

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira de Bejaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique



# Mémoire de Master

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Physique

Option: Physique Théorique

Présenté par

**BENSALEM SALIM**

*Intitulé*

**Contribution à l'étude des systèmes  
dynamiques: Etude de l'interaction des points  
vortex.**

Devant le jury :

Président	: M <sup>r</sup>	KASRI	Yazid	MCA	U.A.M. Bejaïa
Examineur	: M <sup>r</sup>	BELABBAS	Abdelmoumene	MCB	U.A.M. Bejaïa
Rapporteur	: M <sup>r</sup>	MEZIANI	Bachir	PROF	U.A.M. Bejaïa

2015/2016

# Page de Garde

## Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier *MON DIEU* notre créateur pour m'avoir donné la force et le courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement mes **parents** mes **frères** pour leur soutien physique et moral, mon encadreur *MEZIANI BACHIR* pour ses conseils, son aide et orientations, pour le temps et les efforts qu'il a dépensé afin que ce travail voit le jour.

Sans oublier de remercier toute ma famille universitaire : professeurs et étudiants en particulier ma promotion de Master en physique théorique de 2016 et  
tous mes amis



**- SOMMAIR -**

**-CHAPITRE I**

**-Introduction Générale et Bibliographie .....01**

**-CHAPITRE II**

**- Dynamique des Points Vortex .....03**

**-2-1- introduction .....03**

**-2-2- Equation de vorticité .....03**

**-2.3- Les Points Vortex .....04**

**-2.3.1-Fonctions de Green .....05**

**-2.3.2-Champ des vitesses .....05**

**-2.3.3- Lignes de courant .....05**

**-2.3.4- Mouvement des points vortex .....06**

**-2.4-Système Hamiltonien .....06**

**-2-5-Conclusion .....08**

**- CHAPITRE III- Méthode de Résolution numériques des Equations Différentielles.**

**-3.1-Introduction .....09**

**- 3.2-Définitions des Equations différentielles Ordinaires..... 09**

**-3.3-Problème de Cauchy.....10**

**-3.4-Méthodes Numériques .....10**

**-3.4.1-Propriétés des méthodes numériques .....10**

**-3.4.2-Méthode d'Euler Explicite et Implicite .....11**

**-3.4.3-Méthode de Runge-Kutta .....12**

**-3.4-Application des Méthodes d'Euler et Runge Kutta d'ordre 4 au problème des points vortex .....12**

**-3.5-Conclusion.....15**

**-CHAPITRE IV- Résultats et Discussion**

**-4.1-Introduction .....16**

<b>-4.2-Interaction de deux points vortex : Lignes de courant, Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien .....</b>	<b>16</b>
<b>-4.3-Interaction de trois points vortex : Lignes de courant, Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien .....</b>	<b>27</b>
<b>-4.4-Interaction de quatre points vortex : Lignes de courant Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien .....</b>	<b>39</b>
<b>-4.5-Conclusion .....</b>	<b>48</b>
<b>-CHAPITRE V - Conclusion Générale .....</b>	<b>49</b>
<b>-Bibliographie .....</b>	<b>50</b>

## **- CHAPITRE 1**

### **❖ Introduction Générale et Bibliographie**

Le mot "vortex" dont le synonyme premier est tourbillon est un sujet d'étude assez récent pour la physique puisque il apparait pour la première fois comme 'mot' en 1858 [1]. L'étude des vortex continue aujourd'hui d'être l'objet d'importantes recherches de la part des scientifiques.

Ces dernières années, les systèmes de vortex ont été le sujet d'un vif intérêt d'une partie de la communauté scientifique (astronomes, physiciens, géophysiciens et mathématiciens). Pour les astronomes, l'étude d'un système de vortex ponctuels présente de fortes ressemblances avec celle d'un système gravitationnel de masses identiques, Albouy 1997 [2]. Dans un tel contexte, on peut le voir comme un problème prototype pour l'étude des configurations centrales. De plus, dans les études de formation planétaire les tourbillons sont vus comme un mécanisme pour regrouper de petites particules solides dans de plus grandes accumulations de matière solide et favorisant donc la formation de protoplanètes [3-4]. .

Les vortex ponctuels sont aussi largement utilisés dans les études de supraconductivité, où ils représentent, en deux dimensions, des lignes de champ-magnétique piégées [5]

Pour les spécialistes de la mécanique des fluides, l'intérêt est dans la similarité frappante entre la dynamique des taches tourbillonnaires en turbulence bidimensionnelle et la dynamique des systèmes modifiés de vortex-points [6-7].

Le mouvement des vortex dans un écoulement fluide est en effet responsable de quelques uns des plus fascinants aspects de la mécanique des fluides comme le cisaillement le transport et les instabilités.

Les structures tourbillonnaires sont extrêmement fréquentes dans les écoulements. Tout le monde a vu un tourbillon se former dans son évier ou en mélangeant un liquide avec son fouet de cuisine. Les plus grosses de ces structures se rencontrent dans les écoulements atmosphériques (cyclones ...) avec des tailles gigantesques [8].

On peut aussi rencontrer de très gros écoulements en rotation dans les océans [9]. A une échelle intermédiaire, les tornades sont une illustration très spectaculaire d'une structure tourbillonnaire ou vortex. Depuis des années l'intérêt pour les vortex s'est étendu.

La correspondance entre des équations de vorticité et des équations de vortex ponctuels offre l'avantage de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires, ces dernières étant beaucoup plus facile à traiter, surtout numériquement.

Pour les mathématiciens, ils fournissent le contexte idéal pour l'utilisation et la vérification des théories perturbatives en dynamique hamiltonienne [10-11] (Kahnin 1982, Celletti et Falcolini 1988).

L'objectif de ce travail est l'analyse de la dynamique des vortex.

Dans le deuxième chapitre, on introduit d'abord la vorticité en utilisant l'équation de continuité des fluides. A partir de cette équation, on construira le champ des vitesses et la fonction du courant. Les équations du mouvement des points vortex résultent de l'intégration du champ des vitesses. Finalement on introduit les équations de Hamilton et on construit l'Hamiltonien correspondant aux points vortex

Le troisième chapitre sera consacré à la résolution numérique des équations obtenues au deuxième chapitre. Après un rappel des méthodes numériques, leurs applications au problème de points vortex permettront d'analyser l'interaction de deux ou plusieurs points vortex dans différentes configurations.

Les résultats numériques obtenus seront analysés et comment .

Ce travail est terminé par une conclusion qui va synthétiser l'apport de ce travail dans la compréhension des phénomènes physiques qui peuvent être modélisés par des systèmes de points vortex.

## - CHAPITRE II- Dynamique des Points Vortex

### 2-1- introduction :

Dans ce chapitre, nous étudierons l'interaction bidimensionnelle d'un ensemble de points vortex localisés dans un fluide incompressible, non visqueux.

On présentera, dans un premier temps, l'équation de vorticité, qui découle des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement des fluides incompressibles. Par la suite, on aborde l'étude des points vortex. On définit le champ des vitesses, les fonctions de courant et les équations du mouvement.

A partir des équations du mouvement, les équations de Hamilton et l'Hamiltonien du système seront introduits.

### 2-2- Equation de vorticité :

L'équation de conservation de la masse d'un fluide est appelée équation de continuité. Elle est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (2.1)$$

Où  $\rho(x, y, z, t)$  représente la masse volumique du fluide et

$U = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  sa vitesse.

Du fait que le fluide est considéré comme étant incompressible, sa masse volumique reste constante :  $\rho(x, y, z, t) = \rho$ , l'équation (2.1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho U) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.2)$$

Sachant que la masse volumique est constante, on écrit alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.3)$$

Cette équation montre que la divergence des vitesses est nulle.

Avec ces contraintes, Les équations de Navier-Stokes sont [12]:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\vec{\nabla} \frac{P}{\rho} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \quad (2.4)$$

Où  $P$  et  $\nu$  représentent la pression et la viscosité dynamique du fluide respectivement.

Le terme  $(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$  peut être écrit, en utilisant l'identité vectorielle, comme :

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) - \vec{U} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \quad (2.5)$$

En défini le vecteur  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$  comme la vorticité du champ des vitesses. En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (2.4) précédente, et en tenant compte du fait que le rotationnel d'un gradient est toujours nul, on obtient :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{\omega}) = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} \quad (2.6)$$

Cette équation se simplifie en développant le second terme comme :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{\omega}) = \vec{U} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} \quad (2.7)$$

Sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ , et on sait que, à partir de l'équation (2.3) que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ . L'équation de vorticité tridimensionnelle est donnée par :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \quad (2.8)$$

Dans le cas bidimensionnel, la vorticité est perpendiculaire au plan de l'écoulement. On peut arranger les coordonnées de telle sorte que la vitesse  $\vec{U}$  est entièrement définie dans le plan  $(x, y)$ , avec une vorticité dans la direction  $z$ . Cet arrangement implique que le terme  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$  est nul.

En posant  $\vec{\omega} = \omega(x, y, t)\vec{k}$ , l'équation de vorticité bidimensionnelle s'écrit :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U} \quad (2.9)$$

Dans le cadre de ce travail, on considère un fluide non visqueux, ce qui permet d'avoir  $\nu = 0$ . On obtient alors l'équation de vorticité d'un fluide parfait incompressible dans le cas bidimensionnel qui s'écrit :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = 0 \quad (2.10)$$

Cette équation décrit, alors, l'évolution temporelle de la vitesse et de la vorticité d'un fluide parfait au cours du temps.

Pour obtenir le champ des vitesses donné par une distribution de vorticité, on définit la fonction  $\psi(x, y, t)$  appelée fonction de courant, tel que :

$$u = \psi_y \text{ et } v = -\psi_x \quad (2.11)$$

Où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse  $U$  selon les directions  $x$  et  $y$ .

Les composantes de la vitesse, définies par la relation (2.11), vérifient l'équation d'incompressibilité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0 \quad (2.12)$$

La vorticité de ce champ des vitesses est alors :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{k}(-\psi_{xx} - \psi_{yy}) = -\vec{k} \vec{\nabla}^2 \psi$$

Finalement

$$\vec{\nabla}^2 \psi = -\omega \quad (2.13)$$

qui représente l'équation de Poisson.

On a transformé le problème qui consiste à trouver le champ des vitesses à partir de la vorticité à la résolution d'une équation de Poisson

### 2.3- Les Points Vortex

Jusque là, on peut considérer deux différentes approches pour la résolution numérique du système. Dans la première approche, le mouvement de la vorticité est considéré comme son mouvement dans le fluide. C'est le point de vue Lagrangien. Dans la deuxième approche, on considère une grille fixe et on regarde le moment où le fluide traverse cette grille. C'est le point de vue Eulérien. Dans ce qui suit, on considère le point de vue Lagrangien.

Dans les simulations Lagrangien, on suppose que la vorticité est nulle partout sauf en un certains nombre de points bien définis. On peut alors suivre le mouvement du fluide juste au niveau de ces points, ce qui réduit la complexité des calcul pour le système.

Avant de passer aux simulations numériques sur des exemples, nous allons d'abord présenter les développements mathématiques de ce modèle.

### 2.3.1-Fonctions de Green

Pour résoudre l'équation (2.13), on va utiliser la fonction de Green  $G = G(x, y, x', y')$ . Cette fonction est la solution de l'équation de Poisson pour une delta distribution de densité, tel que :

$$\nabla^2 G = \delta(p - q)$$

Pour point d'application de l'impulsion  $q = (x', y')$  et un point d'évaluation  $p = (x, y)$ .

Dans le cas bidimensionnel, la solution est donnée par :

$$G(p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|p - q|)$$

La fonction de courant (12) est alors l'intégrale totale de cette solution

$$\psi(p, t) = \iint G(p, q) \omega(q, t) dq \quad (2.14)$$

En prenant le rotationnel de la fonction de courant, on obtient le champ des vitesses :

$$U(p, t) = \iint \nabla_p \wedge \vec{k} G(p, q) \omega(q, t) dq \quad (2.15)$$

Il s'agit de la superposition des solutions pour tous les points dont la vorticité est non nulle. Le calcul du rotationnel, à l'intérieur de l'intégrale, donne :

$$\nabla_p \wedge \vec{k} G(p, q) = \frac{1}{2\pi |p - q|^2} \begin{pmatrix} -(y - y') \\ (x - x') \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.3.2-Champ des vitesses :

En tenant compte du fait que la vorticité est non nulle en un certain nombre de point, l'intégral sur l'espace (2.15) pour une distribution de vorticité continue, devient une simple somme sur les points.

Pour  $N$  points  $q_i = (x_i, y_i)$  avec des vorticites  $\omega_i$ , le champ des vitesses est donné par :

$$U(p, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2\pi |p - q_i|^2} \begin{pmatrix} -(y - y_i) \\ (x - x_i) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ce champ, ne peut pas être évalué au niveau de tous les points  $q_i$ , où le terme de la somme est indéfini. On suppose alors que le point vortex n'induit pas de vitesse en son centre. Alors, on définit ce terme comme nul. Le champ des vitesses est donné par :

$$U(p, t) = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_i}{2\pi |p - q_i|^2} \begin{pmatrix} -(y - y_i) \\ (x - x_i) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Pour tous les points  $p = q_j$

### 2.3.3 : Lignes de courant :

Considérant  $U(x, y, t)$  comme le champ des vitesse de la configuration des vortex, les particules fluides vérifient l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}(x, y) = U(x, y, t) \quad (2.19)$$

La résolution de ce système donne les lignes du courant du champ des vitesses. Ces lignes de courants sont les trajectoires suivies par les particules fluides dans le cas d'un écoulement stationnaire. L'écoulement stationnaire correspond au cas où le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps  $U(x, y, t) = U(x, y)$ .

Pour avoir la solution de l'équation différentielle (2.19), on utilise la fonction du courant  $\psi$  introduite dans (2.11). Le gradient de cette fonction est :

$$\vec{\nabla} \psi = (\psi_x, \psi_y) = (-v, u)$$

Les lignes de courant constant  $\psi = \psi_0$  sont perpendiculaires au gradient à tous les points. Pour suivre ces lignes, on doit résoudre l'équation (19), qui montrent que les particules qui suivent le fluide suivent les lignes de courant constantes.

Dans le cas d'un nombre discret de points vortex, l'intégral de  $\psi$  (14) sera réduit à une somme similaire à celle du champ des vitesses (18) et qui est donné par :

$$\psi(q) = \sum_{i=1}^N -\frac{\omega_i}{2\pi} \ln(|p - q|) \quad (2.20)$$

### 2.3.4 Mouvement des points vortex :

On considère maintenant la solution dépendante du temps. Comme la vorticité suit le mouvement du fluide, la vitesse dépend de la position des points vortex à chaque instant. Pour suivre la position des points vortex, on a un système de  $2N$  équations différentielles couplées pour un système de  $N$  points vortex qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{dy_i}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Pour avoir la position des points vortex au cours du temps, le système sera résolu numériquement.

### 2.4-Système Hamiltonien :

Une classe importante d'équations différentielles qui régissent les problèmes physiques sont celle décrites par les équations de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Où  $q_i$ ,  $p_i$  sont appelées coordonnées généralisées et  $H = H(q_i, p_i, t)$  est l'Hamiltonien du système. Des systèmes de cette forme apparaissent dans la description de la mécanique classique, en particulier, lorsque  $q_i$ ,  $p_i$  correspondent aux positions et aux moments. Un aspect important des systèmes Hamiltoniens est la conservation des quantités physiques.

Dans le cas d'un système de point vortex, décrit précédemment, la formulation hamiltonienne est comme suit :

On pose :

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_{j \neq i} \omega_i \omega_j \ln r_{ij} \quad (2.23)$$

Où  $r_{ij}$  est la distance entre les points  $i$  et  $j$ ,  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

On pose  $q_i \equiv x_i$  et  $p_i \equiv y_i$  dans les équations de hamilton (2.22), on obtient alors les équations du mouvement données par (2.21).

Connaissant l'hamiltonien, on peu montrer [13] que les quantités physiques suivantes restent invariantes au cours du temps.

La vorticité totale :

$$\Omega = \sum_i \omega_i \quad (2.24)$$

Les coordonnées du centre de masse de la vorticité :

$$X = \frac{\sum_i \omega_i x_i}{\Omega}, \quad Y = \frac{\sum_i \omega_i y_i}{\Omega} \quad (2.25)$$

L'Hamiltonien du système :

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_{j \neq i} \omega_i \omega_j \ln r_{ij} \quad (2.26)$$

## **2-5-Conclusion**

On a introduit les équations d'interaction des points vortex en introduisant, dans un premier temps, l'équation de la vorticité. Cette équation est déduite des équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible et non visqueux. Par la suite, on a exposé les équations qui régissent l'interaction des points vortex. On a donné les équations du champ des vitesses, déduite de l'équation de vorticité par l'intermédiaire de la fonction de Green. Les équations régissant les lignes de courant sont tirées de ces équations du champ des vitesses en utilisant la propriété d'orthogonalité des vitesses aux lignes de courant. Les équations des trajectoires sont des intégrales des équations des vitesses.

On a, enfin, défini, l'Hamiltonien et les équations de Hamilton correspondantes à ce problème.

L'ensemble de ces équations seront traitées numériquement. Dans le troisième chapitre, on va introduire les méthodes numériques utilisées et les résultats seront exposés et comment  dans le quatrième chapitre.

