

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université A. MIRA de Bejaia

Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur

Département de Génie Mécanique

Mémoire

Présenté par

Nadjat AZRI

Pour l'obtention du diplôme de

Magister

Filière : Génie Mécanique

Option : Energétique et Rhéologie

Thème

Extension de la loi de Hooke aux grandes déformations : Application aux matériaux hyper viscoélastiques

Soutenu le : / / 2008

Devant le jury :

Mr.A.BOU DA

Pr.U.A.M. Béjaia

Président

Mr.S.BOUDRAHEM

Pr.U.A.M. Béjaia

Examineur

Mr. A .ATI

Pr.U.A.M. Béjaia

Examineur

Mr.H.BECHIR

Pr.U.A.M. Béjaia

Rapporteur

Résumé

Les élastomères sont des matériaux largement répandus dans le secteur industriel notamment les technologies de construction mécanique (automobile) à cause de leurs propriétés d'élasticité exceptionnelle. Ils sont utilisés comme élément de structure antivibratoire (supports moteur, silent-blocs, pneumatiques....). Afin de dimensionner ces structures mécaniques, nous avons besoin de lois de comportement tridimensionnelles. Cependant, la complexité des phénomènes physiques et chimiques inhérents à leurs structures macromoléculaires rend la modélisation du comportement mécanique non trivial.

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse à la modélisation du comportement élastique non linéaire des élastomères en développant deux approches : la première est l'approche directe qui consiste à étendre la loi de Hooke des milieux élastiques, linéaires, homogènes et isotropes aux grandes déformations. Dans ce cadre, nous avons discuté un certain nombre de travaux de littérature (Batra et al.2000 ; Farahani et al.2004 ; Xiao et al.2003), nous avons conclu que cette méthode permet de reproduire le comportement mécanique des élastomères dans le domaine des déformations modérées, c'est-à-dire, elle est en défaut dans le domaine des grandes déformations.

Ainsi la méthode inverse de la théorie de l'hyperélasticité s'impose afin de modéliser le comportement élastique non linéaire de ces matériaux. Par conséquent, on doit formuler un potentiel élastique d'où dérive la loi de comportement. L'approche classique basée sur la théorie de Green prétendant l'existence d'un potentiel élastique et exprimé en fonction des invariants du tenseur des déformations de Green-Cauchy, un nombre impressionnant de modèles de comportement ont été proposés dans le cadre de cette théorie. Cependant ces modèles posent un problème au niveau de l'identification des dérivées partielles du potentiel élastique, c'est-à-dire les paramètres du matériau. En plus, la mise en place de montages expérimentaux permettant de construire une base de données expérimentale reste complexe.

L'originalité de ce travail consiste alors à proposer un potentiel élastique exprimé en fonction des invariants dits logarithmiques, la propriété de l'orthogonalité de ces invariants est intéressante dans la construction de base de données expérimentales. Le modèle est validé en utilisant les résultats expérimentaux de la littérature (Treloar, 1944) ; il reproduit le comportement multiaxial des élastomères dans le domaine des grandes déformations.

Expérimentalement, il a été constaté que les élastomères (caoutchouc chargé au noir de carbone) ont un comportement mécanique dépendant du temps et de la charge appliquée, au

fait leur comportement est hyperviscoélastique. En se basant sur le principe de correspondance, nous avons pris en compte l'effet visqueux dans la modélisation du comportement mécanique. Le modèle proposé est développé pour quelques chargements particuliers forts intéressant pour les applications industrielles. On doit dire que la validation du modèle reste une question ouverte nécessitant la mise en place d'essais expérimentaux permettant l'identification paramétrique du matériau.

Mots clés : Elastomères, Hyperélasticité ; Potentiel élastique, Hyperviscoélasticité, Module complexe d'Young

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu, le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la volonté afin de mener ce travail à terme.

*Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à mon rapporteur, Professeur **H. BECHIR**, pour l'intérêt constant avec lequel il a dirigé ce projet.*

*Je remercie vivement Monsieur **A. BOUDA**, Professeur à l'université de Béjaia qui m'a fait l'honneur de présider le jury.*

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **S. BOUDRAHEM**, Professeur à l'université de Béjaia, d'avoir accepté d'examiner ce travail et participer au jury.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **A. ATI**, Professeur à l'université de Béjaia pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail.*

Je remercie également toute ma famille pour le soutien moral qu'elle m'a apporté, tous mes collègues de Génie mécanique et de Physique ainsi que tous mes amis.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont été présent au moment où j'en avais besoin.

