



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université A.Mira Béjaïa
Faculté des Sciences exactes
Département de Physique

Mémoire de Master

Rédigé par

IDIR Soumaïa

En vue de l'obtention du diplôme de master en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

Procédure de renormalisation en Théorie Quantique des champs

Soutenu le 30/06/2016 devant le jury composé de :

Mr	FOUGHALI Taoufik	<i>Président</i>	MCB	Béjaïa
Mr	BEKLI Mohamed Réda	<i>Examineur</i>	MCB	Béjaïa
Mr	GHARBI Abdelhakim	<i>Rapporteur</i>	MCA	Béjaïa

Année Universitaire 2015/2016

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier monsieur GHARBI Abdelhakim d'avoir accepté de m'encadrer pour ce mémoire de fin de cycle, pour son aide et ses conseils durant cette période.

Je remercie également l'honorable jury, Mr. FOUGHALI Taoufik et Mr. BEKLI Mohamed Réda , d'avoir accepter de juger et d'évaluer mon travail.

Je tiens à exprimer mes plus sincère remerciements à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de physique en particulier, ainsi que tous les enseignants pour les peines et les efforts qu'ils se sont donnés durant notre formation.

Je tiens également à remercier mes parents, mes sœurs, mes frères.

Un grand merci à mes collègues de Master 2 en physique théorique.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mes chers grands parents, oncle Hamza et mon frère Khaled que Dieu les accueille dans son vaste paradis.

A tous mes parents que Dieu les garde et les protège.

Mes très chers sœurs : "Mouna , Sihem, Kenza, Asma et Sara ".

Mes chers frères : "Omar, Walid, Tarek, Mamin, Yanice , Ayoub et le petit Khaled ".

A tous mes oncles et leurs épouses et mes tantes. A mes cousins et cousines.

A mes meilleurs amies : "Sihem, Kahina et Nawal".

A Tous les enseignants et les étudiants du département de physique en particulier ma promotion.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rappel sur la Théorie ϕ^4	5
2.1	La densité lagrangienne	5
2.2	Règles et diagrammes de Feynman pour ϕ^4	6
2.2.1	Règles de Feynman pour l'amplitude de diffusion \mathcal{M} en théorie ϕ^4	8
3	Renormalisation de la théorie ϕ^4	13
3.1	Degrés de divergence superficiel et Le comptage de puissances (power counting)	13
3.2	Régularisation dimensionnelle	18
3.3	Théorie des perturbation renormalisée	22
3.3.1	Conditions de renormalisation	25
3.3.2	Renormalisation à une boucle	26
4	Conclusion	30

Durant la deuxième moitié du siècle précédent, La théorie quantique des champs s'est imposée comme étant le cadre théorique fondamental pour la description des particules élémentaires dans la nature [1, 2]. A la base, elle est le fruit de l'application des concepts de la mécanique quantique à des champs dans le contexte de la relativité restreinte. Les observables physiques, telles que les sections efficaces de diffusion et les largeurs de désintégration des particules instables, sont calculés en fonction d'amplitudes de probabilités. Ces dernières sont construites par le moyen des règles de Feynman correspondant à chaque théorie et cela dans une approche perturbative [3, 4]. Cependant, ses résultats souffrent d'un problème fondamental qui consiste en l'apparition d'infinités lorsqu'on pousse les calculs au-delà du niveau de l'arbre (tree level). Ce problème doit être impérativement surmonté pour que la théorie en question puisse gardée un sens physique. L'élimination de ces infinités se fait dans le cadre de la théorie de la renormalisation [1, 5, 6].

L'objectif de ce mémoire est de présenter la théorie des perturbations renormalisées pour la théorie ϕ^4 . Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation de la théorie ϕ^4 [3, 4]. Dans le cadre de la théorie des perturbations, les règles de Feynman pour l'amplitude de diffusion seront déduites à partir de la densité lagrangienne de la théorie. Un exemple d'application sera présenté, qui est celui de la diffusion $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ où on mettra l'accent sur l'apparition des divergences à l'ordre d'une boucle, impliquant ainsi, la nécessité de la renormalisation. Par ailleurs, les relations entre les

quantités observables qui sont les sections efficaces de diffusion et largeurs de désintégration avec les amplitudes de probabilités seront données. Le chapitre trois sera dévoué à la théorie des perturbations renormalisées [1, 6]. Premièrement, le concept du degré de divergence superficiel sera introduit, ainsi que sa relation avec la dimension de la constante de couplage de la théorie, et cela en utilisant le power counting. Ceci va permettre de donner une certaine classification des théories scalaires par rapport à leurs renormalisabilité. Puis, on passera à la régularisation dimensionnelle qui va permettre d'isoler les divergences dans un diagramme donné [2]. Cette étape est nécessaire avant de passer à la renormalisation. Par la suite, on présentera la théorie des perturbations renormalisées et cela en introduisant de nouvelles règles de Feynman. Ces dernières comprennent, en plus des règles usuelles mais exprimés avec les paramètres physiques, deux contre-termes contenant des constantes infinies à déterminer. Cela se fait par le moyen des conditions de renormalisations appliquée à chaque ordre perturbatif. L'utilisation de ces nouvelles règles de Feynman au processus $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ à l'ordre d'une boucle permet d'obtenir une amplitude finie (guérie de ces infinités). Finalement, on terminera par une conclusion succincte.

Dans le présent chapitre, nous allons donner un rappel succinct sur la théorie ϕ^4 qui est un modèle simple et pédagogique d'un champ scalaire réel en auto-interaction (self-interaction).