## - CHAPITRE III

# Méthode de Résolution numériques des Equations Différentielles Ordinaires

### 3.1-Introduction :

A fin d'obtenir les positions des points vortex qui se déplacent dans le fluide, le système d'équations différentielles (2.21) qui régit le mouvement des points vortex sera traité numériquement. Avant d'appliquer ces méthodes numériques, nous donnerons d'abord un aperçu, de quelques méthodes numériques appliquées à la résolution des équations ou systèmes d'équations différentielles, qui seront utilisées pour la résolution de notre système.

### 3.2-Définitions des Equations différentielles Ordinaires :

Soit une fonction  $y(x)$  définie sur un intervalle de  $\mathfrak{R}$  et de classe  $C_p$  (Continûment dérivable d'ordre p). On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme [14]:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}) = 0 \quad (3.1)$$

Dont la forme canonique est :

$$y^{(p)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}) \quad (3.2)$$

Toute équation différentielle canonique peut être écrite comme un système d'équations différentielles du premier ordre en introduisant (p-1) fonctions définies comme :

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p = y^{(p-1)} \end{cases} \quad (3.3)$$

L'équation canonique se met sous la forme du système d'équations différentielles d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_p = f(x, y, y_1, \dots, y_p) \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.3-Le Problème de Cauchy :

On appelle problème de Cauchy ou problème à valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction  $y(x)$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , telle que :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)); & \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Si  $f$  est continue et vérifie une condition de Lipschitz par rapport à  $y$ , alors le problème admet une solution unique.

### 3.4-Méthodes Numériques :

Pour obtenir une approximation numérique  $\tilde{y}(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , nous allons estimer la valeur de la fonction  $y(x)$  en un nombre fini de points  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , qui constitue les nœuds du maillage. La solution numérique discrète obtenue aux points  $x_i$  est notée  $y_i = y(x_i)$ .

$h = x_{i+1} - x_i$  est appelé le pas de discrétisation. Ce pas peut être constant ou variable.

Les techniques de résolution des équations différentielles ordinaires sont basées sur :

- L'approximation géométrique de la fonction.
- Les formules d'intégration numérique.
- Les développements de Taylor au voisinage de  $x_i$

#### 3.4.1-Propriétés des méthodes numériques :

Il existe des notions mathématiques qui permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

**Consistance d'une méthode :** La consistance est la propriété qui assure que la solution exacte de l'équation discrétisée tend vers la solution exacte de l'équation continue lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers zéro.

**Stabilité d'une méthode :** C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées reste bornée. La stabilité indique si l'erreur augmente ou non au cours du calcul. Une méthode stable sous condition est dite conditionnellement stable. Une méthode toujours stable est dite inconditionnellement stable.

**Ordre de Précision d'une Méthode :** L'erreur de troncature  $\varepsilon$  est définie comme la différence entre la solution exacte  $\tilde{y}(x)$  et l'approximation numérique  $y_n$ .

$$\varepsilon_n = |\tilde{y}(x_n) - y_n| = o(h^p) \quad (3.6)$$

L'ordre de précision de la méthode est donné par l'entier  $p$ .

**Convergence et Taux de Convergence d'une Méthode :** Une méthode est convergente si, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, la solution numérique

tend vers la solution exacte de l'équation continue. Une méthode est convergente à l'ordre  $m$  si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i |\varepsilon_i| = o(h^m) \quad (3.7)$$

Une méthode stable et consistante est convergente.

Les principales méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées ordinaires sont classées en deux catégories :

- Les méthodes à un pas : Le calcul de la valeur discrète  $y_{i+1}$  au nœud  $x_{i+1}$  fait intervenir la valeur  $y_i$  obtenue au nœud  $x_i$ . Parmi ces méthodes, on a :
  - Méthode d'Euler Explicite et Implicite.
  - Méthode de Range-Kutta

Les méthodes à un pas explicites sont données par la formule générale :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, h) \end{cases} \quad (3.8)$$

Où la fonction  $\Phi$  définit la méthode utilisée.

Les méthodes à un pas implicites sont données par la formule générale :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, y_{i+1}, h) \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution à chaque nœud  $x_{i+1}$  est obtenue en résolvant une équation.

Résultats :

- 1-Si  $\Phi$  est Lipschitzienne par rapport à  $y$ , alors la méthode explicite est stable.
- 2-Les méthodes implicites sont toujours stables.
- 3-Les méthodes sont consistantes si et seulement si il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$

### 3.4.2-Méthode d'Euler Explicite et Implicite :

La méthode Explicite, d'ordre un, est donnée par l'algorithme :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (3.10)$$

a-La méthode est le résultat de l'application de la formule des rectangle basée au point  $x_i$ .

b-Elle revient à remplacer (géométriquement) localement en chaque point  $x_i$  la courbe solution par sa tangente.

c-La méthode provient du développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction  $y$  au voisinage de  $x_i$ .

La méthode Implicite, d'ordre un, est donnée par l'algorithme :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{i+1} = y_i + h * f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3.4.3-Méthode de Runge-Kutta :

La méthode de Runge-Kutta, d'ordre deux, explicite (RK2) est donnée par l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ donné} \\ y_{i+1}^* = y_i + h * f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} * [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)] \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Une méthode explicite, d'ordre quatre, est obtenue en utilisant la formule de Simpson. Son algorithme est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ donné} \\ k_1 = h * f(x_i, y_i) \\ k_2 = h * f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h * f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h * f(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

### 3.4-Application des Méthodes d'Euler et Runge Kutta d'ordre 4 au problème des points vortex :

On rappelle que les équations des trajectoires des points vortex sont données par le système d'équations différentielles :

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{dy_i}{dt} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} - \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \end{array} \right) \quad (3.14)$$

Auxquelles on associe les conditions initiales :

$$(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}) \quad i = 1 \dots N \quad (3.15)$$

En appliquant la méthode d'Euler explicite au système d'équations différentielles (3.14) avec les conditions initiales (3.15), on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \end{pmatrix} = \text{donnés} \\ \begin{pmatrix} x_i^{(t+\Delta t)} \\ y_i^{(t+\Delta t)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i^{(t)} - \Delta t \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})}{(x_i^{(t)} - x_j^{(t)})^2 + (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})^2} \\ y_i^{(t)} + \Delta t \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (x_i^{(t)} - x_j^{(t)})}{(x_i^{(t)} - x_j^{(t)})^2 + (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'application de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 au système d'équations différentielles (3.14) avec les conditions initiales (3.15) conduit au système algébrique qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \end{pmatrix} = \text{donnés} \\ \begin{pmatrix} x_i^{(t+\Delta t)} \\ y_i^{(t+\Delta t)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i^{(t)} - \frac{\Delta t}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4) \\ y_i^{(t)} + \frac{\Delta t}{6} (l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Avec

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} k_i^1 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})}{(x_i^{(t)} - x_j^{(t)})^2 + (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})^2} \\ l_i^1 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j (x_i^{(t)} - x_j^{(t)})}{(x_i^{(t)} - x_j^{(t)})^2 + (y_i^{(t)} - y_j^{(t)})^2} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} k_i^2 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^1}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^1}{2} \right)}{\left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^1}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^1}{2} \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^1}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^1}{2} \right)^2} \\ l_i^2 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^1}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^1}{2} \right)}{\left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^1}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^1}{2} \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^1}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^1}{2} \right)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} k_i^3 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^2}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^2}{2} \right)}{\left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^2}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^2}{2} \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^2}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^2}{2} \right)^2} \\ l_i^3 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^2}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^2}{2} \right)}{\left( x_i^{(t)} + \frac{k_i^2}{2} - x_j^{(t)} - \frac{k_j^2}{2} \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + \frac{l_i^2}{2} - y_j^{(t)} - \frac{l_j^2}{2} \right)^2} \end{array} \right)$$

Et

$$\left( \begin{array}{l} k_i^4 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( y_i^{(t)} + l_i^3 - y_j^{(t)} - l_j^3 \right)}{\left( x_i^{(t)} + k_i^3 - x_j^{(t)} - k_j^3 \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + l_i^3 - y_j^{(t)} - l_j^3 \right)^2} \\ l_i^4 = \sum_{i \neq j}^N \frac{\omega_j \left( x_i^{(t)} + k_i^3 - x_j^{(t)} - k_j^3 \right)}{\left( x_i^{(t)} + k_i^3 - x_j^{(t)} - k_j^3 \right)^2 + \left( y_i^{(t)} + l_i^3 - y_j^{(t)} - l_j^3 \right)^2} \end{array} \right)$$

Les deux systèmes algébriques (3.16) et (3.17) ont été résolus numériquement.

### **3.5 : Conclusion**

Dans ce chapitre, on a donné un aperçu sur les méthodes numériques appliquées à la résolution des équations ou systèmes d'équations différentielles. On a ensuite expliciter les deux méthodes qui sont appliquées à la résolution du système d'équations différentielles régissant le mouvement des points vortex dans un plan. On a, enfin, détaillé les systèmes algébriques obtenus, après application de ce méthodes et qui sont programmés et résolus numériquement.

## - CHAPITRE IV RESULTATS et DISCUSSION

### 4.1-Introduction :

Dans ce chapitre, on présentera quelques résultats numériques. Les graphes montrent les lignes du courant créés par les points vortex, les trajectoires des points vortex au cours du temps, déduites de la résolution des équations algébriques (3.16) et (3.17) et enfin la variation de l'Hamiltonien des points vortex au cours du temps.

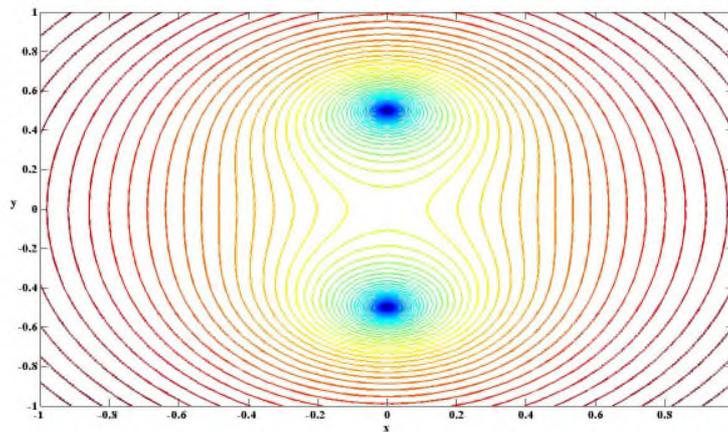
On discutera trois cas d'interaction de points vortex. On débutera par le cas de deux points vortex placés à des positions connues dans le plan  $(x, y)$ . Ce cas permettra de voir l'effet des positions des points vortex, l'intensité et l'orientation (signes) des vorticités associées à chacun des points vortex.

On abordera, par la suite, le cas d'interaction de trois points vortex placés dans le plan et auxquels on associe des vorticité dans les modules et les orientations sont donnés.

Le troisième cas est consacré à l'analyse de l'interaction de quatre points vortex, placés dans le plan, avec des vorticité dont les modules et les orientations sont connus.

### 4.2-Interaction de deux points vortex : Lignes de courant, Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien :

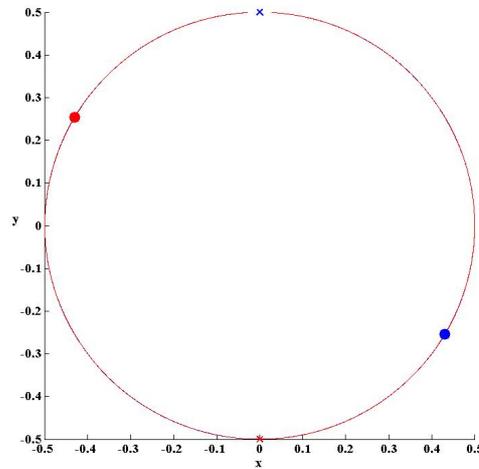
Les figures (4.1-4.22) représentent les lignes de courant, les trajectoires des points vortex et les variations de l'Hamiltonien de deux points vortex dont les positions, les modules et l'orientation des vorticités sont connus. L'interaction de deux points vortex permet de comprendre les effets élémentaires de l'interaction des points vortex.



**Figure 4.1 : Lignes de courant créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0,0,0.5)$  et  $q_2(0,0,-0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$**

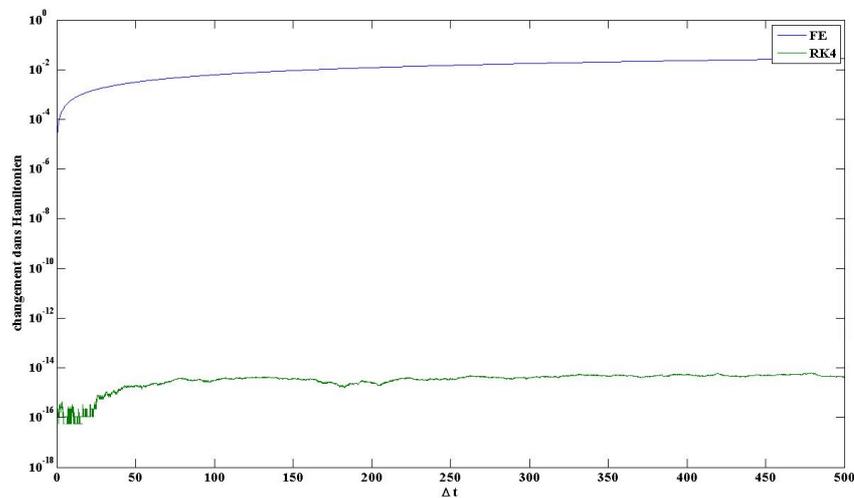
Le graphe (4.1) exhibe les lignes de courant de deux points vortex, placés initialement sur l'axe vertical à des positions symétriques par rapport à l'axe horizontal. Ces deux points vortex ont des vorticité de même module et de même orientation. La figure montre que les lignes de courant dans le voisinage de chacun des points vortex sont des courbes fermées et circulaires. Loin des positions des points vortex, les lignes de courant des deux points se rejoignent pour former un seul contour. Ce contour prend une forme circulaire de plus en plus qu'on s'éloigne des

positions des points vortex. Pour un observateur placé loin des deux points vortex, les lignes de courant ressemblent aux lignes de courant créés par un seul point vortex placé au centre des deux points.



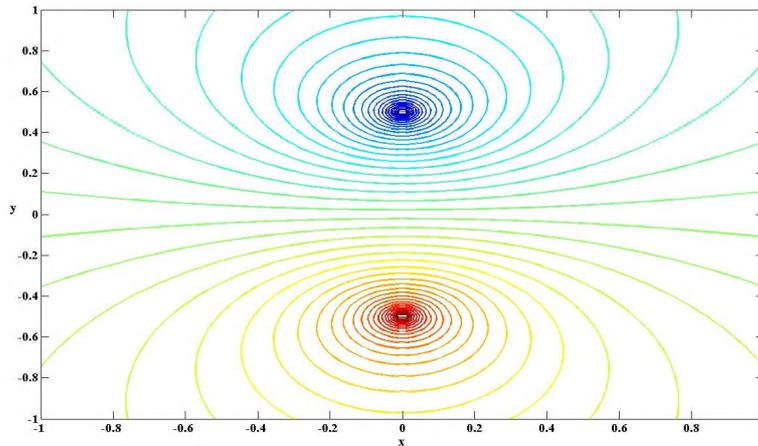
**Figure 4.2 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$**

Les trajectoires des deux points vortex (Figure 4.2) montrent que les deux points vortex évoluent sur des cercles de mêmes rayons. Ceci est dû au fait que les vorticités des deux points vortex ont le même module et la même orientation.



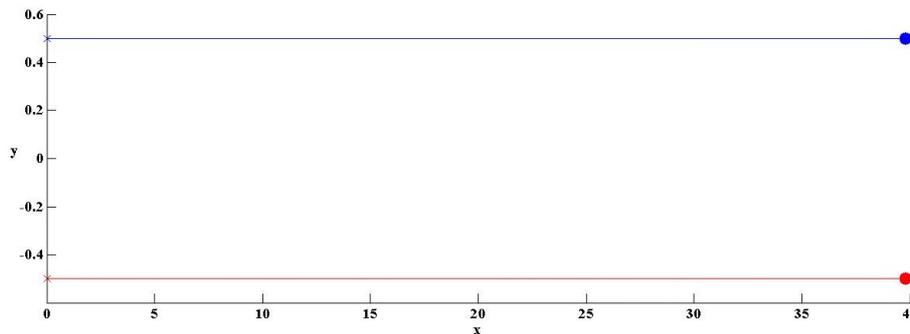
**Figure 4.3 : Variation de l'Hamiltonien des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  au cours du temps**

La figure 4.3 montre la variation de l'Hamiltonien des deux points vortex. Ce graphes montrent que les calculs sont plus précis en utilisant la méthode de Runge kutta d'ordre 4 par rapport aux calculs effectués avec la méthode d'Euler explicite.