SOMMAIRE

<i>Introduction générale</i>	1
 <i>Chapitre I : Comportement élastique linéaire</i>	
I.1 Rappel de mécanique des milieux continus aux grandes déformations	3
I.1.1 Description du mouvement.....	3
I.1.2 Description des déformations.....	4
I.1.3 Description des contraintes.....	5
I.1.4 Les lois de comportement.....	7
I.2 Comportement élastique : définition.....	7
I.2.1 Modélisation du comportement élastique : approche directe.....	8
I.2.1.1 Elasticité linéaire anisotrope.....	8
I.2.1.2 Elasticité linéaire isotrope.....	9
I.2.2 Modélisation du comportement élastique linéaire : approche indirecte.....	10
 <i>Chapitre II : Comportement élastique non linéaire : Étude bibliographique</i>	
II.1 Introduction.....	13
II.2 Modélisation du comportement élastique non linéaire : Approche directe.....	13
II.2.1 Concept de tenseurs conjugués.....	13
II.2.2 Généralisation de la loi de Hooke: Tenseurs conjugués lagrangiens.....	18
II.2.3 Généralisation de la loi de Hooke: Tenseurs conjugués eulériens.....	22
II.3 Modélisation avec l'approche indirecte : potentiel élastique.....	27
 <i>Chapitre III : Modélisation du comportement hyper-élastique et hyper-viscoélastique d'élastomères</i>	
III.1 Introduction	30
III.2 Modélisation du comportement élastique non linéaire.....	30
III.2.1 Le modèle proposé.....	30
III.2.2 Etude des invariants du tenseur des déformations \bar{h}	31
III.2.3 Identification des paramètres comportementaux du matériau.....	34
III.2.4 Validation du modèle.....	35

III.2.5 Discussion des résultats.....	38
III.3 Modélisation du comportement hyper viscoélastique.....	39
Introduction	39
III.3.1 Loi de comportement viscoélastique linéaire.....	39
III.3.2 Viscoélasticité non linéaire.....	41
III.3.3 Modèle proposé.....	41
III.3.4 Détermination du module d'Young complexe.....	44
<i>Conclusion générale</i>	47
<i>Références bibliographique</i>	49
<i>Annexe</i>	

Définition des notations utilisées dans le mémoire

(.) : Simple contraction ;

(:) : Double contraction de deux tenseurs d'ordre deux ;

(C_0) : Configuration initiale ;

(C_t) : Configuration actuelle ;

$\overline{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy ;

$\overline{\overline{C}}$: Tenseur des rigidités élastiques, symétrique d'ordre quatre ;

$\overline{\overline{S}}$: Tenseur de souplesse, symétrique d'ordre quatre ;

\overline{E} : Tenseur des déformations de Green-Lagrange;

\overline{F} : Opérateur gradient de la transformation;

\overline{F}^T : transposé de l'opérateur gradient de la transformation;

\overline{C} : Tenseur des déformations de Green-Cauchy droit ;

\overline{B} : Tenseur des déformations de Green-Cauchy gauche ;

\overline{A} : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

\overline{h} : Tenseur de Hencky;

\overline{D} : Tenseur des taux de déformation ;

$\overline{\pi}$: Premier tenseur de Piola-Kirchhoff (P.K.1) ;

\overline{S} : Deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff (P.K.2) ;

$\overline{\tau}$: Tenseur de Piola-Kirchhoff;

\overline{I} : Tenseur identité ;

$I_1(\overline{C})$: Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Cauchy droit \overline{C} ;

$I_2(\overline{C})$: Deuxième invariant du tenseur des déformations de Green-Cauchy droit \overline{C} ;

$I_3(\overline{C})$: Troisième invariant du tenseur des déformations de Green-Cauchy droit \overline{C} ;

$I(\bar{h})$: Premier invariant du tenseur de Hencky \bar{h} ;

