6) qui caractérisent ces matériaux dans le domaine temporel.



**Figure(III.6)** :courbe caractéristique de fluage

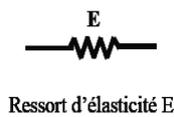


Figure(III.7) : courbe caractéristique de relaxation

III.6.Modélisation des amortisseurs : [11]

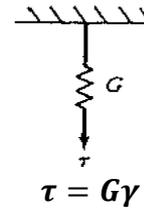
L’assemblage plus ou moins complexe des modèles mécaniques de base constitués uniquement de ressorts ou d’amortisseurs visqueux, il est utilisé habituellement pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires.

- Le ressort représente un élément élastique idéal, la contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la déformation  $\epsilon$ .



$$\sigma(t) = E \epsilon(t)$$

OU



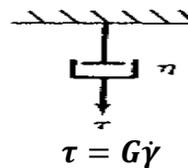
- $\sigma$  La contrainte
- $E$  Le module de Young
- $\epsilon$  La déformation
- $\tau$  La Contrainte de cisaillement
- $G$  Module de cisaillement supposé constant
- $\gamma$  Taux de cisaillement

Ces modèles permettent de représenter les solides élastiques linéaires.

- L’amortisseur a une contrainte  $\sigma$  qui est proportionnelle à la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ .



$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}(t)$$



Ces modèles permettent de représenter les éléments linéaires visqueux ou des fluides.

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires classiques.

**Remarque :**

En a la loi suivante :

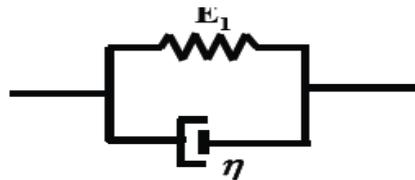
$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\eta}\right) t$$

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\eta}{t}$$

A tout moment, le module  $E(t)$  ne dépend que de  $t$  .Donc l'amortisseur est linéaire.

**III.6.1 Modèle de Kelvin-Voigt :**

Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort de module d'élasticité  $E_1$  Et d'un amortisseur de viscosité  $\eta$  est le modèle est représenté comme suit :



Figure(III.8):Modèle de Kelvin-Voigt

Mise en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur.

On suppose que :

- le ressort et l'amortisseur ont à tout instant la même déformation
- les contraintes supportées par chacun de ces éléments s'additionnent

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_a + \sigma_r \\ \varepsilon = \varepsilon_a = \varepsilon_r \\ \sigma_r = E\varepsilon \\ \sigma_a = \eta \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \sigma(t) = E_1\varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{(III.3)}$$

En Considérant le cas ou un système est soumis à des déformations sinusoïdales cycliques

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

On fait le changement de variable et on applique les principes de Laplace :

$$\begin{array}{ccc} f(t) \text{ (le domaine temporelle)} & \xrightarrow{\text{Représente}} & f(p) \text{ (le domaine de la place)} \\ \frac{df(t)}{dt} \text{ (le domaine temporelle)} & \xrightarrow{\text{Représente}} & p f(p) \text{ (le domaine de la place)} \end{array}$$

On remplace dans l'équation (III.3) :

$$\sigma(p) = E_1\varepsilon(p) + p\eta\varepsilon(p) \quad \text{(III.4)}$$

$$\sigma(p) = (E_1 + p\eta) \varepsilon(p)$$

On remplace  $p$  avec sa valeur dans le domaine fréquentielle qui est  $(j\omega)$  et on divise l'équation (5.4) sur  $\varepsilon(j\omega)$

$$\frac{\sigma(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)} = E_1 + j\omega\eta \quad \text{Et} \quad E(\omega) = \frac{\sigma(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)}$$

$$\text{Et : } |E(w)| = \frac{\sigma(jw)}{\varepsilon(jw)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad \text{Et} \quad \delta = \text{arc}(E(w))$$

Donc :

$$M(jw) = (E_1 + \eta jw) \quad (\text{III.5})$$

On fait sortir  $E_1$  comme facteur on obtient

$$M(jw) = E_1(1 + j \frac{\eta}{E_1} w)$$

$$\text{On pose : } a = \frac{\eta}{E_1}$$

$$M(jw) = E_1(1 + ja w) \quad (\text{III.6})$$

De plus en a :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

On divise sur  $E_1$  on obtiens :

$$\frac{\sigma}{E_1} = \varepsilon + \frac{\eta}{E_1} \dot{\varepsilon}$$

$$\frac{\eta}{E_1} \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\sigma}{E_1} \quad (\text{III.7})$$

La solution de cette équation est de la forme suivante:

$$s_g = s_p + s_f$$

$s_g$  La solution générale

$s_p$  La solution particulière

$s_f$  La solution forcée

### 1-la solution forcée :

On met la dérivée de l'équation (5.7) égale à zéro et on obtient:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1}$$

### 2-la solution particulière :

$$\text{On a : } \frac{\eta}{E_1} \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\sigma}{E_1}$$

On met l'équation (5.7) égale à zéro :

$$\frac{\eta}{E_1} \dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0$$

$$\frac{\eta}{E_1} \dot{\varepsilon} = -\varepsilon$$

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{E_1}{\eta} \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\frac{E_1}{\eta} \varepsilon(t)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\frac{E_1}{\eta} \varepsilon(t)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)} = -\frac{E_1}{\eta} dt$$

$$\int \frac{d\varepsilon(t)}{\varepsilon} = -\frac{E_1}{\eta} \int dt$$

$$\ln \varepsilon(t) = -\frac{E_1}{\eta} t$$

$$e^{\ln \varepsilon} = e^{(-\frac{E_1}{\eta} t + c)}$$

$$\varepsilon(t) = A e^{-\frac{E_1}{\eta} t}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + A e^{-\frac{E_1}{\eta} t} \quad (\text{III.8})$$

On calcule la valeur de A avec les conditions initiales :

A t=0 : la déformation est nulle

$$\text{Donc : } 0 = \frac{\sigma}{E_1} + A e^0$$

$$A = -\frac{\sigma}{E_1} \text{ Et on remplace dans l'équation (III.8) :}$$

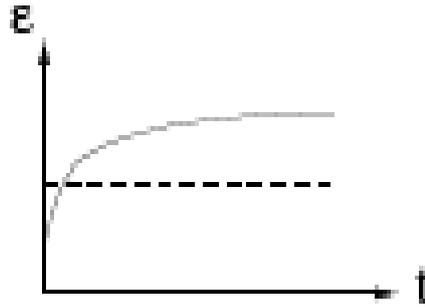
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + -\frac{\sigma}{E_1} e^{-\frac{E_1}{\eta} t}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} (1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} t})$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \quad (\text{III.9})$$

Cette équation représente l'évolution de la déformation au court du temps, et le cas de fluage

Comme il est représenté sur la figure suivante :

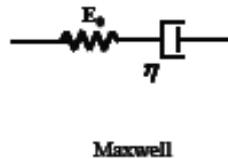


Figure(III.9) : l'évolution de la déformation  $\varepsilon = f(t)$

La relaxation elle est impossible avec ce modèle car il ne peut pas subir une déformation instantanée qui conduira à une contrainte infinie.

### III.6.2 Modèle de Maxwell [12]

Ce modèle est formé de l'association en série d'un ressort et d'un amortisseur et ce modèle est représenté comme suit



Figure(III.10) : Modèle de maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_r = \sigma_a \\ \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_a \\ \dot{\varepsilon}_a = \frac{\sigma}{\eta} \text{ et } \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_a \end{array} \right. \quad \text{Avec : } \left[ \begin{array}{l} \sigma_a = \sigma_{\text{amortisseur}} \\ \sigma_r = \sigma_{\text{ressort}} \\ \varepsilon_a = \varepsilon_{\text{amortisseur}} \\ \varepsilon_r = \varepsilon_{\text{ressort}} \end{array} \right.$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (5.10)$$

On applique les formules de Laplace on trouve

$$p\varepsilon(p) = \frac{p\sigma(p)}{E_0} + \frac{\sigma(p)}{\eta}$$

$$p\varepsilon(p) = \left(\frac{p}{E_0} + \frac{1}{\eta}\right)\sigma(p)$$

$$M(p) = \frac{\sigma(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{p}{\frac{p}{E_0} + \frac{1}{\eta}}$$

$$M(p) = \frac{p}{\frac{\eta p + E_0}{E_0 \eta}}$$

$$M(p) = \frac{p \eta E_0}{\eta p + E_0}$$

$$M(p) = E_0 \frac{p \eta}{\eta p + E_0}$$

On divise sur  $E_0$  on obtient :

$$M(p) = E_0 \frac{\frac{p \eta}{E_0}}{\frac{p \eta}{E_0} + 1}$$

On remplace la variable  $p$  avec son égalité dans le domaine fréquentielle qui égale à  $(j\omega)$  et on pose  $b = \frac{\eta}{E_0}$  on obtient:

$$M(j\omega) = E_0 \frac{j b \omega}{j b \omega + 1}$$

On sépare la partie réelle et la partie imaginaire du module, on obtient

$$M(j\omega) = \frac{E_0 (b\omega)^2}{1^2 + (b\omega)^2} + j \frac{E_0 b \omega}{1^2 + (b\omega)^2}$$

### La fonction de relaxation :

D'après la relation (III.10)

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

On sait que la déformation est imposée

$$\text{Donc : } \dot{\varepsilon}(t) = 0$$

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = 0$$

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} = -\frac{\sigma(t)}{\eta}$$

$$\frac{d\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)} = -\frac{E_0}{\eta} dt$$

On fait l'intégrale :

$$\int \frac{d\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)} = \int -\frac{E_0}{\eta} dt$$

$$\ln \sigma(t) = -\frac{E_0}{\eta} t + c'$$

$$e^{\ln \sigma(t)} = e^{(-\frac{E_0}{\eta} t + c')}$$

$$\sigma(t) = B e^{-\frac{E_0 t}{\eta}} \quad (\text{III.10})$$

On calcule la valeur de  $B$  avec les conditions initiales

A  $t=0$  : toute la déformation est reprise par le ressort

$$\sigma(0) = B e^0 = E \varepsilon_0$$

$$B = E \varepsilon_0$$

On remplace cette valeur dans l'équation (III.10)

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 e^{-\frac{E_0 t}{\eta}}$$

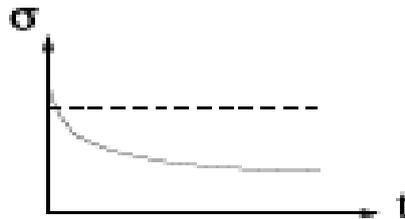
$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{b}} \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$b = \frac{\eta}{E_0}$  le temps de relaxation caractéristique (temps nécessaire pour que la contrainte diminue de 37 % de sa valeur).

Cette équation représente l'évolution de la contrainte au cours du temps dans le cas de relaxation

Comme elle est représentée sur la figure suivante



Figure(III.11) : l'évolution de la contrainte  $\sigma = f(t)$

- la réponse d'un élément de Maxwell dans un essai de traction ( $\sigma - \varepsilon$ ) à  $\neq$  valeurs de vitesse de déformation (supposée constante) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_r = \sigma_a \\ \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_a \\ \sigma_r = E \varepsilon_r \\ \dot{\varepsilon}_a = \frac{\sigma_a}{\eta} \text{ et } \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_a \end{array} \right. \quad \text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = \sigma_{\text{amortisseur}} \\ \sigma_r = \sigma_{\text{ressort}} \\ \varepsilon_a = \varepsilon_{\text{amortisseur}} \\ \varepsilon_r = \varepsilon_{\text{ressort}} \end{array} \right.$$

D'après la relation (III.10)

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta}$$

La solution de cette équation est donnée comme suit

$$s_g = s_p + s_f$$

### 1) la solution forcée :

Dans cette solution on prend la dérivée de la contrainte égale à zéro :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{III.12})$$

### 2) la solution particulière :

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} = -\frac{\sigma(t)}{\eta}$$

$$\frac{d\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)} = -\frac{E_0}{\eta} dt$$

On fait l'intégrale :

$$\int \frac{d\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)} = \int -\frac{E_0}{\eta} dt$$

$$\ln \sigma(t) = -\frac{E_0}{\eta} t + c''$$

$$e^{\ln \sigma(t)} = e^{(-\frac{E_0}{\eta} t + c'')}$$

$$\sigma(t) = c e^{-\frac{E_0}{\eta} t}$$

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon} + c e^{-\frac{E_0}{\eta} t} \quad (\text{III.13})$$

On calcule la valeur de  $C$  avec les conditions initiales :

$$\text{A } t=0 : \sigma(t)_{t=0} = 0$$

$$\sigma(0) = \eta \dot{\varepsilon} + c e^0 = 0$$

$$c = -\eta \dot{\varepsilon}$$

On remplace dans l'équation (III.13)

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon} + -\eta \dot{\varepsilon} e^{-\frac{E_0 t}{\eta}}$$

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon} (1 - e^{-\frac{E_0 t}{\eta}}) \tag{III.14}$$

Avec :  $\frac{\varepsilon}{t} = \dot{\varepsilon}_0$  la vitesse de déformation est constante

On remplace dans l'équation (5.14)

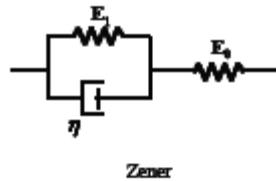
$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon} (1 - e^{-\frac{E_0}{\eta \dot{\varepsilon}} \varepsilon}) \tag{III.15}$$

**Remarque :**

Le modèle de Maxwell se comporte comme un fluide car il continu à se déformer tant qu'il est sollicité.

**III.6.3 Modèle de Zener [13]**

Le modèle de Zener comme il est représenté dans la **figure(12)** est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres  $(E_1, \eta)$  en série avec un ressort de module d'élasticité  $E_0$ . Si  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et  $\sigma$  la contrainte associée.