**Figure 4.4 : Lignes de courants créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  qui ont des vorticités opposées  $\omega_1 = 0.5$  et  $\omega_2 = -0.5$**

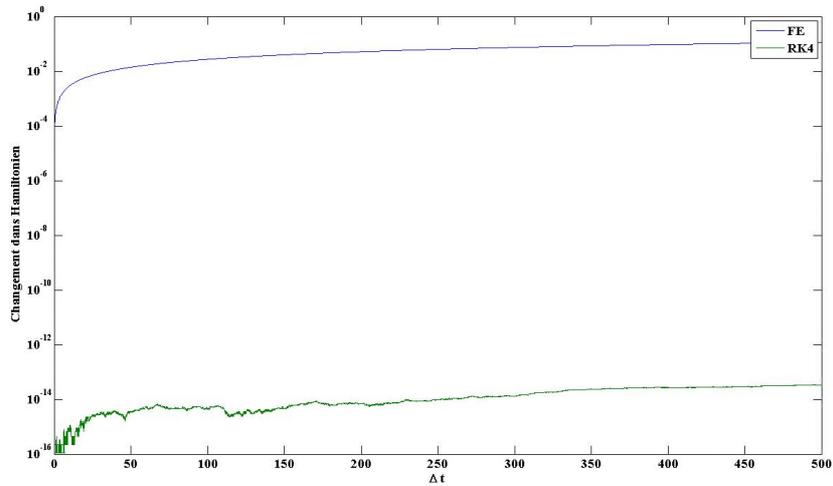
Lorsqu'on change l'orientation de la vorticité de l'un des points vortex (Figure 4.4), les lignes de courant, dans la région située entre les deux points vortex, deviennent de plus en plus droit.



**Figure 4.5 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  qui ont des vorticités opposées  $\omega_1 = 0.5$  et  $\omega_2 = -0.5$**

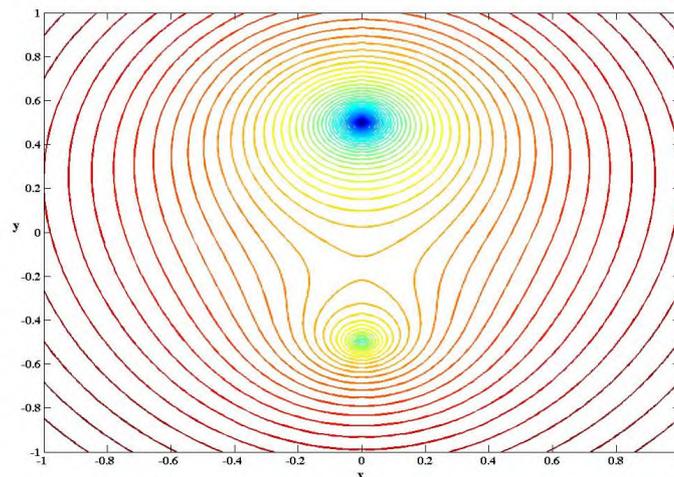
Ce résultat est vérifié par les trajectoires droites des deux points vortex (Figure 4.5). Ces trajectoires résultent d'une interaction égale et opposée entre les deux points vortex.

La variation de l'Hamiltonien (Figure 4.6) confirme la précision des calculs effectués par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 par rapport à ceux obtenus par la méthode d'Euler.

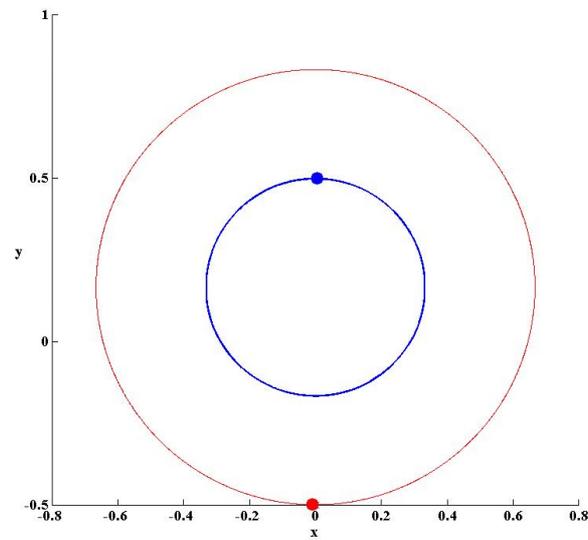


**Figure 4.6 : Variation de l'Hamiltonien des points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  au cours du temps**

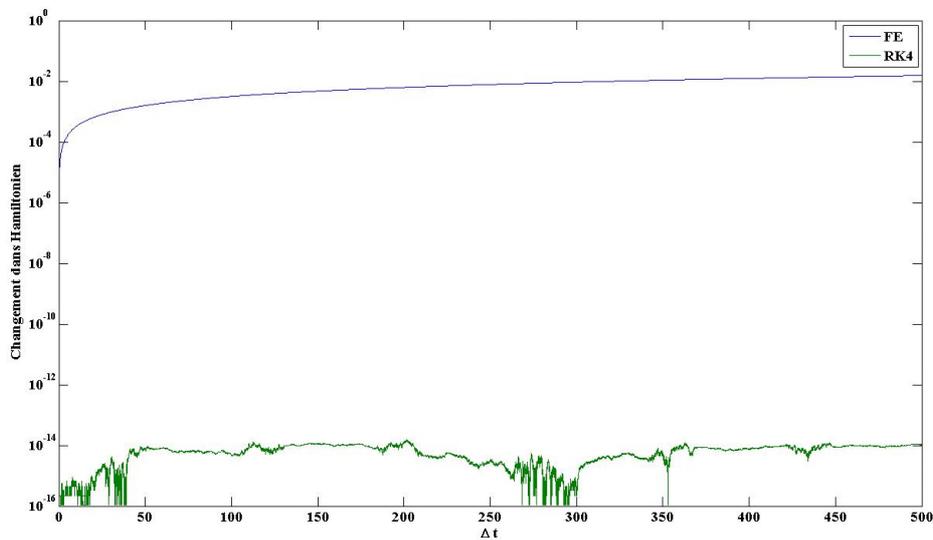
Lorsque la vorticité de l'un des points vortex devient le double de la vorticité de l'autre point vortex (Figure 4.7), les lignes de courant du point vortex de grande vorticité s'étalent sur une surface plus large que ceux créés par le point vortex dont la vorticité est faible. Les trajectoires des deux points vortex restent circulaires mais de tailles différentes (Figure 4.8). Le point vortex ayant la grande vorticité tourne plus rapidement que le point vortex dont la vorticité est faible et sa trajectoire est plus proche du centre des deux vortex. Le même effet est constaté loin des deux vortex que dans le cas de la figure 4.2.



**Figure 4.7 : Lignes de courants créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$**

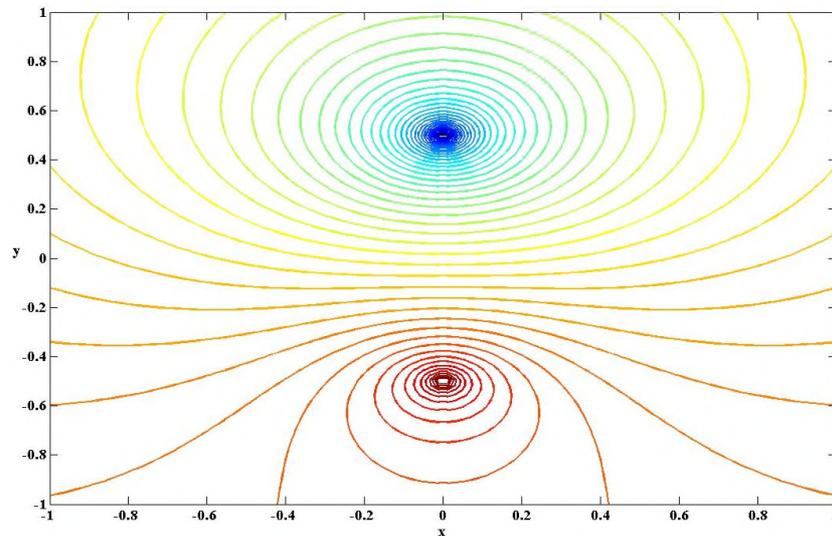


**Figure 4.8 :** Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$



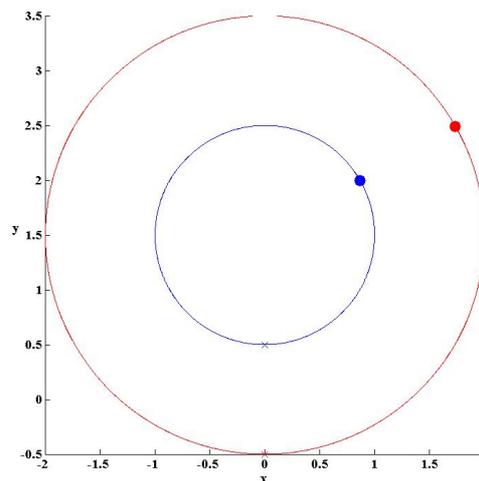
**Figure 4.9 :** Variation de l'Hamiltonien des points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = -0.5$  et opposée au cours du temps

Lorsque la vorticité de l'un des points vortex est le double de celle de l'autre vortex mais avec des orientations opposées (Figure 4.10), on remarque que les lignes de courant sont plus resserrés dans la zone située entre les deux points vortex et leur allure est déformée.

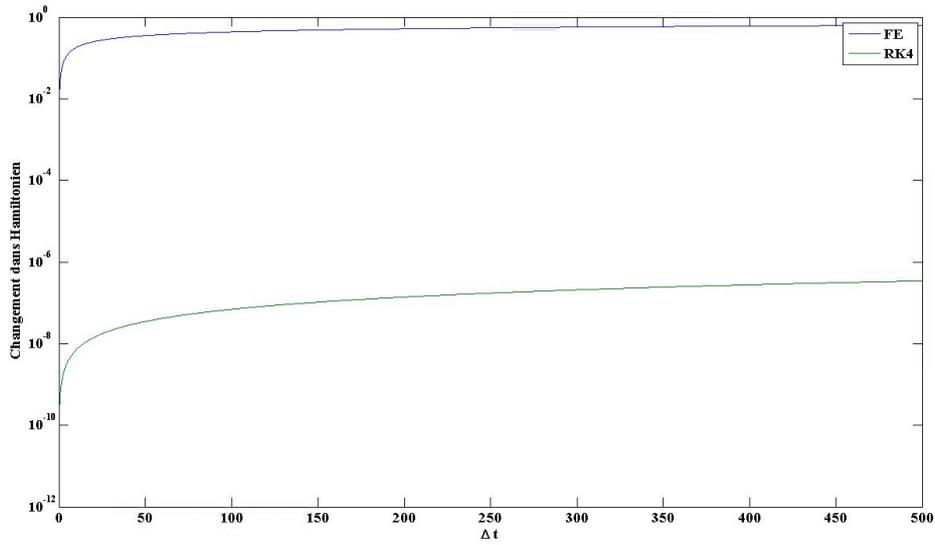


**Figure 4.10 : Lignes de courants créées par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = -0.5$  et opposée**

Les trajectoires des deux points vortex (Figure 4.11) restent circulaire mais les deux points vortex tournent dans deux sens opposés. La trajectoire du point vortex, dont la vorticité est plus grande, est représentée par un cercle de rayon plus petit.

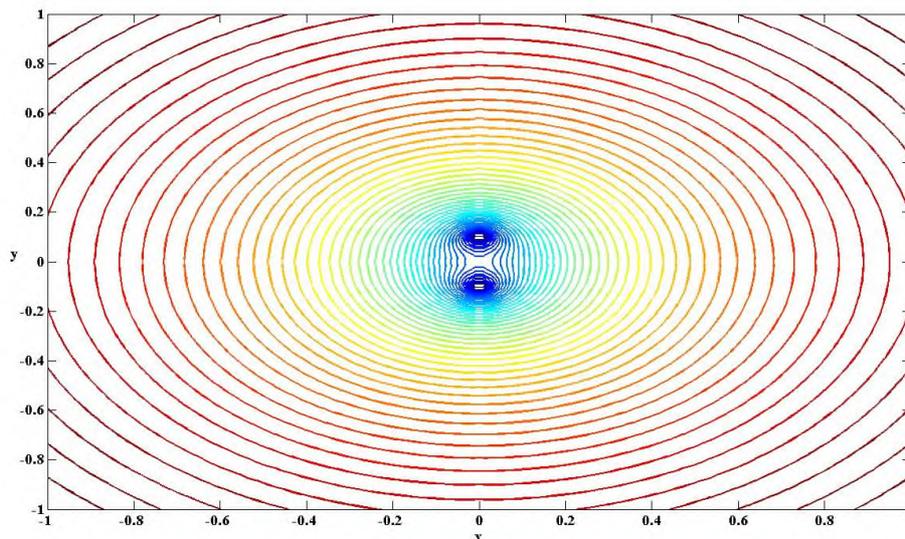


**Figure 4.11 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 1$  deux fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = -0.5$  et opposée**



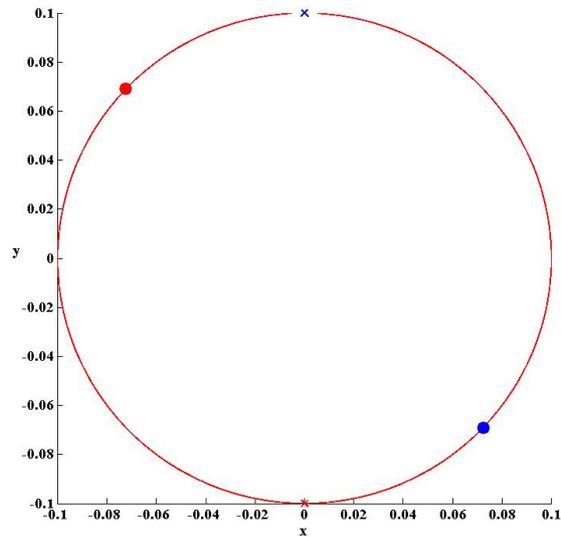
**Figure 4.12 : Variation de l'Hamiltonien points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.1)$  et  $q_2(0.0, -0.1)$  et avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  au cours du temps**

Lorsqu'on considère deux points vortex, ayant des vorticité de même module et même orientation, Figure 4.13, les lignes de courant créés par les deux points vortex séparément sont limités aux zones très proches des positions de ce points vortex. Lorsqu'on s'éloigne des ces points vortex, la configuration des lignes de courant ressemble de plus en plus à celle d'un seul point vortex.

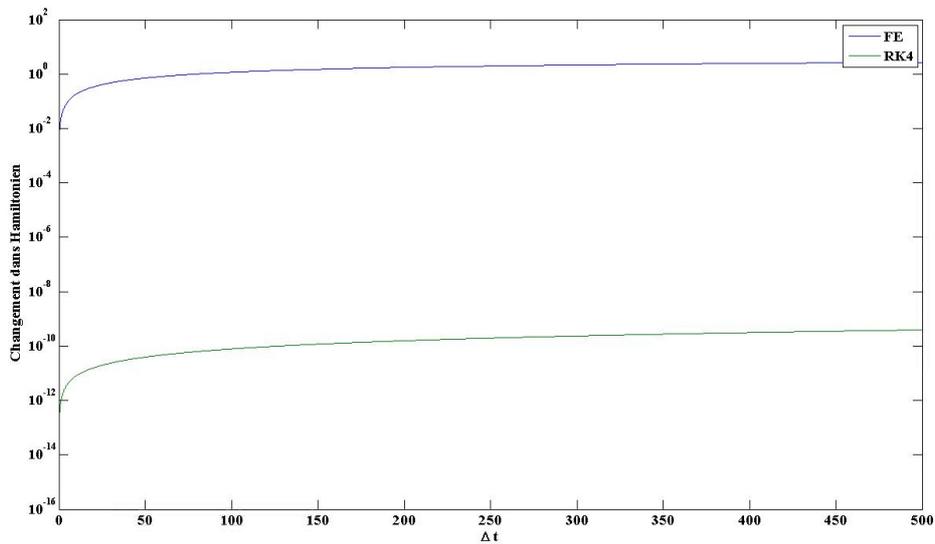


**Figure 4.13 : Lignes de courants créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.1)$  et  $q_2(0.0, -0.1)$  et avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$**

Les trajectoires des deux points vortex, ayant des vorticité de même module et même orientation, Figure 4.14, sont des cercles de mêmes rayons et les points vortex tournent aux mêmes vitesses autour du centre des deux points vortex.