$II(\bar{h})$: Deuxième invariant du tenseur de Hencky \bar{h} ;

$III(\bar{h})$: Troisième invariant du tenseur de Hencky \bar{h} ;

W : Potentiel élastique;

ψ : Potentiel thermodynamique;

ρ_0 : Masse volumique du solide dans la configuration de référence;

λ : Élongation;

μ : Module du cisaillement du matériau;

λ_L : Coefficients de Lamé;

p : Pression hydrostatique;

J : Jacobien de la transformation ;

Ω_0 : Volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;

Ω : Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;

$E^*(i\omega)$: Module complexe d'Young;

$E'(\omega)$: Partie réelle du module complexe d'Young;

$E''(\omega)$: Partie imaginaire du module complexe d'Young;

$\eta(i\omega)$: L'amortissement;

Introduction générale

Introduction générale

Le caoutchouc naturel et ses homologues synthétiques, les élastomères, sont fortement répandus dans le domaine de l'industrie. La multiplicité des utilisations des élastomères provient de leurs caractéristiques mécaniques très intéressantes :

- Capacité à subir de grandes déformations ;
- Capacité à dissiper de l'énergie, phénomène qui permet d'obtenir des propriétés d'isolation vibratoire et acoustique.

La modélisation du comportement mécanique des élastomères est nécessaire pour le dimensionnement des structures mécaniques. Cette modélisation passe par le choix d'une loi de comportement permettant de reproduire qualitativement et quantitativement la réponse mécanique du matériau. Malheureusement, le comportement complexe des élastomères est difficile à modéliser et une multitude de modèles a vu le jour depuis un demi-siècle. Ces modèles sont obtenus à partir de deux approches :

- 1) La première approche consiste à établir un modèle microscopique du réseau de chaînes polymériques et de construire le modèle macroscopique en intégrant des considérations physiques traitées de manière statistique (Treloar, 1975 ; Boyce et al, 1993, Wu et al, 1992 ; Zuñiga et al, 2000). L'approche multi échelle basée sur la théorie de l'homogénéisation aux grandes déformations est l'objet de bon nombre d'études ces dernières années (F. Castaneda et al, 2007 ; Michel, 2003). Son avantage est de fournir des modèles dont les paramètres matériels ont un sens physique.
- 2) La deuxième approche est phénoménologique, elle est basée sur la théorie des invariants et les lois de comportement sont formulées dans le cadre des concepts de la thermodynamique du continu. Dans ce contexte, on peut citer les modèles de : Rivlin (1940) ; Valanis-Landel (1967) ; Ogden(1972) ; Yeoh(1990). L'inconvénient majeur de ces modèles est le nombre important de paramètres ajustables des lois de comportement, mais aussi ces paramètres ne sont pas physiquement motivés. Nous allons développer cette dernière approche dans le cadre de ce mémoire.

Le présent mémoire est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous introduisons les concepts essentiels de la mécanique des milieux continus, suivi d'une étude bibliographique sur la modélisation du comportement élastique linéaire des élastomères.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation du comportement élastique non linéaire en développant deux approches : la première est directe en généralisant la loi de

Hooke des milieux élastiques, linéaires, homogènes et isotropes aux grandes déformations moyennant le concept des tenseurs conjugués (Hill, 1978). On a constaté que cette approche est valable dans le domaine des moyennes déformations ($0 \div 20\%$). Afin de prédire le comportement hyperélastique des élastomères dans le domaine des grandes déformations, une deuxième voie (indirecte) a été développée. Elle est basée sur le concept de potentiel élastique.

Le troisième chapitre est composé de deux parties : dans la première partie, nous avons proposé un potentiel élastique original formulé en termes d'invariants originaux, dits logarithmiques. En d'autres termes, c'est une élasticité autre que celle de Green classique. Quant à la deuxième, nous comptons étendre notre modèle aux milieux viscohyperélastique (en introduisant l'effet visqueux observé par exemple sur les caoutchoucs chargés au noir de carbone). Nous avons ainsi appliqué le concept de correspondance (Christensen, 1983) au modèle de comportement hyperélastique obtenu. Nous avons particulièrement développé notre modèle pour deux types de chargements : la relaxation simple et des petites perturbations sinusoïdales autour d'une grande déformation statique.