**Figure(III.12) : Modèle de Zener**

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$$

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1$$

On applique les lois de Laplace :

$$\sigma_0(p) = E_0 \varepsilon_0(p)$$

$$\varepsilon_0(p) = \frac{\sigma_0(p)}{E_0}$$

$$\sigma_1(p) = E_1 \varepsilon_1(p) + \eta p \varepsilon_1(p) \iff \sigma_1(p) = (E_1 + \eta p) \varepsilon_1(p) \iff \varepsilon_1(p) = \frac{\sigma_1(p)}{E_1 + \eta p}$$

Avec  $\sigma(p) = \sigma_0(p) = \sigma_1(p)$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \iff \varepsilon(p) = \varepsilon_0(p) + \varepsilon_1(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{\sigma_0(p)}{E_0} + \frac{\sigma_1(p)}{E_1 + \eta p}$$

$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta p} \right) \sigma(p) \quad (5.16)$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{\sigma(p)} = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta p} \right)$$

$$\frac{1}{M(p)} = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta p} \right)$$

$$\frac{1}{M(p)} = \frac{(E_1 + \eta p) + E_0}{(E_1 + \eta p)E_0}$$

$$M(p) = \frac{(E_1 + \eta p)E_0}{(E_1 + \eta p) + E_0} \quad (5.17)$$

On remplace la variable p avec son égalité dans le domaine fréquentielle qui égale à (jw)

$$M(jw) = \frac{(E_1 + \eta jw)E_0}{(E_1 + \eta jw) + E_0} \quad \Rightarrow \quad M(jw) = \frac{E_1 E_0 (1 + j \frac{\eta}{E_1} w)}{E_1 + E_0 (1 + jw \frac{\eta}{E_1 + E_0})}$$

$$M(jw) = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0} \left( \frac{(1 + j \frac{\eta}{E_1} w)}{1 + jw \frac{\eta}{E_1 + E_0}} \right)$$

En pose :

$$\begin{cases} a = \frac{\eta}{E_1} \\ c = \frac{\eta}{E_1 + E_0} \\ E = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0} \end{cases}$$

$$M(jw) = E \left( \frac{(1 + jaw)}{1 + jcw} \right) \quad (5.18)$$

On sépare la partie réelle et la partie imaginaire, la relation (5.18) devient

$$M(jw) = E \frac{1 + acw^2}{1 + cw^2} + jE \frac{(a - c)w}{1 + cw^2}$$

a Le temps à l'équilibre

c Le temps caractéristique de relaxation

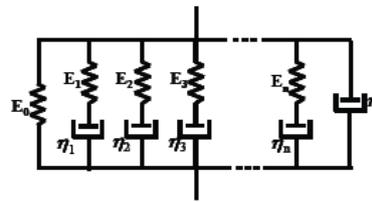
E Le Module d'élasticité

η Le coefficient d'amortissement

### III.6.4 Le modèle de Maxwell généralisé [12]

Le modèle de Maxwell généralisé, constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt en Parallèle avec plusieurs modèles de Maxwell, fait partie de ce type de modèle il nous donne une bonne description du comportement pour une grande variété de matériaux viscoélastiques, Cependant, il nécessite un nombre important de paramètres et leur identification devient onéreuse numériquement.

Et le schéma de ce modèle est donné comme suit :



**Figure(III.13)** : Le modèle de Maxwell généralisé

### III.7. Conclusion :

D'après les différents modèles qu'on a vus, ils cherchent tous à donner des modèles faciles pour la modélisation des matériaux afin d'améliorer le comportement de ces matériaux et les rendre plus adaptés au domaine pratique.





*Chapitre IV*  
*Partie pratique*

## **IV.1. Introduction**

Dans ce chapitre nous allons exposer la partie expérimentale, on commence par énumérer les différents matériels utilisés et le protocole expérimental et on termine par l'exposition et l'analyse des résultats obtenus.

## **IV.2. Matériels utilisés**

- un vibromètre **VB 8202** pour mesurer le niveau global des vibrations
- un accéléromètre à embase à aimant (**KS 51**) branché à l'oscilloscope
- un ordinateur pour afficher le signal et avec logiciel conçu pour l'oscilloscope (**open choice ver 1.10**)
- un oscilloscope digital : **TECTRONIX TDS 1012** (collecteur et analyseur)
- un stroboscope pour mesurer la vitesse de rotation du moteur
- un moteur asynchrone
- un variateur de vitesse (mode L200-030HFEF2)
- des amortisseurs en élastomères qu'on a achetés dans le commerce

## **IV.3. Manipulation**

### **IV.3.1. Première partie**

#### **IV.3.1.1. Premier essai**

Dans ce premier essai on utilise un moteur asynchrone avec un rotor équilibré et un variateur de vitesse, on pose le moteur sur des amortisseurs en élastomère, on mesure les vibrations du moteur à l'aide d'un accéléromètre et d'un oscilloscope pour des vitesses de rotation du moteur différentes [200-3000].

#### **IV.3.1.2. Deuxième essai**

Dans ce deuxième essai on refait la même chose que le premier essai mais cette fois-ci on utilise un moteur muni d'un balourd fixé sur son arbre.

### **IV.3.2. Deuxième partie**

#### **IV.3.2.1. Premier essai**

On met les pattes du moteur asynchrone entre deux amortisseurs en élastomère, on laisse le moteur tourner, avec un variateur de vitesse on change la vitesse de rotation du moteur [200-1400] (tr /mn), et on capte les signaux de ces vibrations avec un accéléromètre et oscilloscope.

IV.3.2.2. Deuxième essai

On refait la même chose que le premier essai mais cette fois-ci on utilise un moteur muni d'un balourd fixé sur l'arbre du moteur.

IV.3.2.3. Troisième essai

Dans ce troisième essai on refait la même chose que le premier essai mais cette fois-ci on comprime les amortisseurs

IV.3.2.4. Quatrième essai

Dans ce quatrième essai on refait la même chose que le troisième essai mais cette fois-ci on fixe un balourd sur l'arbre du moteur

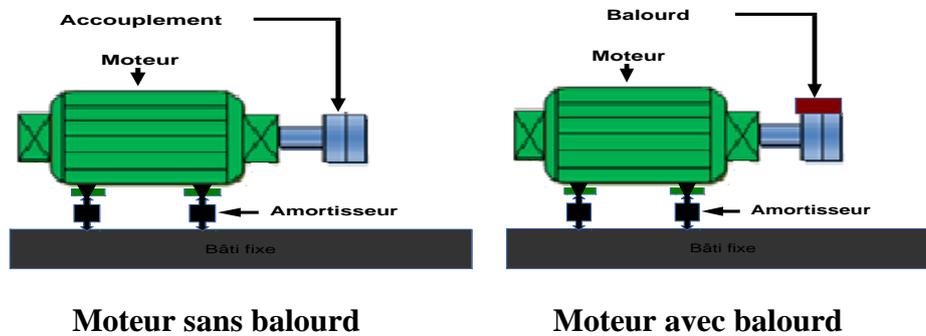


Figure (IV.1) : moteur avec et sans balourd fixé sur simple amortisseur

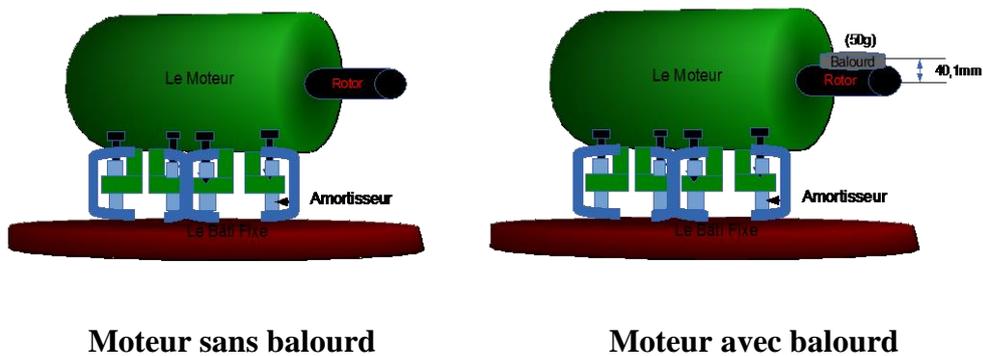


Figure (IV.2) : moteur avec et sans balourd fixé sur double amortisseurs

IV.4. La méthode d'analyse

Dans notre travail la méthode d'analyse pour les résultats obtenus est basée sur la comparaison entre les valeurs maximales des amplitudes, pour les différents essais suivants :

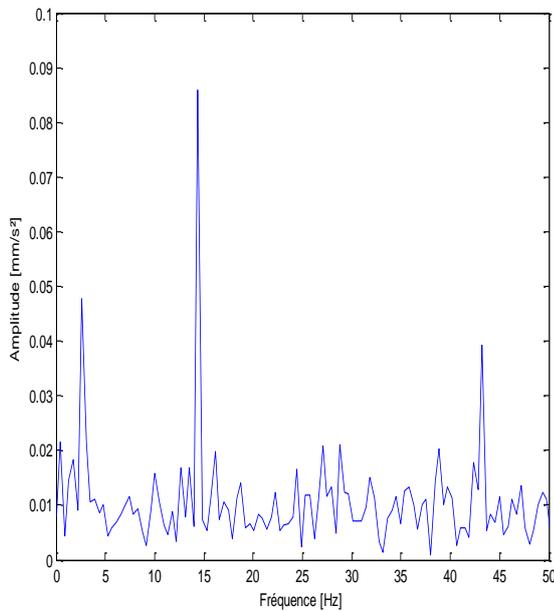
-entre le premier et le deuxième essai de la première partie.

- entre le premier essai et le troisième essai de la deuxième partie.
- entre le deuxième et le quatrième essai de la deuxième partie.
- entre le premier essai de la première partie et le premier essai de la deuxième partie.

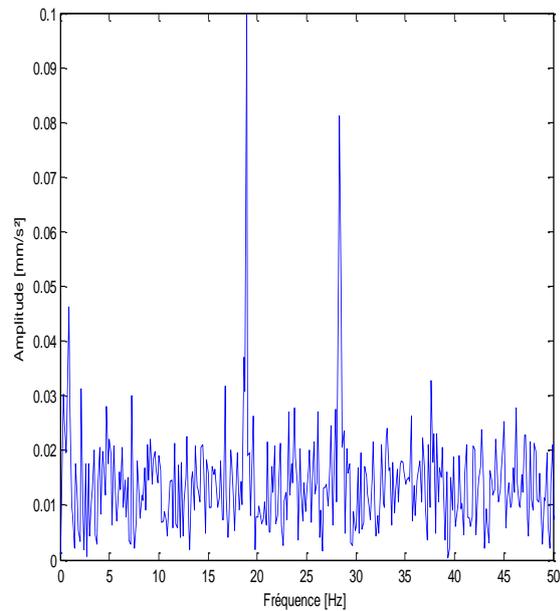
**IV.5.1.2 Les signaux obtenus pour chaque vitesse de rotation :**

Lorsque le moteur est posé sur simple amortisseurs (avec et sans balourd)

- Pour une vitesse de 200 tr/mn ( $f=3,33$  Hz) :



**Signal sans balourd**

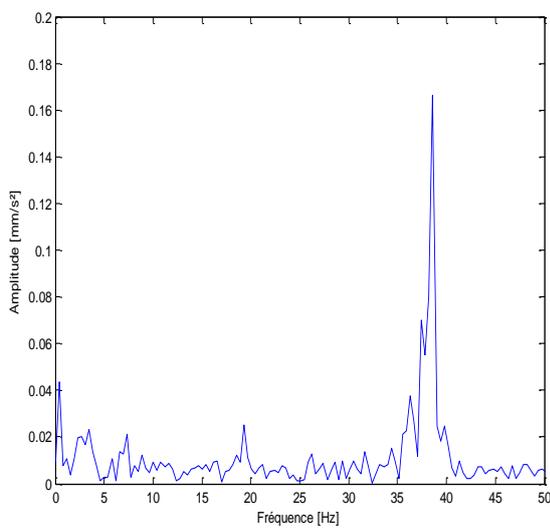


**signal avec balourd**

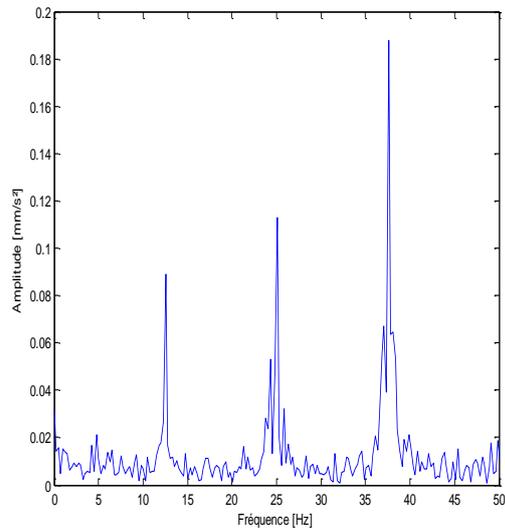
**Figure(IV.3) : pour une vitesse de 200tr/min**

On remarque qu’il existe des signaux parasites, les amplitudes sont faibles pour les deux signaux, mais l’amplitude maximale du signal avec balourd est un peu plus grande que celle sans balourd

- Pour une vitesse de 800 tr/mn ( $f=13,33$  Hz)



**Signal sans balourd**

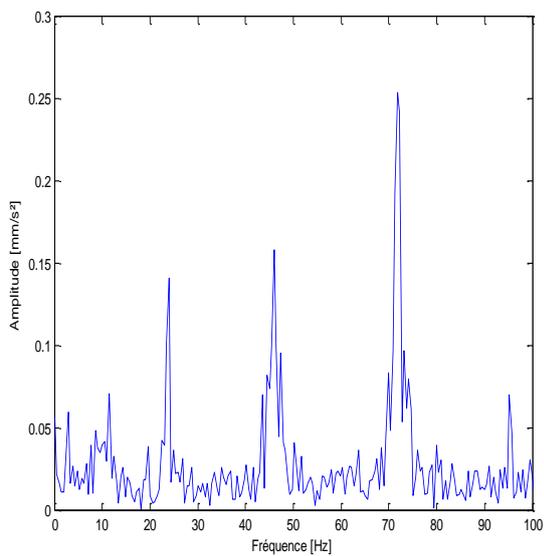


**signal avec balourd**

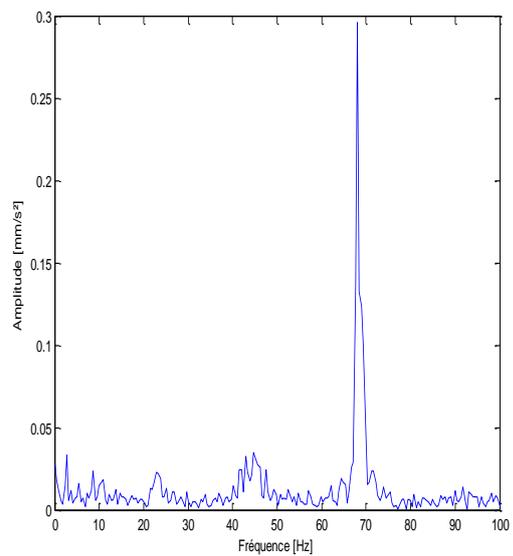
**Figure(IV.4) : pour une vitesse de 800tr/min**

On remarque pour les deux signaux l'existence d'un défaut de balourd propre au moteur, et l'amplitude maximale est plus grande pour le signal avec balourd.