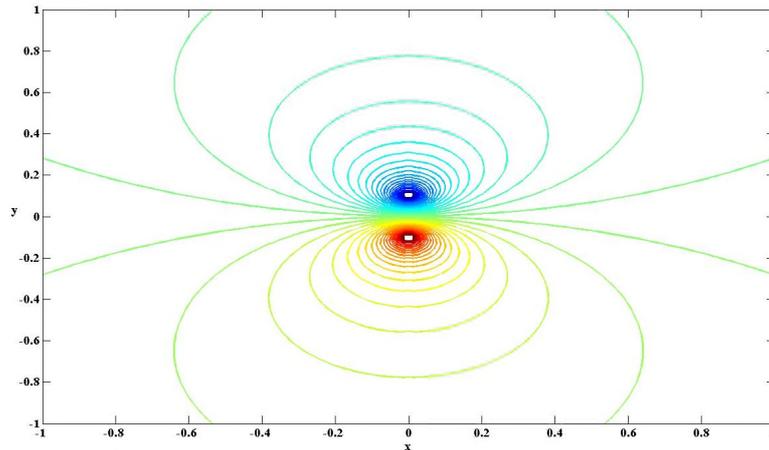


**Figure 4.14 :** Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.1)$  et  $q_2(0.0, -0.1)$  et avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$



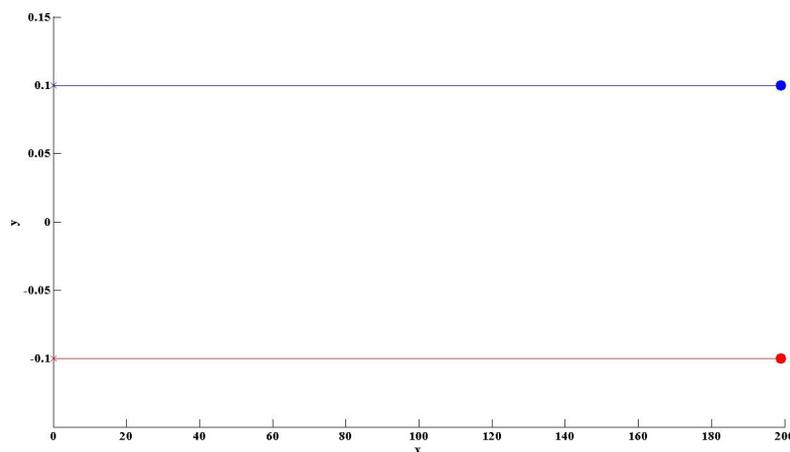
**Figure 4.15 :** Variation de l'Hamiltonien des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  au cours du temps

Lorsqu'on les deux points vortex, ayant des vorticité de même module et d'orientations opposées, Figure 4.16, les lignes de courant créés par les deux points vortex séparément sont des courbes fermées dans la zones proches des positions des deux points vortex et qui s'étalent de plus en plus dans les zones situées en dehors des deux points vortex. On constate que les lignes du courants créés par les deux points vortex au centre des deux points vortex sont des courbes ouvertes qui tendent vers l'infini.

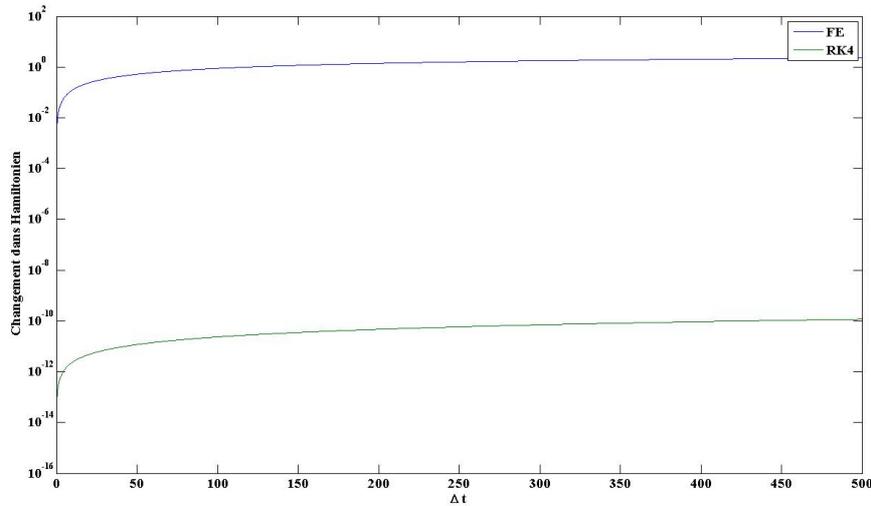


**Figure 4.16 : Lignes de courants créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.1)$  et  $q_2(0.0, - 0.1)$  qui ont des vorticités opposées  $\omega_1 = 0.5$  et  $\omega_2 = -0.5$**

Les trajectoires des deux points vortex, ayant des vorticité de même module et d'orientations opposées, Figure 4.17, sont des droites. Cette configuration est due aux vorticités des deux points qui sont égales en modules mais opposées en orientation.

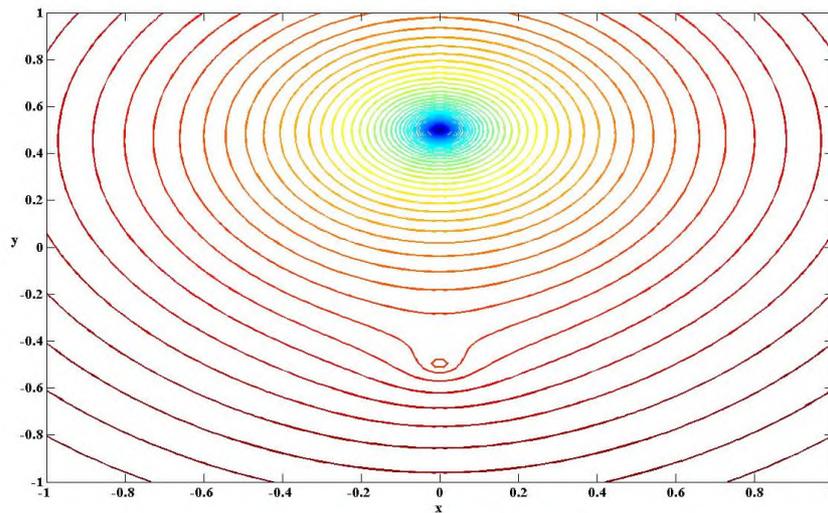


**Figure 4.17 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.1)$  et  $q_2(0.0, - 0.1)$  qui ont des vorticités opposées  $\omega_1 = 0.5$  et  $\omega_2 = -0.5$**



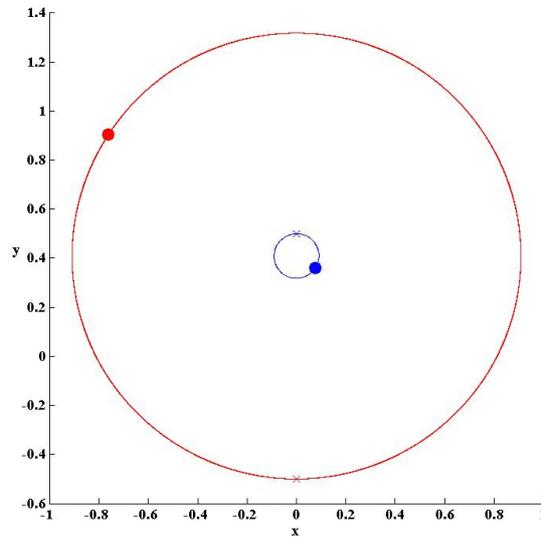
**Figure 4.18 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et opposée**

Dans le cas où la vorticité de l'un des points vortex est nettement plus grande que celle de l'autre point vortex et ce quelque soit l'orientation de la vorticité, Figure 4.19 et Figure 4.21, l'effet du point vortex de faible vorticité est négligeable. Les lignes de courant de point vortex de faible vorticité apparaissent comme des singularités par rapport aux lignes de courant du point vortex dont la vorticité est plus grande.

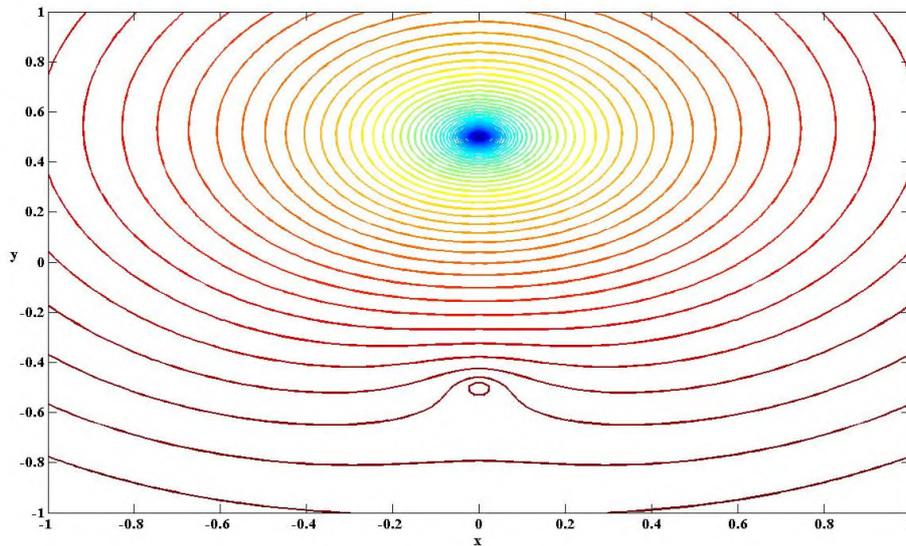


**Figure 4.19 : Lignes de courants créés par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$**

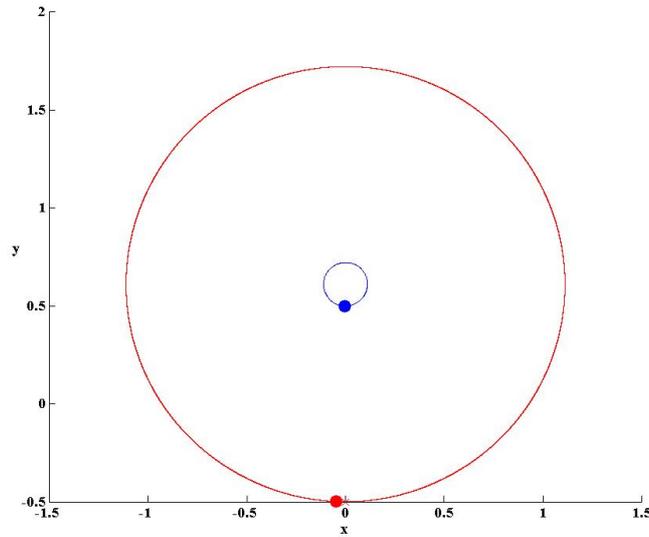
Les trajectoires des points vortex dont la vorticité de l'un est nettement plus grande que celle de l'autre sont toujours circulaires, Figures 4.20 et 4.22. Même pour les deux points vortex dont les orientations des vorticité sont opposées.



**Figure 4.20 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$**



**Figure 4.21 : Lignes de courants créées par deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et opposée**

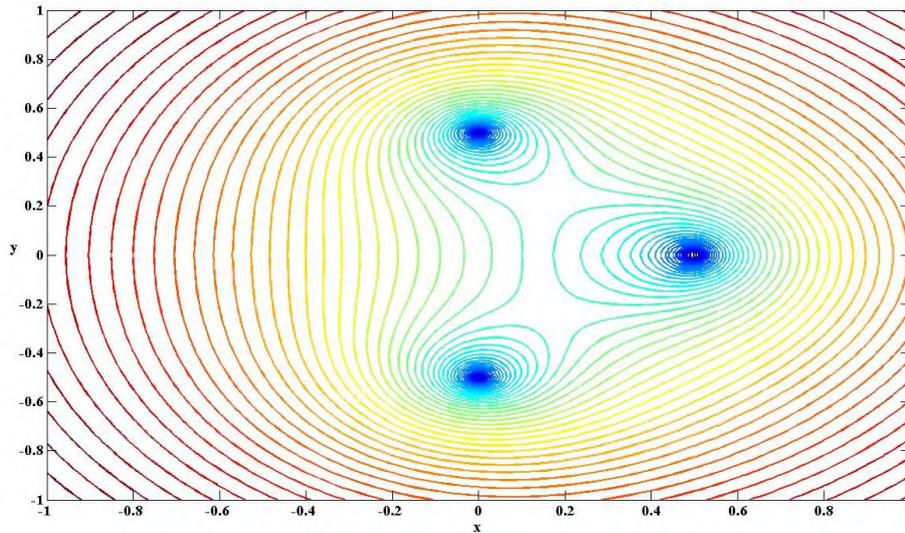


**Figure 4.22 : Trajectoires des deux points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$  et  $q_2(0.0, -0.5)$  et avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$  dix fois plus grande que la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et opposée**

### **4.3-Interaction de trois points vortex : Lignes de courant, Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien**

Les figures (4.23-4.40) représentent les lignes de courant, les trajectoires des points vortex et les variations de l'Hamiltonien de trois points vortex dont les positions, les modules et l'orientation des vorticités sont connus. La présence du troisième point vortex fait apparaître de nouveaux phénomènes, particulièrement dans la représentation des trajectoires, qui n'apparaissent pas dans le cas de deux points vortex. L'explication de ces phénomènes permettra de mieux comprendre les phénomènes complexes observés lors de l'interaction de plusieurs points vortex.

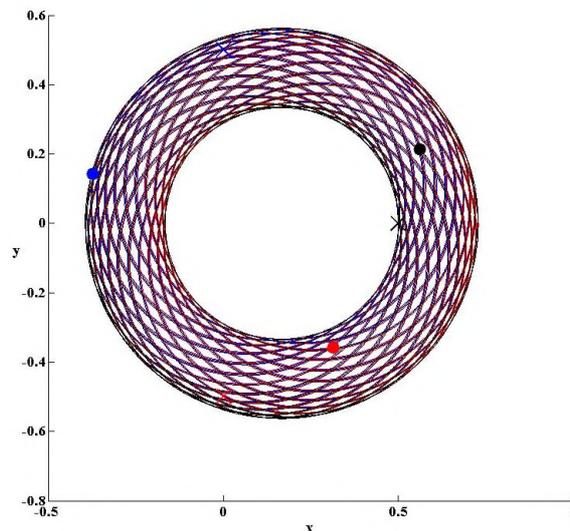
Lorsqu'on considère l'interaction de trois points vortex dont les positions sont connues et dont les vorticités ont les mêmes modules et les mêmes orientations, les lignes de courant créés par chaque point vortex sont fermés dans leurs voisinage immédiat Figure 4.23. Ces lignes de rejoignent pour créer des lignes de courant unifiés, loin des positions des points vortex.



**Figure 4.23 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  qui ont la même vorticité**

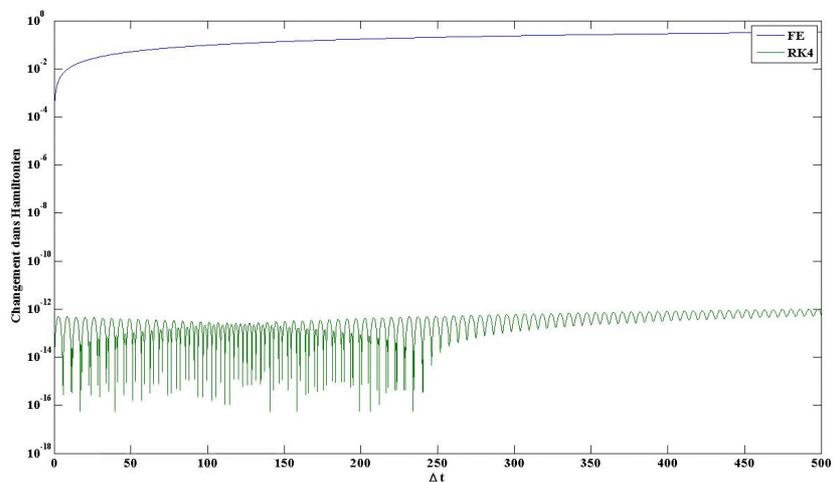
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.5$$

Les trajectoires de ces trois points vortex sont des courbes fermées irrégulières, Figure 4.24. Cet effet est le résultat des accélérations subis par les points vortex, lorsqu'ils s'approchent d'autres points vortex, ce qui influence sur leurs vitesses.



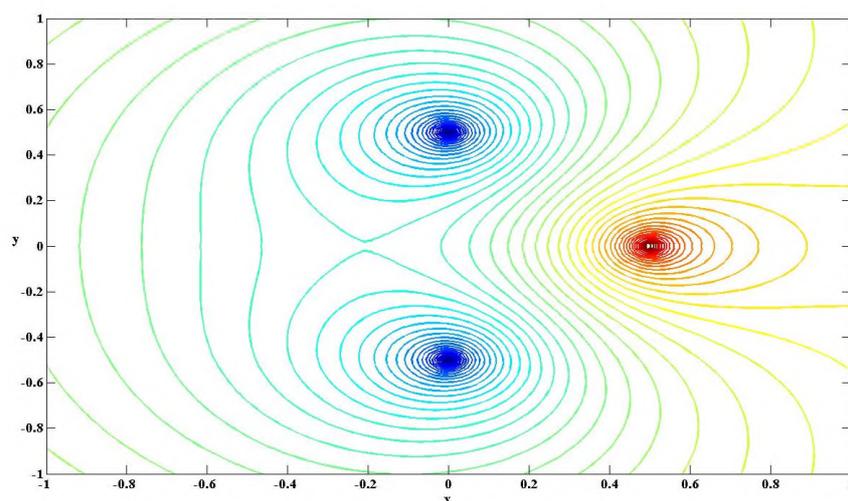
**Figure 4.24 : Trajectoires de trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.5$**

La variation de l'Hamiltonien des trois points vortex, figure 4.25, montre que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est plus appropriée pour la résolution des équations algébriques régissant ces systèmes par rapport à la méthode d'Euler explicite. Ce constat est le même pour l'ensemble des configurations étudiées.