2.1 La densité lagrangienne

Dans la pratique, le champ réel de Klein-Gordon en auto-interaction présente peu d'applications physiques, mais du point de vue pédagogique, c'est une théorie simple et utile qui permet l'introduction de plusieurs idées importantes de la théorie quantique des champs sans passer par les complications techniques rencontrés dans les théories décrivant des particules avec spin. Sa densité lagrangienne s'écrit [3] :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (2.1.1)$$

les deux premiers termes représentent la partie libre du lagrangien décrivant des particules relativistes neutres, sans spin et de masse m . Le dernier terme $V(\phi)$ est donné en général par un polynôme en ϕ et décrit l'interaction entre les particules.

Pour la théorie ϕ^4 , l'interaction est donnée par :

$$V(\phi) = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (2.1.2)$$

la constante λ est dite constante de couplage, elle mesure l'intensité de l'interaction. Elle est réelle et positive ce qui garantit la positivité de l'hamiltonien de la théorie.

2.2 Règles et diagrammes de Feynman pour ϕ^4

En physique des particules, les principales observables expérimentales sont les sections efficaces de diffusion et les largeurs de désintégration. La première quantité caractérise les expériences de collision qui permettent de sonder le comportement des particules élémentaires dans les accélérateurs de particules. La deuxième quantité concerne le phénomène de désintégration d'une particule instable en plusieurs particules. Dans ce qui suit nous allons présenter brièvement ces quantités ainsi que la manière de les construire, perturbativement, à partir d'une théorie quantique des champs en utilisant la technique des diagrammes de Feynman [3].

En mécanique quantique non relativiste, le taux de transition d'un état quantique $|\alpha\rangle$ vers un autre état quantique $|\beta\rangle$, sous l'influence d'un potentiel donné V_I dans l'image interaction, est obtenu grâce à la règle d'or suivante [3]

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taux de transition} \\ \alpha \rightarrow \beta \end{array} \right) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\beta| V_I |\alpha\rangle|^2 \times \left(\begin{array}{c} \text{densité d'états} \\ \text{finaux} \end{array} \right) \quad (2.2.1)$$

Cette relation est donnée à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations. Pour les ordres supérieurs, cette dernière comprend des termes de plus en plus compliqués.

En théorie quantique des champs, l'analogie des quantités $\langle\beta| V_I |\alpha\rangle$ sont les éléments de matrices de la matrice de diffusion S :

$$\langle\beta| V_I |\alpha\rangle + \text{termes d'ordre supérieur} \rightarrow \langle\beta| S |\alpha\rangle \quad (2.2.2)$$

D'une part, les éléments de la matrice S sont construits, dans le cadre de la théorie des perturbations, en termes du lagrangien ou de l'hamiltonien de la théorie de champ considérée, par le biais de la série de Dyson. D'une autre part, nous avons des règles d'or qui relient ces éléments de matrice aux quantités mesurables, en l'occurrence, les sections efficaces et les largeurs de désintégration. Conventionnellement, les règles d'or, que nous allons définir ultérieurement, sont exprimées en termes d'amplitude de diffusion \mathcal{M} qui représentent les parties non triviales des éléments de la matrice S et qui sont définis par

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta} - i (2\pi)^4 \delta^4(p_\alpha - p_\beta) \mathcal{M}_{\alpha\beta} \prod_{i=\alpha,\beta} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} \quad (2.2.3)$$

où p_α et p_β sont respectivement la somme des quadrimpulsions des particules entrantes et sortantes, les E_i sont les énergie de toutes les particules "externes" participant au processus considéré.

Essentiellement, nous avons deux règles :

Pour une désintégration $1 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$, le taux de désintégration partiel $d\Gamma$ est donné par [3]

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}_{\alpha\beta}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{\sqrt{(2\pi)^3 2E'_i}}. \quad (2.2.4)$$

Pour une diffusion $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$, la section efficace différentielle $d\sigma$ est de la forme [3]

$$d\sigma = \frac{1}{v_\alpha} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} |\mathcal{M}_{\alpha\beta}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{\sqrt{(2\pi)^3 2E'_i}} \quad (2.2.5)$$

où v_α est la vitesse relative des particules 1 et 2 :

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} \quad (2.2.6)$$

ici m_1 et m_2 sont les masses respectives des particules 1 et 2.

En somme, le calcul des quantités observables d'un processus donné se fait en deux étapes :

1. La détermination de l'amplitude $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ pour le processus considéré, dans le cadre de la théorie des perturbations. Cela se fait par le moyen des règles de Feynman de la théorie ϕ^4 que nous allons présenter par la suite.
2. L'intégration sur l'invariant de Lorentz de l'espace des phases $dLips$ donné par

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{\sqrt{(2\pi)^3 2E'_i}}. \quad (2.2.7)$$

2.2.1 Règles de Feynman pour l'amplitude de diffusion \mathcal{M} en théorie ϕ^4

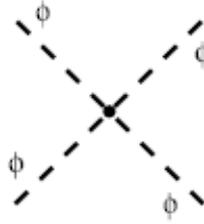
La construction des règles et des diagrammes de Feynman se fait principalement sur la base de la structure mathématique du lagrangien donné par (2.1.1) et (2.1.2). On note alors que [3] :

1. La partie libre du lagrangien, comprenant les deux premiers termes, décrit les particules de la que théorie ainsi que leurs propagateurs. Dans notre cas, nous avons un seul type de particule et donc un seul propagateur (fonction de green à deux point). Il est représenté par

$$\bullet \text{-----} \phi \text{-----} \bullet \quad (2.2.8)$$

2. Le dernier terme du lagrangien détermine les interactions possibles entre les particules, ce qui donne une seule interaction et par conséquent un seul vertex

possible donné par



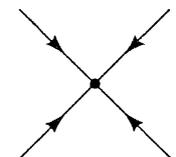
(2.2.9)

Pour construire les diagrammes de Feynman, contribuant à un processus de diffusion avec n particules entrantes et n' particules sortantes, à l'ordre l en λ (la constante de couplage) qui est sans dimension et suffisamment petite, nous procédons comme suit :

1. Représenter tous les diagrammes de Feynman possibles, pertinents complètement connexes, à $n + n'$ points externes et à l vertex, construits à la base des deux diagrammes élémentaires (2.2.8) et (2.2.9). Dans le présent mémoire, la convention adoptée pour la direction du temps est de gauche vers la droite.
2. Assigner aux particules entrantes les quadri-impulsions q_1, \dots, q_n , et aux particules sortantes les quadri-impulsions $p_1, \dots, p_{n'}$. Pour les lignes internes nous faisant correspondre des quadri-impulsions k_j .

