



Université A.Mira Béjaïa
Faculté des Sciences exactes
Département de Physique

Mémoire de Master

Rédigé par

AIT MOUHOUB Berzak

En vue d'obtention du diplôme de Master en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

Quantification Directe des Systèmes Exactement Solubles

Soutenu publiquement le 03/07/2016 devant le jury composé de

| | | | | |
|----|------------------------------|-------------------|-----|--------|
| Mr | GHARBI Abdelhakim | <i>Président</i> | MCA | Béjaïa |
| Mr | BELABBAS Abdelmoumene | <i>Examineur</i> | MCB | Béjaïa |
| Mr | BELHADI Zahir | <i>Rapporteur</i> | MAA | Béjaïa |

Année Universitaire 2015/2016

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur **BELHADI Zahir** pour m'avoir encadré, conseillé et soutenu pendant toute la durée de réalisation ce travail.

Mes remerciements vont également à l'adresse de Monsieur **GHARBI Abdelhakim** et Monsieur **BELABBAS Abdelmoumene** pour avoir accepté d'être membres du jury de ma soutenance.

Je remercie aussi toute ma famille qui m'a encouragé durant mes études, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 Crochets de Poisson et Quantification Canonique | 4 |
| 1.1 Formalisme lagrangien | 4 |
| 1.2 Formalisme hamiltonien | 7 |
| 1.3 Crochets de Poisson | 9 |
| 1.4 Quantification canonique | 11 |
| 2 Quantification des Systèmes Exactement Solubles Classiquement | 13 |
| 2.1 Lagrangiens singuliers et contraintes | 14 |
| 2.2 Relation entre les crochets et les constantes de mouvement | 17 |
| 2.3 Méthodes des constantes d'intégration | 19 |
| 2.4 Applications avec des systèmes réguliers | 20 |
| 2.5 Applications pour des systèmes singuliers | 25 |
| 2.6 Détermination de lagrangiens à partir des équations de mouvement | 30 |
| 2.7 Lagrangien de Hojman-Urrutia | 32 |
| 3 Méthode des Constantes d'Intégration en Théorie des Champs | 36 |
| 3.1 Champ scalaire | 37 |
| 3.2 Champ spinoriel | 39 |
| 3.3 Champ vectoriel | 41 |
| Conclusion | 44 |
| Bibliographie | 45 |

Introduction

Les lois de la mécanique classique, telles qu'elles sont établies par Galilée d'abord, puis par Newton, représentent la première situation où les mathématiques ont permis une description objective de la réalité en permettant en outre de faire des prévisions vérifiables expérimentalement. Cette mécanique s'est vue donner par la suite une formulation analytique très élégante, parfaitement adaptée aux développements de la physique, grâce aux travaux de Lagrange et de Hamilton sans oublier les apports de Poisson et de Jacobi.

La mécanique analytique est surtout indispensable pour faire le passage de la mécanique classique vers la théorie quantique à l'aide de la quantification canonique (formulations de Schrödinger et Heisenberg) ou des intégrales de chemins (formulation de Feynman). Cependant, dans sa version standard, elle reste impuissante devant les difficultés liées à la formulation hamiltonienne des systèmes avec contraintes. Ces systèmes sont décrits par des lagrangiens singuliers ce qui rend les crochets de Poisson sans grand intérêt.

Ces systèmes sont souvent rencontrés en physique théorique, comme c'est le cas en électromagnétisme, en relativité, en physique des particules, ... D'une façon générale, toute théorie de jauge s'accompagne de contraintes.

Dans le but de faire une généralisation de la dynamique hamiltonienne aux systèmes qui présentent des singularités, Dirac a pu définir pendant les années 50 un crochet qui porte son nom [1], capable de remplacer le crochet de Poisson quand le lagrangien est singulier, permettant ainsi d'avoir une formulation hamiltonienne cohérente d'où la possibilité de faire appel à la quantification canonique malgré la présence des contraintes. Sa manière de procéder n'est pas la seule car Faddeev et Jackiw [2] ont introduit en 1988 une autre approche souvent beaucoup plus simple et moins coûteuse en terme de temps et de concepts, qui redonne les mêmes crochets de Dirac.

Récemment une autre méthode à vu le jour [3] comme réponse à cette question : est ce qu'il est possible de déduire les crochets de Dirac (ou de Poisson) nécessaires à la quantification, directement à partir de la solution analytique des équations de mouvement ? Cela revient à dire, quand un système est classiquement intégrable, est-il possible de le quantifier sans passer par le formalisme de Dirac ni par la méthode Faddeev-Jackiw, ce qui va nous épargner beaucoup de temps et de concepts ?

La méthode en question est appelée la méthode des constantes d'intégration (CI) dont le principe est d'utiliser les constantes d'intégration avec les équations de Hamilton pour déterminer les crochets de Dirac des variables fondamentales. Le but justement de ce travail de fin d'étude est d'exposer l'approche dans ses détails en l'appliquant à plusieurs exemples classiques et en théorie des champs aussi.

Afin de mener à bien la rédaction de ce manuscrit, nous organiserons notre travail en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, nous allons rappeler quelques concepts essentiels de la mécanique analytique, en particulier, les formulations hamiltonienne et lagrangienne pour des systèmes comportant un nombre fini de degrés de liberté. On y trouvera un exposé sur le lien étroit entre la quantification canonique et les crochets de Poisson.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter la nouvelle approche CI de quantification canonique des systèmes singuliers exactement solubles qui utilise les constantes d'intégration. Plusieurs exemples feront l'objet d'une étude très détaillée dans le cadre de cette approche.

Dans le troisième chapitre, nous allons procéder à la quantification canonique des champs libres de Dirac, de Klein-Gordon et de Maxwell, et cela à l'aide de la méthode des constantes d'intégrations.

Crochets de Poisson et Quantification Canonique

La mécanique analytique est une formulation très mathématique de la mécanique newtonienne, mais elle ne sort pas du cadre classique. Elle repose sur le principe de moindre action qui est un moyen très puissant pour déterminer les équations de mouvement, et cela en partant d'un lagrangien remplissant certaines exigences physiques. Vient après le formalisme canonique de Hamilton obtenu suite à une transformation de Legendre ce qui permet de définir les crochets de Poisson, indispensables pour procéder à la quantification canonique des systèmes classiques. Les méthodes de la mécanique analytique jouent un rôle essentiel dans toutes les branches de la physique moderne, à savoir en physique statistique, en relativité, en mécanique quantique, en théorie des champs,...

Dans ce chapitre, nous allons rappeler brièvement certains aspects de la mécanique analytique afin d'aborder le problème de la quantification des systèmes singuliers.

1.1 Formalisme lagrangien

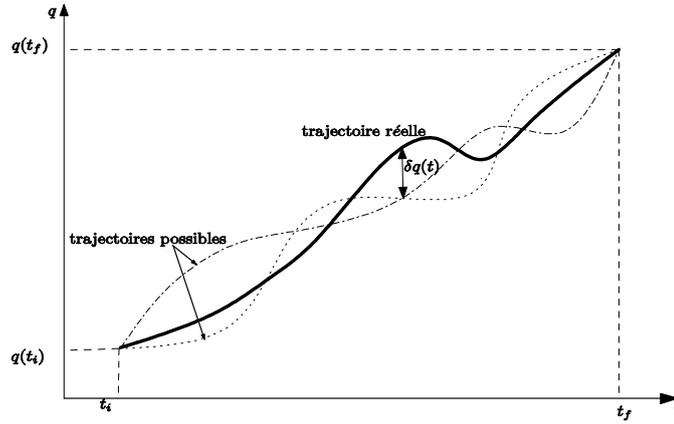
Il nous faut en principe N coordonnées généralisées $q = (q_1, \dots, q_N)$, qui ne sont pas forcément cartésiennes, pour repérer complètement la position d'un système à N degrés de liberté. Leurs dérivées par rapport aux temps $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$ sont les vitesses généralisées. Le fait que la connaissance à un instant donné des positions et des vitesses d'un système suffit à caractériser complètement son évolution ultérieure vient du fait que d'une façon générale, les équations du mouvement d'un système sont des équations différentielles du second ordre.

Supposons que la position du système est bien connue aux instants t_1 et t_2 ; notons-les $q(t_1)$ et $q(t_2)$. Le principe de Hamilton, appelé aussi le principe de moindre action, stipule

que le système se déplace de telle sorte que l'intégrale du lagrangien du système

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.1.1)$$

dite l'action, soit stationnaire ($\delta S = 0$). La trajectoire physique du système peut alors être déterminée en résolvant les équations d'Euler-Lagrange, qui s'établissent par une méthode variationnelle.



La trajectoire physique est celle qui rend l'action S stationnaire

Soit $q(t)$ la fonction (supposée unique) qui rend S extrémale. Considérons une variation $\delta q(t)$ de la trajectoire, qui vérifie $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Cette variation est supposée infinitésimale, alors la variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

En utilisant le fait que $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Le premier terme est nul, car $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Si on impose la condition $\delta S = 0$, on obtient les équations d'Euler-Lagrange (pour un système à N degrés de liberté)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1.4)$$

Ce sont les équations du mouvement de notre système, si L est connu, elles permettent de relier accélérations, vitesses et coordonnées. Elles forment un système de N équations différentielles du second ordre à N fonctions inconnues $q_i(t)$. Sa solution générale contient $2N$ constantes arbitraires qui doivent être précisées par des conditions initiales.

Dans le cas d'un point matériel, le lagrangien $L = T - U = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}, t)$, où T est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle de système. Les équations d'Euler-Lagrange seront alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}L\right) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}}L = 0 \quad (1.1.5)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (1.1.6)$$

Explicitement,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (1.1.7)$$

On a ainsi retrouvé la 2^{ème} loi de Newton dite aussi le principe fondamental de dynamique, et cela à l'aide des équations d'Euler-Lagrange.

Un système mécanique peut subir des contraintes qui sont à l'origine des forces de liaisons. Dans ce cas, les grandeurs physiques ne peuvent pas varier indépendamment les unes des autres. Une contrainte holonome est une contrainte où les vitesses n'apparaissent pas. Il s'agit en effet de relations entre les coordonnées et le temps de la forme

$$f_\alpha(q_i, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, M. \quad (1.1.8)$$

Théoriquement, ces contraintes holonomes peuvent être résolues par rapport à M coordonnées généralisées $q_i, i = 1, \dots, M$.

Supposons maintenant qu'un système à N degrés de liberté décrit par un lagrangien L et soumis à M contraintes holonomes $f_\alpha(q_i, t) = 0$ pour $\alpha = 1, \dots, M < N$. Pour l'étudier, introduisons les nouvelles variables $\lambda_\alpha, \alpha = 1, \dots, M$ appelées multiplicateurs de Lagrange et le nouveau lagrangien

$$\tilde{L} = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha f_\alpha(q, t). \quad (1.1.9)$$

Nous traitons ici les λ_α comme étant de nouvelles coordonnées généralisées. Comme \tilde{L} ne dépend pas des $\dot{\lambda}_\alpha$, les équations de Lagrange pour les λ_α seront

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha(q_i, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (1.1.10)$$

ce qui nous donne à nouveau les contraintes du départ. Pendant ce temps, les équations $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}$ des coordonnées q vont être

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\beta=1}^M \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1.11)$$

Le terme de droite de cette équation est la manifestation des forces de contrainte que présente le système. Nous pouvons maintenant résoudre ces équations comme nous avons l'habitude de le faire dans la formulation newtonienne, sachant que les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(t)$ sont des fonctions du temps et non des constantes comme dans le problème des extremums liés.

1.2 Formalisme hamiltonien

Dans l'approche lagrangienne étudiée plus haut, les lois de la mécanique sont formulées en supposant que l'état du système est décrit par les coordonnées et les vitesses généralisées de celui-ci. Il est possible de passer d'un choix de variables indépendantes à un autre en effectuant une transformation de Legendre. Cette dernière consiste à remplacer une variable dynamique par sa variable conjuguée. Considérons pour cela la différentielle totale du lagrangien

$$dL = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.2.1)$$

Introduisons maintenant les moments conjugués définis par la relation

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.2)$$

ainsi, les équations d'Euler-Lagrange auront la forme

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.3)$$

En utilisant la définition des moments généralisées et les équations d'Euler-Lagrange, on peut remplacer l'expression précédente de la différentielle du lagrangien par

$$dL = \sum_{i=1}^N \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.2.4)$$

A ce stade, introduisons la fonction de Hamilton (ou le hamiltonien) du système comme étant la transformée de Legendre du lagrangien par rapport au couple $\dot{q}_i \rightarrow p_i$

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L, \quad (1.2.5)$$

qui est aussi l'énergie du système. En utilisant(1.2.4), on obtient facilement

$$dH = -\sum_{i=1}^N \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.2.6)$$

Mais comme H est fonction de q, p et t ,

$$dH = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

ce qui est exactement le but recherché, on a remplacé la description du système en terme de coordonnées et de vitesses (q_i, \dot{q}_i) par une description en terme de coordonnées et des moments conjugués (q_i, p_i) . Par identification, les équations du mouvement dans ce nouveau couple de variables auront la forme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.2.7)$$

Comme on peut le voir immédiatement d'après l'expression de la différentielle de H . Ces équations dites canoniques à cause de leur simplicité et de leur symétrie forment un système de $2N$ équations différentielles du premier ordre à $2N$ fonctions inconnues $q(t)$ et $p(t)$, qui remplacent les équations du second ordre d'Euler-Lagrange.