**Figure 4.25 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.5$**

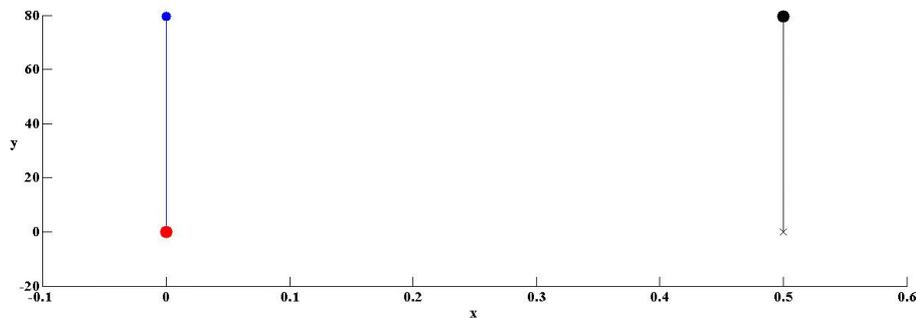
Lorsque l'orientation de la vorticité de l'un des points vortex est contraire aux vorticités des deux autres points vortex, Figure 4.26, les lignes de courant, dans la zone située entre les deux points vortex tournant dans le même sens et le point vortex qui tourne dans le sens opposé, sont déformées.



**Figure 4.26 : Lignes de courants créées par trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

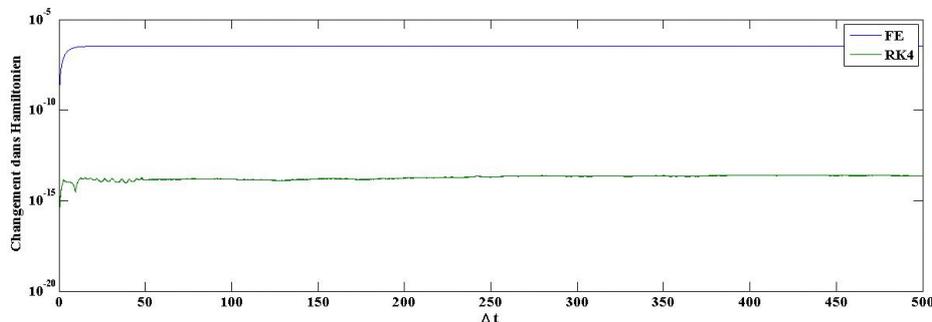
Loin de la zone située entre les trois points vortex, les lignes s'éloignent les un des autres.

Pour les trajectoires des points vortex, la figure 4.27 montrent que les deux points vortex, qui ont la même vorticité, évoluent dans la direction vertical et en lignes droites. Le point vortex, ayant une vorticité contraire, évoluent séparément des deux autres vortex.



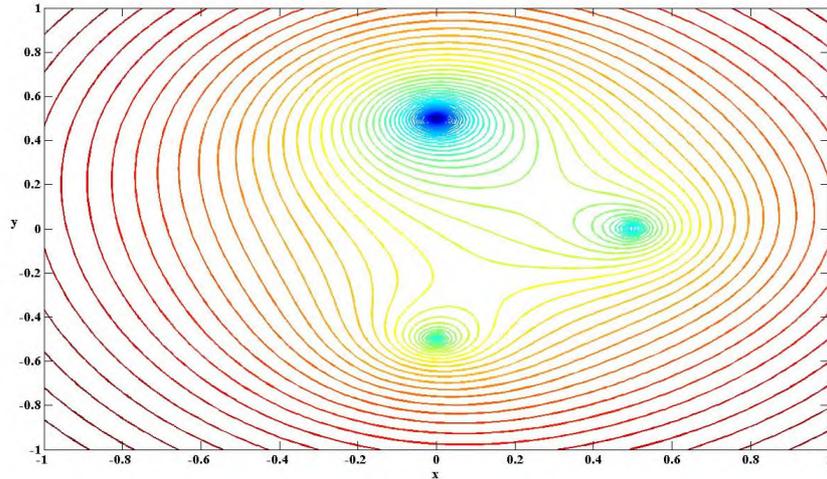
**Figure 4.27 : Trajectoires de trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

La même constatation est émise concernant l'évolution de l'Hamiltonien des trois points vortex que dans les cas précédents.



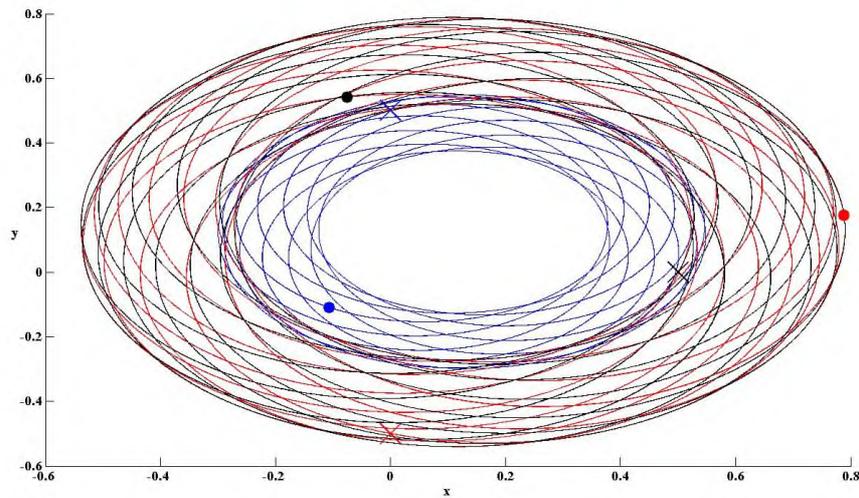
**Figure 4.28 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien des trois points vortex placés aux positions  $q_1(0.0, 0.5)$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

Lorsque la vorticité de l'un des points vortex est le doubles des vorticités des deux autres points vortex et l'ensembles des vorticités sont de même orientation, les lignes de courant de ce système sont montrés à la figure 4.29. On constate que les lignes de courant sont plus resserrés au niveau du point vortex qui une vorticité supérieure. Par contre, loin des positions de ces vortex, les lignes de courant épousent la forme des lignes de courant créés par un point vortex placé au milieu de ces trois points.

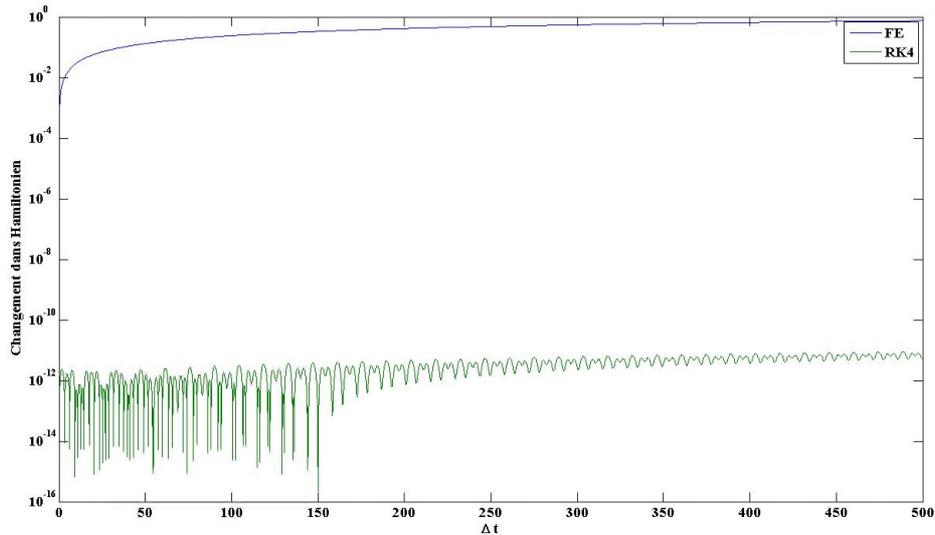


**Figure 4.29 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec la même vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = 0.5$**

Les trajectoires de ces points vortex commencent à exhiber un comportement désordonné, figure 4.30, ces trajectoires restent quasi-circulaires mais désordonnées.

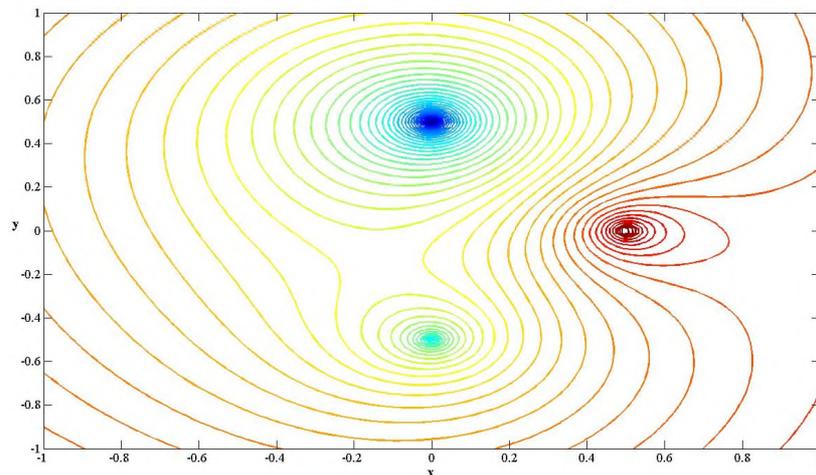


**Figure 4.30 : Trajectoires de trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**



**Figure 4.31 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien des trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**

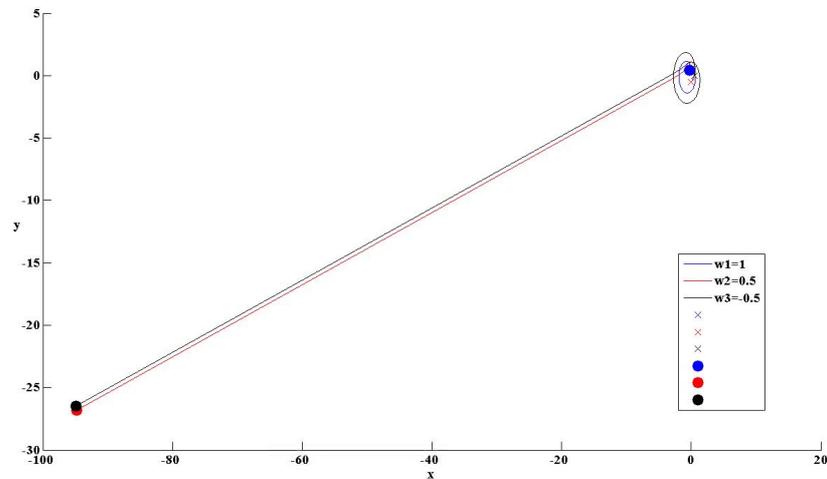
Dans le cas de trois points vortex avec deux qui ont des vorticités de même orientation mais dont le module de l'une est le double du module de l'autre et un troisième point vortex avec une vorticité, similaire en module à la faible vorticité précédente mais d'orientation opposée, les lignes de courant créés par ce système sont donnés sur la figure 4.32.



**Figure 4.32 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec la vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

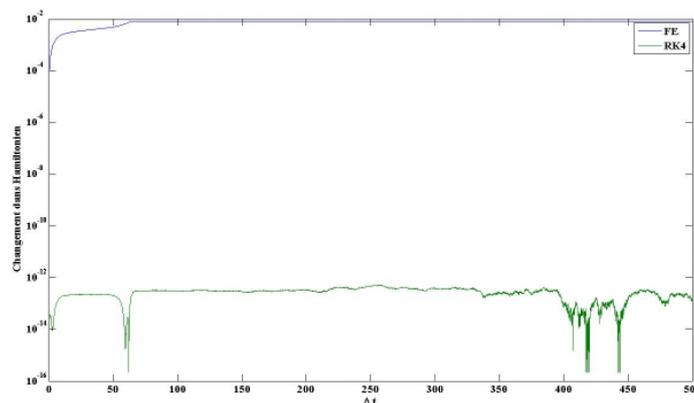
Les trajectoires de ces trois points vortex sont portées sur la figure 4.33. Deux points vortex ont des vorticités dont l'une est le double de l'autre mais tournant dans

le même sens et le troisième point vortex a une vorticité de même module que la plus faible des deux premiers mais d'orientation opposée.



**Figure 4.33 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

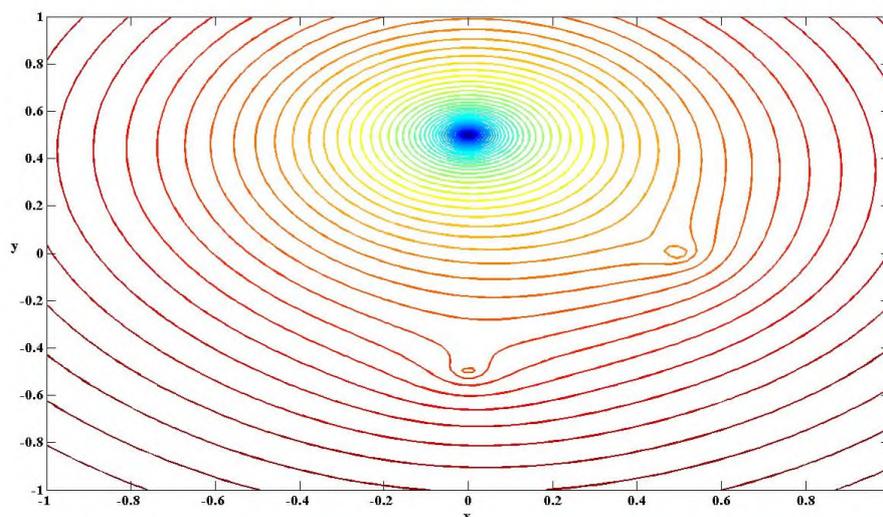
La trajectoire de point vortex dont la vorticité est plus grande que celles des deux autres reste dans l'espace immédiat de sa position initiale, il effectue des trajectoires quasi-circulaires. Les deux autres points vortex, ayant des vorticités de même module mais d'orientations opposées, sont projetés loin de leurs positions d'origine sur des trajectoires droites. Les deux trajectoires restent parallèles à cause de l'interaction similaire mais opposée des deux points vortex.



**Figure 4.34 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

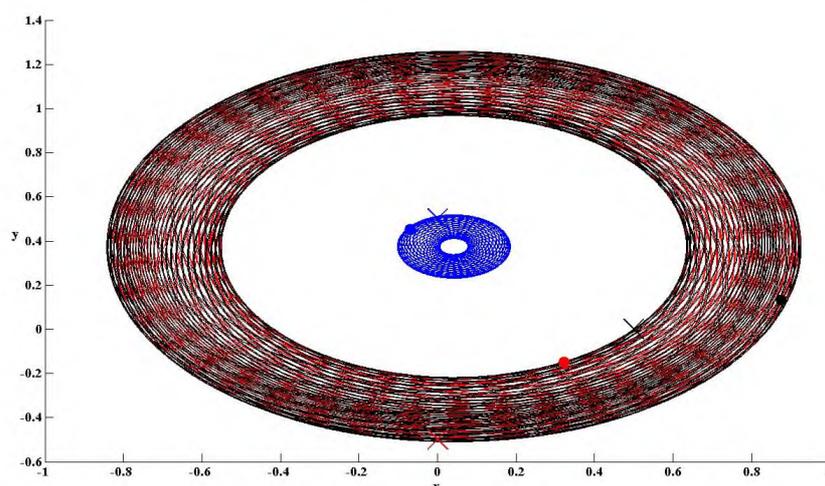
Lorsqu'on place trois points vortex dont les vorticité ont la même orientation par contre le module d'une vorticité est nettement plus grand que celles des deux autres

points vortex, les lignes de courants qui résultent de ce système est représenté sur la Figure 4.35.



**Figure 4.35 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**

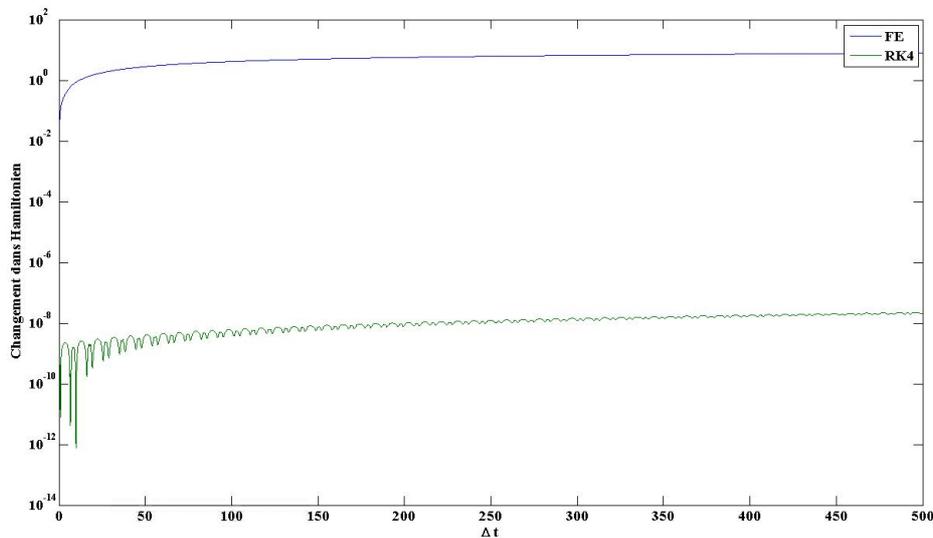
La figure montre que les lignes de courant créés par le point vortex ayant la plus grande vorticité occupent le plan et les deux autres points vortex apparaissent comme des singularités et on distingue que les lignes de courants créés dans le voisinage immédiat de leurs positions respectives.