Pour obtenir l'expression analytique de chaque diagramme de Feynman, nous appliquons les règles de Feynman la théorie ϕ^4 et qui sont données par [1] :

1. Pour chaque propagateur,  $= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$;

2. Pour chaque vertex,  $= -i\lambda$;

3. Pour chaque ligne externe,  $= 1$;

4. Imposer la conservation des quadri-impulsions en chaque vertex.
5. Intégrer sur toute quadri-impulsion interne non déterminée (en général à toute boucle correspond une intégrale) : $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$;

6. Diviser par le facteur de symétrie S du diagramme.

Le facteur de symétrie d'un diagramme possédant n vertex, en théorie ϕ^4 , est donné par [4]

$$S = \frac{n! (4!)^n}{r} \quad (2.2.10)$$

où r est la multiplicité du diagramme correspondant au nombre de façons possibles pour former le diagramme.

Exemple :

On considère la diffusion de deux particules incidentes en deux particules finales. les diagrammes contribuant à l'amplitude de diffusion à l'ordre 2 sont [4] :

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \end{array} \\ \text{diagram 5} & + & \text{diagram 6} \end{array} \quad (2.2.11)$$

Le deuxième diagramme est dit canal s , le deuxième canal t et le troisième canal u . Ces appellations sont dues aux variables de Mandelstam qui sont des invariants relativistes. Elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = (q_1 + q_2)^2 \\ t = (q_1 - p_1)^2 \\ u = (q_1 - p_2)^2 \end{array} \right. \quad (2.2.12)$$

L'expression analytique de \mathcal{M} s'obtient par le moyen des règles de Feynman, alors on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -i\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k + (q_1 + q_2))^2 - m^2 + i\epsilon} - \\ & \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k + (q_1 - p_1))^2 - m^2 + i\epsilon} - \\ & \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k + (q_1 - p_2))^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

La section efficace différentielle du processus précédent peut être calculer dans le référentiel du centre de masse, au premier ordre en λ , en utilisant (2.2.5) et le fait que les masses de toutes les particules sont identiques. On obtient [1]

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 s} d\Omega \quad (2.2.14)$$

où $d\Omega$ est un angle solide infinitesimal.

Divergences ultraviolettes à l'ordre d'une boucle et plus :

Nous allons nous intéresser au deuxième digramme de Feynman dans (2.2.11) présentant une boucle et dont l'expression analytique est

$$I = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k + (q_1 + q_2))^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.2.15)$$

Nous remarquons que l'intégrant se comporte comme $1/k^4$ pour de grand k et par conséquent l'intégrale I diverge logarithmiquement comme $\int d^4k/k^4$. En général, une intégrale ordinaire $\int_0^\infty r^n dr$ diverge linéairement pour $n = 0$, quadratiquement pour $n = 1$ et l'intégrale $\int_0^\infty dr/r$ diverge logarithmiquement. Puisque cette divergence est associée aux grandes valeurs de k , elle est dite divergence ultraviolette [2].

Fondamentalement, l'apparition de ces infinités soulève un problème majeur dans la théorie. Ce dernier doit être résolu de façon satisfaisante pour que la théorie puisse être considérée comme crédible scientifiquement. Le traitement de ces infinités

se fait dans le cadre de la théorie de la renormalisation, ce qui fera l'objet de la suite de ce mémoire.

Renormalisation de la théorie ϕ^4

Dans le présent chapitre, nous allons présenter la théorie des perturbations renormalisée de la théorie ϕ^4 , nous allons nous limiter à l'ordre d'une boucle. Nous allons aussi introduire le concept de degrés de divergence superficiel permettant une certaine classification des diagrammes divergents à boucles. Les intégrales divergentes seront régularisées selon la procédure de régularisation dimensionnelle.

3.1 Degrés de divergence superficiel et Le comptage de puissances (power counting)

Dans le chapitre précédent nous avons rencontré l'intégrale relative à un diagramme à une boucle et nous avons conclu qu'elle diverge logarithmiquement. Nous pouvons rencontrer aussi d'autre type d'intégrales divergeant linéairement ou quadratiquement...etc. Dans ce qui suit nous allons présenter un concept utile qui permet de classifier ces divergences.