Il est possible aussi d'avoir ces équations au moyen du principe de moindre action. Tous d'abord, il faut savoir que

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad \Longrightarrow \quad L = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H, \quad (1.2.8)$$

En remplaçant dans l'action (1.1.1), on aura

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N (\delta p_i \dot{q}_i + (\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i) dt \\ &= \left[\sum_{i=1}^N p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left((\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) \delta p_i - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}) \delta q_i \right) dt \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Le premier terme est nul car tous les chemins passent par les extrémités $q(t_1)$ et $q(t_2)$ ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$), ce qui nous donne finalement

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^N \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt. \quad (1.2.10)$$

Les variations $(\delta q, \delta p)$ sont indépendantes, donc pour satisfaire la condition $\delta S = 0$, il faut imposer à la trajectoire physique de vérifier les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.11)$$

Nous avons ainsi retrouvé les équations de Hamilton obtenues auparavant.

1.3 Crochets de Poisson

Considérons une grandeur quelconque $f(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$ définie sur l'espace des phases. Nous nous proposons ici d'étudier l'évolution dans le temps d'une telle grandeur. En effet, sa dérivée totale s'écrit

$$df = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (1.3.1)$$

En utilisant les équations de Hamilton (1.2.7),

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

A ce stade, introduisons le crochet de Poisson de deux fonctions f et g définies dans l'espace des phases par

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (1.3.3)$$

En termes de ce crochet de Poisson, la relation (1.3.1) va se réécrire sous la forme réduite

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.3.4)$$

C'est l'équation d'évolution de la grandeur f régie par le Hamiltonien du système. Si la grandeur f ne dépend pas explicitement du temps ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) et si son crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul, alors elle est une constante de mouvement ($\dot{f} = 0$).

Les équations de Hamilton peuvent maintenant être réécrites d'une manière symétrique par le biais du crochet de Poisson comme suit :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3.5)$$

A l'aide de la définition (1.3.3) des crochets de Poisson, on peut facilement déduire les crochets des variables fondamentales

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (1.3.6)$$

Toujours à partir de la même définition, on peut voir que

$$\{f, q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad , \quad \{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (1.3.7)$$

Les propriétés du crochet de Poisson peuvent être résumées dans les points suivants

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$; (Antisymétrie).
- 2) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$; (Bilinéarité).
- 3) $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$; (Règle de Leibniz).
- 4) $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{f, h\}\} = 0$. (Identité de Jacobi).

Nous avons vu que si $f(q, p, t)$ est une intégrale première ($\dot{f} = 0$), alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \quad (1.3.8)$$

Si en plus, f ne dépend que de q et p , alors $f(q, p)$ est une intégrale première seulement si

$$\{f, H\} = 0. \quad (1.3.9)$$

En particulier, dans le cas où H ne dépend pas explicitement du temps $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, il est une intégrale première. En effet,

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} \implies \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \implies \frac{dH}{dt} = 0, \quad (1.3.10)$$

Mais d'après (1.2.7) $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ donc

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies \frac{dH}{dt} = 0. \quad (1.3.11)$$

Cela signifie quand le lagrangien d'un système est autonome, son hamiltonien est conservé dans le temps.

1.4 Quantification canonique

Le principe de correspondance stipule que le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique se fait en remplaçant les positions q_i et les impulsions p_i par les opérateurs position \hat{q}_i et les opérateurs impulsion \hat{p}_i , qui agissent dans l'espace de Hilbert (l'espace des états). Donc, il s'agit d'une méthode essentiellement inductive, permettant de construire les opérateurs quantiques adaptés à un système ayant un équivalent classique.

Nous transposons **les variables canoniques** ou plus généralement **les variables dynamiques** en opérateurs en imposant deux conditions :

- * les opérateurs doivent être symétrisés pour devenir auto-adjoints (exemple : $xp \longrightarrow \frac{(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})}{2}$);
- ** les crochets de Poisson sont remplacés par des commutateurs vérifiant la condition

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = i\hbar \widehat{\{f, g\}} \quad (1.4.1)$$

Ici, le \hbar est la constante de Planck divisée par 2π et i ($i^2 = -1$) est l'imaginaire pur. Nous signalons, enfin, que les propriétés précédentes du crochet de Poisson restent valables pour le commutateur. Dans le cas particulier des $2N$ variables fondamentales q_i, p_j , leurs opérateurs correspondants \hat{q}_i et \hat{p}_j obéissent aux relations de commutation suivantes

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.4.2)$$

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution d'un système à partir d'un instant de référence t_0 . Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps tandis que l'état $|\Psi\rangle_H$ du système reste inchangé. En terme différents, le point de vue de Heisenberg est résumé dans la proposition suivante

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right)_H \quad (1.4.3)$$

Il est facile d'en déduire les équations de Heisenberg

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_i}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}_i, \hat{H}(t)] & i &= 1, \dots, N \\ \frac{d\hat{p}_i}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}_i, \hat{H}(t)] & i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

La représentation de Schrödinger suppose que les opérateurs ne dépendent pas du temps, mais l'état $|\Psi(t)\rangle_s$ varie dans le temps en obéissant à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_s = \hat{H} |\Psi(t)\rangle_s. \quad (1.4.5)$$

Les deux formules sont différentes mathématiquement mais équivalentes physiquement parce qu'elles sont liées par une transformation unitaire. En effet, si $\hat{A}_H(t)$ est un opérateur

de Heisenberg et \hat{A}_s est un opérateur de Schrödinger, alors

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t, t_0)\hat{A}_s\hat{U}(t, t_0) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_H(t) = \hat{U}^+(t, t_0)\hat{H}_s\hat{U}(t, t_0), \quad (1.4.6)$$

où $\hat{U}(t, t_0)$ désigne l'opérateur d'évolution de notre système.

Quantification des Systèmes Exactement Solubles Classiquement

La méthode hamiltonienne de la quantification canonique d'un système dynamique nécessite de postuler les crochets canoniques de Poisson entre les coordonnées et les moments conjugués. Ensuite, le principe de correspondance est appliqué pour déterminer les différents commutateurs des opérateurs quantiques associés aux variables dynamiques classiques. Cependant dans le cas des lagrangiens singuliers qui présentent des contraintes, cette procédure ne fonctionne plus et les crochets nécessaires à la quantification doivent être déterminés et non postulés. Dirac a développé un formalisme général pour traiter de tels systèmes [1] qui est largement utilisé, cependant, la détermination des crochets de Dirac remplaçant les crochets de Poisson peuvent être très lourdes. Plus récemment, Faddeev et Jackiw ont proposé [2, 6] une approche alternative (approche FJ) basée sur le formalisme symplectique et le théorème Darboux pour déterminer les bon crochets qui peut souvent nous éviter la plupart des étapes du formalisme de Dirac.

Dans ce chapitre, nous proposons une autre approche pour obtenir les crochets relatifs aux systèmes avec et sans contraintes sans avoir besoin de la classification de Dirac des contraintes et du théorème de Darboux de l'approche FJ [3]. Notre méthode est basée sur le calcul des crochets entre les constantes d'intégration de la solution générale des équations d'Euler-Lagrange. Les crochets entre les coordonnées et les moments conjugués peuvent être directement déduits par la suite. Par conséquent, quand un système est classiquement soluble, ce qui veut dire que la solution analytique des équations de mouvement est connue, il est possible de le quantifier sans faire appel aux formalismes de Dirac et FJ.

Nous commençons par présenter le formalisme général du calcul des crochets à l'aide des constantes d'intégration. Ensuite, nous allons donner plusieurs exemples qui seront étudiés à l'aide cette approche.

2.1 Lagrangiens singuliers et contraintes

Soit un système dans l'action est donnée par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1.1)$$

où le lagrangien L ne dépend que des positions q_i et des vitesses \dot{q}_i généralisées. Le mouvement classique de ce système est celui qui rend l'action stationnaire sous des variations arbitraires δq_i et les conditions qui doivent être remplies sont les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1.2)$$

Ces équations peuvent s'écrire explicitement sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} = \sum_{j=1}^N \ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1.3)$$

Il est possible de résoudre par rapport aux accélérations \ddot{q}_j uniquement si la matrice hessienne $[H_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right]$ est inversible ($\det(H_{ij}) \neq 0$), et dans ce cas, le système est régulier. Si le déterminant de $[H_{ij}]$ est égal à zéro ($\det(H) = 0$), notre lagrangien est dit singulier et les équations (2.1.3) vont nous donner des relations qui ne dépendent pas des accélérations de telle sorte que nous ne pouvons pas résoudre les équations du mouvement avec l'état initial q_0, \dot{q}_0 . Nous verrons tout de suite que cela est lié à des contraintes dans l'espace des phases.

$$[H_{ij}] = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad \Leftrightarrow \quad [H_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_N} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_N} \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_N \partial \dot{q}_N} \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

Afin d'étudier le problème avec le formalisme hamiltonien, nous définissons toujours les moments conjugués de la théorie par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1.5)$$

Si la matrice hessienne est singulière, cela implique que les vitesses \dot{q}_i ne peuvent pas toutes être exprimées en fonction des moments canoniques p_j , ce que veut dire qu'elles ne sont pas toutes indépendantes. Autrement dit, nous sommes en présence de contraintes

de la forme

$$\phi_\alpha(q, p) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (2.1.6)$$

qui ne font pas intervenir les vitesses généralisées. Ces contraintes réduisent le nombre de degrés de liberté de notre système, ce qui n'est pas le cas des systèmes réguliers.

A titre d'exemple, considérons le lagrangien $L = \frac{(y\dot{x} + \dot{y})^2}{2} + \cos(xy)z - \frac{z^2}{2}$. La matrice hessienne dans ce cas est

$$[H_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right] = \begin{bmatrix} y^2 & y & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Le déterminant de cette matrice est nul, ce qui veut dire que notre lagrangien est singulier, et comme le rang de cette dernière est égal à un, on s'attend à avoir deux contraintes. Effectivement,

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = y(y\dot{x} + \dot{y}) \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = y\dot{x} + \dot{y} \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \cos(xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x - yp_y = 0 \\ p_z - \cos(xy) = 0 \\ \dot{y} = p_y - y\dot{x} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Nous avons donc deux contraintes $\phi_1 = p_x - yp_y = 0$ et $\phi_2 = p_z - \cos(xy) = 0$. Il est clair aussi que l'équation d'Euler-Lagrange par rapport à la variable z ne fera pas intervenir les accélérations.

En physique, à part les lagrangiens de la mécanique classique et certains cas en théorie des champs (le lagrangien de Klein-Gordon et le lagrangien de Schrödinger), pratiquement tous les systèmes sont décrits par des lagrangiens qui présentent des singularités dues aux contraintes.

1. Lagrangiens linéaires par rapport à une vitesse

Le meilleur exemple est en théorie quantique des champs, là où la densité lagrangienne \mathcal{L} du champ de Dirac $\psi(t, \vec{x})$ décrivant les particules fermioniques de spin $\frac{1}{2}$ est linéaire par rapport aux vitesses ($\partial_0\psi$ et $\partial_0\bar{\psi}$). En effet,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi + i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\bar{\psi}\psi$$

où les γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont les quatre matrices de Dirac et $\bar{\psi}(t, x) = \psi^\dagger(t, x)\gamma^0$. Les moments conjugués sont $\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0\psi} = i\bar{\psi}\gamma^0$ et $\Pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0\bar{\psi}} = 0$. Nous sommes bel et bien en présence de deux contraintes $\Pi_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0 = 0$ et $\Pi_{\bar{\psi}} = 0$.