**Figure 4.36 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**

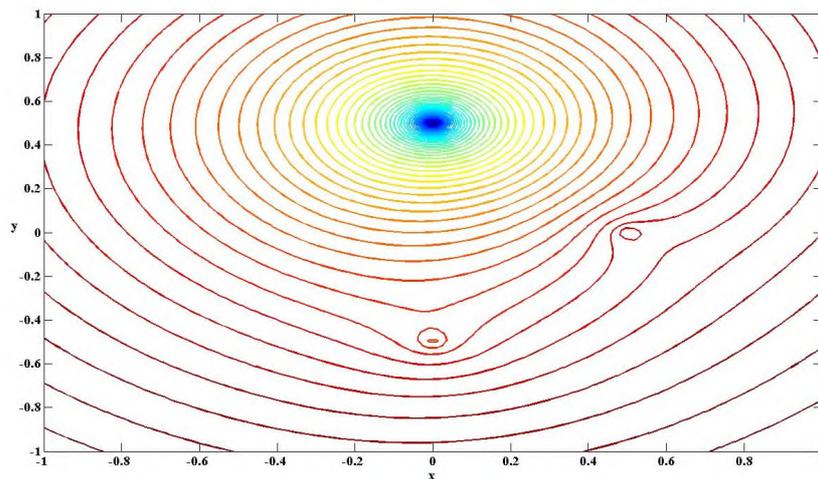
Les trajectoires de ce système de points vortex sont représentées sur la figure 4.36. On constate que la trajectoire du point vortex ayant la grande vorticité est

localisée autour de sa position initiale. Les trajectoires des deux autres points vortex créent une ceinture entourant la trajectoire du premier point vortex. Ces deux trajectoires s'entremêlent entre-elles tout en tournant autour du premier point vortex.



**Figure 4.37 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**

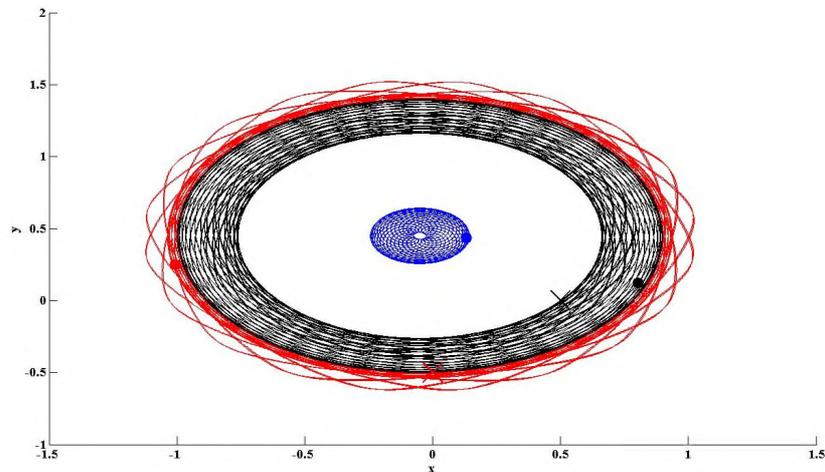
Sur la figure 4.38, on représente le cas de trois points vortex dont les vorticité de deux points vortex ont la même orientation par contre le module d'une vorticité est nettement plus grand que celles des deux autres points vortex, le troisième point vortex a une vorticité d'orientation opposée.



**Figure 4.38 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

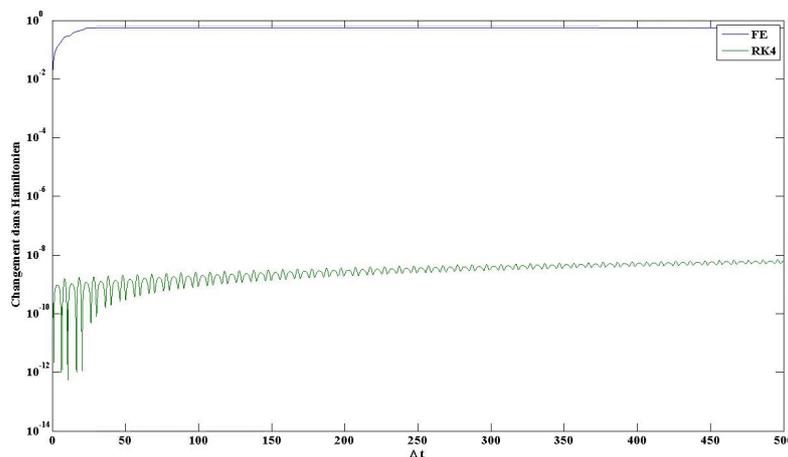
Les lignes de courant créés par le point vortex ayant la plus grande vorticité occupent tout le plan et les deux autres points vortex apparaissent comme des

singularités et on distingue que les lignes de courants créés dans le voisinages immédiat de leurs positions respectives. Le point vortex qui à une vorticité d'orientation opposée dévie la ligne du courant du point vortex de grande vorticité dans un sens opposé à celle déviée par le point vortex ayant le même sens de vorticité.



**Figure 4.39 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

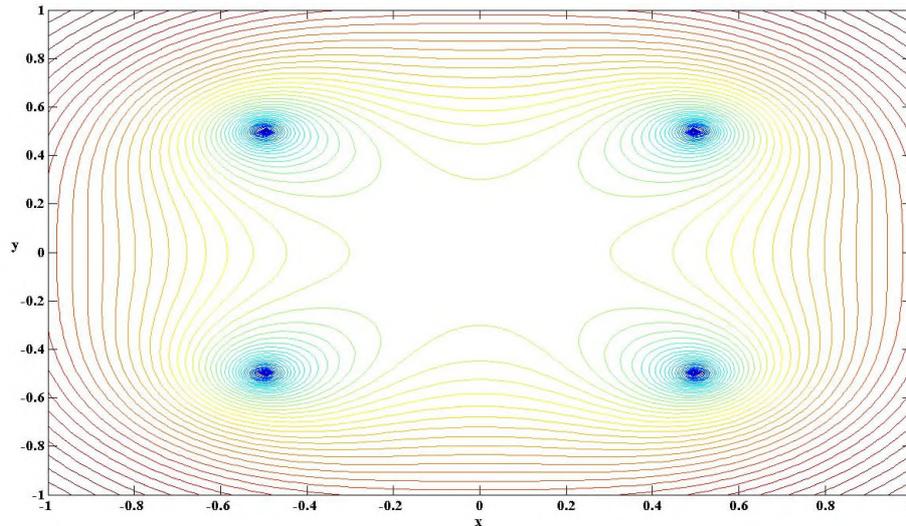
Les trajectoires des trois points vortex constituant ce système sont données sur la figure 4.39. La trajectoire du point vortex ayant la plus grande vorticité reste confinée dans le voisinage de sa position initiale. Les trajectoires des deux autres points vortex créent une ceinture autour du premier point vortex. Les deux points vortex tournent autour du premier dans des sens opposés est leurs trajectoires ne se croisent jamais.



**Figure 4.40 : Lignes de courants créés par trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 5.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec une vorticité  $\omega_3 = -0.5$**

#### 4.4-Interaction de Quatre points vortex : Lignes de courant, Trajectoires et Variation de l'Hamiltonien

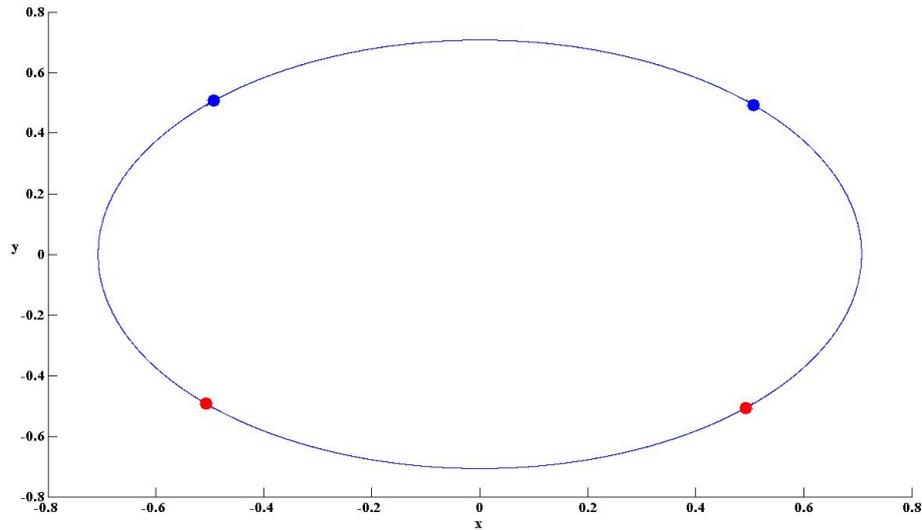
On a présenté, dans les deux sections précédentes, l'interaction de deux points vortex et celle de trois points vortex. Dans cette section, on présentera le cas de quatre points vortex placés dans un plan à des positions bien définies et menés de vorticité dont les modules et les orientations sont connus. L'étude de l'interaction de quatre vortex nous rapprochera plus des phénomènes observés dans expérimentalement même si le nombre de vortex considéré reste faible.



**Figure 4.41 : Lignes de courant créées par quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

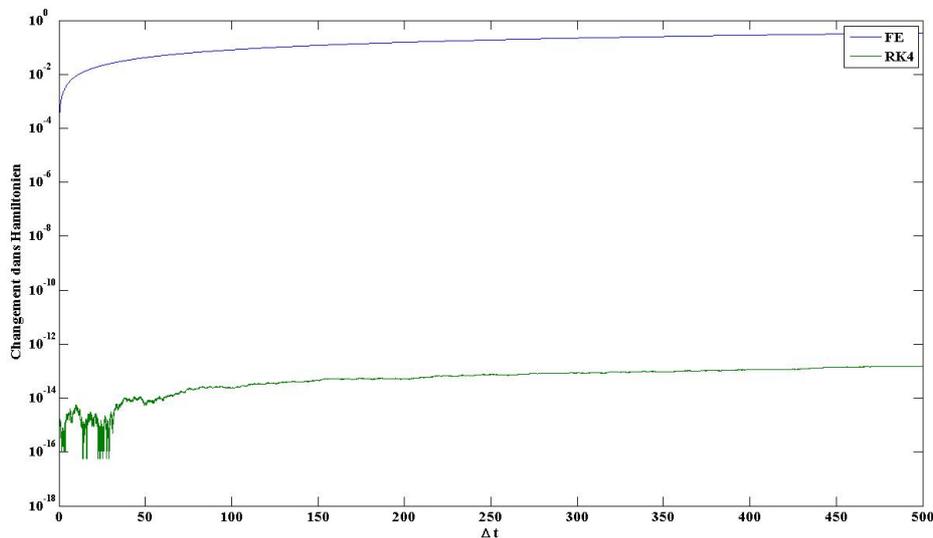
Dans le premier cas, on considère quatre points vortex qui sont placés aux sommets d'un carré et menés de vorticité de même module et de même orientation. Les lignes de courant créées par ces quatre vortex sont montrées sur la figure 4.41. Les lignes de courant créées par chaque point vortex sont représentées par des courbes fermées, dans le voisinage proche de la position du point vortex. On constate que la zone située au centre des quatre points vortex ne contient aucune ligne de courant, ce qui signifie que cette zone reste stable et ne subit aucune influence des points vortex. En dehors de la zone proche, les lignes de courant sont unifiées autour des quatre points vortex.

Les trajectoires de ces quatre points vortex sont représentées sur la figure 4.42. Toutes les trajectoires sont confondues. Effectivement, chacun des points vortex tourne dans le même sens que les autres et avec la même vorticité, Les quatre points vortex effectuent les mêmes rotations les uns derrière les autres.



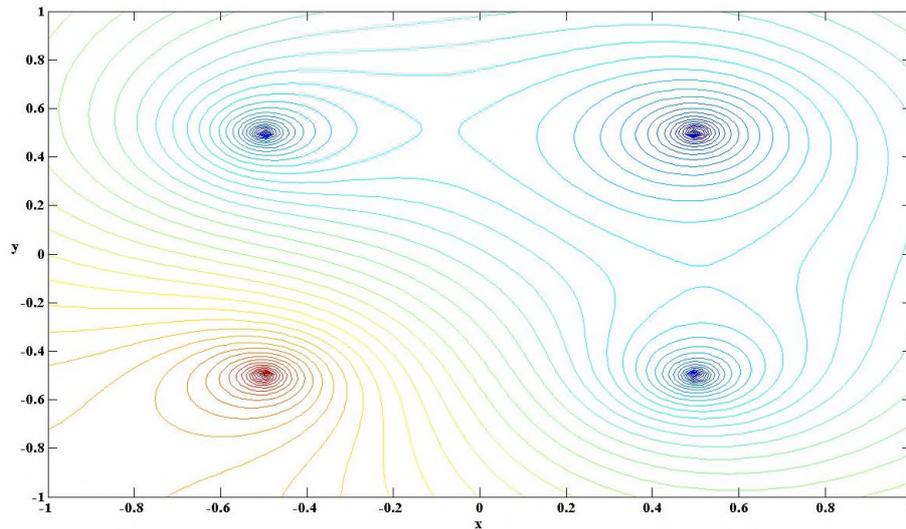
**Figure 4.42 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

Sur la figure 4.43, on voit la variation de l'Hamiltonien des quatre points vortex, au cours du temps, lorsque le système algébrique qui donne les trajectoires des quatre points vortex est résolu par la méthode d'Euler explicite et par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. On réalise que la méthode de Runge Kutta présente, comme dans les cas précédents, une meilleure convergence que la méthode d'Euler explicite. Ce constat restera inchangé pour l'ensemble des configurations étudiées.



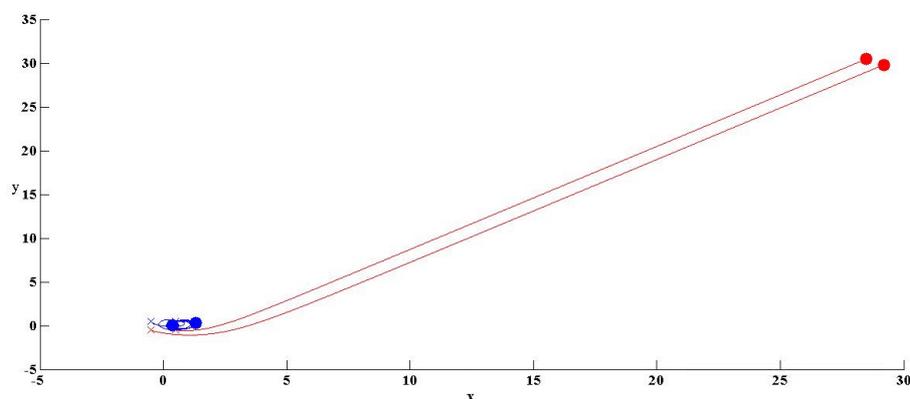
**Figure 4.43 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  qui ont la même vorticité  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

En changeant la configuration initial. Trois des quatre points vortex garde la même orientation de la vorticité et le quatrième à une vorticité opposé. Sachant que les modules des vorticités est le même, la figure 4.44 montrent les lignes de courants créés par ce système de points vortex dans ce cas. Ces lignes de courant deviennent plus denses dans la zone située entre les trois points vortex ayant des vorticité dans le même sens et le quatrième qui a une vorticité opposée. On remarque aussi que la zone située entre les quatres points vortex est chargée par des lignes de courant.

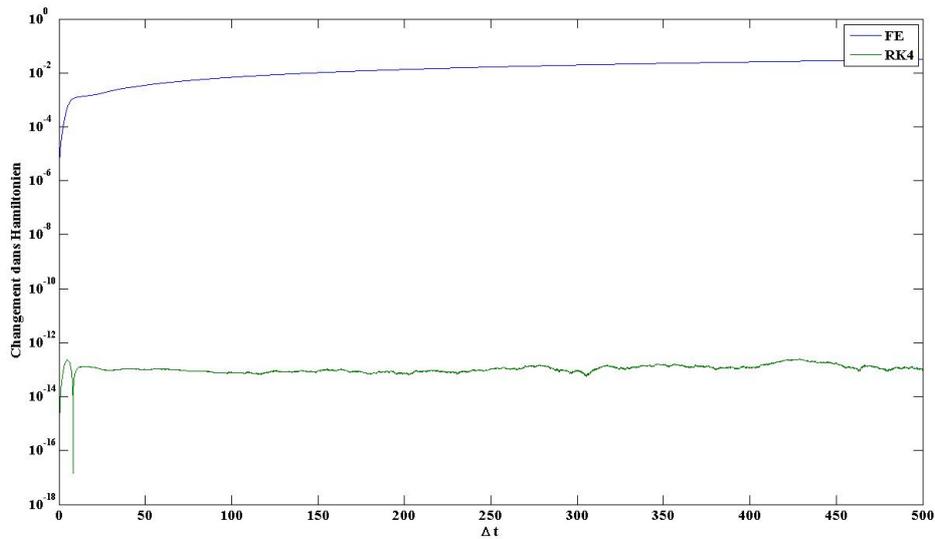


**Figure 4.44 : Lignes de courant de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.5$  et  $\omega_4 = -0.5$**

Les trajectoires des points vortex correspondants à cette configuration sont représentées sur la figure 4.45. On constate que les deux points vortex situées au dessus de la médiane tournent autour de leurs positions initiales alors que les deux points vortex, situées au dessous de la médiane, s'éloignent de leurs positions initiales. Leurs trajectoires, en dehors de la zone d'influences des premiers points vortex, sont des lignes droites parallèles.