Afin d'illustrer ce concept, nous allons nous intéresser à une théorie de champs scalaire avec un terme d'interaction en ϕ^n . Son lagrangien à d dimensions est donné

par [1, 6]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (3.1.1)$$

Pour un diagramme complètement connexe ayant N lignes externes, P propagateurs (lignes internes) et V vertex, il comprendra alors L boucles avec

$$L = P - V + 1, \quad (3.1.2)$$

et puisque chaque ligne externe se termine avec 1 extrémité au niveau d'un vertex et que chaque ligne interne se termine avec 2 extrémités, nous avons

$$nV = N + 2P \quad (3.1.3)$$

Pour un diagramme donné à L boucles, les intégrales divergentes intervenant dans son expression analytique ont la forme :

$$\int \frac{d^d k_1 d^d k_2 \dots d^d k_L}{k_1^2 \dots k_P^2} \quad (3.1.4)$$

Le degrés de divergence superficiel D d'un diagramme donné est défini par

$$D = (\text{puissance de } k \text{ dans le numérateur}) - (\text{puissance de } k \text{ dans le dénominateur}) \quad (3.1.5)$$

et puisque chaque boucle contribue avec une intégrale $\int d^d k$ et que chaque ligne interne donne un propagateur $(k^2 - m^2)^{-1}$, nous pouvons écrire [1, 6]

$$\begin{aligned} D &= dL - 2P \\ &= d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Maintenant nous allons introduire un cut-off Λ pour chaque intégrale dans (3.1.4) par la substitution

$$\int^\infty dk \rightarrow \int^\Lambda dk$$

et par conséquent, nous pouvons dire qu'une amplitude \mathcal{M} d'un digramme de degrés de divergence D , va dépendre de Λ comme suit

1. Pour $D > 0$: $\mathcal{M} \sim \Lambda^D$.
2. Pour $D < 0$: $\mathcal{M} \sim \Lambda^{-|D|}$.
3. Pour $D = 0$: $\mathcal{M} \sim \Lambda$.

Ainsi, quand $\Lambda \rightarrow \infty$, Un diagramme ne peut diverger superficiellement (naïvement) que si $D \geq 0$. On dit alors [1, 6] :

1. Pour $D > 0$: l'amplitude est divergente.
2. Pour $D < 0$: l'amplitude est finie ou convergente.
3. Pour $D = 0$: l'amplitude est logarithmiquement divergente.

Cependant, le terme superficiel indique que la quantité D ne reflète pas toujours le comportement divergeant ou convergeant d'un diagramme donné, et nous citons pour cela trois exceptions : [6]

1. Dans certaine théories, un digramme de $D \geq 0$ peut être fini, cela est dû à la présence d'un certain nombre conduisant à la simplification des infinités. Exemple : la théorie supersymétrique de Yang-Mills à quatres dimensions avec $N = 4$ est finie à tout les ordres.
2. Si $D < 0$, un diagramme peut être divergeant à cause de la présence d'un sous-diagramme divergeant. Nous pouvons donner comme exemple le diagramme suivant dans la théorie ϕ^4 à $d = 4$:



ce diagramme a un degré de divergence $D = -2$, il est divergeant à cause du sous diagramme ayant un $D = 0$.

3. Les diagrammes au niveau de l'arbre ont un degré de divergence $D = 0$ mais ils sont finis.

A l'exception des situations précédentes, les divergences ultraviolettes sont correctement caractérisées par le concept du degré de divergence superficiel dans plupart des cas.

Nous voulons exprimer le degré de divergence D en fonction de la dimension de la constante de couplage λ qui apparaît dans l'expression (3.1.1) et cela par le moyen du comptage des puissances (power counting) [1, 6]. En effet, Pour une théorie de champ donnée, l'action $S = \int d^d x \mathcal{L}$ est sans dimension puisque dans le systèmes des unités naturelles nous avons $\hbar = 1$. Puisque toutes les unités peuvent être exprimée comme des puissance de l'unité de la masse, on écrit alors la dimension $[S] = 0$. Comme la distance x a l'unité de l'inverse de la masse, on obtient $[x] = -1$ et ainsi $[d^d x] = -d$ et par conséquent $[\mathcal{L}] = d$.

Si on considère la partie cinétique du lagrangien donné par (3.1.1), nous pouvons conclure que la dimension du champ ϕ est $[\phi] = (d - 2)/2$. Du terme interaction du lagrangien, on déduit que la constante de couplage λ a la dimensions $\delta = [\lambda] = d - n(d - 2)/2$. Ainsi, nous pouvons réécrire la relation (3.1.6) comme [1]

$$D = d - \delta V - \left(\frac{d - 2}{2} \right) N \quad (3.1.7)$$

Le signe du facteur de V (donné par la valeur δ) dans la relation précédente détermine crucialement le comportement ultraviolet d'une théorie. Nous avons la classification suivante des théories des champs par rapport à leurs renormalisabilité [1, 6] :

1. **Théorie Super-Renormalisable** : Elle possède un nombre fini de diagrammes de Feynman qui divergent superficiellement. Selon (3.1.7), celà revient à dire que la dimension δ de la constante de couplage est positive.
2. **Théorie Renormalisable** : Elle possède un nombre fini de diagrammes de Feynman qui divergent superficiellement. Cependant, les divergences appa-

raissent à tous les ordres dans la théorie des perturbations. Selon (3.1.7), cela revient à dire que $\delta = 0$, autrement dit, la constante de couplage est sans dimension.

3. **Théorie Non-Renormalisable** : Toute les amplitudes sont divergentes au-delà d'un certain ordre élevé de la théorie des perturbations. Ce qui correspond à une constante de couplage de dimension négative.

Exemples :

1. Théorie ϕ^4 à 4D : Nous avons $d = 4$ et $n = 4$ ce qui donne $D = 4 - N$ et puisque l'action de la théorie est invariante sous la transformation $\phi \rightarrow -\phi$ ce qui donne un amplitude nulle pour tout diagramme ayant un nombre impair de lignes externes, par conséquent Il n'existe que 3 amplitudes qui divergent superficiellement et qui sont

$$\begin{array}{ccc}
 N = 0 & \text{---} \bigcirc \text{---} & \\
 N = 2 & \text{---} \bigcirc \text{---} & \\
 N = 4 & \begin{array}{c} \diagup \bigcirc \diagdown \\ \diagdown \bigcirc \diagup \end{array} &
 \end{array} \tag{3.1.8}$$

Le fait que D ne dépend pas de L implique ces divergences vont réapparaître à chaque de la théorie des perturbations. Ce qui veut dire que ϕ^4 est renormalisable.