Nous terminons enfin par une conclusion et des perspectives.

Chapitre I

Comportement élastique linéaire

I.1 Rappel de mécanique des milieux continus aux grandes déformations [Coirier, 2001]

I.1.1 Description du mouvement

Soit un solide déformable S , évoluant dans un repère R . L'ensemble des particules P constituant le solide déformable occupe, à chaque instant, un ensemble de positions dans l'espace (voir figure. I-1) : C est la configuration du système à l'instant t .

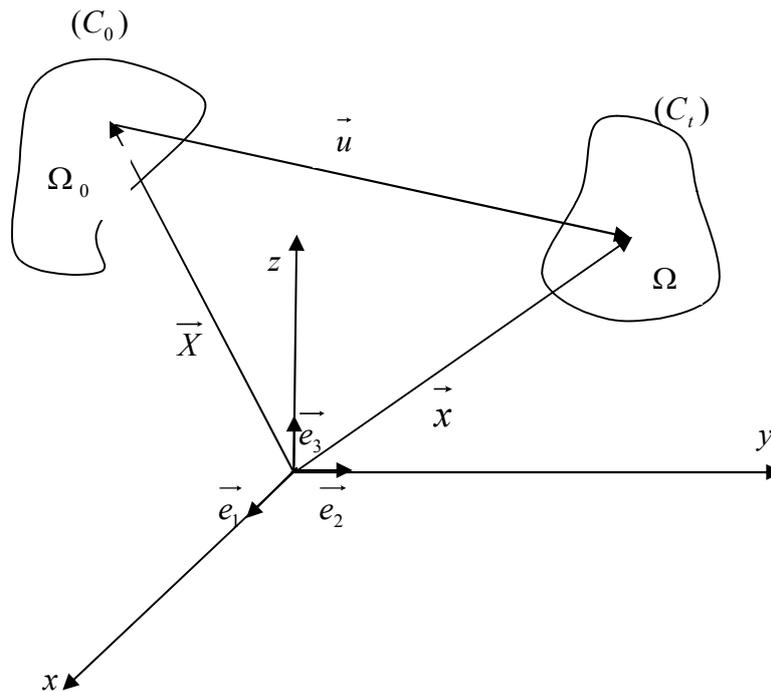


Fig.I.1 : Configuration initiale et déformée

On note (C_0) la configuration initiale (où le solide S occupe le volume Ω_0), et (C_t) la configuration actuelle à l'instant t (ou déformée), où le solide S occupe le volume Ω .

Le vecteur position de la particule $P \in S$ à l'instant initial est noté \bar{X} et \bar{x} le vecteur position de cette particule à l'instant t .

Le mouvement du milieu continu est défini par la donnée de la fonction vectorielle $\bar{\chi}$:

$$\bar{\chi} : \begin{cases} (C_0) & \rightarrow (C_t) \\ \bar{X} & \rightarrow \bar{x} = \bar{\chi}(\bar{X}, t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

L'équation (I-1) définit la transformation faisant passer de la configuration de référence (C_0) à la configuration (C_t).

Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, (ou tenseur tangent), le temps t est fixé.

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \cdot d\vec{X},$$

$$\vec{dx} = \overline{\overline{F}} d\vec{X}, \quad (\text{I.2})$$

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \text{ est l'opérateur gradient de transformation. Ce tenseur d'ordre deux}$$

transporte, localement, un espace tangent à (C_0) vers l'espace tangent associé à la même particule suivie dans son mouvement.

On a en effet :

$$\overline{\overline{F}} = \overrightarrow{\text{Grad} \vec{x}}. \quad (\text{I.3})$$

I.1.2 Description des déformations

Afin de mesurer les variations de longueur et d'angle entre les configurations (C_0) et (C_t), on calcule le produit scalaire de deux vecteurs matériels \vec{dx}_1 et \vec{dx}_2 et on examine sa variation en fonction des vecteurs initiaux \vec{dX}_1 et \vec{dX}_2 .