- Pour une vitesse de 1400 tr /mn ( $f=23,33$  Hz) :



**Signal sans balourd**

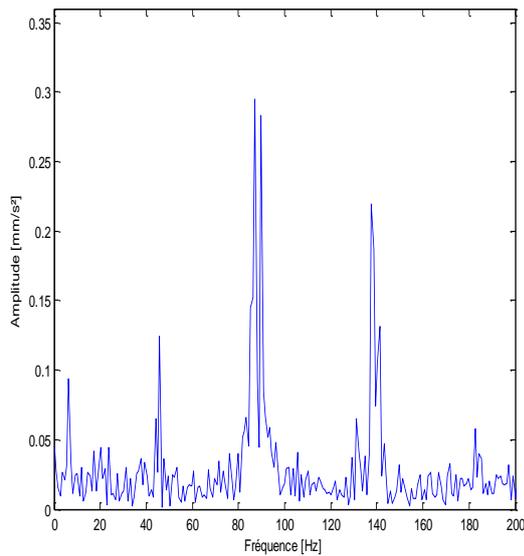


**signal avec balourd**

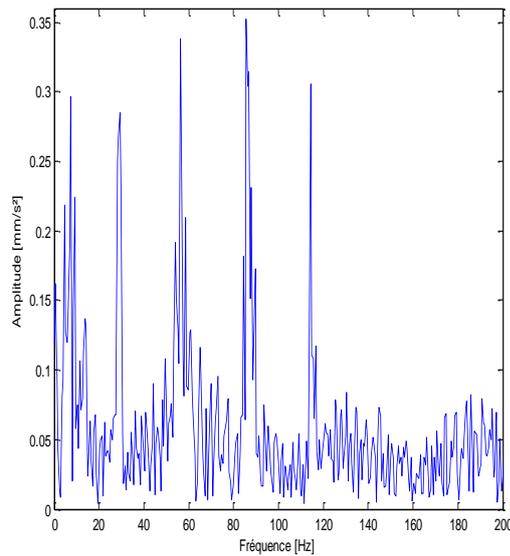
**Figure(IV.5) : pour une vitesse de 1400tr/min**

On remarque pour le premier signal qu'il y'a apparition d'un défaut de balourd propre au moteur, et dans le deuxième essai les pics n'apparaissent pas pour la fréquence de rotation et pour  $2*Fr$ , et il apparait à  $3*Fr$  ce qui signifie un défaut de balourd, et son amplitude est plus grande que celle du signal sans balourd.

- Pour une vitesse de 1800 tr/mn ( $f=30$  Hz)



Signal sans balourd

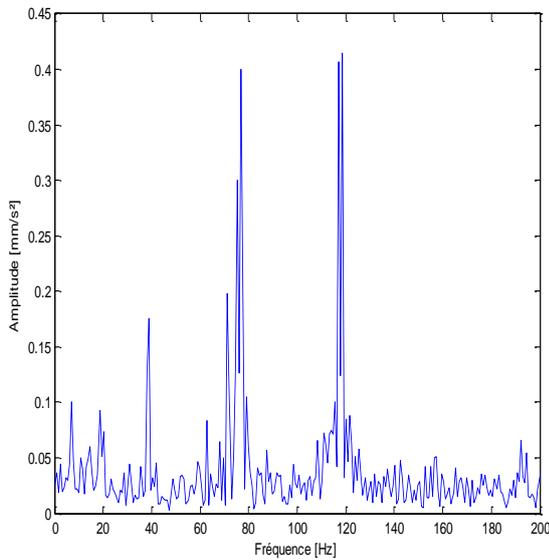


signal avec balourd

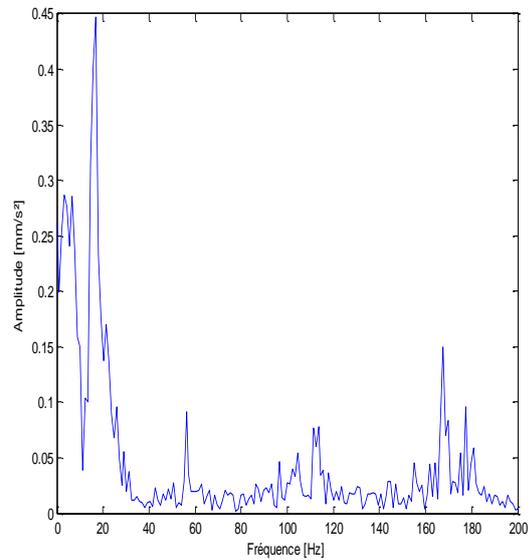
Figure(IV.6) : pour une vitesse de 1800tr/min

On remarque qu'il y a toujours l'existence d'un balourd propre du moteur et les amplitudes sont toujours plus grandes pour le signal avec balourd.

- Pour une vitesse de 2400 tr/mn ( $f=40$  Hz)



**Signal sans balourd**



**signal avec balourd**

**Figure(IV.7) : pour une vitesse de 2400tr/min**

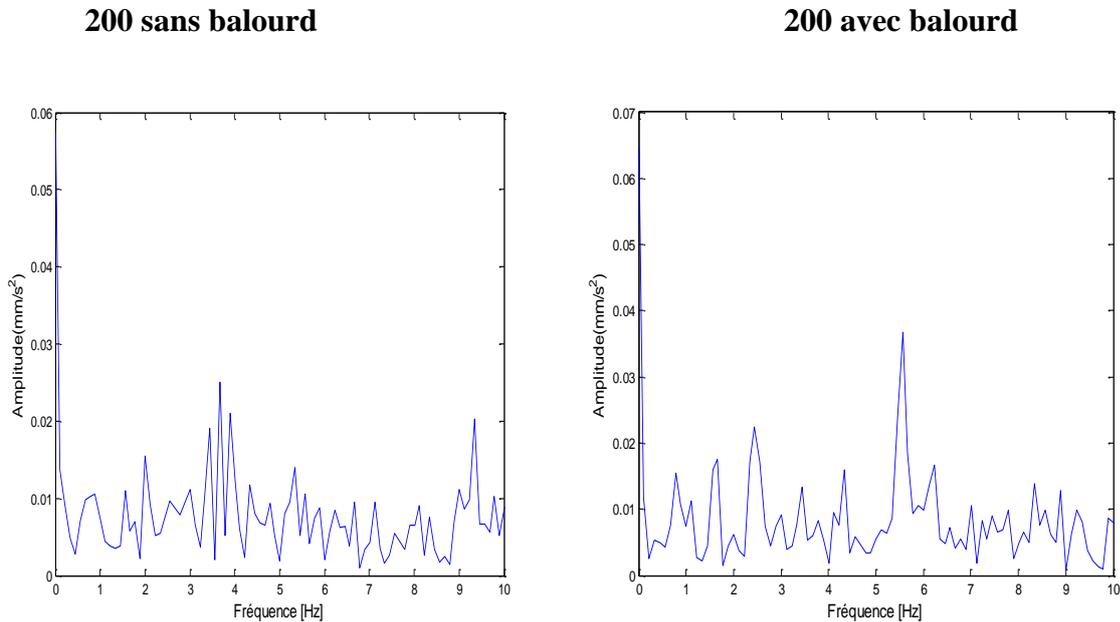
On remarque que les amplitudes sont augmentées dans les deux signaux mais elles sont toujours plus grandes pour celui avec balourd.

**Remarque :** La suite des signaux est mise dans l'annexe.

#### IV.5.2.1 Les signaux obtenus à différent vitesse pour chaque serrage :

- a) pour une longueur  $L=21.2$ mm :

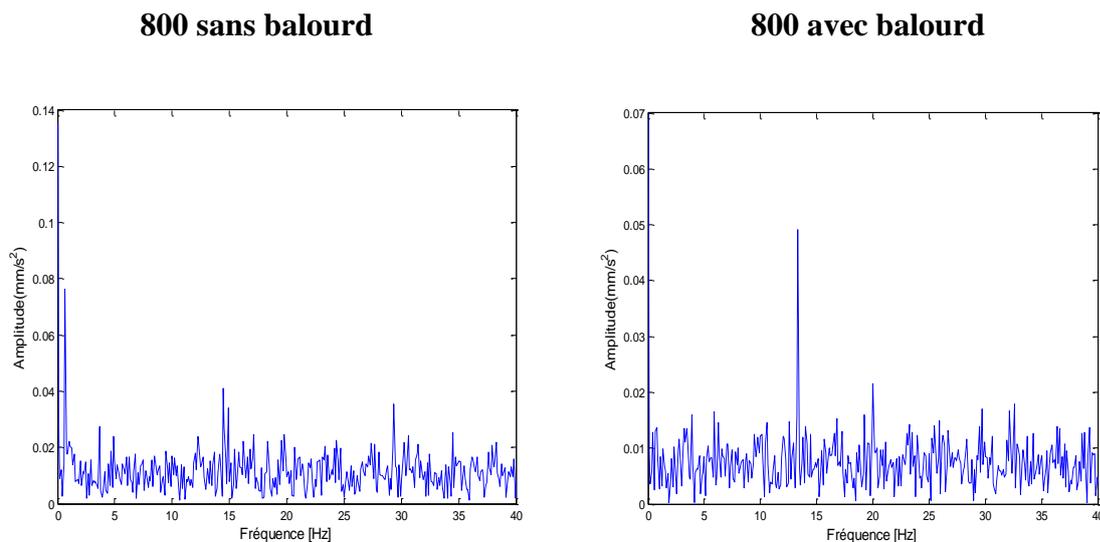
- Pour une fréquence 3.33Hz (N=200tr/min) :



**Figure(IV.8) :** pour une vitesse de 200tr/min

On remarque qu'il existe des signaux parasites, et les amplitudes sont faibles dans les deux cas mais il y a une légère différence pour l'amplitude maximale qui est un peu plus grande pour le signal avec balourd.

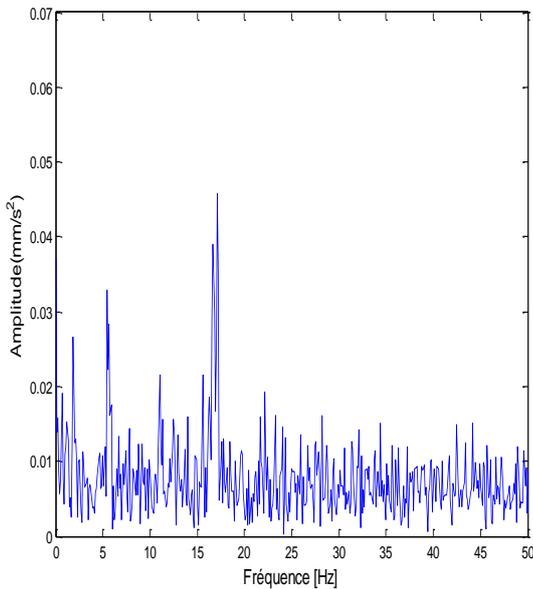
- Pour une fréquence de 13.33Hz (N=800 tr/min) :



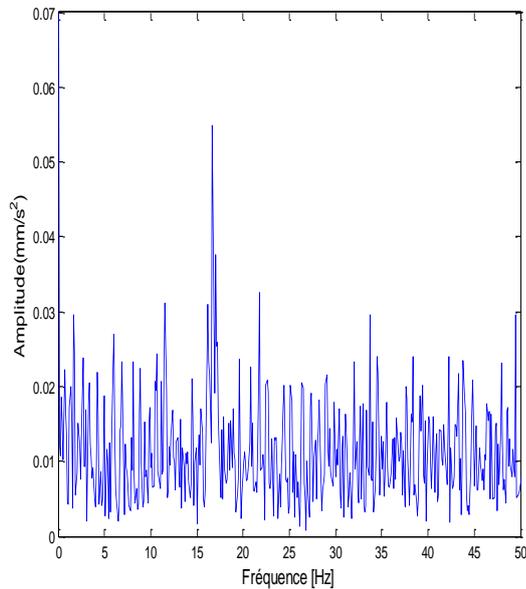
**Figure(IV.9) :** pour une vitesse de 800tr/min

On remarque qu'il existe un défaut de balourd pour les deux cas se qui signifie un balourd résiduel, les amplitudes sont augmentées à cause de l'augmentation de la vitesse mais toujours plus grandes pour le signal avec balourd.

- Pour une fréquence de 16.66Hz (N=1000 tr/min) :



Signal sans balourd



signal avec balourd

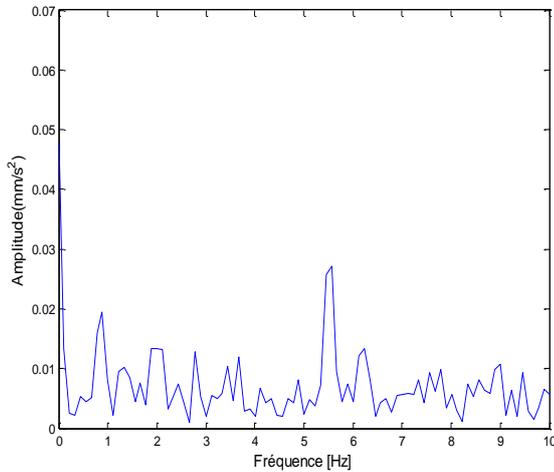
Figure(IV.10) : pour une vitesse de 1000tr/min

On remarque que l'amplitude maximale est plus grande dans le signal avec balourd que celui sans balourd et l'existence d'un balourd propre au moteur.

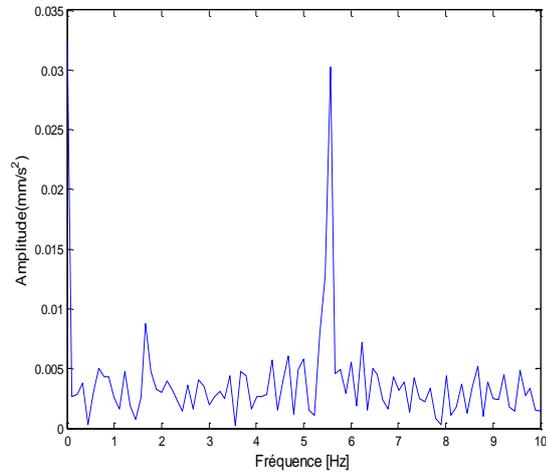
**Remarque** : La suite des signaux est mise à l'annexe.

b) pour une longueur  $L=18.5\text{mm}$  :

- Pour une fréquence de 3.33Hz (N=200 tr/min) :



200 sans balourd

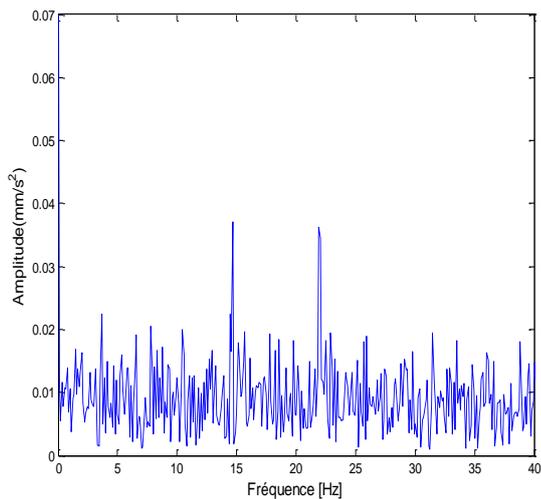


200 avec balourd

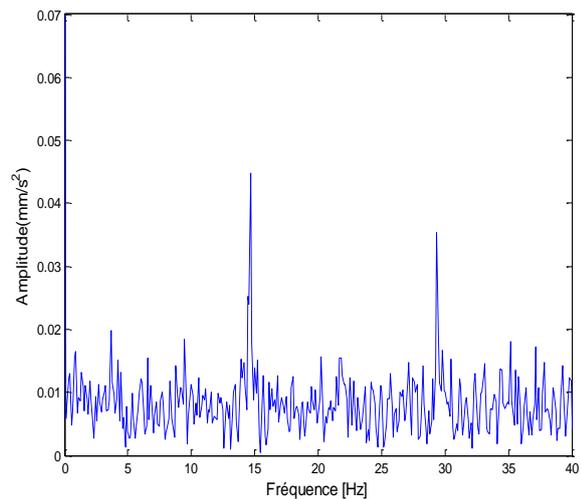
Figure(IV.11) : pour une vitesse de 200tr/min

On remarque qu'il existe des signaux parasites, et les amplitudes sont très faibles dans les deux cas mais il y a une légère différence pour l'amplitude maximale qui est un peu plus grande pour le signal avec balourd.