2. Lagrangiens homogènes par rapport aux vitesses

Le lagrangien d'une particule relativiste en est un bon exemple physique. En effet, en relativité restreinte l'action d'une particule libre prend la forme

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau$$

où $x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ représente le quadrivecteur position de notre particule, $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ est la métrique de Minkowski et τ un paramètre réel permettant de paramétriser sa ligne d'univers de telle sorte que $x^\mu = x^\mu(\tau)$. On vérifie aisément que le lagrangien $L = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ est homogène par rapport aux vitesses \dot{x}^μ

$$L(x^\mu, \lambda \dot{x}^\mu) = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \lambda^2 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \lambda L(x^\mu, \dot{x}^\mu) \quad \lambda \geq 0.$$

Le passage au formalisme hamiltonien s'accompagne de la contrainte $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2$, ce qui prouve que notre lagrangien est bien singulier.

3. Lagrangiens avec symétrie de jauge

Il est bien connu que la densité lagrangienne du champ de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.1.8)$$

est invariante sous la transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ où $\chi = \chi(t, \vec{x})$ sachant que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et $A_\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$. Ici, V désigne le potentiel scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur ($c = 1$). Les moments conjugués définis par $\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}$ contiennent la contrainte $\Pi^0 = 0$, preuve de la singularité de ce lagrangien.

Le formalisme hamiltonien doit prendre en considération la présence de contraintes $\phi_\alpha(q, p) = 0$, $\alpha = 1, \dots, M$. Autrement dit, les équations de Hamilton doivent être corrigées de manière à les respecter. Pour ce faire, on construit d'abord le hamiltonien canonique habituel $H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L$ qui sera indépendant des vitesses généralisées \dot{q} . Ensuite, on procède par analogie au formalisme lagrangien avec contraintes en remplaçant ce hamiltonien par le hamiltonien total H_T donné par

$$H_T(p, q) = H(p, q) + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \phi_\alpha(q, p) \quad (2.1.9)$$

où les quantités λ_α seront appelées les multiplicateurs de Dirac. Les équations du mouvement s'obtiennent d'une manière analogue au cas régulier explicité dans le chapitre précédent à condition de remplacer H par H_T . En effet, La dynamique de notre système

est régie par les équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{p}_i = -\frac{\partial H_T}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q_i} & i = 1, \dots, N \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H_T}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i} & i = 1, \dots, N \\ \phi_\alpha = 0 & \alpha = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

Il s'agit des équations de Hamilton qui tiennent compte de la présence des contraintes $\phi_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, M$.

Il est clair que ces équations sont loin de la forme canonique $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ à cause du fait que les variables q et p sont liées par des contraintes. A ce niveau, on se heurte au problème suivant : les crochets de Poisson s'obtiennent justement à l'aide des équations canoniques et traitent les variables fondamentales comme étant des variables indépendantes, ce qui nous pousse à conclure que ces derniers ne sont pas compatibles avec les contraintes. Par exemple, en présence de la contrainte $p_x = 0$, il est insensé de croire que $\{x, p_x\} = 1$ comme le veut le crochet de Poisson. C'est pour cette raison qu'il est temps de construire une nouvelle méthode permettant de déterminer les crochets relatifs à un système singulier afin de procéder à sa quantification canonique, car la quantification naïve avec les crochets de Poisson ne trouvent pas de sens en présence de contraintes.

Avant de passer à la prochaine section, revenons au lagrangien discuté en haut $L = \frac{(y\dot{x} + \dot{y})^2}{2} + \cos(xy)z - \frac{z^2}{2}$, et essayons de basculer vers le formalisme hamiltonien. A l'aide de (2.1.7),

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \dot{x}yp_y + \dot{y}p_y + \dot{z} \cos(xy) - L = (\dot{x}y + \dot{y})p_y - \frac{(y\dot{x} + \dot{y})^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

Finalement,

$$H = \frac{p_y^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

Il est clair que ce hamiltonien ne dépend pas des vitesses généralisées comme prévu. Afin d'accéder aux équations de mouvement, Le hamiltonien total sera de la forme

$$H_T = \frac{p_y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \lambda(p_x - yp_y) + \rho(p_z - \cos(xy)) \quad (2.1.11)$$

où λ et ρ sont des multiplicateurs de Dirac.

2.2 Relation entre les crochets et les constantes de mouvement

Considérons un système à N degrés de liberté, caractérisée par ses coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ et ses moments conjugués $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$. Maintenant,

soient $f = f(q, p)$ et $g = g(q, p)$ deux fonctions arbitraires. Nous définissons un crochet bilinéaire antisymétrique satisfaisant la règle de Leibniz et l'identité de Jacobi, comme suit

$$\begin{aligned} \{f, g\} = & \sum_{i,j=1}^N [\{q_i, q_j\} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \{p_i, p_j\} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \\ & + \{q_i, p_j\} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)]. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

A ce niveau, la nature de ce crochet n'a pas encore été précisée. Maintenant, supposons que les q et p sont des fonctions du temps et de nouvelles variables $R = (R_1, R_2, \dots, R_M)$ avec $M \leq 2N$. Autrement dit $q = q(R, t)$ et $p = p(R, t)$. En effet, $M = 2N$ correspond au cas régulier. Pour les systèmes avec contraintes, nous avons $M < 2N$, car chaque contrainte élimine une variable. Ainsi, la présence des contraintes réduit le nombre de variables indépendantes et nous allons travailler uniquement avec les variables libres. A présent, l'équation (2.2.1) devient

$$\begin{aligned} \{f, g\} = & \sum_{i,j=1}^N \sum_{k,l=1}^M \left(\{q_i, q_j\} \frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial R_l} \frac{\partial R_l}{\partial q_j} + \{p_i, p_j\} \frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial R_l} \frac{\partial R_l}{\partial p_j} \right) \\ & + \sum_{i,j=1}^N \sum_{k,l=1}^M \{q_i, p_j\} \left(\frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial R_l} \frac{\partial R_l}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial R_l} \frac{\partial R_l}{\partial p_i} \right), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ce qui se simplifie à la forme

$$\begin{aligned} \{f, g\} = & \sum_{k,l=1}^M \left[\sum_{i,j=1}^N \{q_i, q_j\} \frac{\partial R_k}{\partial q_i} \frac{\partial R_l}{\partial q_j} + \sum_{i,j=1}^N \{p_i, p_j\} \frac{\partial R_k}{\partial p_i} \frac{\partial R_l}{\partial p_j} \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^N \{q_i, p_j\} \left(\frac{\partial R_k}{\partial q_i} \frac{\partial R_l}{\partial p_j} - \frac{\partial R_k}{\partial p_j} \frac{\partial R_l}{\partial q_i} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial g}{\partial R_l}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Cela conduit à l'expression de $\{f, g\}$ en terme de $\{R_k, R_l\}$

$$\{f, g\} = \sum_{k,l=1}^M \{R_k, R_l\} \frac{\partial f}{\partial R_k} \frac{\partial g}{\partial R_l}. \quad (2.2.4)$$

Maintenant, si $f = q_i$ ou p_i et $g = H$ est le hamiltonien du système, on obtient les équations de mouvement suivantes

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^M \frac{\partial q_i}{\partial R_k} \frac{dR_k}{dt} = \sum_{l,k=1}^M \{R_k, R_l\} \frac{\partial q_i}{\partial R_k} \frac{\partial H}{\partial R_l} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^M \frac{\partial p_i}{\partial R_k} \frac{dR_k}{dt} = \sum_{l,k=1}^M \{R_k, R_l\} \frac{\partial p_i}{\partial R_k} \frac{\partial H}{\partial R_l}. \quad (2.2.6)$$

Supposons à présent que les variables $R_k, k = 1, \dots, M$ sont des constantes d'intégration (intégrales premières), notées $C_k, k = 1, \dots, M$, les équations ci-dessus vont se réduire à la forme

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum_{l,k=1}^M \{C_k, C_l\} \frac{\partial q_i}{\partial C_k} \frac{\partial H}{\partial C_l} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{l,k=1}^M \{C_k, C_l\} \frac{\partial p_i}{\partial C_k} \frac{\partial H}{\partial C_l} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2.8)$$

Nous avons ainsi montré le lien étroit entre les constantes d'intégration C_k et les équations du mouvement.

2.3 Méthodes des constantes d'intégration

Dans cette section, nous utilisons la propriété précédente pour déterminer les crochets des systèmes classiques exactement solubles. Vers la fin, la quantification canonique nous permettra de construire la version quantique. Bien que notre approche (appelée dans le reste de ce mémoire la méthode CI) soit applicable aux systèmes sans contraintes, c'est pour les systèmes avec contraintes qu'elle présente un intérêt principal. En effet, nous proposons une nouvelle méthode qui facilite considérablement le calcul des crochets de Dirac, tout en évitant à la fois le formalisme de Dirac très compliqué et le théorème de Darboux de l'approche de FJ.

Considérons un système classique décrit par un lagrangien singulier autonome $L(q, \dot{q})$ où les $q = (q_1, \dots, q_N)$ sont les coordonnées généralisées et les $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ sont les vitesses généralisées. Supposons que nous avons la solution générale $q(t) = \tilde{q}(t, C)$ des équations d'Euler-Lagrange et les moments conjugués $p(t) = \tilde{p}(t, C)$ ($p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$), où les $C = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ est l'ensemble des constantes d'intégration. Rappelons que pour les systèmes avec contraintes, nous avons évidemment $M < 2N$.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de distinguer deux cas : le premier c'est quand il n'y a pas de fonctions arbitraires dans les solutions (pas de symétrie de jauge), et le second correspond au cas contraire. Dans ce cas précisément avec une symétrie de jauge, il faut d'abord choisir les fonctions arbitraires, une fois pour toutes en ajoutant de nouvelles conditions (Fixant la jauge) avant de passer au formalisme canonique et au calcul des crochets.

A l'aide des solutions analytiques des équations du mouvement, nous pouvons écrire le hamiltonien comme étant $H(q(t), p(t)) = H(\tilde{q}(t, C), \tilde{p}(t, C)) = H(C)$ et à partir des

équations (2.2.7) et (2.2.8), on déduit les équations fondamentales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_i(t, C) &= \sum_{l,k=1}^M \{C_k, C_l\} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial C_k} \frac{\partial H}{\partial C_l} \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_i(t, C) &= \sum_{l,k=1}^M \{C_k, C_l\} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial C_k} \frac{\partial H}{\partial C_l}.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

Ces équations $2N$ contiennent $M(M-1)/2$ crochets inconnus $\{C_k, C_l\}$, avec $l, k = 1, \dots, M$. La méthode des constantes d'intégration (CI) consiste à déterminer ces crochets à l'aide de (2.3.1) par l'intermédiaire d'une simple identification. Mais avec cette procédure, seuls les crochets contenant au moins une constante d'intégration figurant dans l'expression du hamiltonien sont accessibles. Pour résoudre ce problème, il faut ajouter des termes supplémentaires au lagrangien du départ. En d'autres termes, si par exemple le crochet $\{C_k, C_l\}$ n'est pas accessible et, si l'une de ces constantes apparaît dans l'expression de la coordonnée généralisée q_i , il est possible d'ajouter un terme de la forme ηq_i au lagrangien et refaire tous les calculs, ensuite poser $\eta = 0$.

En utilisant les crochets $\{C_k, C_l\}$, nous pouvons calculer les crochets $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ et $\{q_i, p_j\}$ plus facilement qu'avec les autres approches existantes. Si le résultat du calcul dépend des constantes d'intégration, il est possible de les faire disparaître en inversant la solution $\tilde{q}(t, C)$ et $\tilde{p}(t, C)$. A ce stade, pour être sûr de la validité de nos calculs, nous pouvons simplement vérifier que $\tilde{q}(t, C)$ et $\tilde{p}(t, C)$ sont des solutions des équations de Hamilton obtenues en utilisant ces crochets fondamentaux.

Cela peut paraître surprenant de voir les crochets entre les constantes et la dérivée de fonctions par rapport à ces constantes, mais en réalité, ces dernières ne sont que des intégrales premières. Cette situation nous rappelle le théorème de Jacobi en mécanique analytique là où les constantes du mouvement sont traitées comme des variables.

Nous voyons qu'avec cette méthode, nous ne parlons même pas de contraintes contrairement aux autres approches.

2.4 Applications avec des systèmes réguliers

Les systèmes qui seront étudiés dans cette section seront réguliers de telle sorte que les crochets des variables fondamentales vont être des crochets de Poisson habituels.