2. Théorie ϕ^3 à 4D : Nous avons $d = 4$ et $n = 3$ ce qui donne $D = 4 - V - N$. Dans ce cas, il existe un nombre fini de diagrammes de Feynman qui divergent superficiellement .
3. Théorie ϕ^5 à 4D : Nous avons $d = 4$ et $n = 5$ ce qui donne $D = 4 + V - N$. Dans ce cas, il existe un nombre infini de diagrammes de Feynman qui divergent superficiellement.

3.2 Régularisation dimensionnelle

Avant de présenter la procédure de renormalisation, nous allons introduire le concept de régularisation. C'est une méthode qui permet d'isoler les divergences dans les intégrales de Feynman provenant des boucles. Elle rend la tâche de renormalisation plus explicite et plus facile à suivre. Il existe plusieurs techniques de régularisation. L'une des plus intuitive est la régularisation par cut-off qui consiste à introduire un cut-off Λ dans les intégrales de Feynman. Un exemple est la modification, en Electrodynamique quantique, du propagateur photonique libre comme suit [2] :

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = \frac{\Lambda^2}{k^2 (k^2 - \Lambda^2)}$$

Une autre technique similaire à la précédente est la régularisation de Pauli-Villars dans laquelle un champ fictif de masse M est introduit. Pour les deux méthodes la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$) sont prises et les quantités renormalisées sont indépendantes de Λ et de M . Cependant ces méthodes deviennent problématique et particulièrement lorsque des théories de jauge non abéliennes sont considérés. Une troisième technique de régularisation qui est plus élégante est la régularisation dimensionnelle introduite par 't HOOFT et VELTMAN en 1972. Elle consiste à traiter les intégrales des boucles (qui causent les divergences) comme des intégrales à d dimensions et puis à prendre la limite $d \rightarrow 4$. Il s'avère que ces singularités dans les diagrammes à une boucle sont tout simplement des pôles d'un certain régulateur.

Afin d'illustrer cette technique, nous allons considérer l'intégrale (2.2.15) intervenant dans l'amplitude de diffusion $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$ au deuxième ordre en λ et caractérisant le canal s , on réécrit cette intégrale sous la forme [1]

$$I = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.2.1)$$

Pour calculer l'intégrale précédente à d dimension, on écrit

$$I = \frac{i}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} \quad (3.2.2)$$

Par le moyen de la paramétrisation suivante de Feynman

$$\frac{1}{xy} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha x + (1-\alpha)y]^2}, \quad (3.2.3)$$

l'intégrand de (3.2.2) prend la forme

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)(k+p)^2 - m^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + 2xk.p + xp^2 - m^2]^2} \quad (3.2.4)$$

Par conséquent, (3.2.2) s'écrit

$$V(p^2) = \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2xk.p + xp^2 - m^2]^2} \quad (3.2.5)$$

Maintenant en utilisant le changement de variable $l = k + xp \implies k = l - xp$, on abouti à

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(l-xp)^2 + 2x(l-xp)p + xp^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l^2 - 2l.p + x^2 p^2 + 2xlp - 2x^2 p^2 + xp^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l^2 - x^2 p^2 + xp^2 - m^2]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Effectuant une rotation Wick par le changement de variable suivant : $l^0 = il_E^0$ et utilisant la notation $\Delta = m^2 - x(1-x)p^2$, on trouve

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{(i)^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + (m^2 - x(1-x)p^2)]^2} \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Maintenant nous allons calculer, en coordonnées sphériques généralisées, l'intégrale typique suivante

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty dl_E \frac{d_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta]^2}. \quad (3.2.8)$$

Le premier facteur dans la relation précédente contient la surface d'une sphère unitaire à d dimensions. Pour calculer cette surface, nous allons utiliser l'intégrale gaussienne suivante :

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int dx^d \exp \left(- \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

nous reconnaissant dans le deuxième facteur la fonction gamma

$$\Gamma \left(\frac{d}{2} \right) = \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)}, \quad (3.2.10)$$

et par conséquent, nous avons

$$(\sqrt{\pi})^d = \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right) \quad (3.2.11)$$

Ainsi la surface d'une sphère d'unité à d dimensions est

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma \left(\frac{d}{2} \right)} \quad (3.2.12)$$

Dans le tableau suivant, nous pouvons trouver des cas particulier usuels :

d	$\Gamma(d/2)$	$\int d\Omega_d$	(3.2.13)
1	$\sqrt{\pi}$	2	
2	1	2π	
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π	
4	1	$2\pi^2$	

Ainsi, nous pouvons réécrire (3.2.8) comme

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{d_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta]^2} \quad (3.2.14)$$

La partie radiale de cette intégrale être reformuler pour avoir

$$\int_0^\infty dl_E \frac{d_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E^2) \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{[l_E^2 + \Delta]^2} \quad (3.2.15)$$

En utilisant le changement de variable $x = \Delta / (l_E^2 + \Delta)$, elle prend la forme

$$\int_0^\infty dl_E \frac{d_E^{d-1}}{[l_E^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1} \quad (3.2.16)$$

et en faisant usage de la définition de la fonction beta $B(\alpha, \beta)$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (3.2.17)$$

et en combinant avec (3.2.12), on aboutit au résultat final

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}. \quad (3.2.18)$$

Puisque la fonction gamma $\Gamma(z)$ possède des pôles isolés poles en $z = 0, -1, -2, \dots$, par conséquent, l'intégrale (3.2.18) a des pôles en $d = 4, 6, 8, \dots$. Pour trouver le comportement de (3.2.18) au voisinage de $d = 4$, on définit le régulateur $\epsilon = 4 - d$ et en

effectuant le développement suivant

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (3.2.19)$$

où $\gamma = 0.5772$ est une constante d'Euler-Mascheroni, nous aboutissons à [1]

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + O(\epsilon) \right] \quad (3.2.20)$$

Notre intégrale est enfin régularisée et elle est prête à être utilisée dans la section suivante.