- Pour une fréquence de 13.33Hz (N=800 tr/min) :



800 sans balourd

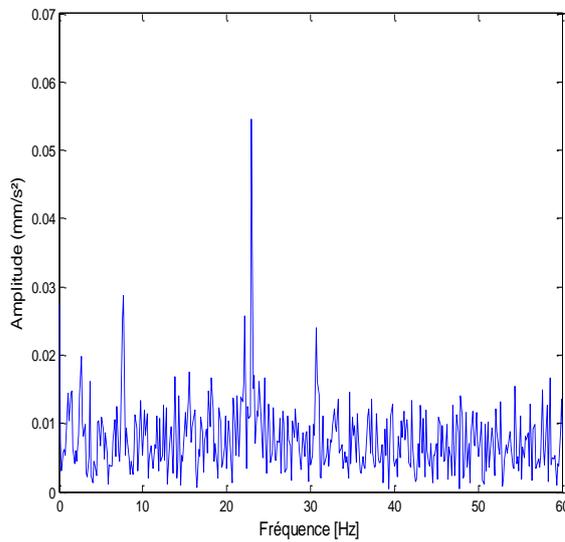


800 avec balourd

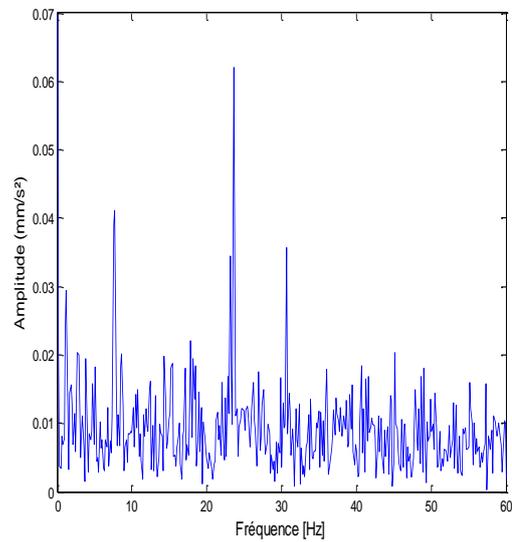
Figure(IV.12) : pour une vitesse de 800tr/min

On remarque qu'il existe un défaut de balourd résiduel et les amplitudes sont plus grandes pour le signal avec balourd

- Pour une fréquence de 23.33Hz (N=1400 tr/min)



Signal sans balourd



Signal avec balourd

Figure(IV.13) : pour une vitesse de 1400tr/min

On remarque pour cette vitesse que le pic apparait à la fréquence de rotation ce qui implique un défaut de balourd, et les amplitudes sont toujours augmentées dans le signal avec balourd que celui sans balourd

- Remarque : La suite des signaux est mise à l'annexe.

**IV.6. Etudes et analyse des graphes**

**IV.6.1. Première partie**

On remarque dans l'intervalle de vitesse de [200-600] ils existent des signaux parasites, l'amplitude est très faible car les effets de la force centrifuge sont négligeables ( $\omega$  est très petit). Dans l'intervalle [600-3000] il y a apparition de vibrations de fréquence égale à celle de la rotation du moteur ce qui indique l'existence d'un balourd propre au moteur

Pour le deuxième essai on remarque toujours pour les petites vitesses qu'il existe des signaux parasites et lorsque la vitesse augmente le défaut de balourd disparaît pour quelques signaux d'où on constate que le balourd placé sur l'arbre du moteur a équilibré le balourd propre du moteur, et pour les amplitudes ils sont augmentées lorsqu'on a fixé un balourd sur l'arbre du moteur.

**IV.6.2. Deuxième partie**

**Sans compression**

On remarque pour les vitesses de [200-400] l'existence de signaux parasites car la force centrifuge a une faible influence ( $\omega$  est très petit) et les amplitudes sont faibles.

Pour les vitesses [400,1400] les amplitudes augmentent avec l'augmentation de la vitesse (lorsque  $\omega$  augmente la force centrifuge augmente  $F=m\omega^2r$ ) mais ils sont toujours plus grandes pour les essais avec balourd que ceux sans balourd.

**Avec compression**

Ci la même remarque que l'essai sans compression mais cette fois-ci les amplitudes sont plus petites.

**IV.7. Comparaison entre les essais**

<b>Amortisseur simple</b>	<b>Double amortisseurs</b>	<b>Double amortisseurs</b>
	<b>Sans serrage</b>	<b>Avec serrage</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

**0 : sans balourd , 1 : avec balourd**

**Tableau montrant les différents essais qu'on a fait**

**A** -Moteur avec simple amortisseur sans et avec balourd

**B** -Moteur avec double amortisseur avec et sans serrage

**C**-Moteur avec double amortisseur avec balourd avec et sans serrage

**D**-Moteur avec double amortisseur et moteur avec simple amortisseur sans balourd

**A** : les deux graphes montrent la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse ;le moteur est fixé sur des simple amortisseurs.

-graphe bleu : sans balourd

-graphe rouge :avec balourd

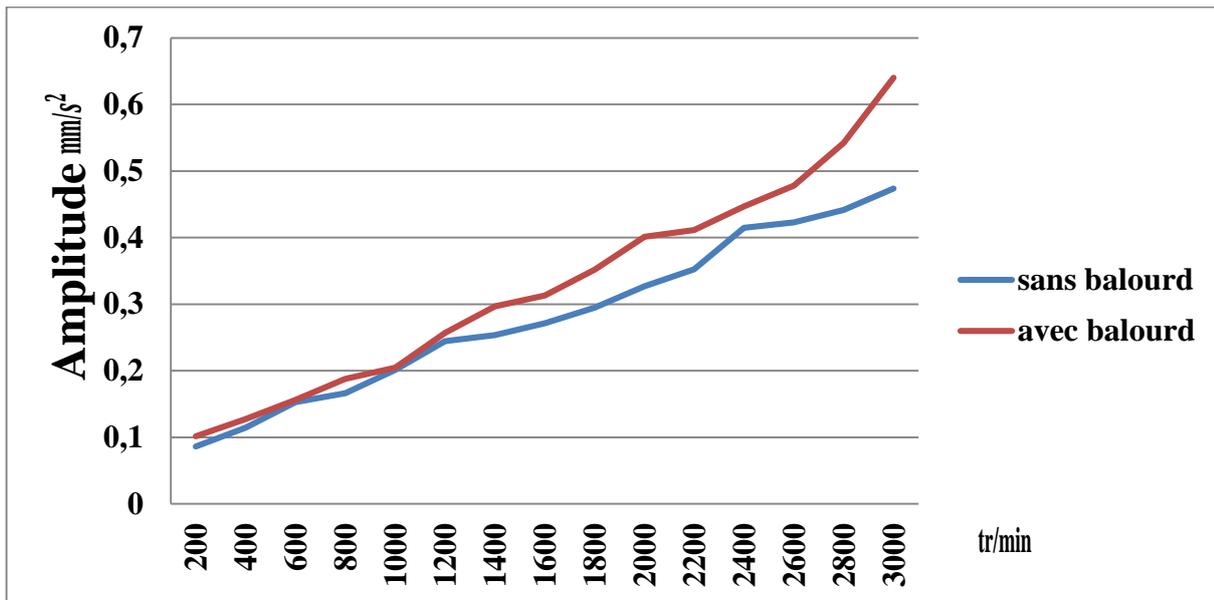


Figure (IV.14) : comparaison entre un moteur avec et sans balourd

**Interprétation**

On remarque que dans l'intervalle [200-1200] les amplitudes augmentent presque avec la même manière pour les deux graphes avec une légère différence, et dans l'intervalle de 1200 jusqu'à 3000 les amplitudes augmentent toujours dans les deux graphes mais d'une façon plus grande pour le graphe avec balourd que le graphe sans balourd.

La différence entre les amplitudes a la vitesse maximale de 300 tr/mn atteint 23,15%.

D'où on constate que lorsqu'il y a un balourd sur l'arbre du moteur il y'a une augmentation des amplitudes a cause de la force centrifuge.

**B** : Les deux graphes montrent la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse ; le moteur est fixé sur double amortisseur.

Graphe bleu : sans serrage

Graphe rouge : avec serrage

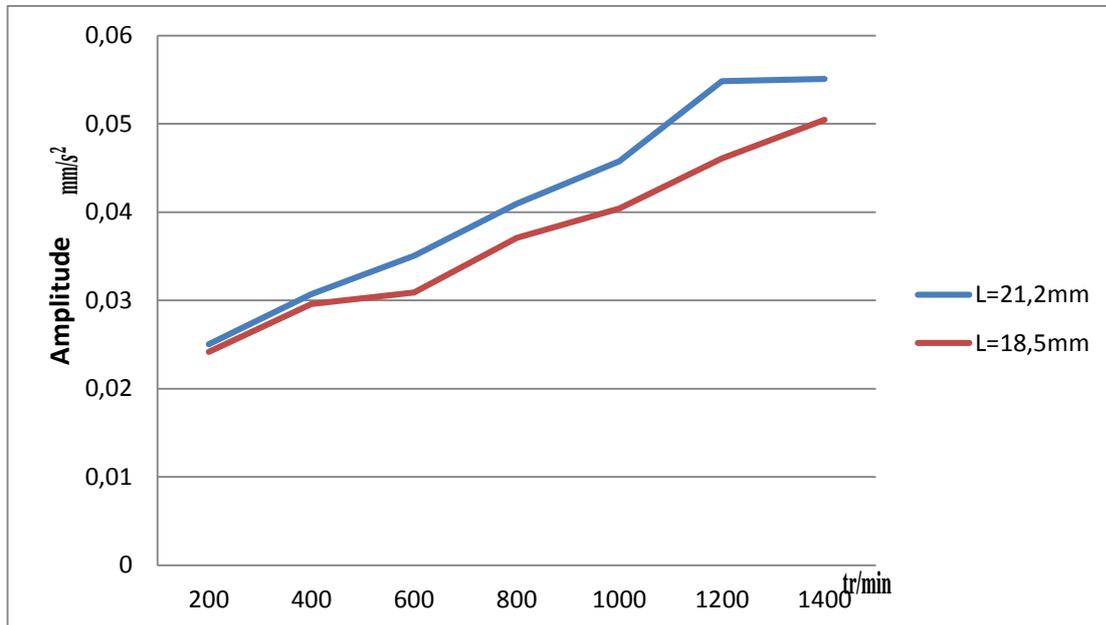


Figure (IV.15) : comparaison entre des amortisseurs comprimés et non comprimés

### Interprétation

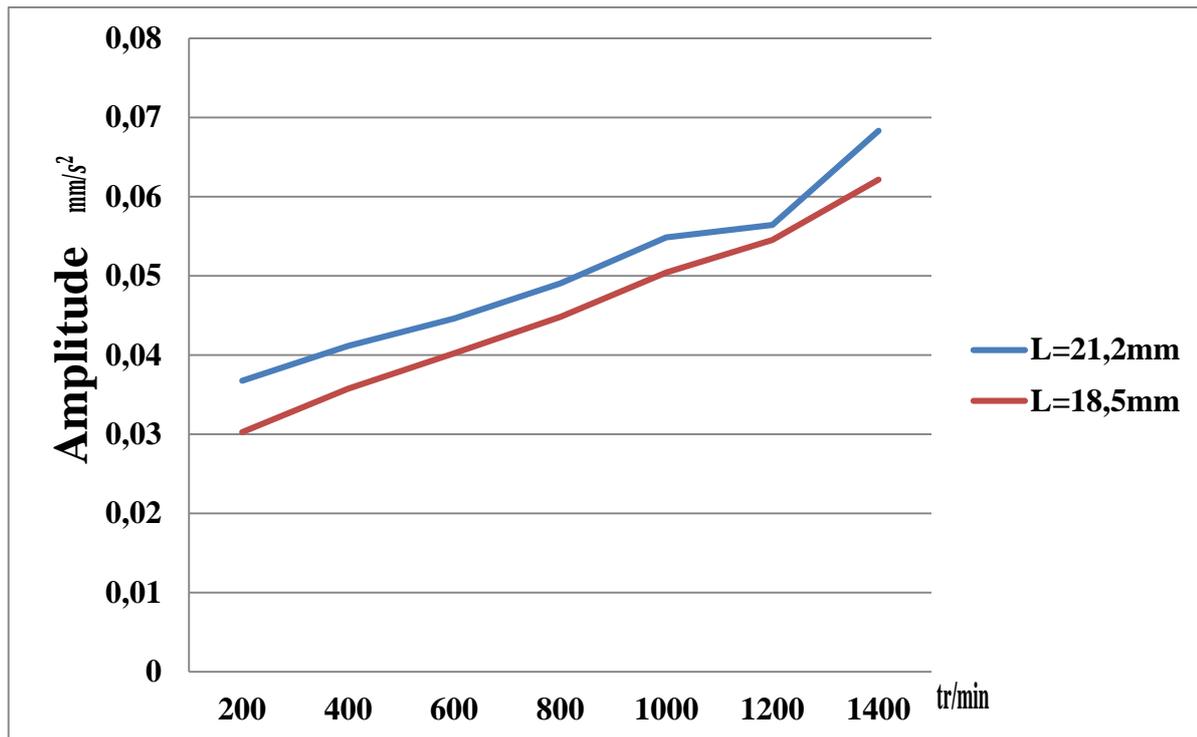
On remarque dans l'intervalle [200-400] les amplitudes sont presque les mêmes pour les deux graphes et pour l'intervalle [400-1400] les amplitudes augmentent toujours mais d'une façon plus grande pour le graphe sans compression

D'où on constate que les amplitudes sont plus faibles lorsqu'on comprime les amortisseurs.