A. Oscillateur harmonique

Partant du $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ décrivant un oscillateur harmonique, les équations d'Euler-Lagrange seront

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0 \implies x = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

où a et b sont les constantes d'intégration. Le seul moment conjugué ici est

$$p_x = m\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad p_x = m\omega (a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t)). \quad (2.4.1)$$

En remplaçant cette solution dans le hamiltonien $H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, il va prendre la forme

$$H = \frac{m\omega^2}{2}(a^2 + b^2).$$

Maintenant, il faut voir le crochet des constantes a et b en utilisant l'équation $\dot{x} = \{x, H\}$ sous la forme (2.3.1). Autrement dit,

$$\begin{aligned} \{x, H\} &= \{a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), \frac{m\omega^2}{2}(a^2 + b^2)\} \\ &= m\omega^2 \sin(\omega t) \{a, \frac{b^2}{2}\} + m\omega^2 \cos(\omega t) \{b, \frac{a^2}{2}\} \\ &= \{a, b\} b m \omega^2 \sin(\omega t) + \{b, a\} a m \omega^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Par comparaison avec $\dot{x} = \omega a \cos(\omega t) - \omega b \sin(\omega t)$, on déduit le crochet

$$\{a, b\} = -\frac{1}{m\omega}$$

Calculons à présent le crochet $\{x, p_x\}$. En effet,

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \{a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), m\omega (a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t))\} \\ &= -m\omega \sin^2(\omega t) \{a, b\} + m\omega \cos^2(\omega t) \{b, a\} \\ &= \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t). \end{aligned}$$

Finalement, $\{x, p_x\} = 1$, ce qui est naturel car l'oscillateur harmonique est décrit par un lagrangien régulier.

B. Oscillateur isotonique

Le lagrangien de l'oscillateur isotonique est

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{k}{x^2}. \quad (2.4.3)$$

Les équations d'Euler-Lagrange conduisent à l'équation non-linéaire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x - \frac{2k}{x^3} = 0, \quad (2.4.4)$$

dont la solution est (voir [8]) $x(t) = \frac{1}{A\omega} \sqrt{(A^4\omega^2 - 2k) \sin^2(\omega t + \phi) + 2k}$ où A et ϕ sont les constantes de l'intégration. Le moment conjugué associé à ce lagrangien est $p_x = \frac{(A^4\omega^2 - 2k) \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)}{A \sqrt{(A^4\omega^2 - 2k) \sin^2(\omega t + \phi) + 2k}}$ et le hamiltonien $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{2k}{x^2}$ s'exprime en termes de ces constantes sous la forme

$$H = \frac{A^4\omega^2 + 2k}{2A^2}. \quad (2.4.5)$$

De l'équation de Hamilton $\dot{x} = \{x, H\}$ et la propriété (2.3.1), on obtient la relation

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \{\phi, A\} \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial A} + \{A, \phi\} \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial H}{\partial \phi}$$

ce qui va nous permettre d'avoir le crochet des constantes d'intégration après simplification

$$\{\phi, A\} = \frac{A^3 \omega}{A^4 \omega^2 - 2k}.$$

D'après l'équation (2.2.4), le crochet des variables fondamentales se calcule comme suit :

$$\{x, p_x\} = \{\phi, A\} \left(-\frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial p_x}{\partial \phi} + \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial p_x}{\partial A} \right). \quad (2.4.6)$$

Un calcul simple montre que $-\frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial p_x}{\partial \phi} + \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial p_x}{\partial A} = \frac{A^4 \omega^2 - 2k}{A^3 \omega}$, d'où le crochet Poisson canonique $\{x, p_x\} = 1$ comme prévu pour les systèmes sans contraintes.

C. Particule dans un champ électrique

Considérons une particule de charge q_e se déplaçant dans le plan xy en présence d'un champ électrique constant \vec{E}_0 orienté dans la direction y . Son lagrangien va être

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - q_e E_0 y$$

d'où les moments conjugués

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{aligned} \ddot{x} = 0 & \implies x = at + b \\ \ddot{y} = -\frac{q_e E_0}{m} & \implies y = -\frac{1}{2} \frac{q_e E_0}{m} t^2 + ct + d. \end{aligned}$$

Le hamiltonien $H = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{p_y^2}{m} + q_e E_0 y$ peut s'exprimer en fonction des constantes d'intégration sous la forme

$$H = \frac{1}{2} m a^2 + \frac{1}{2} m c^2 + q_e E_0 d.$$

Il faut remarquer qu'on a quatre variables (x, y, p_x, p_y) et quatre constantes d'intégrations (a, b, c, d) , donc notre système est bien régulier.

Appliquons maintenant la méthode CI à travers les équations $\dot{x} = \{x, H\}$ et $\dot{y} = \{y, H\}$.

$$\begin{aligned} a &= \{at + b, \frac{1}{2} m a^2 + \frac{1}{2} m c^2 + q_e E_0 d\} \\ \implies a &= m c t \{a, c\} + q_e E_0 t \{a, d\} + m a \{b, a\} + m c \{b, c\} + q_e E_0 \{b, d\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\frac{q_e E_0}{m}t + c &= \left\{ -\frac{1}{2}\frac{q_e E_0}{m}t^2 + ct + d, \frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2 + q_e E_0 d \right\} \\ \Rightarrow -\frac{q_e E_0}{m}t + c &= \text{mat}\{c, a\} + q_e E_0 t\{c, d\} + ma\{d, a\} + mc\{d, c\}. \end{aligned}$$

Par comparaison des membres de droites avec les membres de gauche des relations précédentes, on conclut que

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{c, d\} = -\frac{1}{m}, \\ \{a, c\} &= \{b, c\} = \{a, d\} = \{b, d\} = 0. \end{aligned}$$

A présent, passons aux crochets des variables fondamentales. En effet,

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \{at + b, ma\} = \{b, a\}m = 1; \\ \{x, p_y\} &= \{at + b, -\frac{q_e E_0}{m}t + c\} = \{a, c\}t + \{b, c\} = 0; \\ \{x, y\} &= \{at + b, -\frac{1}{2}\frac{q_e E_0}{m}t^2 + ct + d\} = \{a, c\}t^2 + \{a, d\}t + \{b, c\}t + \{b, d\} = 0 \\ \{y, p_x\} &= \left\{ -\frac{1}{2}\frac{q_e E_0}{m}t^2 + ct + d, ma \right\} = m\{c, a\}t + m\{d, a\} = 0; \\ \{y, p_y\} &= \left\{ -\frac{1}{2}\frac{q_e E_0}{m}t^2 + ct + d, -q_e E_0 t + mc \right\} = m\{d, c\} = 1; \\ \{p_x, p_y\} &= \left\{ ma, -\frac{q_e E_0}{m}t + c \right\} = m\{a, c\} = 0. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons facilement les crochets de Poisson des variables fondamentales. Il est possible de vérifier que notre méthode fonctionne avec la particule libre en posant $q_e = 0$ dans ce qui précède. Ça se voit que ça ne va pas changer les crochets des variables fondamentales car ces derniers ne dépendent pas de q_e justement.

D. Particule dans un champ magnétique

Supposons que la particule de l'exemple précédent se trouve maintenant dans un champ magnétique \vec{B}_0 orienté dans une direction perpendiculaire au plan xy , donc

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}q_e B_0 (y\dot{x} - x\dot{y})$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} m\ddot{x} - q_e B_0 \dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + q_e B_0 \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t) + b \\ y = c \cos(\omega t) - d \sin(\omega t) + a \\ p_x = -\frac{1}{2}q_e B_0 (-c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) + a) \\ p_y = -\frac{1}{2}q_e B_0 (d \cos(\omega t) + c \sin(\omega t) - b) \end{cases}$$

où $\omega = \frac{q_e B_0}{m}$, $p_x = m\dot{x} - \frac{1}{2}q_e B_0 y$ et $p_y = m\dot{y} + \frac{1}{2}q_e B_0 x$. Un calcul direct montre que

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{1}{2}m\omega^2(c^2 + d^2).$$

En regardant juste cette équation et sans aller plus loin, nous pouvons savoir qu'on aura des crochets non accessibles comme c'est le cas de $\{a, b\}$, car aucune des constantes a et b ne figure dans l'expression de H .

Afin d'échapper à cette situation, travaillons avec le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}q_e B_0(y\dot{x} - x\dot{y}) + \eta m\omega x$$

ensuite posons $\eta = 0$. Maintenant, les équations de mouvement sont

$$\begin{cases} m\ddot{x} - q_e B_0 \dot{y} - \eta m\omega = 0 \\ m\ddot{y} + q_e B_0 \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t) + b \\ y = c \cos(\omega t) - d \sin(\omega t) - \eta t + a \\ p_x = -\frac{1}{2}m\omega(-c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) + a - \eta t) \\ p_y = -\frac{1}{2}m\omega(d \cos(\omega t) + c \sin(\omega t) - b + \frac{2\eta}{\omega}). \end{cases}$$

Avec cette solution, le hamiltonien devient

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L = \frac{m\omega^2}{2}(c^2 + d^2) + \frac{1}{2}m\eta^2 - \eta m\omega b.$$

Cette fois-ci, le hamiltonien contient trois, sur les quatre, constantes d'intégration, ce qui permet d'en déduire tous les crochets désirés. En effet, nous avons

$$\dot{x} = \omega c \cos(\omega t) - \omega d \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \{x, H\} &= \omega^2 m \{b, d\} d + \omega^2 m \{b, c\} c + \sin(\omega t) \omega^2 m \{c, d\} d - \sin(\omega t) \{c, b\} \eta m \omega \\ &\quad + \cos(\omega t) \omega^2 m \{d, c\} c + \cos(\omega t) \{d, b\} \eta m \omega. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\dot{y} = -\eta - \omega c \sin(\omega t) - \omega d \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \{y, H\} &= \cos(\omega t) \{c, d\} m \omega^2 d + \cos(\omega t) \{c, b\} \eta m \omega - \sin(\omega t) \{d, c\} m \omega^2 c \\ &\quad + \sin(\omega t) \{d, b\} \eta m \omega + \{a, d\} m \omega^2 d + \{a, c\} m \omega^2 c - \{a, b\} \eta m \omega. \end{aligned}$$

En utilisant les équations $\dot{x} = \{x, H\}$ et $\dot{y} = \{y, H\}$, nous pouvons déduire les crochets suivants par une identification directe

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{d, c\} = \frac{1}{m\omega}. \\ \{b, c\} &= \{a, c\} = \{a, d\} = \{d, b\} = 0. \end{aligned}$$

A ce stade, il est possible de calculer les crochets des variables fondamentales (x, y, p_x, p_y) .

Par exemple,

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \{b + c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t), -\frac{1}{2}m\omega(-c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t) + a - \eta t)\} \\ &= -\frac{1}{2}m\omega \{b, a\} - \frac{1}{2}m\omega \sin^2(\omega t) \{c, d\} + \frac{1}{2}m\omega \cos^2(\omega t) \{d, c\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{y, p_y\} &= \{-\eta t + c \cos(\omega t) - d \sin(\omega t) + a, -\frac{1}{2}m\omega(d \cos(\omega t) + c \sin(\omega t) - b + \frac{2\eta}{\omega})\} \\ &= -\frac{1}{2}m\omega \cos^2(\omega t) \{c, d\} + \frac{1}{2}m\omega \sin^2(\omega t) \{d, c\} + \frac{1}{2}m\omega \{a, b\} \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Les autres crochets sont nuls comme c'est le cas des systèmes réguliers. Maintenant, si on pose $\eta = 0$, on aura toujours les mêmes crochets des variables fondamentales.

A travers ces exemples, nous avons vérifié que la méthode des constantes d'intégrations reproduit les crochets de Poisson quand le système à quantifier est régulier.

2.5 Applications pour des systèmes singuliers

L'intérêt principal de l'approche CI réside dans le fait qu'elle est applicable avec succès aux systèmes singuliers comme nous allons le voir ci-dessous.

Exemple 1

Considérons un système décrit par le lagrangien $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}\dot{y} - \frac{x^2}{2}y$. Les équations d'Euler-Lagrange sont dans ce cas

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x\dot{y} - xy & \dot{x} &= -\frac{1}{2}x \\ p_x &= \dot{x} & p_y &= \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

La solution analytique est

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-\frac{1}{2}t} & y(t) &= be^t - \frac{1}{4} \\ p_x(t) &= -\frac{a}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & p_y(t) &= \frac{a^2}{2}e^{-t}, \end{aligned}$$

où a et b sont les constantes d'intégration. Nous avons 2 constantes au lieu de 4, cela signifie que notre système possède 4-2 contraintes qui sont $p_y - \frac{x^2}{2} = 0$ et $p_x + \frac{1}{2}x = 0$.