En suivant la même procédure, nous pouvons dériver le résultat suivant :

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (3.2.21)$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{[l_E^2 + \Delta]^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (3.2.22)$$

3.3 Théorie des perturbations renormalisée

Nous allons commencer par l'expression du lagrangien de la théorie ϕ^4 [1, 6] :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \quad (3.3.1)$$

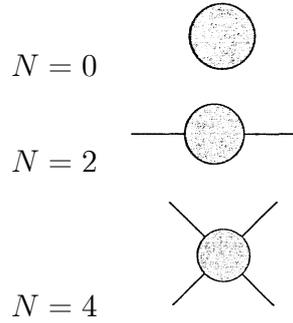
Ici les paramètres m_0 et λ_0 correspondent respectivement aux masses et constantes de couplage nues qui sont différentes de leurs analogues physiques m et λ mesurées dans les expériences [1].

Selon (3.1.6), le degré de divergence d'un diagramme ayant N lignes (bras) externes est

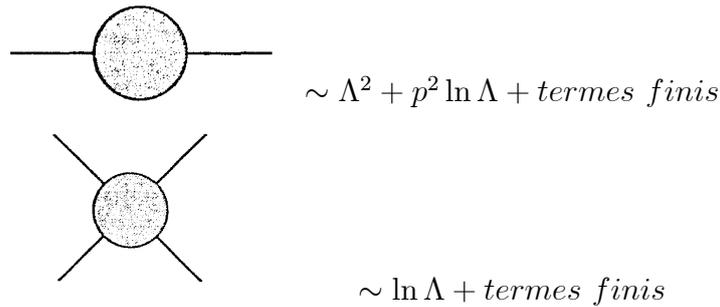
$$D = 4 - N,$$

et sachant que la théorie est invariante sous la transformation $\phi \rightarrow -\phi$, donnant ainsi une contribution nulle pour tout diagramme à un nombre impair de bras externes,

nous concluons que seuls trois diagrammes divergent et qui sont



Le premier diagramme correspond à l'énergie du vide, elle est déjà absorbée et ne contribue pas aux éléments de la matrice S , par conséquent, on peut l'ignorer. Pour les deux autres, on peut démontrer qu'il peuvent être paramétrisés par rapport à un cut-off Λ comme suit [1]



Ces deux diagrammes contiennent trois constantes infinies. Notre objectif est d'absorber ces trois constantes dans trois paramètres non observables de la théorie qui sont la masse nue m_0 et la constante de couplage nue λ_0 et la constante de renormalisation du champ Z . Cette dernière apparaît dans l'expression de la transformée de Fourier de la fonction de Green à deux points de la théorie (le propagateur exact) et qui est donné par [1]

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle e^{ipx} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} +$$

(des termes réguliers en $p^2 = m^2$) (3.3.2)

où $|\Omega\rangle$ est l'état du vide de la théorie et m la masse physique. Nous pouvons éliminer la constante Z dans l'expression précédente et cela par la renormalisation du champ suivante

$$\phi = Z^{\frac{1}{2}}\phi_r \quad (3.3.3)$$

par conséquent, l'expression du lagrangien (3.3.1) devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z (\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2Z\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!}Z^2\phi_r^4 \quad (3.3.4)$$

Nous pouvons faire apparaître les paramètres physiques de la théorie, en faisant appel aux définitions suivantes

$$\delta_Z = Z - 1, \delta_m = m_0^2Z - m^2, \delta_\lambda = \lambda_0Z^2 - \lambda, \quad (3.3.5)$$

où m et λ sont respectivement la masse physique et la constante de couplage physique. Par conséquent, le Lagrangien prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\delta_Z + 1)(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\left(\frac{\delta_m + m^2}{m_0^2}\right)\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\left(\frac{\delta_\lambda + \lambda}{\lambda_0}\right)\phi_r^4 \\ &= \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi_r)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi_r^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi_r^4 - \frac{\lambda}{4!}\phi_r^4 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_r^4 + \\ &\quad \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi_r^4 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Les trois premiers termes ressemblent à ceux du lagrangien habituel de la théorie ϕ^4 mais exprimé avec la masse et la constante de couplage physique. Les trois derniers termes sont dits contre-termes. Ils vont contribuer à l'absorption des divergences ordre par ordre dans le cadre de la théorie des perturbations [1]. Aussi le lagrangien (3.3.7) permet de construire de nouvelles règles de Feynman pour la théorie ϕ^4 . Ces

règles de Feynman renormalisée sont données par [1]

$$\begin{aligned}
 \text{---} \overleftarrow{p} \text{---} &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} &= -i\lambda \\
 \text{---} \otimes \text{---} &= i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
 \begin{array}{c} \diagup \\ \otimes \\ \diagdown \end{array} &= -i\delta_\lambda
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

La première ligne de (3.3.7) nous donne le propagateur et le premier vertex qui ressemblent à ceux des anciennes règles mais faisant apparaître les constantes physiques m et λ . De la deuxième ligne, nous obtenons deux vertex appelés aussi contre-termes.