**C :** Les deux graphes montrent la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse ; le moteur muni d'un balourd sur son arbre est fixé sur double amortisseurs.

Graphe bleu : sans serrage

Graphe rouge : avec serrage



Figure(IV.16) : comparaison entre amortisseurs comprimés et non comprimés pour un moteur avec balourd

### Interprétation

On remarque que dans les deux courbes les amplitudes augmentent en fonction de la vitesse et presque d'une manière linéaire, mais dans le graphe sans compression les amplitudes sont un peu plus grandes que celles du graphe avec compression, pour la vitesse de 200 tr/mn l'amplitude du graphe sans compression est plus grande de 16,66% par rapport à celle du graphe avec compression et pour la vitesse de 1400 tr/mn l'amplitude de graphe sans compression est plus grande de 8,7% par rapport à celle du graphe avec compression.

D'où on constate que lorsqu'on place les pattes de notre moteur entre deux amortisseurs comprimés les amplitudes diminuent mais s'ils sont trop comprimés les vibrations seront transmises à la partie sur laquelle les amortisseurs sont fixés.

**D :** Les deux graphes montrent la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse ; le moteur est fixé sur simple amortisseur pour le premier cas, il est fixé sur double amortisseur pour le deuxième cas.

Graphe bleu : simple amortisseur

Graphe rouge : double amortisseur

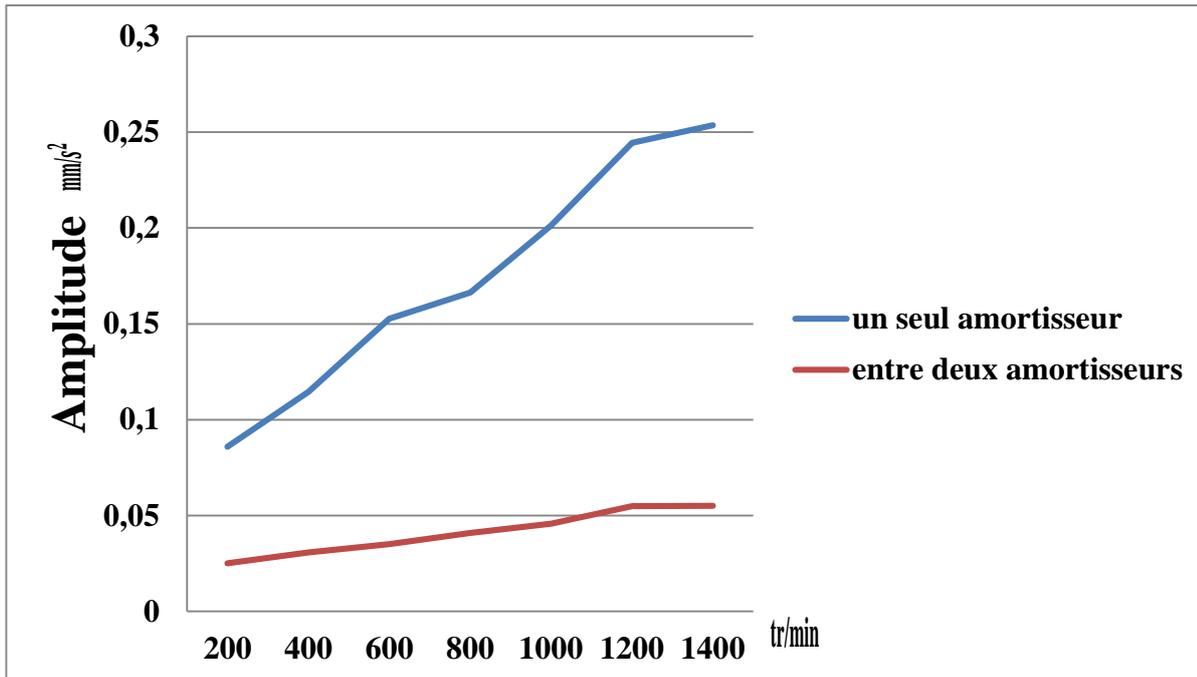


Figure (IV.17) : comparaison entre un seul et entre deux amortisseurs

### Interprétation

on remarque pour la vitesse de 200 tr/mn l'amplitude dans le graphe simple amortisseurs et le triple du graphe double amortisseurs, et lorsque la vitesse augmente les amplitudes augmentent pour les deux graphes, mais dans le graphe à double amortisseurs les amplitudes augmentent d'une manière très légère par rapport à celles du graphe à simple amortisseur qui augmentent d'une manière plus rapide, et pour la vitesse de 1400 tr/mn l'amplitude du graphe simple amortisseur est plus grande de 78% que celle du graphe double amortisseurs.

On constate que lorsqu'on place les pattes de notre moteur entre deux amortisseurs en élastomère les amplitudes sont plus faibles que lorsque le moteur est posé sur des amortisseurs en élastomères.

### IV.8. Conclusion

On conclue dans ce chapitre que les amortisseurs en élastomère permettent d'isoler les systèmes vibrants et diminuent leurs amplitudes, et lorsque un moteur est placé entre des amortisseurs en élastomère les amplitudes deviennent plus faibles que lorsque il est posé sur des amortisseurs en élastomères, et lorsque on comprime les amortisseurs les amplitudes diminuent par rapport aux amortisseurs non comprimés mais si on les comprime beaucoup notre système devient un système non isolé donc il y a une transmission de vibrations à la partie fixe.

## Conclusion Générale

---

Toutes les machines en fonctionnement produisent des vibrations, images des efforts dynamiques engendrés par les pièces en mouvement. Ainsi, une machine neuve en excellent état de fonctionnement produit très peu de vibrations. La détérioration du fonctionnement conduit le plus souvent à un accroissement du niveau des vibrations. Ces vibrations sont très néfastes engendrées parmi les premiers défauts qu'il faut éliminer, est pour sa en utilise les différents amortisseurs qui existent. Pour notre travail les amortisseurs que nous avons choisis ce sont des amortisseurs en élastomère qui sont caractérisés par (E et G). En dynamique le comportement viscoélastique linéaire peut être représenté par des modules complexes. La partie réelle de ces modules caractérise l'élasticité du matériau et la partie complexe caractérise la dissipation d'énergie de forme de chaleur. D'autre part ces polymères ont en général une dépendance du comportement avec la fréquence d'excitation, non seulement pour l'aspect dissipatif mais aussi pour l'aspect élastique. La modélisation du comportement mécanique des élastomères nécessite de bien maîtriser les phénomènes à prendre en compte. A cause de l'absence de la précision sur la fabrication des amortisseurs, ils ne sont pas arrivés à éliminer les vibrations d'une manière complète, mais on essaie toujours à minimiser leurs effets sur le fonctionnement des systèmes. D'après les différents modèles qu'on a vus, ils cherchent toujours à donner des modèles faciles pour la modélisation des matériaux, afin d'améliorer ces comportements et les rendre plus adaptés aux domaines pratiques.

## Référence bibliographique

---

- [1] DAVID BELIVEAU-VIEL. Étude des paramètres influençant le comportement D'un amortisseur hydraulique ajustable Approche par modélisation. Thèse doctorat (2010)
- [2] J. GEHANNIN. Modélisation complète des amortisseurs à film fluide.
- [3] Asma Kotrane<sup>1</sup>, Marc Thomas<sup>1</sup>, Conception, Réalisation et Caractérisation Dynamique D'un Amortisseur Magnéto-Rhéologique .Thèse doctorat (2009).
- [4] Thomas J. Roberts and Emanuel Azizi, The series-elastic shock absorber: tendons attenuate muscle power during eccentric actions. Article (2010)
- [5] Cédric LOPEZ. Méthodes D'optimisation Des Trains D'atterrissage D'hélicoptère .Thèses doctorat (2007).
- [6] Cours de surveillance des machines et diagnostic de défauts par analyse des vibrations
- [7] Cours Machinery vibration Analysis & Predictive Maintenance
- [8] Cours de mécanique vibratoire de POLYTECH'SAVOIE site d'Annecy. Auteur : Serge SAMPER
- [9] Cours de techniques de surveillance (surveillances des machines par analyse vibratoire)
- [10] Cour de physique (les vibrations) par le : Dr Aicha FLITTI
- [11] PHYSIQUE DES MATÉRIAUX: PARTIE POLYMÈRES Pr. J. Lecomte-Beckers Chapitre 6 : Rhéologie des matériaux polymères.
- [12] Thèse doctorat de l'institut national des sciences appliquées de Rouen par Aurélien 2007 Identification des propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesure de champs de réponse en fréquence de structure.
- [13] Thèses doctorat (modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc) 2003.

# *Annexe*

---

*Annexe*

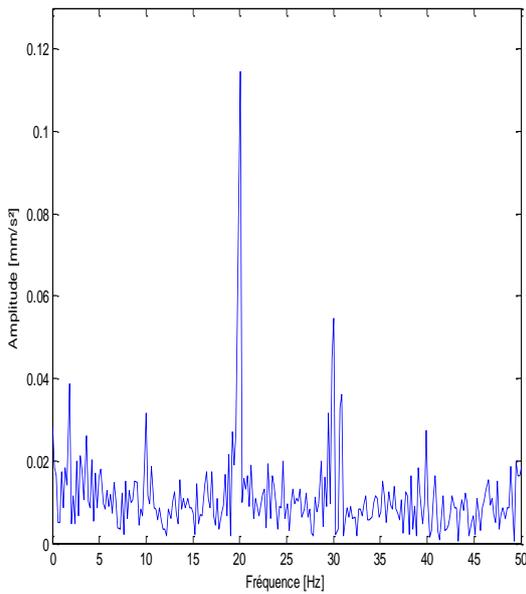
# Annexe

## Annexe I :

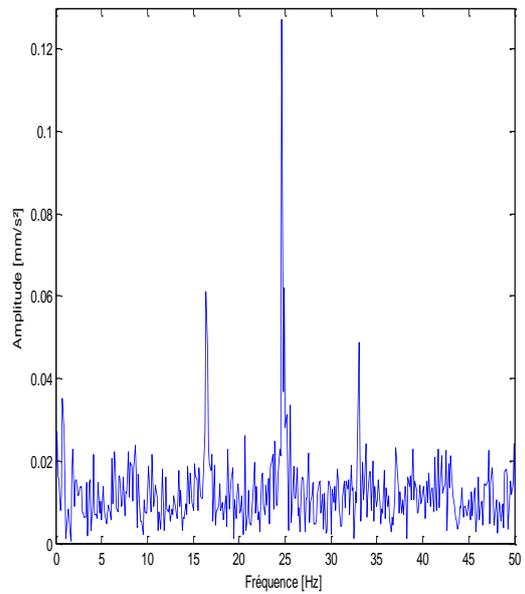
Dans l'annexe I on a regroupé tous les signaux qui sont restés de deux partie (1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup>) de chapitre IV.

- Les signaux de la 1<sup>ère</sup> partie :( le Moteur est placé sur les amortisseurs)
- Pour une vitesse de 400 tr/min ( $f=6,66$  Hz) :

Signal sans balourd

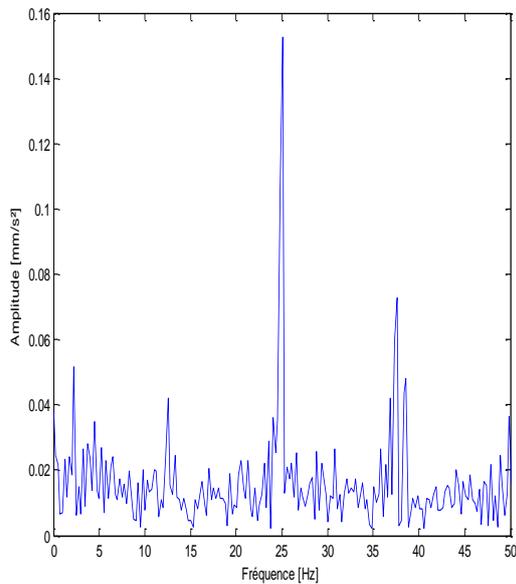


signal avec balourd

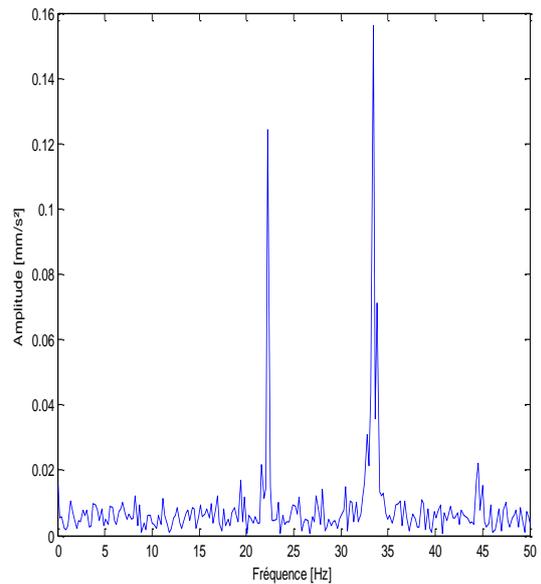


- Pour une vitesse de 600 tr/min ( $f=10$ Hz) :

Signal sans balourd



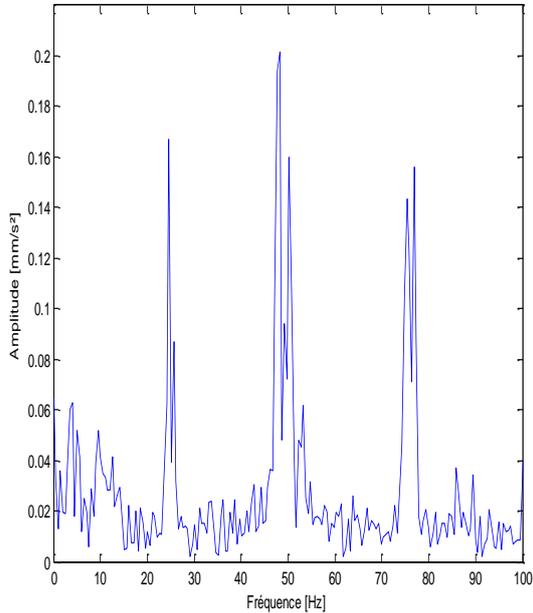
signal avec balourd



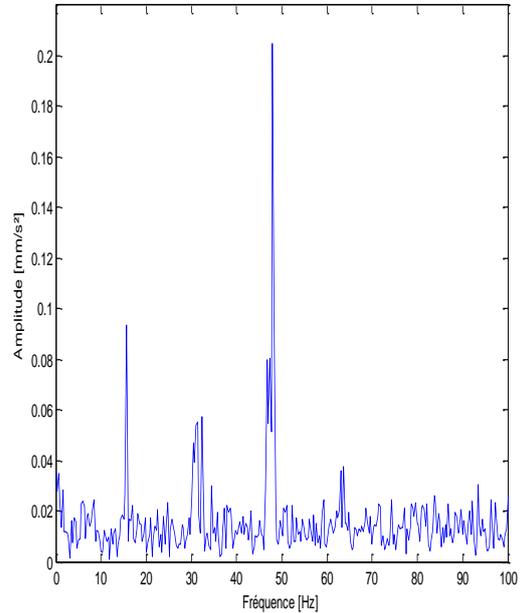
# Annexe

- Pour une vitesse de 1000 tr/min ( $f=16,33$  Hz) :