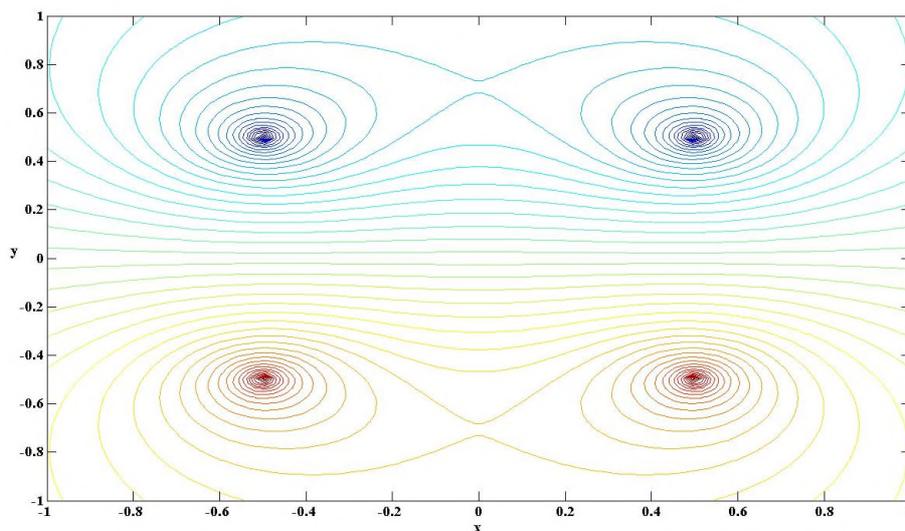


**Figure 4.45 : Trajectoires de trois points vortex placés à la position  $q_1(0.0, 0.5)$  avec une vorticité  $\omega_1 = 1.0$ ,  $q_2(0.0, -0.5)$  avec une vorticité  $\omega_2 = 0.5$  et  $q_3(0.5, 0.0)$  avec la même vorticité  $\omega_3 = 0.5$**



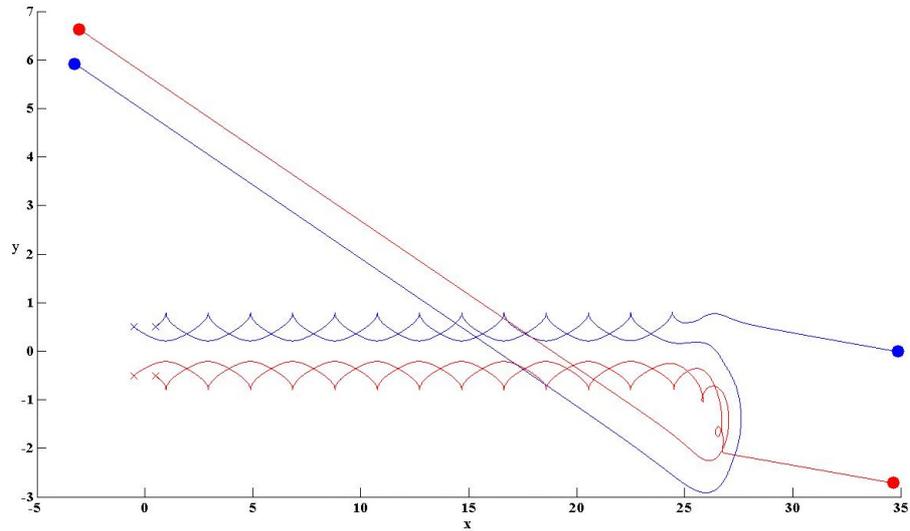
**Figure 4.46 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.5$  et  $\omega_4 = -0.5$**

Lorsqu'on considère le cas de deux points vortex, ceux situés au dessus de la médiane, avec des vorticités qui sont dans le même sens et deux point vortex, ceux situés au-dessous de la médiane, avec des vorticités opposés et sachant que les modules des vorticités sont les mêmes, les lignes de courant sont donnés sur la figure 4.47. Les lignes de courant dans la zone proche de chaque point vortex est une courbe fermé homogène. Dans les zones intermédiaires entre chaque deux vortex, de par et d'autre de la médiane, les lignes de courant des deux points vortex considérés se rejoignent. Dans la zone située entre les deux points vortex de haut et les deux points vortex du bas, les lignes de courant deviennent des droites.

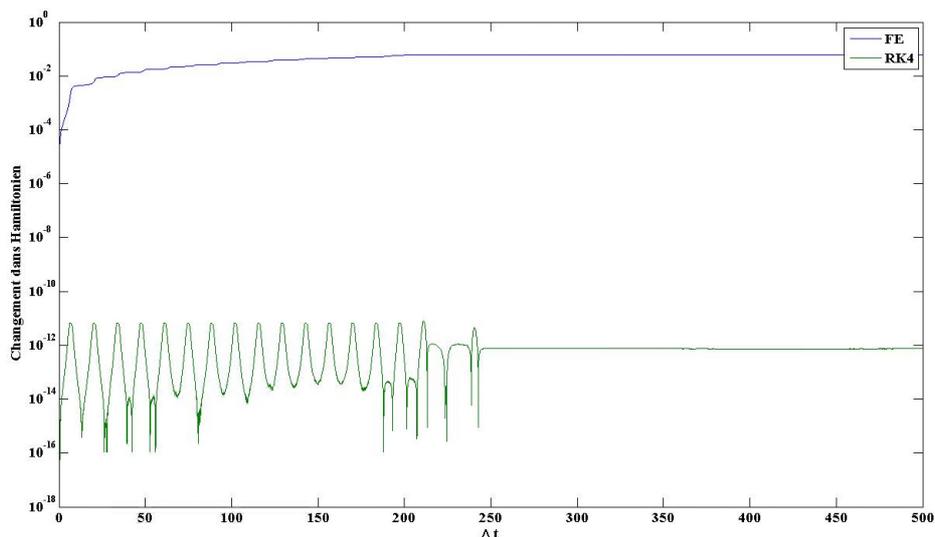


**Figure 4.47 : Lignes de courant de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_3 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_4 = -0.5$**

Les trajectoires correspondantes à cette configuration sont données sur la figure 4.48. Lorsque le temps évolue, les trajectoires des deux points vortex, situés au dessus de la médiane, et celles des deux points vortex, situés au dessous de la médiane, sont des demi-cercles de courbures opposées et symétrique. Au bout d'un certain temps, cette symétrie sera brisée pour créer deux paires de points vortex, contenant chacun deux points vortex de vorticités opposées, qui évoluent en lignes droites dans deux directions différentes.

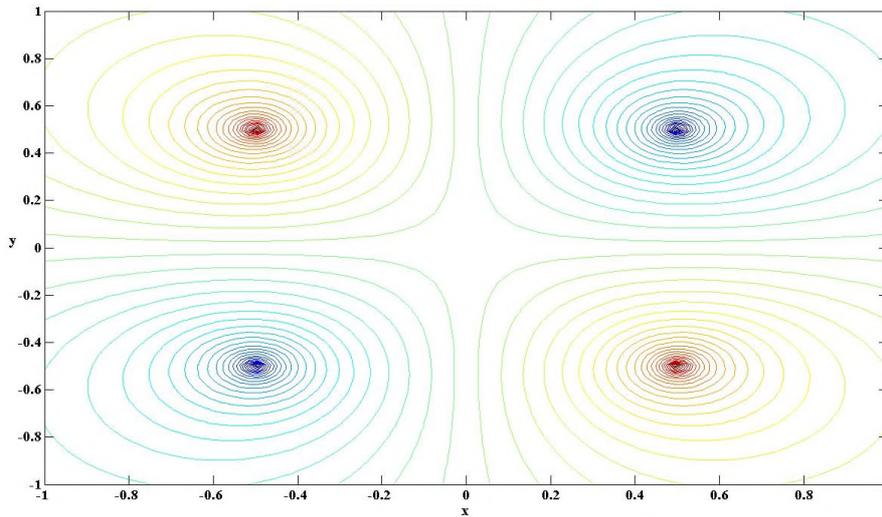


**Figure 4.48 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_3 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_4 = -0.5$**



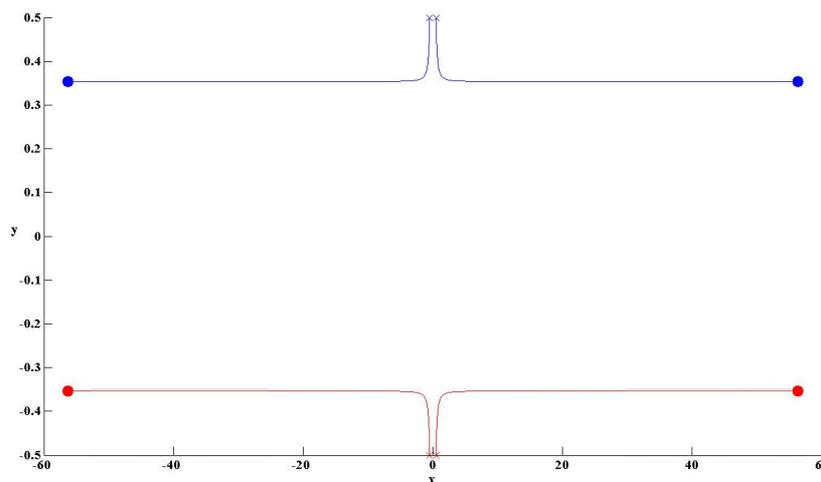
**Figure 4.49 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_3 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_4 = -0.5$**

Lorsque on place quatre points vortex sur les sommets d'un carré et chaque point vortex, située sur le même diamètre, a une vorticité qui a le même sens. Ces vorticités sont opposées aux vorticités des deux autres points vortex portés sur la diagonale perpendiculaire à la première. Les lignes de courant de cette configuration sont représentées sur la figure 4.50. Les lignes de courant crée par chaque points vortex est constitué de courbes fermées dans le voisinage de la position du point vortex. Dans la zone intermédiaire aux quatre points vortex, les lignes de courant constituent un réseau de courbe proche de lignes droites avec angle droit au centre.



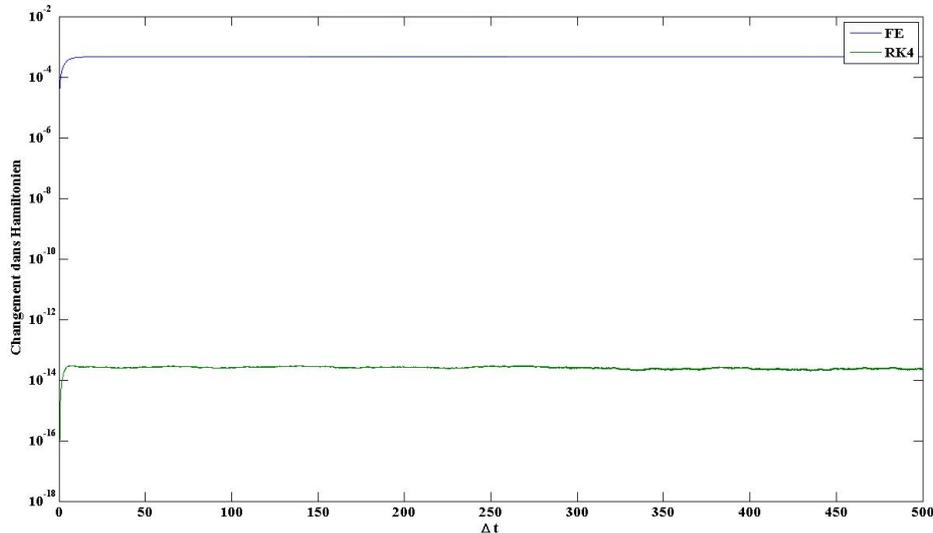
**Figure 4.50: Lignes de courant de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = -0.5$**

Les trajectoires des points vortex correspondantes à ce cas sont données sur la figure 4.51. On remarque que les points vortex s'éloignent de leurs positions initiales. Cet éloignement s'effectue vers le bas pour les deux points vortex situés au dessus de la médiane et vers le haut pour les deux points vortex situés au dessous de la médiane.



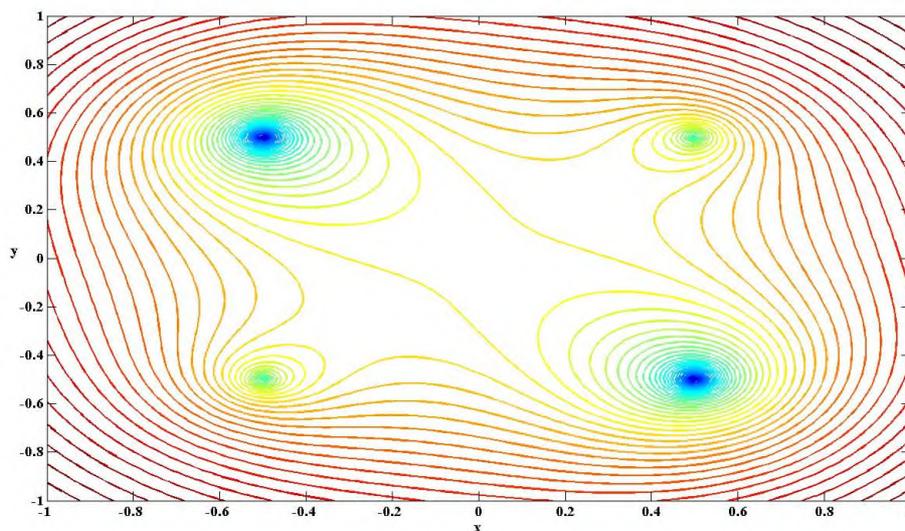
**Figure 4.51 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = -0.5$**

Ces trajectoires changent de directions au même temps. Les deux points vortex situés à gauche de la médiane verticale s'éloignent vers la gauche et les deux points vortex situés à droite de la ligne médiane s'éloignent vers la droite.



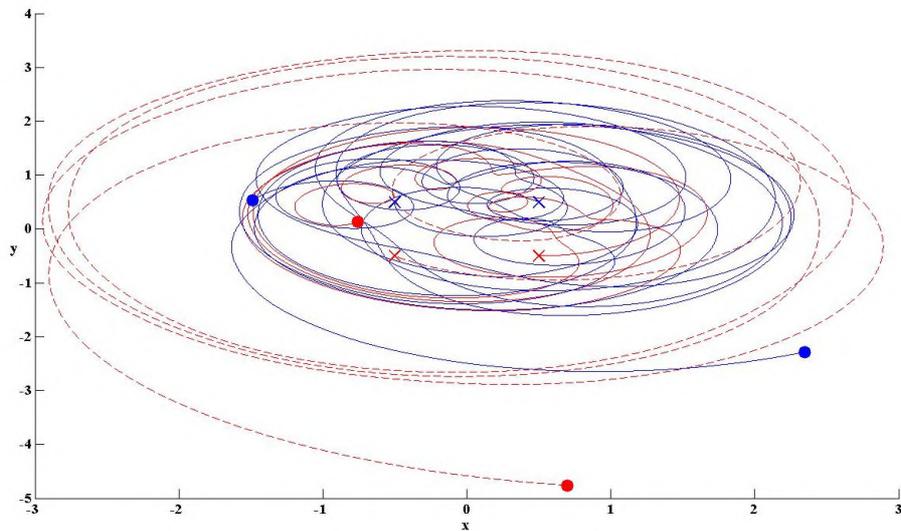
**Figure 4.52 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = -0.5$**

Sur la figure 4.53, on représente les lignes de courant créés par quatre points vortex situés aux sommets d'un carré. Les deux points vortex portés sur la première deuxième diagonale ont des vorticités ayant un module qui est le double des vorticités des points vortex portés sur la première diagonale. Les quatre points vortex ont des vorticités qui ont le même sens. La figure montre la même configuration des lignes de courant que dans le cas de la figure 4.41.



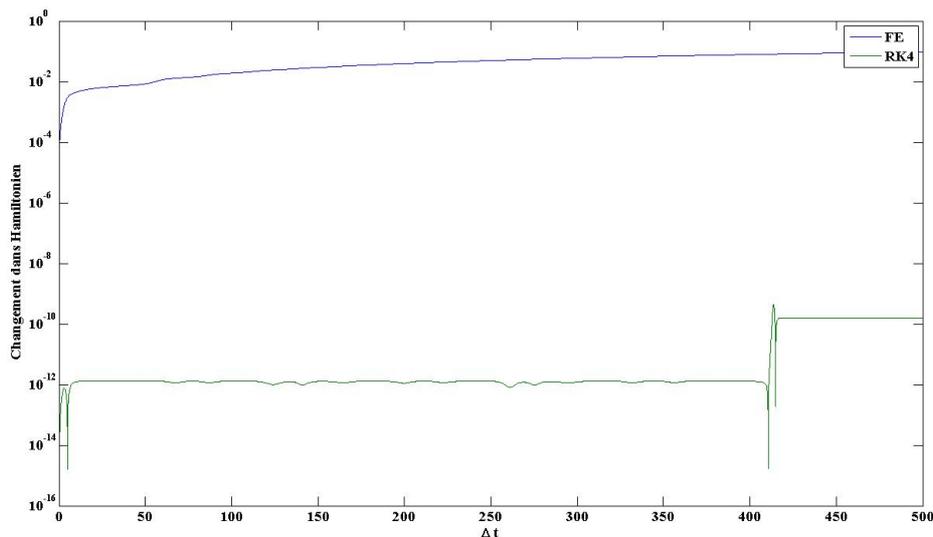
**Figure 4.53 : Lignes de courant de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = 1.0$**

On remarque seulement que la zone intermédiaire ne reste plus dépourvue de lignes de courant. Le fait d'augmenter la vorticité des points vortex portés sur la deuxième diagonale fait que la zone centrale est balayé par des courants dans le sens de cette diagonale.