3.3.1 Conditions de renormalisation

Pour pouvoir utiliser les nouvelles règles de Feynman, nous devons définir au préalable les conditions de renormalisation qui permettent de définir la masse physique et la constante de couplage physique. Une bonne définition de λ est [1]

$$\mathcal{M}|_{s=4m^2, t=u=0} = -i\lambda \tag{3.3.9}$$

où \mathcal{M} est l'amplitude du processus $(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$ donné par (2.2.13), s , t et u sont les variables de Mandelstam. Pour masse physique, nous utilisons la définition suivante sur la fonction de green à deux point complète [1] (propagateur exacte de ϕ^4)

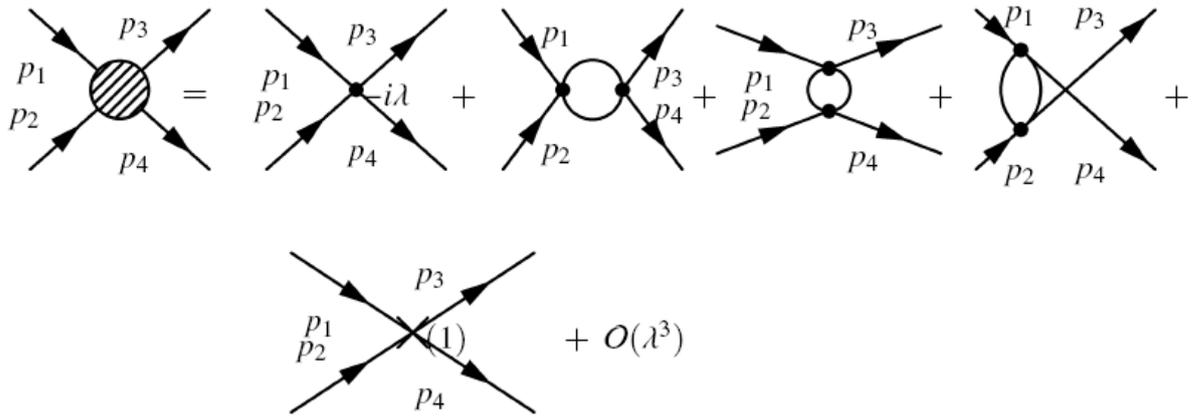
$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers en } p^2 = m^2 \tag{3.3.10}$$

Les conditions de renormalisation précédentes ne sont pas uniques. Elles définissent le schéma de renormalisation [6].

3.3.2 Renormalisation à une boucle

En principe, nous pouvons construire, par le moyen de ces nouvelles règles de Feynman, toute amplitude de la théorie ϕ^4 . La procédure est la suivante : On construit en premier lieu l'amplitude considérée comme la somme de tous les diagrammes de Feynman utilisant le propagateur et les vertex donnés par (3.3.8). Les intégrales des boucles sont souvent divergentes et par conséquent, nous introduisons un régulateur (dans notre cas via la régularisation dimensionnelle). Les résultats du calcul seront fonction des paramètres δ_Z , δ_m et δ_λ . Par la suite, on ajuste ces paramètres de sorte que les conditions de renormalisations (3.3.9) et (3.3.10) restent préservées.

Afin d'illustrer cela [6], nous allons reprendre l'exemple de la diffusion ($\phi\phi \rightarrow \phi\phi$) donnée par (2.2.13), en utilisant les nouvelles règles de Feynman (3.3.8)



le premier diagramme en boucle correspond au canal s , on écrit

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\
 &= (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2)
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

où $p = p_1 + p_2$ et p^2 correspond à la variable de Mandelstam s . Les deux diagrammes suivants sont identiques sauf que s est remplacée par les variables t et u . Par conséquent, on écrit :

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda \quad (3.3.12)$$

La condition de renormalisation implique

$$\begin{aligned} -i\lambda &= -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + iV(0) + iV(0)] - i\delta_\lambda \\ 0 &= (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + 2iV(0)] - i\delta_\lambda \\ i\delta_\lambda &= (-i\lambda)^2 i [V(4m^2) + 2V(0)] \end{aligned}$$

ce qui détermine δ_λ à l'ordre d'une boucle

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \quad (3.3.13)$$

L'expression de $V(p^2)$ selon (3.2.5) et (3.2.20) après régularisation dimensionnelle devient [1]

$$V(p^2) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln(m^2 - x(1-x)p^2) \right] \quad (3.3.14)$$

Ainsi, on écrit

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{6}{\epsilon} + 3\ln(4\pi) - 3\gamma - \ln(m^2 - x(1-x)(4m^2)) - 2\ln m^2 \right] \quad (3.3.15)$$

En combinant les deux résultats précédents dans (3.3.12), on abouti au résultat suivant pour l'amplitude de diffusion \mathcal{M} à l'ordre d'une boucle [1]

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\log\left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2}\right) + \right. \\ & \left. \log\left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2}\right) + \log\left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Bien que l'expression précédente est compliquée, elle représente une amplitude finie ("guérie" des divergences).

Afin de déterminer les constantes δ_m et δ_Z à l'ordre d'une boucle, on doit calculer la fonction de Green à deux points de la théorie (le propagateur exact). Tout d'abord, on définit $-iM(p^2)$ comme la somme de tous les diagrammes irréductibles à une particule (1PI) à deux lignes externes [1]

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= -iM(p^2) \\
 -iM(p^2) &= \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

où un diagramme irréductible à une particule (1PI) est tout diagramme qui ne peut être divisé en deux en supprimant une seule ligne.