Le hamiltonien est $H = (p_x^2 + x^2y)/2 = a^2b/2$ et en utilisant (2.3.1) avec la variable x , on abouti à

$$\dot{x} = \{x, H\} \Rightarrow \frac{a}{2}e^{-\frac{1}{2}t} = -\{ae^{-\frac{1}{2}t}, a^2b/2\} \Rightarrow \frac{a}{2}e^{-\frac{1}{2}t} = -e^{-\frac{1}{2}t}\frac{a^2}{2}\{a, b\},$$

puis par identification, on déduit le crochet $\{a, b\} = \frac{-1}{a}$. A l'aide de ce crochet, on peut obtenir directement les crochets des variables fondamentales. Par exemple,

$$\{x, y\} = \{ae^{-\frac{1}{2}t}, be^t - \frac{1}{4}\} = e^{-\frac{1}{2}t} \{a, b\} = \frac{-1}{a}e^{\frac{1}{2}t} = -\frac{1}{x}.$$

Les autres crochets sont

$$\{x, p_x\} = \{x, p_y\} = \{p_x, p_y\} = 0 \quad \{y, p_x\} = -\frac{1}{2x} \quad \{y, p_y\} = 1.$$

Ces crochets sont loin d'être des crochets de Poisson, il s'agit en effet de crochets de Dirac.

Pour vérifier la validité de ces résultats, nous allons déterminer les équations de Hamilton en utilisant les crochets dérivés ci-dessus. En effet,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \left\{x, \frac{p_x^2 + x^2y}{2}\right\} \Rightarrow \dot{x} = -x/2 \quad ; \quad \dot{y} = \{y, H\} = \left\{y, \frac{p_x^2 + x^2y}{2}\right\} \Rightarrow \dot{y} = -p_x/(2x) + y \\ \dot{p}_x &= \{p_x, H\} = \left\{p_x, \frac{p_x^2 + x^2y}{2}\right\} \Rightarrow \dot{p}_x = x/4 \quad ; \quad \dot{p}_y = \{p_y, H\} = \left\{p_y, \frac{p_x^2 + x^2y}{2}\right\} \Rightarrow \dot{p}_y = -x^2/2. \end{aligned}$$

Ces équations sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange, ce qui valide notre approche pour ce premier exemple.

Exemple 2

Considérons à présent un système avec contraintes décrit par le lagrangien

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z}$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont $\ddot{x} - \dot{y} = 0$; $\dot{x} + \dot{z} = 0$ et $\dot{y} = 0$, tandis que la solution analytique est la suivante

$$x(t) = at + b \quad , \quad y(t) = c \quad , \quad z(t) = -at + d,$$

où a, b, c et d sont des constantes d'intégration. Les moments conjugués sont $p_x = \dot{x}$; $p_y = x$ et $p_z = -y$. La transformation de Legendre nous donne le hamiltonien

$$H = \frac{p_x^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Avec ce hamiltonien, seuls les crochets qui font intervenir a sont accessibles. Pour résoudre ce problème, nous introduisons le nouveau lagrangien $\tilde{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} + xy - yz - \lambda x - \xi y$ où λ et ξ sont des paramètres réels qu'on va annuler vers la fin. Les nouvelles équations du mouvement sont donc $\ddot{x} - \dot{y} + \lambda = 0$; $x + \dot{z} + \xi = 0$ et $\dot{y} = 0$. La solution générale dans ce cas est

$$x(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b \quad , \quad y(t) = c \quad , \quad z(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 - at - \xi t + d.$$

Le hamiltonien devient maintenant $H = \frac{p_x^2}{2} + \lambda x + \xi y$ et en fonction des constantes d'intégration

$$H = \frac{a^2}{2} + \lambda x + \xi y.$$

A partir des équations de Hamilton, nous pouvons obtenir directement les crochets des différentes constantes d'intégration. En effet, nous avons

$$\dot{x} = \{x, H\} \Rightarrow -\lambda t + a = t\lambda\{a, b\} + \xi t\{a, c\} + a\{b, a\} + \xi\{b, c\}$$

$$\dot{z} = \{z, H\} \Rightarrow \lambda t - a - \xi = -t\lambda\{a, b\} - \xi t\{a, c\} + a\{d, a\} + \lambda t\{d, b\} + \xi\{d, c\}.$$

Par identification directe, on aura

$$\{a, b\} = \{a, d\} = -1 \quad \{c, d\} = 1 \quad \{a, c\} = \{b, c\} = \{b, d\} = 0.$$

Un calcul direct à l'aide de ces résultats nous permet d'avoir les crochets des variables dynamiques

$$\{x, p_x\} = \{y, z\} = \{z, p_z\} = 1$$

$$\{p_x, p_y\} = \{p_x, z\} = -1.$$

Ces crochets ne dépendent pas des paramètres λ et ξ , ils vont rester inchangés si nous mettons $\lambda = \xi = 0$. En d'autres termes, ils sont également les crochets associés au premier lagrangien car

$$\tilde{L} |_{\lambda=\xi=0} = \frac{\dot{x}^2}{2} + xy - yz - \lambda x - \xi y |_{\lambda=\xi=0} = \frac{\dot{x}^2}{2} + xy - yz.$$

Exemple 3

Nous considérons ici le problème simple d'une particule non relativiste de charge q_e et de masse m , influencée par un champ magnétique \vec{B}_0 orienté dans la direction z . Son lagrangien est

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q_e\vec{A}(x, y) \cdot \vec{v} - q_eV(x, y)$$

où $\vec{A}(x, y)$ est le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{B}_0$ et $V(x, y)$ le scalaire potentiel. Dans la limite du champ magnétique très intense, le terme de masse $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ peut être négligé et le lagrangien devient

$$L \simeq \frac{q_e B_0}{2}(xy - y\dot{x}) - q_eV(x, y).$$

Afin de simplifier les mathématiques du problème, nous considérons le cas $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$, ainsi

$$L \simeq \eta(xy - y\dot{x}) - \frac{1}{2}\xi(x^2 + y^2)$$

avec $\eta = \frac{q_e B_0}{2}$ et $\xi = qk$. Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\begin{cases} -2\eta\dot{y} + \xi x = 0 \\ 2\eta\dot{x} + \xi y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\xi^2}{4\eta^2}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\xi^2}{4\eta^2}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \\ y = -b \cos(\omega t) + a \sin(\omega t) \\ p_x = \eta(b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)) \\ p_y = \eta(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) \end{cases}$$

avec $\omega = \frac{\xi}{2\eta}$.

Le hamiltonien de ce système exprimé en termes des constantes d'intégration est

$$H = \frac{\xi}{2}(a^2 + b^2).$$

Les équations de Hamilton $\dot{x} = \{x, H\}$ et $\dot{y} = \{y, H\}$ donnent les égalités

$$-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t) = \{a, b\}b\xi \cos(\omega t) + \{b, a\}a\xi \sin(\omega t)$$

$$b\omega \sin(\omega t) + a\omega \cos(\omega t) = -\{b, a\}a\xi \cos(\omega t) + \{a, b\}b\xi \sin(\omega t).$$

Nous pouvons facilement lire le crochet des constantes d'intégration $\{a, b\} = \frac{\omega}{\xi}$. On en déduit directement les crochets des variables dynamiques qui ne sont pas des crochets de Poisson comme le montre le résultat ci-dessous

$$\{x, y\} = -\frac{1}{q_e B_0} \quad \{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \frac{1}{2} \quad \{p_x, p_y\} = \frac{1}{2}q_e B_0.$$

Exemple 4

Soit le lagrangien $L = \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2 - (x - y)$. Les équations d'Euler-Lagrange se réduisent à l'équation du mouvement $\ddot{x} - \ddot{y} = -1$, dont la solution générale est

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + at + b + \varepsilon(t) & ; & & y(t) &= \varepsilon(t) \\ p_x(t) &= -t + a & ; & & p_y(t) &= t - a \end{aligned}$$

où a et b sont des constantes d'intégration et $\varepsilon(t)$ une fonction arbitraire du temps, ce qui est une preuve de l'invariance de jauge de notre lagrangien. En effet, une petite variation $\delta\varepsilon$ va s'accompagner des variations infinitésimales $\delta x = \delta\varepsilon$ et $\delta y = \delta\varepsilon$, d'où la transformation de jauge $\tilde{x} = x + \alpha(t)$ et $\tilde{y} = y + \alpha(t)$ où $\alpha(t) = \delta\varepsilon$.

Pour fixer la jauge, utilisons par exemple la condition supplémentaire

$$y(t) + \frac{1}{2}p_y(t) \cdot p_x(t) = 0$$

ce qui va se traduire par la solution

$$\begin{aligned} x(t) &= b - \frac{1}{2}a^2 & ; & & y(t) &= \frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2 \\ p_x(t) &= -t + a & ; & & p_y(t) &= t - a. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Maintenant, le hamiltonien $H = \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)$ aura l'expression

$$H = \frac{a^2}{2} + b.$$

L'équation $\frac{dp_x}{dt} = \{p_x, H\}$ va nous donner le crochet $\{a, b\}$ directement. En effet,

$$-1 = \{-t + a, \frac{1}{2}a^2 + b\} \Rightarrow -1 = \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} = -1.$$

Calculons maintenant les crochets fondamentaux à l'aide de (2.5.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= \{b - \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2\} = -t\{b, a\} + a\{b, a\} = -t + a = p_x = -p_y \\ \{x, p_x\} &= \{b - \frac{1}{2}a^2, -t + a\} = \{b, a\} = 1 \\ \{x, p_y\} &= \{b - \frac{1}{2}a^2, t - a\} = -\{b, a\} = -1 \\ \{y, p_x\} &= \{\frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2, -t + a\} = 0 \\ \{y, p_y\} &= \{\frac{1}{2}t^2 - at + \frac{1}{2}a^2, t - a\} = 0 \\ \{p_x, p_y\} &= \{-t + a, t - a\} = 0. \end{aligned}$$

Avec ces crochets, les équations de Hamilton vont nous donner les bonnes équations d'évolution dans le temps :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} \Rightarrow \dot{x} = \{x, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{x} = p_x\{x, p_x\} - \{x, y\} \Rightarrow \dot{x} = p_x - p_x \Rightarrow \dot{x} = 0 \\ \dot{y} &= \{y, H\} \Rightarrow \dot{y} = \{y, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{y} = p_x\{y, p_x\} + \{y, x\} \Rightarrow \dot{y} = -p_x \end{aligned}$$

$\dot{p}_x = \{p_x, H\} \Rightarrow \dot{p}_x = \{p_x, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{p}_x = \{p_x, x\} - \{p_x, y\} \Rightarrow \dot{p}_x = -1$
 $\dot{p}_y = \{p_y, H\} \Rightarrow \dot{p}_y = \{p_y, \frac{1}{2}p_x^2 + (x - y)\} \Rightarrow \dot{p}_y = p_x\{p_y, p_x\} + \{p_y, x\} - \{p_y, y\} \Rightarrow \dot{p}_y = 1.$
 Ces équations sont vérifiées par la solution (2.5.1), ce qui montre que nos crochets sont les bons.