Signal sans balourd

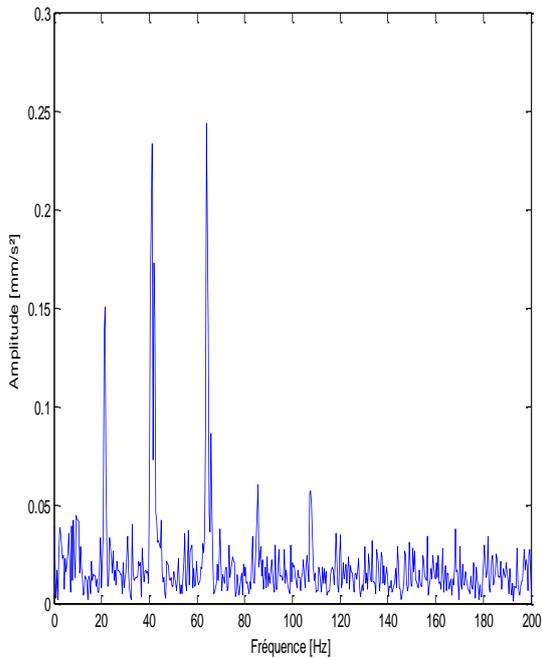


signal avec balourd

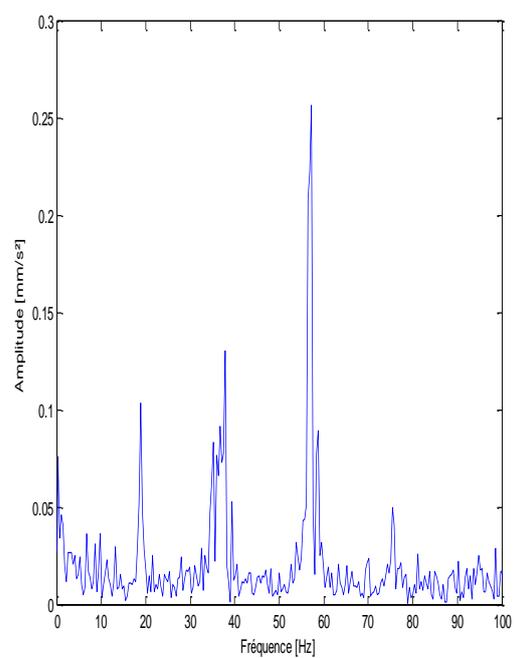


- Pour une vitesse de 1200 tr/min ( $f=20$  Hz) :

Signal sans balourd



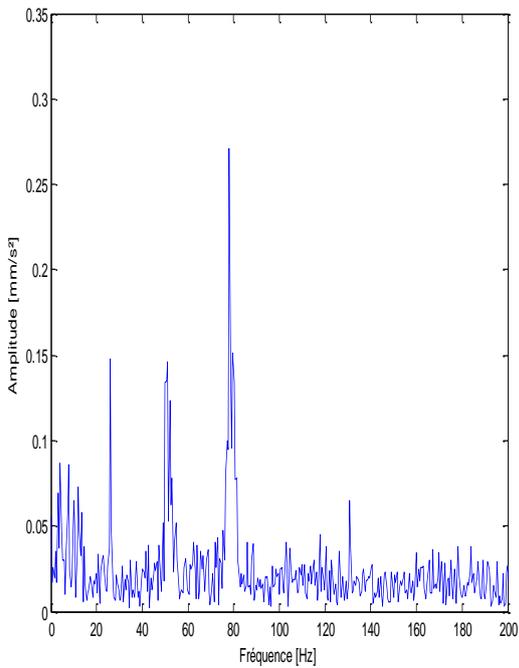
signal avec balourd



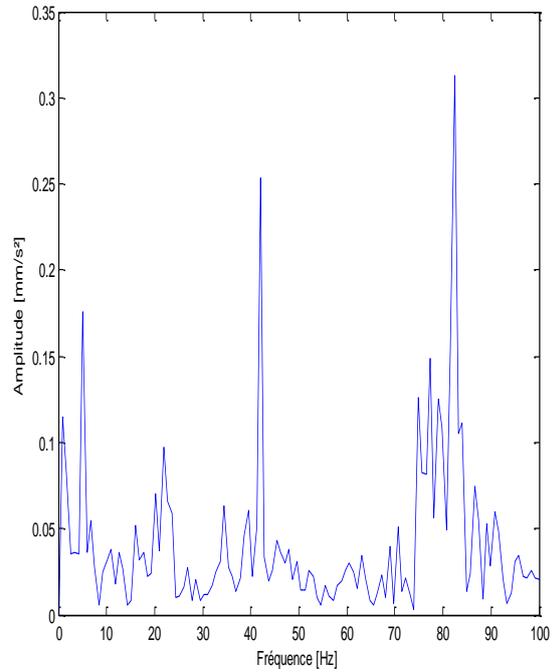
# Annexe

- Pour une vitesse de 1600 tr/min ( $f=26,66$  Hz) :

**Signal sans balourd**

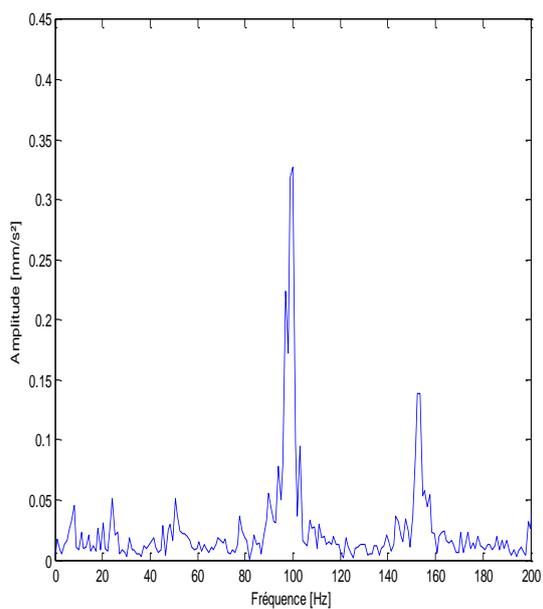


**signal avec balourd**

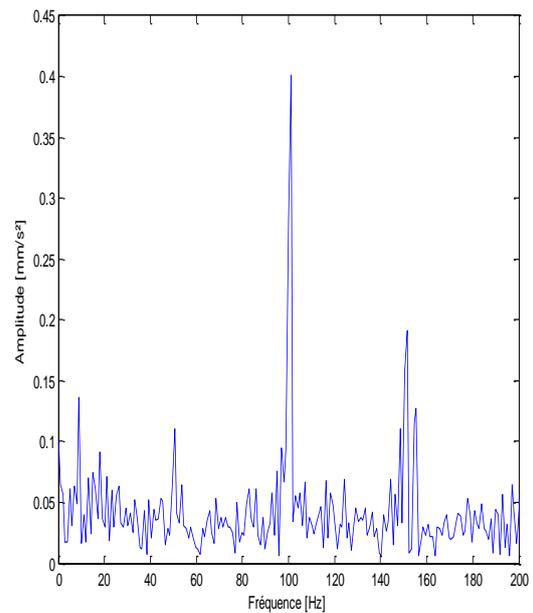


- Pour une vitesse de 2000 tr/min ( $f= 33,33$  Hz) :

**Signal sans balourd**



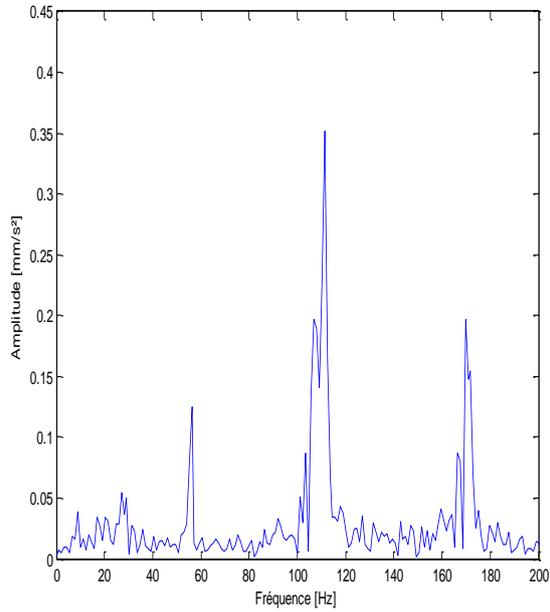
**signal avec balourd**



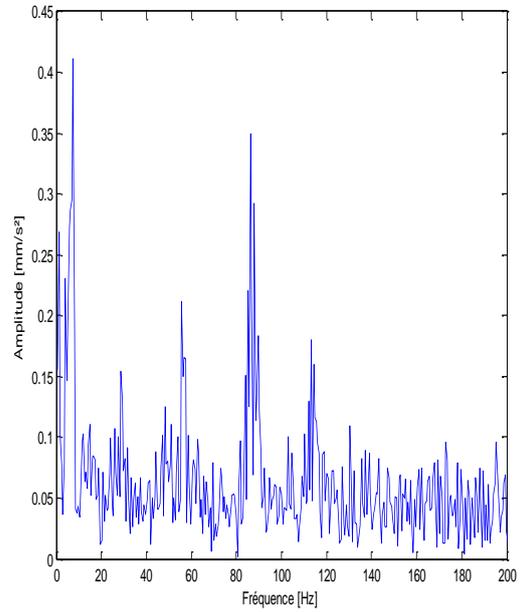
# Annexe

- Pour une vitesse de 2200 tr/min ( $f=36,66$  Hz) :

**Signal sans balourd**

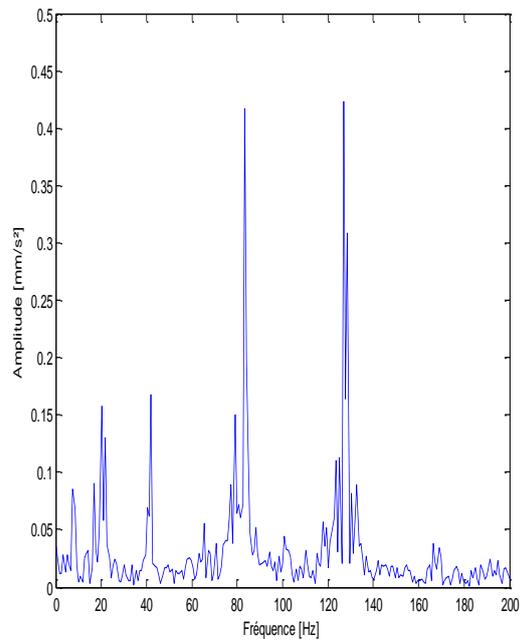


**signal avec balourd**

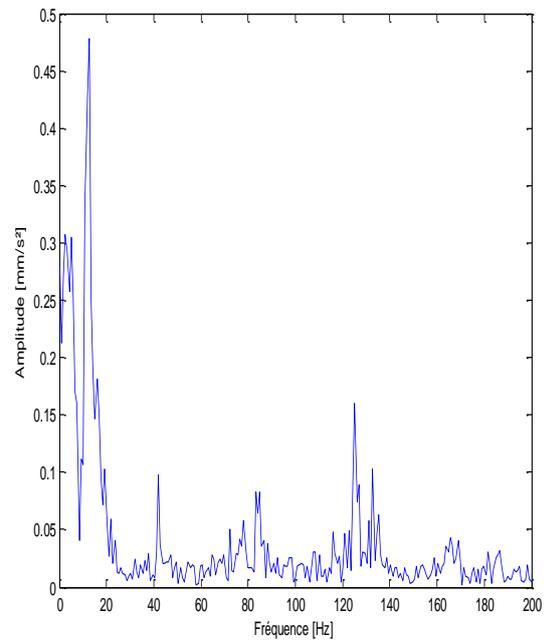


- Pour une vitesse de 2600 tr/min ( $f=43,33$  Hz) :

**Signal sans balourd**



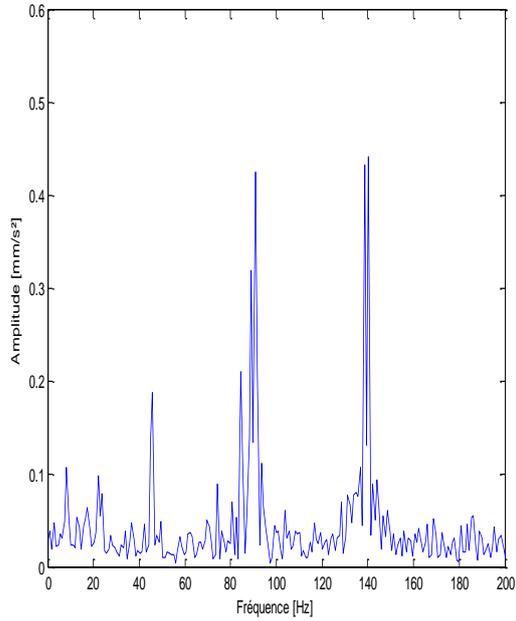
**signal avec balourd**



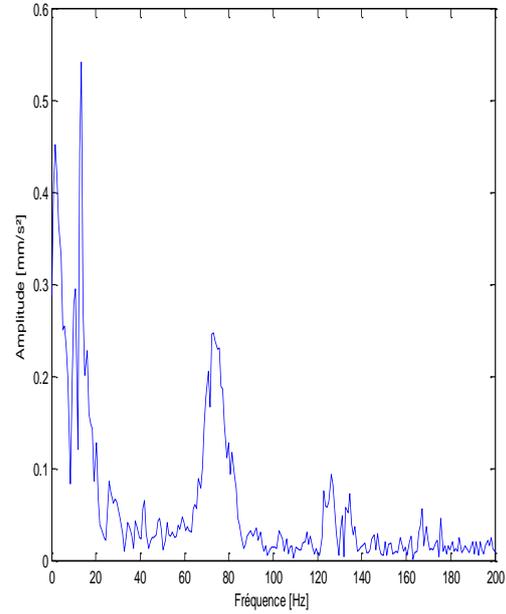
# Annexe

- Pour une vitesse de 2800 tr/min ( $f=46,66$  Hz) :