En configuration lagrangienne, on introduit le tenseur de Cauchy-Green droit (ou de dilatation), symétrique, défini et positif.

$$d\vec{x}_1^T \cdot d\vec{x}_2 = \vec{X}_1^T \cdot \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_2. \quad (\text{I.4})$$

Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}}. \quad (\text{I.5})$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est purement lagrangien, symétrique et défini par :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}), \quad (\text{I.6})$$

Où $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur identité.

Dans la configuration actuelle (eulérienne), on introduit le tenseur de Green-Cauchy gauche, $\overline{\overline{B}}$, symétrique, défini et positif.

$$\begin{aligned} d\overline{\overline{X}}_2^T \cdot d\overline{\overline{X}}_1 &= dx_2^T \cdot (\overline{\overline{F}}^{-1})^T \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} dx_1, \\ &= dx_2 \cdot \overline{\overline{B}}^{-1} \cdot dx_1, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\text{avec } \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}}^T. \quad (\text{I.8})$$

Le tenseur de déformation d'Euler-Almansi (purement eulérien) symétrique est défini par :

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{B}}^{-1}). \quad (\text{I.9})$$

I.1.3 Description des contraintes

On introduit les tenseurs des contraintes usuels de la théorie des grandes déformations : le tenseur des contraintes de Cauchy, $\overline{\overline{\sigma}}$ (eulérien) est défini par :

$$\vec{t} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}, \quad (\text{I.10})$$

\vec{t} est le vecteur contrainte (effort mesuré par unité de surface définie instantanément) s'appliquant sur l'élément de surface ds de la configuration initiale de normale extérieure \vec{n} . Pour les milieux dépourvus de densité de couple, le tenseur de Cauchy est symétrique.

Au fait, on lie la force élémentaire \vec{df} de la configuration actuelle à l'élément d'aire dS de la configuration initiale, par la relation suivante :

$$\vec{df} = \vec{T} \cdot dS, \quad (\text{I.11})$$

Il s'agit alors d'une description mixte. Le vecteur \vec{T} représente le vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff 1 (ou vecteur de Boussinesq). Le tenseur de contrainte associé est le premier tenseur de Piola Kirchhoff $\overline{\overline{\pi}}$ qui n'est ni lagrangien ni eulérien (tenseur hybride), tel que :

$$\vec{df} = \vec{T} \cdot dS = \overline{\overline{\pi}} \cdot \vec{N} \cdot dS, \quad (\text{I.12})$$

$\overline{\overline{\pi}}$ n'est pas symétrique.

En mécanique du solide, notamment pour la modélisation des lois de comportement, on a souvent recours au premier tenseur de Piola- Kirchhoff PK1.

Pour avoir un tenseur complètement défini en fonction des variables lagrangiennes, on transporte la force \vec{df} agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée :

$$\vec{df}_0 = \overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{df}, \quad (I.13)$$

\vec{df}_0 est une force fictive agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 est alors défini par :

$$\vec{df}_0 = \overline{\overline{S}} \cdot \overline{\overline{N}} \cdot dS, \quad (I.14)$$

$\overline{\overline{S}}$ est un être mathématique sans signification physique, il est symétrique. Cependant, il est fortement utilisé dans la modélisation numérique par élément fini pour les milieux hyperélastiques.

Les trois tenseurs des contraintes sont reliés par la relation suivante :

$$J \overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\pi}} \cdot \overline{\overline{F}}^T = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{S}} \cdot \overline{\overline{F}}^T, \quad (I.15)$$

$$J = \det \overline{\overline{F}}. \quad (I.16)$$

J : Jacobien de la transformation.

En conclusion : On a rassemblé les propriétés essentielles qui vont être utilisées dans le cadre de ce mémoire dans le tableau suivant :

	Configuration (C₀) initiale (libre de contraintes)	Configuration actuelle (C_t)
Tenseurs des déformations	$\overline{\overline{C}}$: Tenseur des dilatations de Green-Cauchy droit, symétrique. $\overline{\overline{E}}$: Tenseur des déformations de Green-Lagrange, symétrique	$\overline{\overline{B}}$: Tenseur des déformations de Green-Cauchy gauche, symétrique. $\overline{\overline{A}}$: Tenseur des déformations d'Euler-Almansi, symétrique.
Tenseurs des contraintes	$\overline{\overline{S}}$: Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2, symétrique et objectif.	$\overline{\overline{\sigma}}$: Tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique et objectif.