Exemple 5

Dans le cas du lagrangien $L = \frac{1}{2}(y\dot{x} + x\dot{y})^2$, la solution générale s'obtient en posant $Q = xy \Rightarrow \dot{Q} = y\dot{x} + x\dot{y}$ et le résultat sera

$$\begin{aligned} x(t) &= (at + b)\varepsilon(t) & ; & & y(t) &= \frac{1}{\varepsilon(t)} \\ p_x(t) &= \frac{a}{\varepsilon(t)} & ; & & p_y(t) &= (a^2t + ab)\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

où $\varepsilon(t)$ une fonction arbitraire du temps, signe de la symétrie de jauge qu'on va fixer avec la condition supplémentaire $y - 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) = 1$. La solution (2.5.2) devient alors

$$\begin{aligned} x(t) &= at + b & ; & & y(t) &= 1 \\ p_x(t) &= a & ; & & p_y(t) &= a^2t + ab. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Remplaçons cette solution dans $H = \frac{1}{2}\frac{p_x^2}{y^2}$ afin d'avoir son expression en fonction de a et b :

$$H = \frac{a^2}{2}. \quad (2.5.4)$$

L'équation $\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$ va nous donner directement le crochet $\{a, b\}$. En d'autre termes,

$$a = \{at + b, \frac{1}{2}a^2\} \Rightarrow a = a\{b, a\} \Rightarrow \{b, a\} = 1 \Rightarrow \{a, b\} = -1.$$

Calculons maintenant les crochets fondamentaux à partir de (2.5.3). En effet,

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= \{at + b, 1\} = 0; \\ \{x, p_x\} &= \{at + b, a\} = \{b, a\} = 1; \\ \{x, p_y\} &= \{at, ab\} + \{b, a^2t\} + \{b, ab\} = at\{a, b\} + 2at\{b, a\} + b\{b, a\} = at + b = x; \\ \{y, p_x\} &= \{1, a\} = 0; \\ \{y, p_y\} &= \{1, a^2t + ab\} = 0 \\ \{p_x, p_y\} &= \{a, a^2t + ab\} = a\{a, b\} = -a = -p_x. \end{aligned}$$

Avant de passer à la section suivante, procédons à une quantification canonique. Les opérateurs associés aux variables fondamentales doivent satisfaire les commutateurs

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x] &= i\hbar & ; & & [\hat{x}, \hat{p}_y] &= i\hbar\hat{x} & ; & & [\hat{p}_x, \hat{p}_y] &= -i\hbar\hat{p}_x \\ [\hat{x}, \hat{y}] &= [\hat{y}, \hat{p}_x] &= [\hat{y}, \hat{p}_y] &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Il est alors possible de réaliser ces commutateurs avec le choix

$$\hat{x} = x \quad \hat{y} = 1 \quad \hat{p}_x = -i\hbar\partial_x \quad \hat{p}_y = -i\hbar x\partial_x - i\hbar/2. \quad (2.5.6)$$

Comme $H = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{y^2}$, l'équation de Schrödinger sera de la forme

$$i\hbar \partial_t \Psi = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_x^2}{\hat{y}^2} \Psi \quad (2.5.7)$$

d'où la forme explicite

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = -\frac{1}{2} \hbar^2 \partial_x^2 \Psi(t, x). \quad (2.5.8)$$

2.6 Détermination de lagrangiens à partir des équations de mouvement

Toujours dans le même esprit d'utilisation des constantes d'intégration, nous présentons ici une approche de résoudre le problème inverse du calcul des variations [5]. Autrement dit, nous allons essayer de donner un moyen de déterminer le lagrangien d'un système en connaissant ses équations de mouvement.

Il est bien connu qu'un système d'équations différentielles peut toujours être ramené de façon équivalente à un système de premier ordre par l'introduction d'un nombre suffisant de nouvelles variables, qui sont des fonctions des dérivées des variables initiales. Un exemple familier de cette procédure est celui de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique où les moments sont les nouvelles variables, un autre choix possible est de prendre les vitesses elles-mêmes comme de nouvelles variables. Les objets centraux de notre formulation sont les constantes d'intégration associées à l'ensemble de ces équations différentielles qui seront utilisées dans le but de déterminer des lagrangiens linéaires par rapport aux vitesses.

Soit donc un système différentiel constitué de N équations du deuxième degré

$$\ddot{x}_i = f_i(x, \dot{x}, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6.1)$$

Pour le transformer au premier ordre, introduisons les nouvelles variables $y_i = \dot{x}_i$, $i = 1, \dots, N$ telles que le système précédent devient

$$\dot{x}_i = y_i \quad , \quad \dot{y}_i = f_i(x, y, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6.2)$$

On voit bien qu'on a abouti à un système à $2N$ équations du premier ordre. Posons $x_i = Z_{2i-1}$, $i = 1, \dots, N$ et $y_i = Z_{2i}$, $i = 1, \dots, N$. Maintenant, notre système va prendre la forme réduite

$$\dot{Z}_I = F_I(Z, t) \quad I = 1, \dots, 2N \quad (2.6.3)$$

où $F_{2i-1} = f_i(x, y, t)$ et $F_{2i} = y_i$ pour $i = 1, \dots, N$. Dans le cas où ce système est intégrable, sa solution générale va dépendre de $2N$ constantes d'intégration C_I , $I = 1, \dots, 2N$ comme suit :

$$Z_I = Z_I(C_1, C_2, \dots, C_{2N}, t) \quad I = 1, \dots, 2N. \quad (2.6.4)$$

Pour déterminer un lagrangien associé à ce système, il faut être capable d'inverser ces relations par rapport aux $2N$ constantes d'intégration C_I , $I = 1, \dots, 2N$

$$C_I = C_I(Z_1, Z_2, \dots, Z_{2N}, t) \quad I = 1, \dots, 2N. \quad (2.6.5)$$

Supposons maintenant que les C_I sont des variables à part entière de telle sorte que l'inversion précédente définisse une transformation des variables Z_I vers C_I , d'où

$$\dot{C}_I = \sum_{J=1}^{2N} \frac{\partial C_I}{\partial Z_J} \dot{Z}_J + \frac{\partial C_I}{\partial t}. \quad (2.6.6)$$

A ce stade, exploitons le fait qu'il est toujours possible de trouver un lagrangien $L(C, \dot{C}, t)$ linéaire par rapport aux \dot{C}_I tel que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{C}_I} \right) - \frac{\partial L}{\partial C_I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{C}_I = 0 \quad I = 1, \dots, 2N. \quad (2.6.7)$$

On voit bien que les C_I , $I = 1, \dots, 2N$ sont redevenus des constantes d'intégrations à nouveau. Comme les équations d'Euler-Lagrange sont invariantes sous une transformation de coordonnées généralisées, il suffit de remplacer les C_I et les \dot{C}_I par leurs expressions (2.6.5) et (2.6.6) dans le lagrangien $L(C, \dot{C}, t)$ pour avoir un lagrangien associé aux équations (2.6.4). Avec cette méthode, pour chaque choix des constantes d'intégration, correspond un lagrangien particulier.

Comme exemple d'application, soit le système suivant

$$\ddot{x} = -\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (2.6.8)$$

La solution générale est

$$\begin{cases} x = -be^{-t} + a \\ y = be^{-t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = x + y \\ b = ye^t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{a} = \dot{x} + \dot{y} \\ \dot{b} = (\dot{y} + y)e^t. \end{cases} \quad (2.6.9)$$

Il est possible de choisir le lagrangien linéaire de la forme $L = a\dot{b}$, car

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{b}} - \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{b} = 0 \\ \dot{a} = 0. \end{cases} \quad (2.6.10)$$

En remplaçant a et b par leurs expressions en fonction de x et y , nous aurons le lagrangien linéaire par rapport aux vitesses

$$L = (x + y)(\dot{y} + y)e^t = e^t((x + y)\dot{y} + xy + y^2). \quad (2.6.11)$$

Effectivement,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = -y \\ \dot{x} = y. \end{cases} \quad (2.6.12)$$

2.7 Lagrangien de Hojman-Urrutia

La motivation physique pour l'étude de la théorie associée à ce lagrangien remonte à la publication de Hojman et Urrutia [5], où ils ont construit un lagrangien d'un système d'équations différentielles du second ordre pour lequel, en principe, il n'existe pas de lagrangien de second ordre (selon la classification bien connue de Douglas [4]). Le système en question est formé de ces deux équations différentielles

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + y = 0 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Pour trouver un lagrangien du premier ordre, introduisons tout d'abord les nouvelles variables définies par $\dot{x} = z$ et $\dot{y} = w$ dans le but réduire au premier ordre le système précédent.

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = -w \\ \dot{y} = w \\ \dot{w} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \sin(t) + b \cos(t) + ct + d \\ y = a \cos(t) + b \sin(t) \\ z = -a \cos(t) - b \sin(t) + c \\ w = -a \sin(t) + b \cos(t). \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Les constantes d'intégration a , b , c et d peuvent être écrite explicitement en termes de x, y, z, w et t sous la forme

$$\begin{cases} a = y \cos(t) - w \sin(t) \\ b = y \sin(t) + w \cos(t) \\ c = y + z \\ d = x - w - ct. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Appliquons maintenant l'approche de la section précédente à ce système. En effet, un lagrangien possible est

$$L = \frac{1}{2}(-b\dot{a} + a\dot{b} + c\dot{d} - d\dot{c}) \quad (2.7.4)$$

En termes des variables initiales x, y, z, w et de leurs dérivées par rapport au temps, on aboutit au lagrangien de Hojman-Urrutia

$$L = (y + z)\dot{x} + w\dot{z} + \frac{1}{2}(w^2 - 2yz - z^2). \quad (2.7.5)$$

Ce lagrangien est singulier et présente des contraintes. Il a été étudié par l'intermédiaire de l'approche de Dirac dans [7] et par l'approche Faddeev-Jackiw dans [6]. Nous allons retrouver les mêmes résultats au moyen de la méthode de CI, qui se révèle être beaucoup plus simple.

Premier cas : w est une variable

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} \dot{y} + \dot{z} = 0 \\ 0 = \dot{x} - z \\ \dot{w} = \dot{x} - y - z \\ 0 = \dot{z} + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = w \\ \dot{z} = -w \\ \dot{w} = -y. \end{cases} \quad (2.7.6)$$

A l'aide de la solution (2.7.2), le hamiltonien aura l'expression

$$H = -\frac{1}{2}(w^2 - 2yz - z^2) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2). \quad (2.7.7)$$

A partir de l'équation de Hamilton $\dot{x} = \{x, H\}$, nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} -a \cos(t) - b \sin(t) + c &= (-\{b, a\}a + \{b, c\}c) \cos(t) + (\{a, b\}b - \{a, c\}c) \sin(t) \\ &+ (-\{c, a\}a - \{c, b\}b) t + (-\{d, a\}a - \{d, b\}b + \{d, c\}c) \end{aligned}$$

et de la même manière pour y , on aura

$$b \cos(t) - a \sin(t) = (-\{a, b\}b + \{a, c\}c) \cos(t) + (-\{b, a\}a + \{b, c\}c) \sin(t).$$

Par identification directe, on aboutit aux relations

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{c, d\} = -1 \\ \{a, c\} &= \{a, d\} = \{b, c\} = \{b, d\} = 0. \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Ces crochets avec la solution (2.7.2) vont nous permettre de déduire les crochets des variables fondamentales

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= \{z, w\} = 1 & \{y, w\} &= -1 \\ \{x, z\} &= \{x, w\} = \{y, z\} = 0. \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Il est très intéressant ici de procéder à une quantification canonique, où les opérateurs associés aux variables fondamentales doivent satisfaire les commutateurs

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{y}] &= [\hat{z}, \hat{w}] = i\hbar & [\hat{y}, \hat{w}] &= -i\hbar \\ [\hat{x}, \hat{z}] &= [\hat{x}, \hat{w}] = [\hat{y}, \hat{z}] & &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Il est alors possible de choisir de tels opérateurs comme suit

$$\hat{x} = x \quad \hat{y} = -i\hbar\partial_x - z \quad \hat{z} = z \quad \hat{w} = -i\hbar\partial_z. \quad (2.7.11)$$

Comme $H = -\frac{1}{2}(\hat{w}^2 - 2z\hat{y} - \hat{z}^2)$, l'équation de Schrödinger sera de la forme

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{1}{2}(\hat{w}^2 - 2z\hat{y} - \hat{z}^2)\Psi \quad (2.7.12)$$

d'où la forme explicite

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, x, z) = \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi(t, x, z) - i\hbar z\frac{\partial}{\partial x}\Psi(t, x, z) - \frac{z^2}{2}\Psi(t, x, z). \quad (2.7.13)$$

Deuxième cas : w est une constante

Ce cas avec $w = k = \text{constante}$, étudié aussi par Barcelos [6] dans l'approche de Faddeev-Jackiw, est intéressant car il conduit à une théorie de jauge selon Kulshreshtha [7], qui a fait l'étude dans l'approche de Dirac. Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \dot{x} - z = 0 \\ \dot{x} - z - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = at + b \\ y = 0 \\ z = a. \end{cases} \quad (2.7.14)$$

Cette solution ne contient pas de fonctions arbitraires du temps, donc il n'y a aucune symétrie de jauge, conclusion partagée avec Barcelos. Le hamiltonien se réduit à la forme

$$H = -\frac{1}{2}(k^2 - 2yz - z^2) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}a^2 \quad (2.7.15)$$

et en utilisant l'équation $\dot{x} = \{x, H\}$, il est facile d'obtenir directement le crochet

$$\{a, b\} = -1.$$

Après un calcul facile et direct, on obtient les crochets suivants :

$$\{x, z\} = 1 \quad \{x, y\} = \{y, z\} = 0. \quad (2.7.16)$$

Cette fois-ci, afin de faire une quantification canonique, on va choisir les opérateurs $\hat{x} = x$, $\hat{y} = 0$ et $\hat{z} = -i\hbar\partial_x$, et l'équation de Schrödinger sera

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t, x) - \frac{k^2}{2}\Psi(t, x). \quad (2.7.17)$$

Avant de terminer ce chapitre, une discussion s'impose : nous avons vu tout au long des sections précédentes que la méthode CI s'applique avec succès aux systèmes exactement solubles, d'où la possibilité de nous reprocher, à première vue, le fait qu'elle repose sur la solution générale contrairement aux deux autres approches. C'est vrai qu'avec les méthodes de Dirac et Faddeev-Jackiw, il est possible d'avoir les crochets des variables fondamentales sans avoir besoin de résoudre les équations du mouvement. Cependant, une fois que le système est quantifié, il faut quand même résoudre les équations de Heisenberg, or pratiquement, tous les systèmes physiques à part les systèmes libres n'ont pas de solutions analytiques, d'où le besoin de faire appel à la théorie des perturbations. Ce que nous proposons dans notre approche est d'utiliser la solution libre qui est accessible pour quantifier à l'aide des constantes d'intégration, ensuite d'introduire un développement perturbatif pour déterminer la correction sur les crochets [10]. Dans les deux cas, cela revient à la même chose, car avoir les crochets exactes ne sert pas à grand-chose quand on n'a pas la solution exacte, et dans le cas contraire, la méthode des constantes d'intégration peut nous donner les crochets exactes. L'essentiel, c'est que les différentes approches quand elles sont applicables aboutissent aux mêmes résultats.