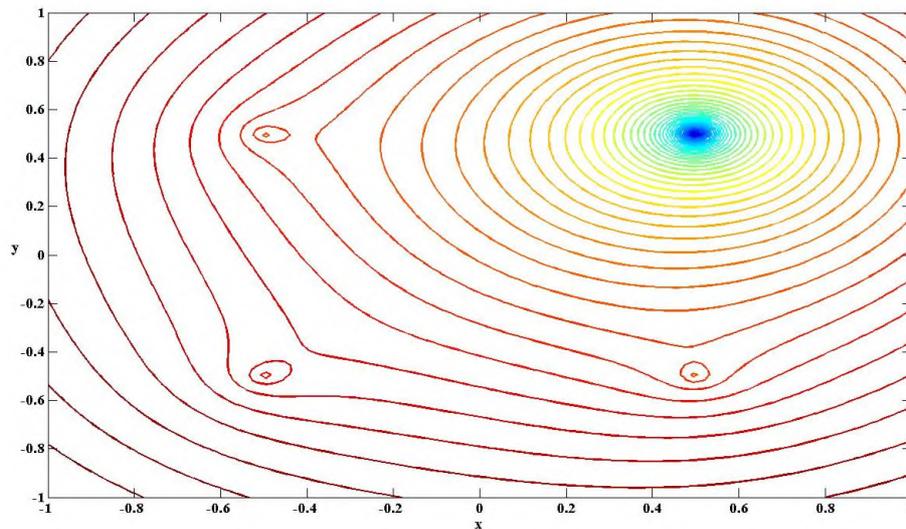
**Figure 4.54 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = 1.0$**

Les trajectoires de ces quatre points vortex, dont les lignes de courants sont analysées précédemment, sont portées sur la figure 4.54. Le fait de changer le sens des vorticités des deux points vortex portés sur la deuxième diagonale fait que les trajectoires des quatre points vortex deviennent quasi-chaotiques. La distinction entre trajectoire de chacun de points vortex est difficile.



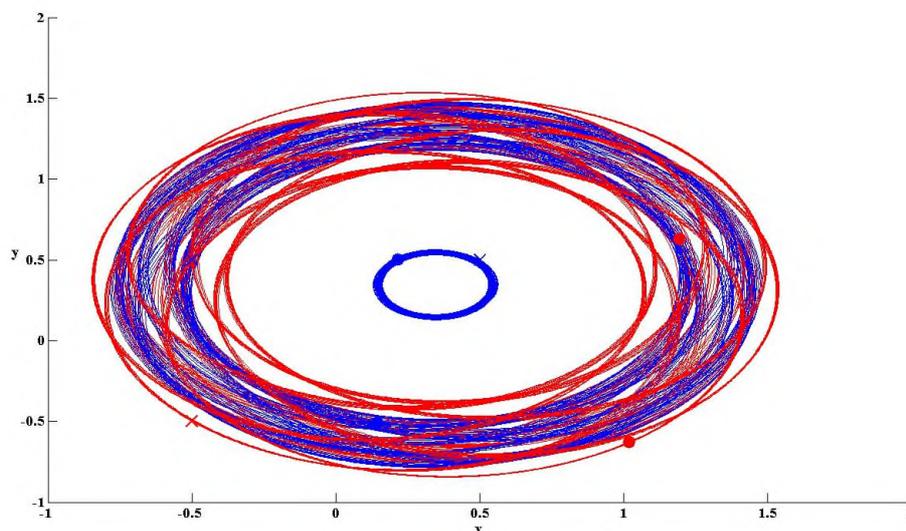
**Figure 4.55 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = \omega_4 = 0.5$  et  $\omega_2 = \omega_3 = 1.0$**

Le cas de quatre points vortex placés aux sommets d'un carré avec la vorticité de l'un des points vortex nettement supérieure aux vorticités des trois autres points vortex est analysé.



**Figure 4.56 : Lignes de courants créés par quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  qui ont les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

Dans le cas des vorticités ayant le même sens, les lignes de courant sont représentées sur la figure 4.56 et les trajectoires sont données sur la figure 4.57.

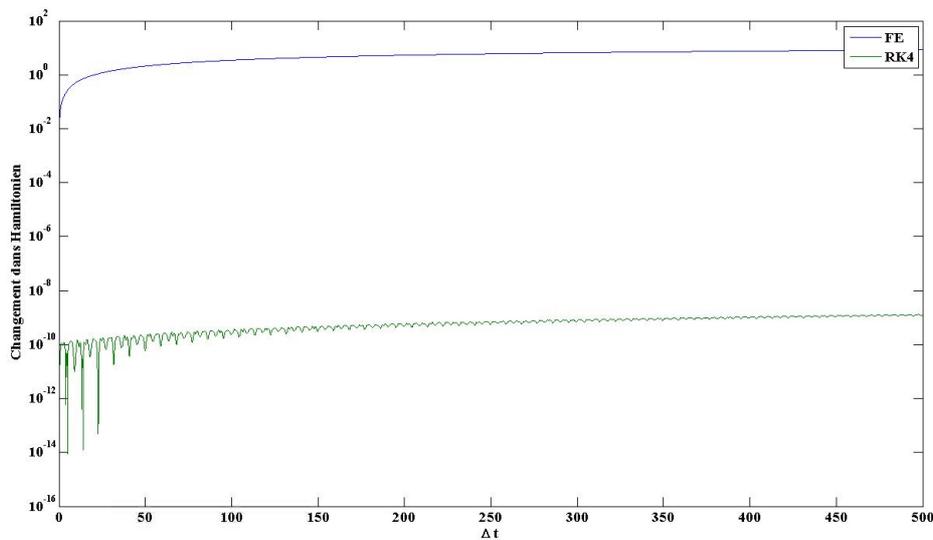


**Figure 4.57 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

Sur la figure 4.56, on remarque que les lignes de courants sont principalement ceux du point vortex ayant la grande vorticité. Les lignes de courant des points vortex, ayant des vorticités plus faibles, sont limitées au voisinage très proche des positions de ces points vortex.

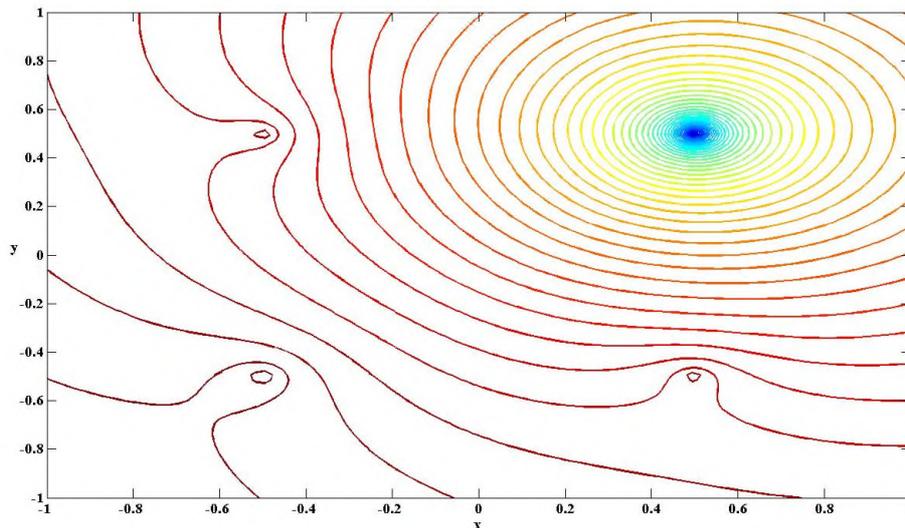
La trajectoire du point vortex ayant la grande vorticité reste concentré autour de la position initiale de ce point et elle n'est pas déstabilisée par les trois autres

points vortex. Par contre, les trajectoires des autres points vortex sont représentées par des ellipses déformées et les trajectoires sont enchevêtrées.



**Figure 4.58 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.5$**

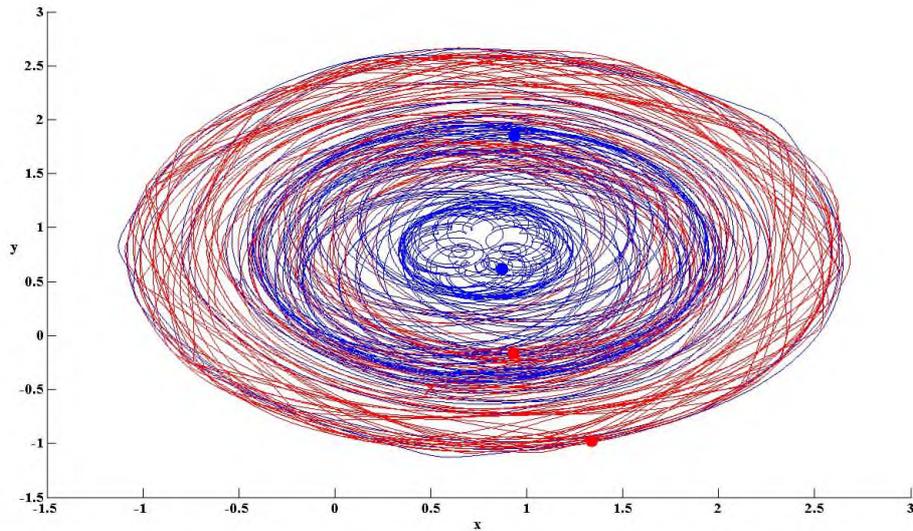
La figure 4.59 représente les lignes de courant pour un système similaire à celui de la figure 4.56 en changeant le sens des vorticité des trois point vortex de faible vorticité. On constate que le fait de changer le sens des vorticités des points vortex de faible vorticité écarte les lignes de courant loin de la zone proche du premier vortex et ces lignes deviennent ouvertes.



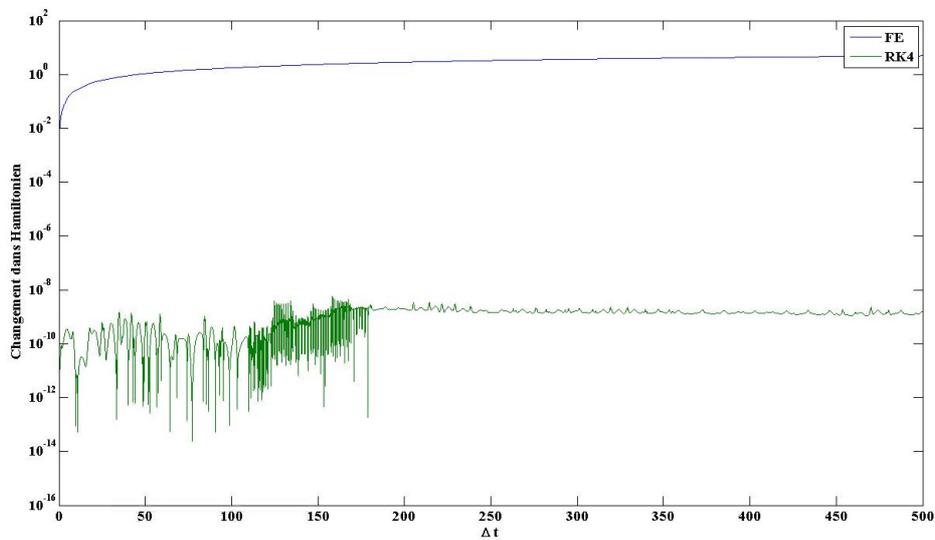
**Figure 4.59: Lignes de courants créés par quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  qui ont les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = -0.5$**

Les trajectoires des points vortex, représentés sur la figure 4.60, sont complètement chaotiques avec une certaine cohérence. Dans ce cas, même la

trajectoire du point vortex qui a une vorticité plus grande est influencés par les trajectoires des autres points vortex.



**Figure 4.60 : Trajectoires de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = -0.5$**



**Figure 4.61 : Variation au cours du temps de l'Hamiltonien de quatre points vortex placés aux positions  $q_1(0.5, 0.5)$ ,  $q_2(0.5, -0.5)$ ,  $q_3(-0.5, 0.5)$  et  $q_4(-0.5, -0.5)$  avec les vorticités  $\omega_1 = 5.0$  et  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = -0.5$**

## 4.5-Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté et analysé quelques cas d'interaction de points vortex. Cette analyse est faite par l'intermédiaire des graphes montrant les lignes du courant créés par les points vortex, les trajectoires des points vortex au cours du temps, déduites de la résolution des équations algébriques (3.16) et (3.17) et enfin la variation de l'Hamiltonien des points vortex au cours du temps.

On a analysé trois cas d'interaction de points vortex. Le premier est cas de deux points vortex placés à des positions connues dans le plan  $(x, y)$ . Ce cas a permis de comprendre les effets élémentaires qui apparaissent dans le cas de cette interaction.

Par la suite, on a analysé le cas d'interaction de trois points vortex placés dans le plan et auxquels on associe des vorticité dans les modules et les orientations sont donnés.

On a, enfin, étudié l'interaction de quatre points vortex, placés dans le plan, avec des vorticité dont les modules et les orientations sont connus.

Les effets qui apparaissent lors de l'interaction de trois ou quatre points vortex n'apparaissent pas automatiquement lors de l'analyse de l'interaction de deux points vortex. De plus en plus que le nombre de points vortex augmente, on constate de nouveaux effets, ce qui rend ce sujet très compliqué et l'intervention de nouvelles méthodes d'analyse est nécessaire pour comprendre ces phénomènes.

## **- CHAPITRE V-**

### **❖ CONCLUSION GENERALE**

Dans ce mémoire, on a présenté une méthodologie afin d'analyser la dynamique d'interaction des points vortex.

Après une introduction, on a rappelé les différents domaines qui sont confrontés à ce genre de problème à savoir l'astronomie, la géophysique, la supraconductivité, la mécanique des fluides, la météorologie, etc.

Nous avons aussi rappelé l'intérêt mathématique de ce sujet et sa connexion avec les systèmes Hamiltoniens

Avant d'analyser les systèmes dynamiques de points vortex, on a introduit la vorticité en utilisant l'équation de continuité des fluides. Ce qui a permis de construire le champ des vitesses et la fonction du courant. Les équations du mouvement des points vortex résultent de l'intégration du champ des vitesses. Finalement on a introduit les équations de Hamilton et on a construit l'Hamiltonien correspondant aux points vortex

On a rappelé quelques méthodes numériques consacrées à la résolution numérique des équations différentielles et on a expliqué comment les appliquer au système présent.

Les résultats numériques obtenus sont présentés pour trois cas, dans le premier cas, on a essayé de comprendre les effets fondamentaux qui régissent l'interaction des points vortex. Le deuxième cas a permis de voir comment d'autres phénomènes s'agr gent aux aspects fondamentaux et le troisième cas nous rapproche des cas réels de plusieurs points vortex en interaction.

## - Bibliographie -

- 1- H. von Helmholtz, "U" ber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen," *J. Reine Angew. Math.* 55, 25–55 (1858); P. G. Tait, "On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion," *Philos. Mag.* 33(4), 485–512 (1867) (in English).
- 2- Albouy A., 1997, Recherches sur le probl`eme des N corps, *Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes*, ISSN 1243-4272, ISBN 2-910015-18-2.
- 3- Barge A. & Sommeria J., 1995, Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices?, *Astron. & Astrophys.* **295**, L1-L4.
- 4- Bracco A., Chavanis P.H., Provenzale A. & Spiegel E.A., 1999, Particle aggregation in a turbulent Keplerian Flow, *Phys. of Fluids*, 11 N°8
- 5- Jennifer Deang, Qiang D u, Max Gunzburger and Janet Peterson, Vortices in superconductors: modelling and computer simulations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* (1997) 355, 1957-1968.
- 6- Carnevale G.F., McWilliams J.C., Pomeau Y., Weiss J.B. & Young W.R., 1991, Evolution of Vortex Statistics in Two-Dimensional Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (21) 2735-2737.
- 7- Benzi R., Colella R.M., Briscolini M. & Santangelo P., 1992, A simple point vortex model for twodimensional decaying turbulence, *Phys. Fluids A* **4**, (5) 1036-1039.
- 8- Etling D (1989) On atmospheric vortex streets in the wake of large islands. *Meteorol Atmos Phys* 41(3):157–164.
- 9- O. R. Southwick, E. R. Johnson, and N. R. McDonald, A point vortex model for the formation of ocean eddies by flow separation, *PHYSICS OF FLUIDS* 27, 016604 (2015)
- 10- Kahnin K.M., 1982, Quasi-periodic motion of vortex system, *Physica D* **4**, (2) 261-269.
- 11- Celletti A. & Falcolini C., 1988, A Remark on the KAM Theorem Applied to a Four-Vortex System, *J. Stat. Phys.* **52**, 471-477.
- 12- I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1993. ISBN 0-07-015000-2.
- 13- G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- 14- K. Atkinson, W. Han and D. Stewart, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Willey-Interscience, 2009.