Tableau. I.1 : Tableau récapitulatif des différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiale et actuelle.

I.1.4 Les lois de comportement

La résolution d'un problème de mécanique nécessite la connaissance de la loi de comportement (Lemaitre, 1985). D'une façon générale, une loi de comportement est une fonctionnelle de réponse du matériau permettant de définir un lien entre l'état de contrainte et l'histoire des transformations de ce matériau. Cette loi de comportement doit satisfaire trois principes : le principe de causalité, le principe d'action locale et le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle.

Le principe de causalité impose que l'état de contrainte en un point et au temps t ne dépend que de l'histoire de la transformation du matériau jusqu'au temps t . Le principe de l'action locale impose que l'état de contrainte en un point ne dépend que du voisinage de ce point. Ces deux principes sont vérifiés pour les matériaux matériellement simples, c'est-à-dire, pour lesquels l'état de contrainte ne dépend que de l'histoire du gradient de la transformation. Enfin, le principe d'objectivité impose que la loi de comportement doit être indépendante de l'observateur ou du changement de référentiel.

I.2 Comportement élastique : définition

D'une façon générale, un milieu est dit élastique si son comportement ne dépend que de la position relative de la configuration actuelle (C_t) par rapport à une configuration privilégiée (qu'on peut toujours prendre comme configuration de référence ou naturelle dans laquelle le tenseur des contraintes est nul). En d'autres termes, pour un milieu élastique, l'état de contrainte actuel est entièrement déterminé par le gradient de la transformation à l'instant actuel et non par son histoire passée :

$$\overline{\overline{\sigma}}(X, t) = \zeta[\overline{\overline{F}}(X, t)], \text{ où } \zeta \text{ est une fonctionnelle.} \quad (\text{I.17})$$

La fonctionnelle mémoire se réduit ainsi à une simple fonction et le tenseur des contraintes de Cauchy ne dépend pas du chemin suivi par la déformation mais par contre le travail fourni par cette contrainte en dépend généralement.

I.2.1 Modélisation du comportement élastique : approche directe ([J. Mandel, 1966] ; [P .Le Tallec, 2006])

I.2.1.1 Elasticité linéaire anisotrope

En élasticité linéaire, la transformation subie par un élément à partir de l'état initial se ramène à un déplacement d'ensemble suivi d'une déformation pure. Cette déformation étant infiniment petite (du premier ordre, par définition) et le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\sigma}$ est une fonction linéaire du tenseur des déformations $\overline{\varepsilon}$. La loi de Hooke est définie par :

$$\overline{\sigma} = \overline{C} : \overline{\varepsilon} . \quad (\text{I.18})$$

Dans une base cartésienne, on peut écrire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (\text{I.19})$$

Où C_{ijkl} est le tenseur des modules d'élasticité d'ordre quatre, appelé aussi tenseur des rigidités élastiques du matériau.

On notera que les C_{ijkl} ne sont fonction que de la variable de l'espace X , alors que ε_{ij} et σ_{ij} peuvent être fonction des variables (X, t) . Si les C_{ijkl} sont indépendants de X , alors le milieu est dit homogène.

Grâce à l'invariance d'un certain nombre de constants élastiques lors de la permutation des indices, ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{klij}$) due aux symétries matérielles, le nombre de composantes du tenseur des rigidités se réduit donc à 36 composantes dont 21 composantes sont indépendantes.

Voigt a introduit une notation simplifiée à deux indices, avec la convention d'équivalence entre un super-indice I et une paire d'indices associée ij :

$$1 \leftrightarrow 11$$

$$2 \leftrightarrow 22$$

$$3 \leftrightarrow 33$$

$$4 \leftrightarrow 23$$

$$5 \leftrightarrow 31$$

$$6 \leftrightarrow 12$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n \quad (\text{I.20})$$

On voit qu'on peut ranger les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations en 2 vecteurs colonnes reliées par la matrice 6×6 des modules d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ & C_{22} & & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (I.21)$$

Symétrique

$$\begin{aligned}
 \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} \\
 \gamma_{31} &= 2\varepsilon_{31} \\
 \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12}
 \end{aligned} \quad (I.22)$$