Méthode des Constantes d'Intégration en Théorie des Champs

La première quantification de la mécanique non relativiste de la particule ponctuelle consiste à remplacer sa position x et son impulsion p par des opérateurs \hat{x} et \hat{p} agissant sur un espace de Hilbert. Les règles de commutation de ces opérateurs sont établies par analogie avec mécanique analytique à l'aide des crochets de Poisson. Les éléments ou vecteurs de l'espace de Hilbert décrivent les configurations possibles ou les états de ce système.

La seconde quantification consiste à traiter les champs $\Psi(x, t)$, décrivant l'état du système dans la première quantification, non comme une fonction d'onde mais comme des opérateurs relatifs à ce système qui est alors quantifié une seconde fois. Ces opérateurs décrivant des champs quantiques sont des opérateurs de création ou d'annihilation de particules. L'espace de Hilbert sur lequel agissent ces opérateurs est ce qu'on appelle un espace de Fock, c'est-à-dire un empilement infini d'espaces de Hilbert, communiquant par l'intermédiaire des opérateurs champs et comportant le vide, espace à zéro particule, l'espace à une particule, l'espace à deux particules, ...etc.

Nous présentons ici une perspective différente de la quantification des champs libres sur la base de la méthode des constantes d'intégration que nous avons développée dans le chapitre qui précède. L'idée est qu'au lieu d'appliquer les règles de quantification (pour les bosons et les fermions) basée sur le principe de correspondance entre les champs et leurs quantités de mouvement, nous supposons simplement la validité des équations de Heisenberg des opérateurs. Ensuite, nous traitons les opérateurs de création et d'annihilation de la même manière que les constantes d'intégration des équations classiques du mouvement.

3.1 Champ scalaire

Premièrement, nous allons discuter la quantification du champ de Klein-Gordon, qui est un champ répondant à l'équation (3.1.2). il s'agit de l'équation relativiste qui décrit des particules de spin 0 (par exemple les pions et le boson de Higgs).

La quantification canonique de ce champ par la méthode des constantes d'intégration se fera comme suit : partant de la solution de l'équation de d'Euler-Lagrange obtenue à partir de la densité lagrangienne, nous allons passer au formalisme hamiltonien en définissant le moment conjugué, et pour déterminer les commutateurs indispensables à la quantification, nous imposons au champ de Klein-Gordon de vérifier l'équation de Heisenberg (aux lieu des équations de Hamilton car nous travaillerons directement dans le contexte quantique).

Le champ réel de Klein-Gordon ϕ de masse m est décrit par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (3.1.1)$$

où nous avons posé $\hbar = c = 1$. L'équation d'Euler-Lagrange $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ donne l'équation de mouvement

$$\partial_t^2 \phi - \Delta \phi + m^2 \phi = 0 \quad (3.1.2)$$

dont la solution de cette équation est

$$\phi = \int d\vec{k} (f_k(x) a(\vec{k}) + f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k})) \quad (3.1.3)$$

où $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0 t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Les $a(\vec{k})$ sont des opérateurs et les $a^\dagger(\vec{k})$ leurs opérateurs adjoints. Ces derniers ne sont que les constantes d'intégration de la solution générale à laquelle on a imposé la condition $\phi^\dagger = \phi$ comme première étape de la quantification.

Le seul moment conjugué de la théorie est

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} = i \int d\vec{k} (-f_k(x) k_0 a(\vec{k}) + f_k^*(x) k_0 a^\dagger(\vec{k})). \quad (3.1.4)$$

Maintenant, on peut écrire l'opérateur hamiltonien $H = \int d\vec{x} (\Pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L})$ à l'aide de la solution précédente sous la forme

$$H = \int d\vec{k} k_0 \frac{1}{2} (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})) = \int d\vec{k} \frac{1}{2} k_0 N(\vec{k}). \quad (3.1.5)$$

Puisque nous allons travailler directement dans le contexte quantique, nous ferons appel à l'équation de Heisenberg $\dot{\phi} = -i[\phi, H]$, sachant que

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -i \int d\vec{k} (f_k(x) k_0 a(\vec{k}) - f_k^*(x) k_0 a^\dagger(\vec{k})) \\ -i[\phi, H] &= -i \int d\vec{k} \left[f_k(x) a(\vec{k}) + f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k}), H \right].\end{aligned}\quad (3.1.6)$$

Par identification directe on obtient les relations

$$k_0 a(\vec{k}) = [a(\vec{k}), H] \quad , \quad -k_0 a^\dagger(\vec{k}) = [a^\dagger(\vec{k}), H]. \quad (3.1.7)$$

où $H = \frac{1}{2} \int d\vec{k} k_0 N(\vec{k})$, ce qui nous donne ce résultat

$$\begin{aligned}\int d\vec{k}' \delta(\vec{k} - \vec{k}') k_0' a(\vec{k}') &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' k_0' [a(\vec{k}), N(\vec{k}')] \\ \int d\vec{k}' \delta(\vec{k} - \vec{k}') k_0' a^\dagger(\vec{k}') &= -\frac{1}{2} \int d\vec{k}' k_0' [a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')] \end{aligned}\quad (3.1.8)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}[a(\vec{k}), N(\vec{k}')] &= 2\delta(\vec{k} - \vec{k}') a(\vec{k}') \\ [a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')] &= -2\delta(\vec{k} - \vec{k}') k_0' a^\dagger(\vec{k}').\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

Comme $N(\vec{k}) = \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right)$, on peut faire ce développement

$$\begin{aligned}[a(\vec{k}), N(\vec{k}')] &= [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] a(\vec{k}') + a^\dagger(\vec{k}') [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] \\ &\quad + a(\vec{k}') [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + a^\dagger(\vec{k}') [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] \end{aligned}\quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned}[a^\dagger(\vec{k}), N(\vec{k}')] &= [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] a(\vec{k}') + a^\dagger(\vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] \\ &\quad + a(\vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] a^\dagger(\vec{k}').\end{aligned}\quad (3.1.11)$$

Par une identification directe de (3.1.10) et (3.1.11) avec (3.1.9), on conclut premièrement que

$$\begin{aligned}[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= 0 \\ [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= 0\end{aligned}\quad , \quad (3.1.12)$$

et

$$\begin{aligned}2\delta(\vec{k} - \vec{k}') a(\vec{k}') &= [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] a(\vec{k}') + a(\vec{k}') [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] \\ -2\delta(\vec{k} - \vec{k}') a^\dagger(\vec{k}') &= a^\dagger(\vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] a^\dagger(\vec{k}').\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

Le résultat final est

$$\begin{aligned}[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= -\delta(\vec{k} - \vec{k}').\end{aligned}\quad (3.1.14)$$

On a ainsi obtenu les relations de commutation relatives aux opérateurs de création et d'annihilation bien connues lors de la quantification du champ de Klein-Gordon, ce qui valide la méthode CI pour ce première exemple.

3.2 Champ spinoriel

Comme le spectre mono-particule n'a pas de limite inférieure à cause des énergies négatives qui ressortent de l'équation de Dirac, toute tentative visant à quantifier la théorie avec des relations de commutation canoniques aura le problème que l'énergie totale du système ne soit pas limité par le bas. En d'autres termes, les "bosons Dirac" ne disposent pas d'un état fondamental et le système est instable puisque nous pouvons disposer autant de bosons que nous souhaitons dans des états avec une énergie arbitrairement grande, mais négative. Dirac a réalisé que la façon simple et élégante de résoudre ce problème est d'exiger aux électrons d'obéir au principe d'exclusion de Pauli car dans ce cas, il y aura un état de seuil naturel et stable. Toutefois, cette hypothèse implique que la théorie de Dirac doit être quantifiée comme une théorie de fermions à l'aide de relations d'anticommutation canonique.

Considérons le champ de Dirac Ψ , dont la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.2.1)$$

où γ^μ sont les matrices de Dirac. Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\Psi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad (3.2.2)$$

et

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\bar{\Psi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0. \quad (3.2.3)$$

La solution générale de ces équations est bien connue

$$\Psi = \int \sum_{s=1}^2 d\vec{k} (f_k(x) b_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) + f_k^*(x) d_s^\dagger(\vec{k}) v_s(\vec{k})). \quad (3.2.4)$$

où $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ tandis que $u_s(\vec{k})$ et $v_s(\vec{k})$ sont les bispineurs habituels dont les expressions sont

$$u_s(k) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{\omega_{\vec{k}} + m} \chi_s \end{pmatrix} \quad ; \quad v_s(k) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{\omega_{\vec{k}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

où $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sachant que les matrices $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ sont les matrices de Pauli. Les $b_s(\vec{k})$ et les $d_s(\vec{k})$ sont des opérateurs qui jouent le rôle des constantes de mouvement dans le cas classique (avant quantification).

Maintenant passons à la formulation hamiltonienne en commençant par les moments conjugués qui sont donnés par $\Pi_\Psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Psi} = i\bar{\Psi}\gamma^0$ et $\Pi_{\bar{\Psi}} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\bar{\Psi}} = 0$. Le hamiltonien

H se réduit après simplification à la forme

$$H = \int d\vec{x} \left(\Pi_{\Psi} \dot{\Psi} + \Pi_{\bar{\Psi}} \dot{\bar{\Psi}} - \mathcal{L} \right) = \int d\vec{x} i \Psi^{\dagger} \partial_t \Psi. \quad (3.2.6)$$

En fonction de la solution précédente, il devient

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=1}^2 (b_s^{\dagger}(\vec{k}) b_s(\vec{k}) - d_s(\vec{k}) d_s^{\dagger}(\vec{k})) = \int d\vec{k} k_0 \sum_{s=1}^2 N_s(\vec{k}). \quad (3.2.7)$$

A ce stade, faisons appel aux équations de Heisenberg

$$\dot{\Psi} = -i[\Psi, H]. \quad (3.2.8)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -i \int \sum_{s=1}^2 d\vec{k} \left(k_0 f_k(x) b_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) - k_0 f_k^*(x) d_s^{\dagger}(\vec{k}) v_s(\vec{k}) \right) \\ -i[\Psi, H] &= -i \int \sum_{s=1}^2 d\vec{k} \left(f_k(x) u_s(\vec{k}) [b_s(\vec{k}), H] + f_k^*(x) v_s(\vec{k}) [d_s^{\dagger}(\vec{k}), H] \right). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Suite à une identification directe, on obtient les relations

$$k_0 b_s(\vec{k}) = [b_s(\vec{k}), H] \quad , \quad -k_0 d_s^{\dagger}(\vec{k}) = [d_s^{\dagger}(\vec{k}), H]. \quad (3.2.10)$$

Mais $H = \int \sum_{s'=1}^2 d\vec{k}' k_0' N_{s'}(\vec{k}')$, d'où

$$\begin{aligned} \int \sum_{s'=1}^2 k_0' b_{s'}(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= \int \sum_{s'=1}^2 d\vec{k}' k_0' [b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')], \\ - \int \sum_{s'=1}^2 k_0' d_{s'}^{\dagger}(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= \int \sum_{s'=1}^2 d\vec{k}' k_0' [d_s^{\dagger}(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')]. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