Par conséquent, la fonction de Green à deux point est donnée en termes de la série géométrique

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \tag{3.3.18}$$

ce qui conduit à [1]

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 - M(p^2)} \tag{3.3.19}$$

La condition de renormalisation (3.3.10) au propagateur exact d'avoir un pôle en $p^2 = m^2$ avec un résidu qui vaut 1. Cela se traduit par les deux conditions équivalentes suivantes

$$M(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dp^2} M(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0 \tag{3.3.20}$$

Par conséquent et selon (3.3.17), nous avons à l'ordre d'une boucle

$$-iM(p^2) = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \quad (3.3.21)$$

l'application des règles de Feynman donne

$$iM(p^2) = -i\lambda \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \quad (3.3.22)$$

En utilisant (3.2.21), l'expression précédente prend la forme [1]

$$iM(p^2) = \frac{-i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \quad (3.3.23)$$

Du fait que le premier terme est indépendant de p^2 , nous pouvons poser

$$\delta_Z = 0 \quad \text{et} \quad \delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - \frac{d}{2}}}, \quad (3.3.24)$$

ce qui conduit à [1]

$$M(p^2) = 0 \quad \forall p^2, \quad (3.3.25)$$

cela satisfait les conditions (3.3.20). Avec les relations (3.3.13) et (3.3.23) nous avons fixés les contre-termes à une boucle. Ces relations ne sont pas définitives, elles contiendront nécessairement des termes supplémentaires si l'on continue le calcul à des ordres supérieurs.

A ce niveau, nous pouvons dire que nous avons terminé la procédure de renormalisation pour la théorie ϕ^4 à l'ordre d'une boucle.

4 Conclusion

Dans le présent mémoire, on s'est intéressé à la procédure de renormalisation de la théorie ϕ^4 dans le cadre de la théorie des perturbations renormalisées. En premier lieu, on a donné un rappel concis de la théorie des champs ϕ^4 . On a déduit, à partir de l'expression de la densité lagrangienne de la théorie, la forme des règles de Feynman correspondant dans le contexte d'une approche perturbative 'naïve'. Aussi, on a montré la relation entre les observables physiques qui sont les sections efficaces et les largeurs de désintégration avec les amplitudes de probabilité de diffusion construites par le moyen des règles de Feynman. L'application de cette technique à un processus de diffusion $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ nous a permis de déceler l'existence des divergences dans l'expression de l'amplitude de diffusion, qui apparaissent à l'ordre d'une boucle et plus. Cela constitue un problème majeur dans notre théorie car l'apparition de ces infinités dans un développement perturbatif est un résultat inacceptable physiquement et remet en cause toute la théorie. Par conséquent, la procédure de renormalisation est impérative et inévitable pour surmonter ce problème et redonner un sens physique à notre théorie.

Pour cela, on s'est intéressé dans le chapitre suivant à la théorie de renormalisation dans une approche perturbative. Tout d'abord, on a présenté le concept de degré de divergence superficiel. Ce dernier permet une certaine classification des diagrammes divergeant à travers les propriétés des intégrales de Feynman. Dans la plupart des cas, ce degré rend compte exactement du caractère divergent d'un

diagramme donné. La relation entre ce degré et la dimension de la constante de couplage de la théorie, obtenue par le moyen de la technique de comptage des puissances (power counting), a permis de donner une certaine classification des théories de champs scalaires par rapport à leur renormalisabilité. On a donc trois classes : les théories super-renormalisables, théories renormalisables et théories non renormalisables. La théorie ϕ^4 est renormalisable. Par la suite, notre intérêt s'est porté sur la régularisation dimensionnelle. Cette dernière est une étape nécessaire avant de passer au processus de renormalisation. Elle permet d'isoler les divergences qui apparaissent dans les intégrales de Feynman. L'idée de base de cette technique est très simple, elle consiste à calculer les intégrales de Feynman dans un espace-temps de dimension d et exprimer le résultat comme une fonction analytique, et par la suite, l'expression finale de toute quantité observable devrait avoir une limite bien définie lorsque $d \rightarrow 4$.

Pour construire la théorie des perturbations renormalisée, on commence par renormaliser le champ par l'introduction d'une constante de renormalisation du champ. Cela conduit à une nouvelle expression du lagrangien en termes de la masse et de la constante de couplage physique. Ce lagrangien comprend aussi trois termes supplémentaires dits contre-terms. A partir de cette nouvelle forme du lagrangien, on peut déduire les nouvelles règles de Feynman. Ces dernières comprennent les anciennes règles pour le propagateur et le vertex exprimées avec la masse et la constante de couplage physique, ainsi que deux autres vertex dits contre-terms aussi. Les diagrammes de Feynman, dans le cadre de la théorie des perturbations renormalisées, seront construits avec l'aide de ces règles. Les conditions de renormalisations permettent de déterminer les constantes qui apparaissent dans les contre-terms à chaque ordre perturbatif, ce qui conduit à l'élimination des infinités et par conséquent, l'obtention d'amplitudes finies à l'ordre perturbatif considéré. Ceci qui constitue, par essence, l'objectif de la procédure de renormalisation. Cette procédure peut être reconduite à chaque ordre perturbatif pour absorber à chaque fois les divergences des intégrales de Feynman dans le cadre de la théorie ϕ^4 .

Bibliographie

- [1] M. E. Peskin et D. V. Schroeder; An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley (1995).
- [2] L. H. Ryder; Quantum Field Theory, Cambridge University Press (1996).
- [3] K. Kumericki; Feynman diagrams for Beginners; arXiv : physics.ed-ph/1602.04182 (2016).
- [4] C. Morningstar; An introduction to quantum field theory; notes de cours, Université Carnegie Mellon (USA) (2010).
- [5] P. Kraus and D. Griffiths; Renormalization of a model quantum field theory; Am. J. Phys. 60, 1013-1023 (1992).
- [6] T. Weigand; Quantum Field Theory I and II; notes de cours, Université de Heidelberg (Allemagne) (2014).