**Signal sans balourd**

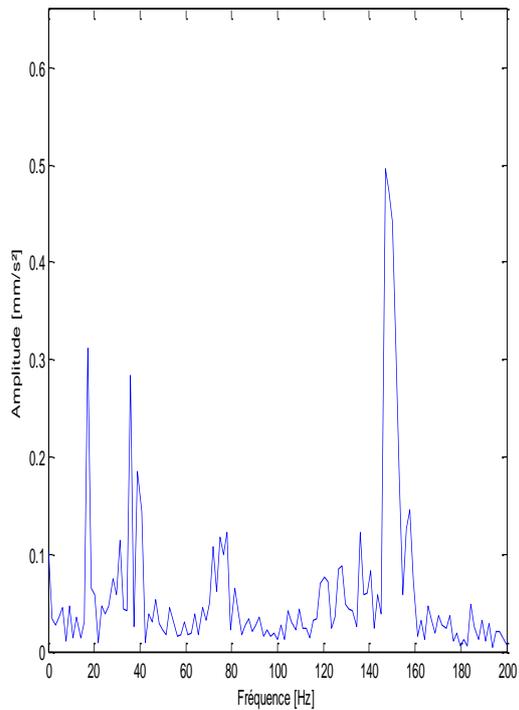


**signal avec balourd**

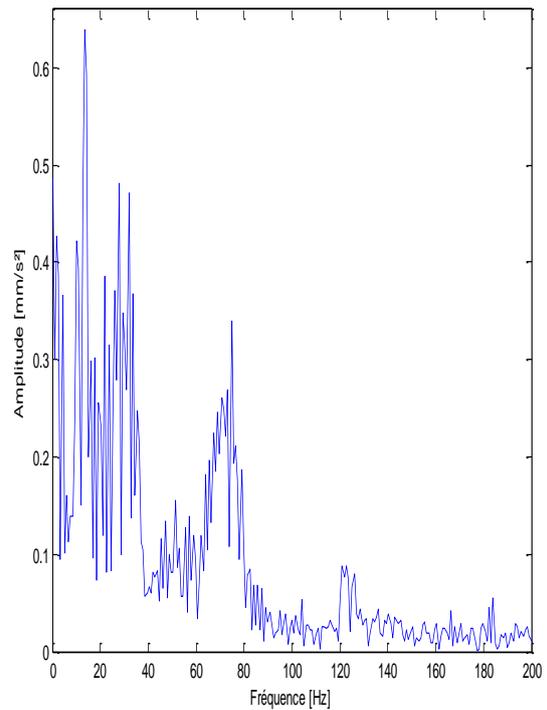


- Pour une vitesse de 3000 tr/min ( $f=50$  Hz) :

**Signal sans balourd**



**signal avec balourd**



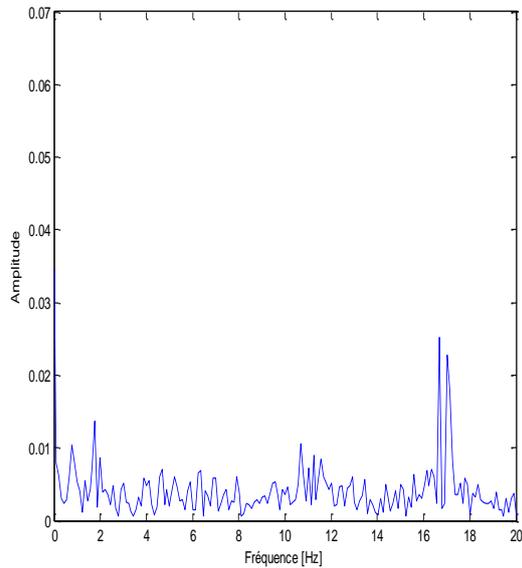
# Annexe

## 2) Les signaux de la 2<sup>eme</sup> partie :( le Moteur est placé entre deux amortisseurs)

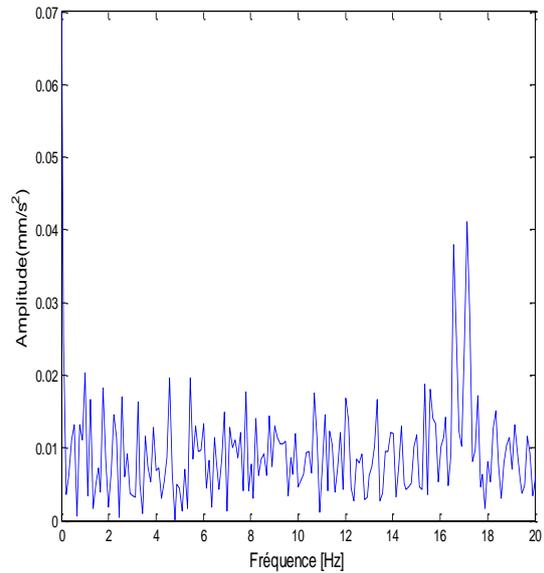
### ➤ Avant compression :

- Pour une vitesse de 400 tr/min ( $f=6,66$  Hz) :

Signal sans balourd

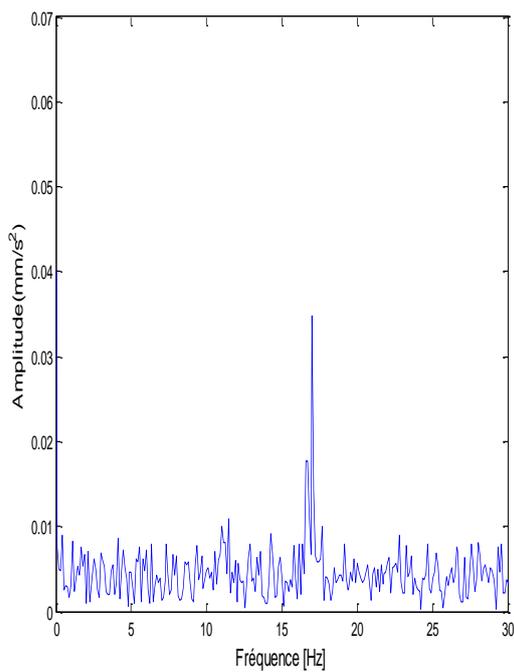


signal avec balourd

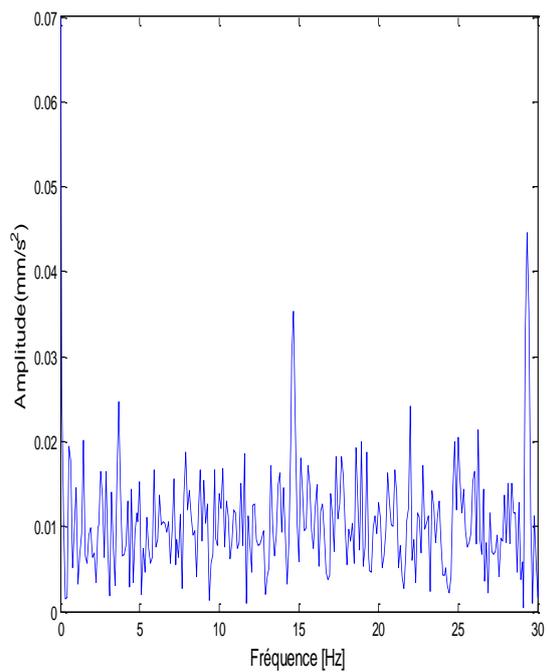


- Pour une vitesse de 600 tr/min ( $f=10$  Hz) :

Signal sans balourd



signal avec balourd

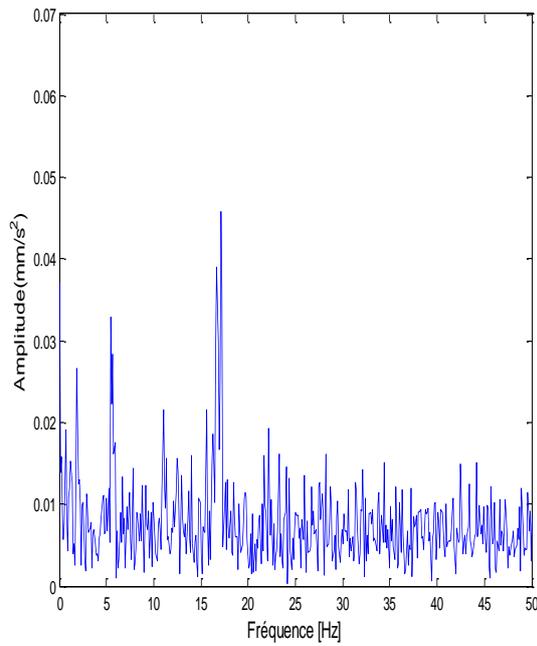


# Annexe

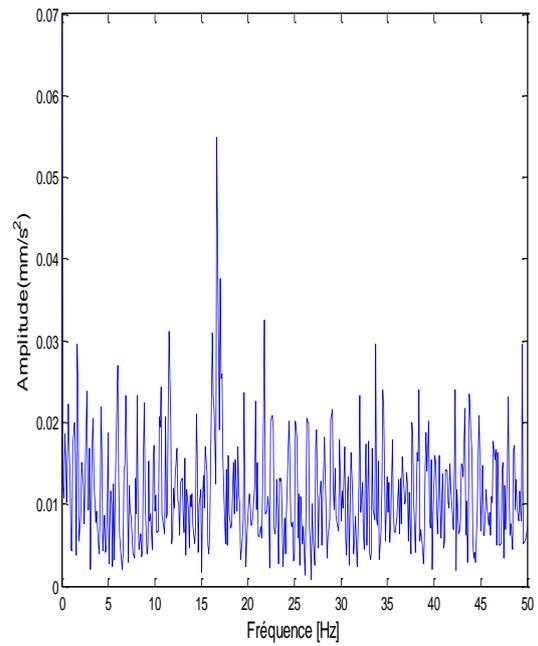
---

- Pour une vitesse de 1000 tr/min ( $f=13,33$  Hz) :

**Signal sans balourd**



**signal avec balourd**

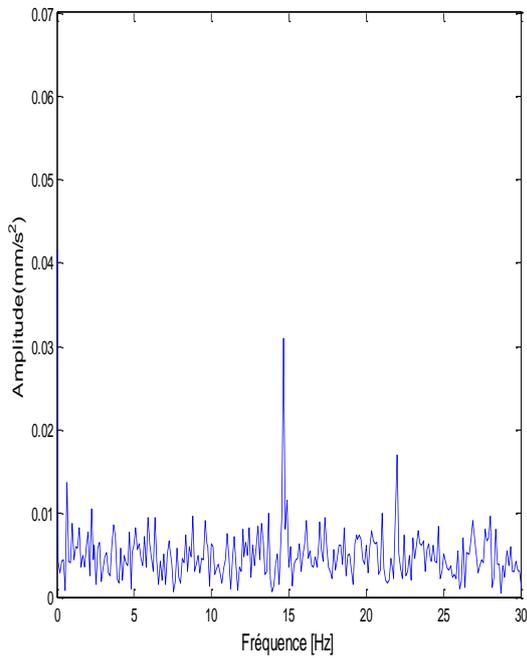


- **Après la compression (troisième et quatrième essai) :**

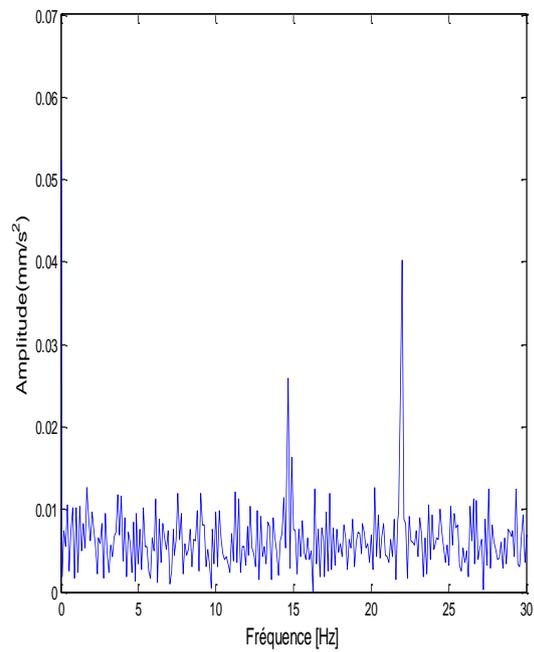
- Pour une vitesse de 400 tr/min ( $f=6,66$  Hz) :

# Annexe

**Signal sans balourd**

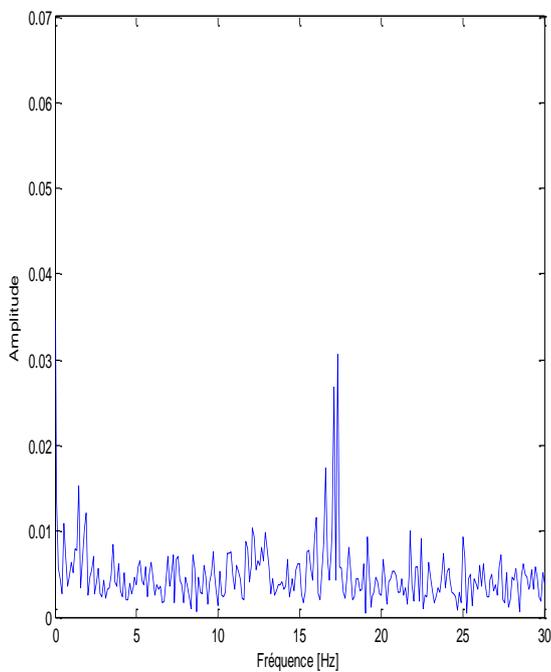


**signal avec balourd**

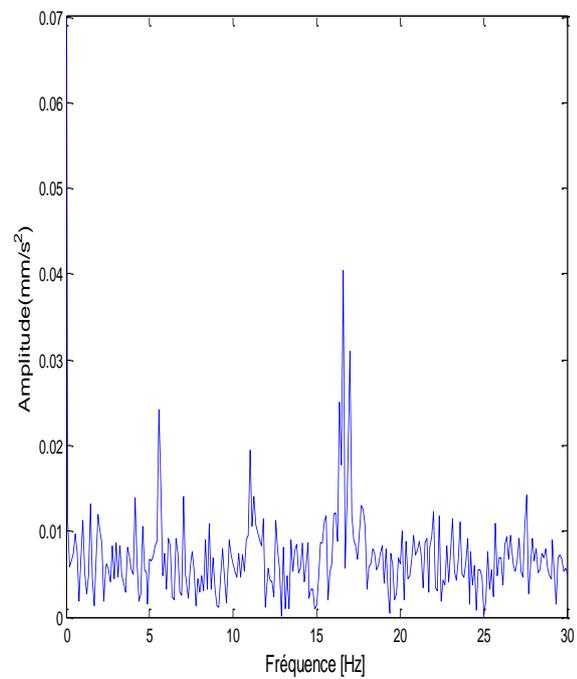


- Pour une vitesse de 600 tr/min ( $f=10$  Hz) :