On en déduit directement que

$$\begin{aligned} b_{s'}(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= [b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')], \\ -d_{s'}^{\dagger}(\vec{k}') \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= [d_s^{\dagger}(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')]. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Comme on l'a mentionné ci-dessus, il faut prendre en considération que le champ spinoriel décrit des fermions obéissant au principe d'exclusion de Pauli, donc à la statistique de Fermi-Dirac. Pour aller de l'avant dans notre raisonnement, c'est le moment d'introduire des anticommutateurs à travers la relation $[A, BC] = -B[A, C]_+ + [A, B]_+ C$ où

$[A, B]_+ = AB + BA$. Sachant que $N_{s'}(\vec{k}') = b_s^\dagger(\vec{k}')b_{s'}(\vec{k}') - d_{s'}(\vec{k}')d_{s'}^\dagger(\vec{k}')$, on aura

$$\begin{aligned} [b_s(\vec{k}), N_{s'}(\vec{k}')] &= -b_s^\dagger(\vec{k}') [b_s(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')]_+ + [b_s(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ b_{s'}(\vec{k}') \\ &\quad + d_{s'}(\vec{k}') [b_s(\vec{k}), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ - [b_s(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')]_+ d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), N_{s'}(\vec{k}')] &= -b_s^\dagger(\vec{k}') [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), b_{s'}(\vec{k}')]_+ + [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ b_{s'}(\vec{k}') \\ &\quad + d_{s'}(\vec{k}') [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ - [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ d_{s'}^\dagger(\vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Par comparaison directe avec (3.2.12), on obtient les anticommutateurs ci-dessous

$$\begin{aligned} [b_s(\vec{k}), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ &= [b_s(\vec{k}), d_{s'}(\vec{k}')]_+ = [b_s(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')]_+ = 0 \\ [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), b_{s'}(\vec{k}')]_+ &= [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ = [d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), d_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ = 0 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

et

$$[b_s(\vec{k}), b_{s'}^\dagger(\vec{k}')]_+ = \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.2.16)$$

$$[d_{s'}^\dagger(\vec{k}'), d_{s'}(\vec{k}')]_+ = \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.2.17)$$

Ces règles de quantification sont exactement identiques aux résultats de la quantification canonique du champ de Dirac libre. Pour la deuxième fois, la méthode CI fonctionne très bien en théorie quantique des champs.

3.3 Champ vectoriel

Le champ électromagnétique est régi par un ensemble d'équations appelées les équations de Maxwell dont la quantification donne les photons de spin 1. En général, les champs vectoriels d'écrivent des états de spin entier, obéissant à la statistique de Bose-Einstein. L'application directe et naïve de la procédure de quantification canonique au champ libre de Maxwell conduit à des difficultés à cause de la symétrie de jauge accompagnée de la présence de deux contraintes ($\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^0} = 0$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$). Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode CI à ce champ afin de déterminer les bonnes relations de commutation nécessaires à la quantification canonique.

Rappelons que dans le cas du champ de Maxwell, la densité lagrangienne $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sachant que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ et $A^\mu(\vec{A}, A^0)$ est le quadrivecteur potentiel électromagnétique ($c = 1$). Les équations du mouvement s'obtiennent à l'aide des équations d'Euler-Lagrange comme suit

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \iff \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.3.1)$$

Pour fixer la jauge, on va utiliser les conditions de coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ et $A^0 = 0$, ce qui réduit les équations du mouvement à la forme $\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = 0$. Dans ce cas, la solution générale peut s'écrire comme étant

$$A^\mu = \int \sum_{\lambda=1}^2 d\vec{k} \varepsilon_\lambda^\mu(k) (f_k(x) a_\lambda(\vec{k}) + f_k^*(x) a_\lambda^\dagger(\vec{k})) \quad (3.3.2)$$

où $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}$, $kx = -\vec{k}\vec{x} + k_0t$ et $\omega_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = |\vec{k}|$ ($\hbar = c = 0$ et $m = 0$). Les $a_\lambda(\vec{k})$ sont des opérateurs et les $a_\lambda^\dagger(\vec{k})$ leurs opérateurs adjoints. Les deux quadrivecteurs $\varepsilon_\lambda^\mu(k) = (\varepsilon_\lambda^0(k), \vec{\varepsilon}_\lambda(k))$, $\lambda = 1, 2$ vérifient les relations

$$\varepsilon_\lambda^0(k) = 0 \quad \vec{\varepsilon}_\lambda(k) \cdot \vec{k} = 0 \quad \vec{\varepsilon}_\lambda(k) \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \vec{\varepsilon}_1(k) \wedge \vec{\varepsilon}_2(k) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (3.3.3)$$

Sachant que les moments conjugués sont $\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}$, le hamiltonien sera

$$H = \int d\vec{x} (\Pi^\mu A_\mu - \mathcal{L}) = \int \frac{d\vec{x}}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (3.3.4)$$

où $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$. A l'aide de la solution (3.3.2), il aura l'expression ci-dessous

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{2} (a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda^\dagger(\vec{k})) = \int d\vec{k} k_0 N_\lambda(\vec{k}).$$

Afin d'utiliser les équations de Heisenberg

$$\dot{A}^\mu = -i[A^\mu, H], \quad (3.3.5)$$

calculons d'abord \dot{A}^μ et $-i[A^\mu, H]$. En effet,

$$\begin{aligned} \dot{A}^\mu &= -i \int d\vec{k} k_0 \varepsilon_\lambda^\mu(k) \sum_{\lambda=1}^2 (f_k(x) a_\lambda(\vec{k}) + f_k^*(x) a_\lambda^\dagger(\vec{k})). \\ -i[A^\mu, H] &= -i \int d\vec{k} \varepsilon_\lambda^\mu(k) \sum_{\lambda=1}^2 ([f_k(x) a_\lambda(\vec{k}), H] - [f_k^*(x) a_\lambda^\dagger(\vec{k}), H]). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Par identification directe, on trouve

$$k_0 a_\lambda(\vec{k}) = [a_\lambda(\vec{k}), H] \quad , \quad -k_0 a_\lambda^\dagger(\vec{k}) = [a_\lambda^\dagger(\vec{k}), H] \quad (3.3.7)$$

sachant que $H = \frac{1}{2} \int d\vec{k}' \sum_{\lambda=1}^2 k'_0 N_{\lambda'}(\vec{k}')$, d'où

$$\begin{aligned} \int d\vec{k}' \sum_{\lambda=1}^2 k'_0 a_{\lambda'}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' \sum_{\lambda=1}^2 k'_0 [a_{\lambda}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] \\ - \int d\vec{k}' \sum_{\lambda=1}^2 k'_0 a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' \sum_{\lambda=1}^2 k'_0 [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] . \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

On en déduit directement que

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] &= 2a_{\lambda'}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] &= -2a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Utilisons maintenant le fait que $N_{\lambda}(\vec{k}) = \left(a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) a_{\lambda}(\vec{k}) + a_{\lambda}(\vec{k}) a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \right)$ pour développer les commutateurs précédents

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] &= [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] a_{\lambda'}(\vec{k}') + a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] + \\ & a_{\lambda'}(\vec{k}') [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] + [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), N_{\lambda'}(\vec{k}')] &= [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] a_{\lambda'}(\vec{k}') + a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] + \\ & a_{\lambda'}(\vec{k}') [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] + [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Par identification de (3.3.9) et (3.3.10), on déduit que

$$[a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] = [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] = 0, \quad (3.3.12)$$

et

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] a_{\lambda'}(\vec{k}') + a_{\lambda'}(\vec{k}') [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] &= 2a_{\lambda'}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] + [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') &= -2a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] &= -\delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Il s'agit bel et bien des commutateurs des opérateurs de création et d'annihilation bien connus en théorie des champs lors de la quantification du champ de l'électromagnétique. Ce résultat est un exemple en plus qui prouve la validité de méthode des constantes d'intégration (CI).

En fin de ce chapitre, nous pouvons estimer que notre approche a bien fait ses preuves vu sa simplicité et son succès dans la quantification canonique des champs libres et cela en surmontant les difficultés liées à la présence des contraintes, à la symétrie de jauge et aux différences entre les bosons et les fermions.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la méthode des constantes d'intégration (CI) élaborée dans le but de déterminer les crochets indispensables à la quantification canonique des systèmes physiques décrits par des lagrangiens singuliers. Nous avons à cette occasion, développé une approche consistante permettant de prendre en considération le fait que ces systèmes sont sujets à des contraintes définies dans l'espace des phases. En effet, la nature singulière d'un lagrangien, donne naissance à certaines relations entre les variables de l'espace des phases (coordonnées et moments conjugués) qui ne font pas intervenir les vitesses que nous appelons contraintes.

La méthode CI repose complètement sur la connaissance de la solution générale des équations d'évolution du système qu'on veut quantifier. Nous avons vu que nous pouvons être en présence de deux cas : le premier, c'est quand cette solution est bien déterminée, et le deuxième, c'est quand des fonctions arbitraires apparaissent dans la solution. Cette situation est due à une invariance de jauge qu'il faut d'abord fixer avec des conditions supplémentaires sur les variables de l'espace des phases.

L'idée de base de la méthode CI consiste à utiliser les équations de Hamilton afin de calculer les crochets des constantes d'intégration par une identification simple et directe sans formalisme approprié, contrairement aux approches de Dirac et de Faddeev-Jackiw. Ces crochets sont ensuite exploités dans le but de déterminer les crochets des variables fondamentales qui peuvent être des crochets de Poisson si le lagrangien est régulier, ou des crochets de Dirac dans le cas contraire. Pour procéder à une quantification canonique, il faut remplacer ces crochets par des commutateurs d'opérateurs quantiques.

Nous avons d'abord vérifié la validité de la méthode CI en l'appliquant à des systèmes réguliers bien connus en mécanique analytique, ensuite nous nous sommes intéressés aux systèmes hamiltoniens avec contraintes là où nous avons démontré qu'en partant d'un lagrangien singulier autonome, il est possible d'obtenir les bons crochets à l'aide de cette approche. Nous avons terminé avec une application avec succès en théorie quantique des champs. En effet, nous avons dérivé les relations de commutation et anticommutation relatives aux opérateurs de création et d'annihilation bien connues en électrodynamique quantique.

En dernier mot, nous pouvons dire que la méthode des constantes d'intégration a bien fait ses épreuves avec succès et elle peut rejoindre le club des méthodes de quantification canonique.

Maintenant, il y a certaines questions qu'on peut se poser concernant le sujet de ce mémoire qui vont nous servir de perspectives :

1* Comment rendre la méthode des constantes d'intégration applicable aux systèmes hamiltoniens avec contraintes qui sont non intégrables ?

2* Est-il possible de déterminer les crochets de Dirac relatifs à un système donné sans avoir besoin ni d'un lagrangien ni d'un hamiltonien, peut-être uniquement en utilisant la solution générale des équations de mouvement ?

3* Existe-t-il un lien entre la méthode des constantes d'intégration et les intégrales de chemins ?

4* La méthode des constantes d'intégration, n'est-elle pas applicable en relativité générale dans le cas du champ gravitationnel faible (gravité linéaire) ?

Bibliographie

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science (1964). *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canadian Journal of Mathematics (1950).
- [2] L. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstraint and Constraint Systems*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692.
- [3] Z. Belhadi, F. Menas, A. Bérard and H. Mohrbach, *Quantization of soluble classical constrained systems*, Annals of Physics, 2014, vol. 351, p. 426-443.
- [4] J. Douglas, *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Am. Math. Soc. **50** (1941).
- [5] S. Hojman and L.F. Urrutia, *On the inverse problem of the calculus of variations*, J. Math. Phys. **22** (1981).
- [6] J. Barcelos-Neto and N. R. F. Braga, *Symplectic analysis of a Dirac constrained theory*, J. Math.Phys. **35** (1994) 3497.
- [7] U. Kulshreshtha, *Hamiltonian formulation of a theory with constraints*, J. Math. Phys. **33** (1991) 633 and J. Math. Phys. **33** (1991) 4066.
- [8] Carinena, M. F. Ranada, M.Santander, *A nonlinear deformation of the isotonic oscillator and the SMORODINSKI-WINTERNITZ system : integrability and superintegrability*, R and C Dynamics (10.1070/RD2005v010n04ABEH000324).
- [9] J. P. Derendinger, *Théorie quantique des champs*, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001).
- [10] Z. Belhadi, *Application de la mécanique quantique non commutative en relativité et quantification des systèmes avec contraintes*, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou (2016).
- [11] L. ICHALLAL, Z. Belhadi, *Introduction aux Systèmes Hamiltoniens avec Contraintes*, Mémoire de master, Université de Béjaïa (2013).