**Signal sans balourd**



**signal avec balourd**

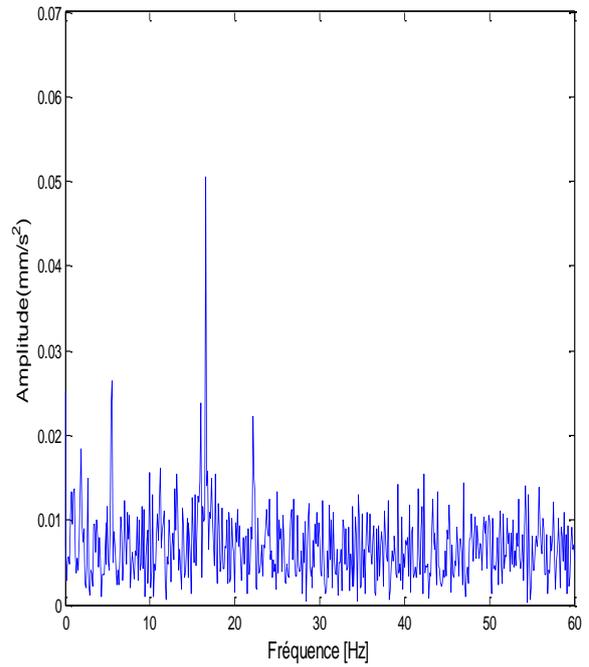
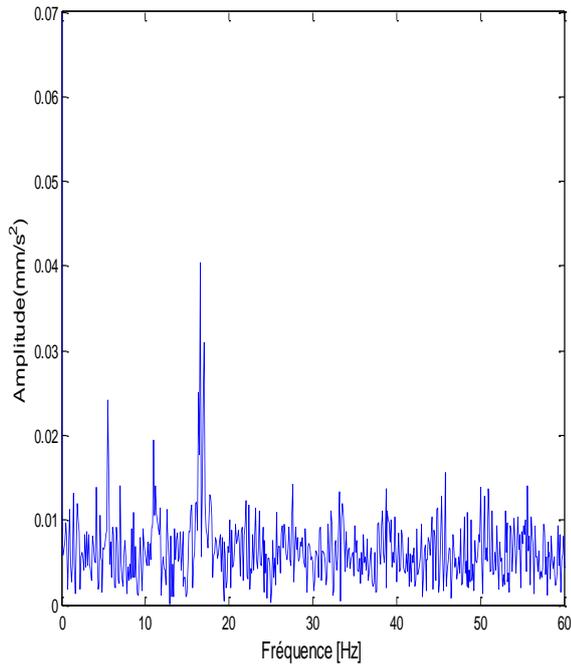


- Pour une vitesse de 1000 tr/min ( $f=13,33$  Hz) :

**Signal sans balourd**

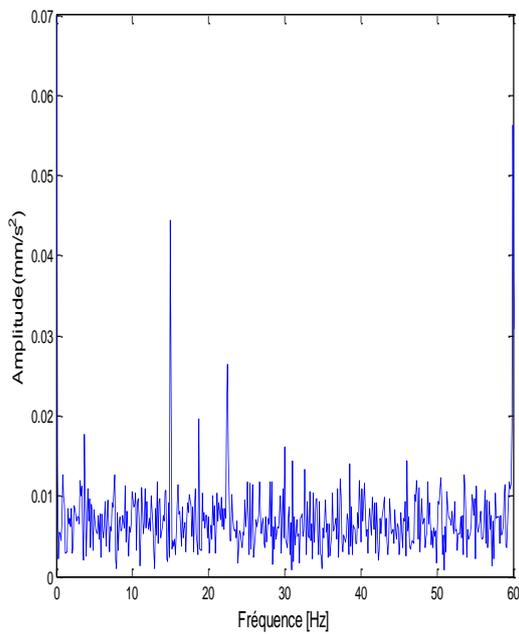
**Signal avec balourd**

# Annexe

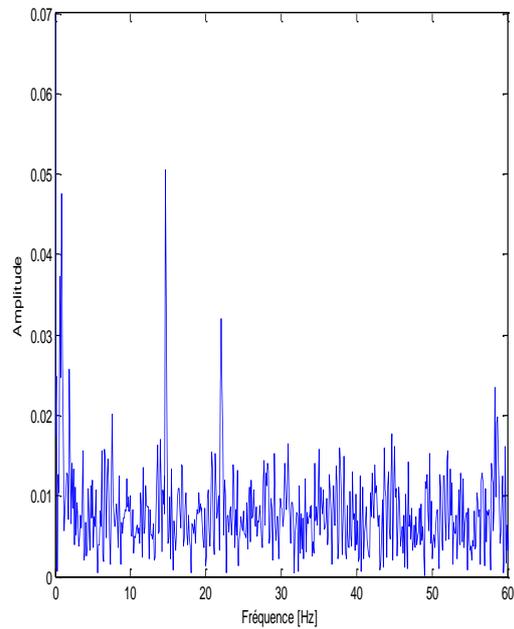


- Pour une vitesse de 1200 tr/min ( $f=20$  Hz) :

**Signal sans balourd**



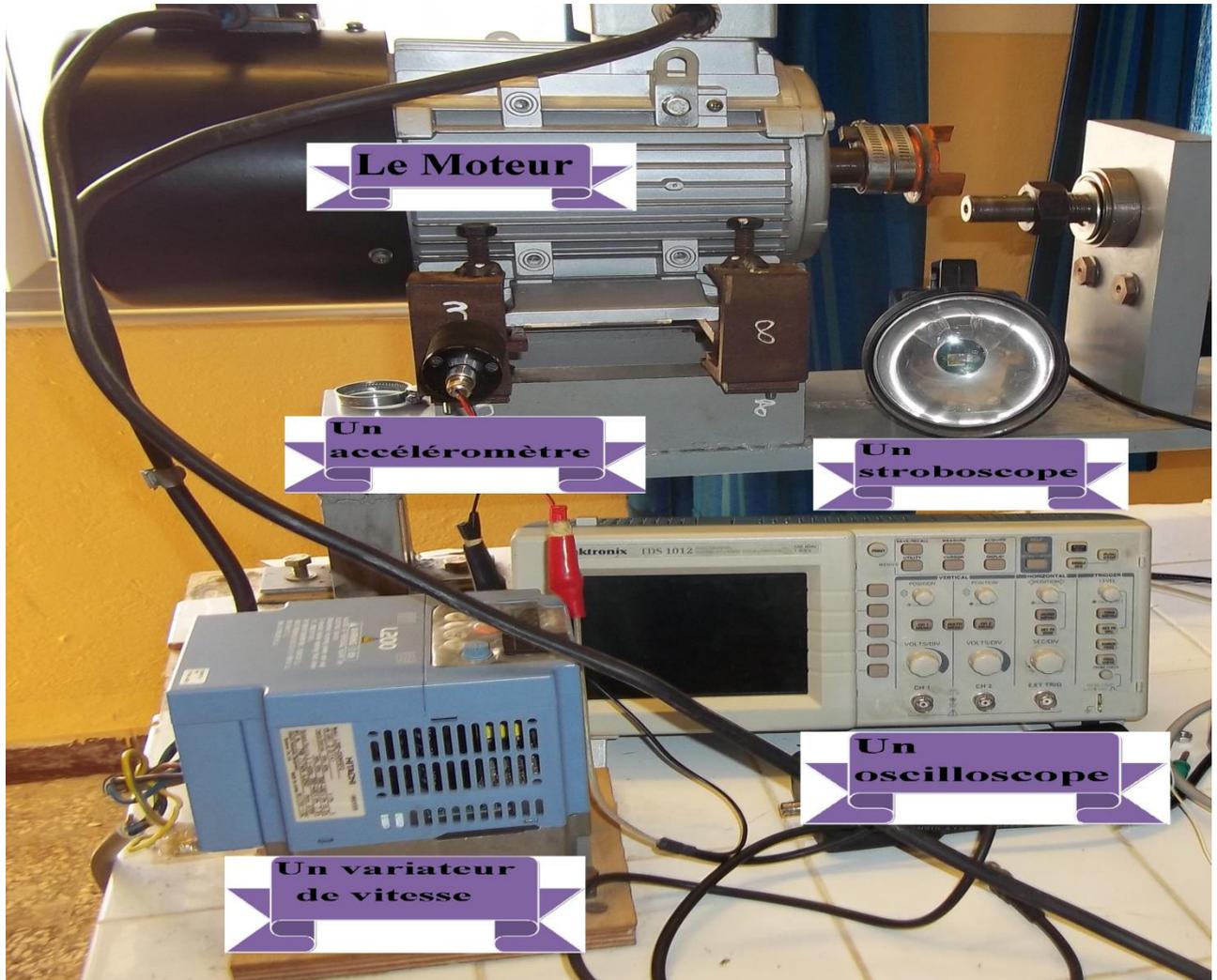
**signal avec balourd**



# Annexe

## Annexe II :

Dans l'annexe (II) on présente le matériel utilisé dans la pratique :

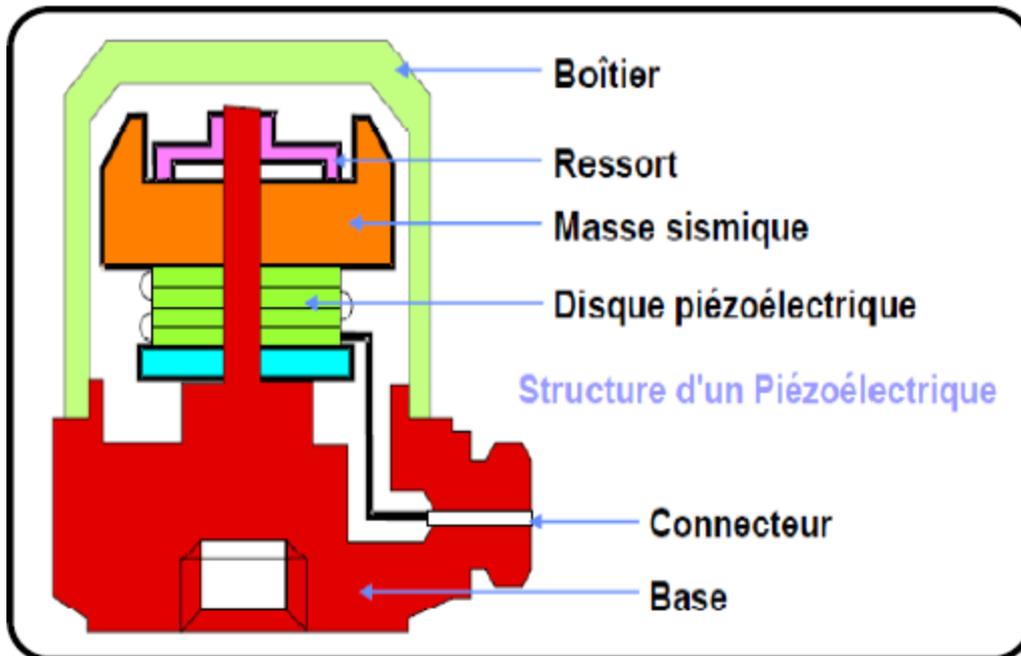


- Le Moteur Utilisé est un moteur triphasé qui est de numéro (N° J08084369), son poids (25 Kg), et l'indice de protection (IP55), et ces caractéristiques sont les suivantes :

La tension (Vlt)	La fréquence (Hz)	Le courant (A)	La puissance (KW)	La vitesse de rotation (tr/min)	Cos ( $\varphi$ )
$\Delta/y$ 220/400	50	$\Delta/y$ 10.5/6.01	3	2860	0.87
277/460	60	10.4/6.01	3.6	3430	0.87

# Annexe

L'accéléromètre :



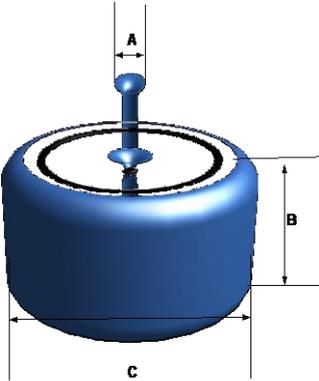
## ➤ Principe

Un accéléromètre piézoélectrique est composé d'un disque en matériau piézoélectrique (quartz), qui joue le rôle d'un ressort sur lequel repose une masse sismique précontrainte. Quand la masse se déplace sous l'effet d'une accélération, elle exerce sur le disque des contraintes, induisant à la surface de ce dernier une charge électrique proportionnelle à cette

# Annexe

accélération. Les accéléromètres piézoélectriques tendent à devenir les capteurs de vibration absolue les plus utilisés pour la surveillance.

- L'amortisseur que n'a utilisé a les démentions suivantes :

	A (mm)	4
	B (mm)	23
	C (mm)	15.5

## Annexe III :

Il représente les résultats expérimentales pour les amplitudes maximal des signaux :

- La première partie :

N (tr/min)	$A_{sb}(\frac{mm}{s^2})$	$A_{ab}(\frac{mm}{s^2})$
200	0.08594	0.1017
400	0.1145	0.1274
600	0.1526	0.1562
800	0.1664	0.1879
1000	0.2014	0.2048
1200	0.2444	0.2567
1400	0.2537	0.2968
1600	0.2711	0.3132
1800	0.295	0.3521
2000	0.3269	0.4014
2200	0.3523	0.4114
2400	0.4147	0.4469
2600	0.4228	0.478
2800	0.4415	0.5422
3000	0.496	0.6402

# Annexe

- La deuxième partie :

- Avant la compression :

Les résultats obtenus

Pour L=21.2mm		Pour L=18.5mm	
N(tr/min)	Asb(mm/s <sup>2</sup> )	N(tr/min)	Asb(mm/s <sup>2</sup> )
0	0	0	0
200	0.02504	200	0.02418
400	0.03072	400	0.02960
600	0.03507	600	0.03090
800	0.04094	800	0.03708
1000	0.04576	1000	0.0404
1200	0.05485	1200	0.04608
1400	0.05508	1400	0.05045

- Après la compression :

Les résultats obtenus

Pour L=21.2mm		Pour L=18.5mm	
N(tr/min)	Aab(mm/s <sup>2</sup> )	N(tr/min)	Aab(mm/s <sup>2</sup> )
0	0	0	0
200	0.03675	200	0.03027
400	0.04115	400	0.03576
600	0.04463	600	0.04024
800	0.04906	800	0.04481
1000	0.05485	1000	0.05045
1200	0.05643	1200	0.05454
1400	0.06832	1400	0.06218

Remarque :

*Asb* C'est la valeur de l'amplitude sans balourd

*Aab* C'est la valeur de l'amplitude avec balourd