On peut aussi exprimer le tenseur des déformations infinitésimales $\overline{\varepsilon}$ en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\sigma}$ (ce qui est utile lorsque les efforts sont imposés pendant un essai mécanique). Il faut pour cela inverser la relation (I-18) tout en supposant que le tenseur de Hooke est inversible. Il vient alors :

$$\overline{\varepsilon} = \overline{S} : \overline{\sigma} \quad \text{avec} \quad \overline{S} = \overline{C}^{-1}, \quad (I.23)$$

Où le tenseur \overline{S} d'ordre quatre est dit de souplesse.

I.2.1.2 Elasticité linéaire isotrope

Par définition, un milieu est isotrope si toutes les directions de l'espace autour d'un point de ce milieu sont matériellement équivalentes (aucune direction de l'espace n'est privilégiée). La matrice des constantes élastiques se réduit aux neuf éléments dont seulement deux sont différents : notés λ_L et μ dits coefficients de Lamé du matériau isotrope. En notation de Voigt, la matrice de rigidité du matériau élastique, linéaire, homogène et isotrope s'écrit :

$$(C)_{mn} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

symétrique

avec :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \lambda_L + 2\mu, \\ C_{13} &= \lambda_L. \end{aligned} \quad (1.25)$$

La matrice des rigidités élastiques s'écrit alors :

$$(C)_{mn} = \begin{pmatrix} \lambda_L + 2\mu & \lambda_L & \lambda_L & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_L + 2\mu & \lambda_L & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_L + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

symétrique

La loi de Hooke est donnée par :

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} + \lambda_L(\bar{I} : \bar{\varepsilon})\bar{I}, \quad (1.27)$$

en base cartésienne, on a :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda_L\varepsilon_{ll}\delta_{ij}. \quad (1.28)$$

On peut toujours inverser cette relation

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\bar{I} : \bar{\sigma})\bar{I}, \quad (1.29)$$

E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson, ils sont reliés aux coefficients de Lamé par :

$$\nu = \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda_L + 2\mu}{\lambda_L + \mu} \quad (1.30)$$

L'introduction de ces nouvelles constantes s'explique par le fait que E et ν sont directement accessibles par l'expérience en réalisant un essai de traction simple. Pour les milieux incompressibles ($\nu=0.5$), le terme sphérique de la loi de comportement est remplacé par une pression hydrostatique, on obtient ainsi :

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} - p\bar{I}. \quad (\text{I.31})$$

En conséquence, la pression que subit le corps reste indéterminée par la loi de comportement, qu'on peut éliminer par les conditions aux limites.

I.2.2 Modélisation du comportement élastique linéaire : approche indirecte [P. Germain, 1995]

Une étude thermodynamique (en particulier l'examen du premier principe) permet de confirmer qu'en tout point d'un milieu élastique linéaire, on peut définir une densité d'énergie élastique de forme quadratique positive :

$$W(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}, \quad (\text{I.32})$$

en base cartésienne, on a :

$$W(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (\text{I.33})$$

Telles que, à tout instant t , si $\bar{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations en ce point, le tenseur des contraintes en ce même point est calculé par :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial W(\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}}, \quad (\text{I.34})$$

où W est exprimé en fonction des 9 variables ε_{ij} considérées comme variables indépendantes.

A la forme quadratique définie positive $W(\varepsilon)$, on peut associer la forme quadratique duale W^* , que l'on peut écrire :

$$W^*(\sigma) = \sup_{\varepsilon_{ij}} \{ \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} - W(\varepsilon) \}, \quad (\text{I.35})$$

on peut donc former explicitement $W^*(\sigma)$ en sachant que :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (\text{I.36})$$

$$W^*(\sigma) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (\text{I.37})$$

La loi de comportement est :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (\text{I.38})$$

On peut constater que si les densités d'énergies élastiques W ou W^* sont connues, alors on peut dériver les lois de comportement. On peut écrire l'équation (I-31) sous une forme plus générale, en introduisant un potentiel thermodynamique ψ défini par :

$$\rho_0 \psi = W, \quad (\text{I.39})$$

Où ρ_0 est la masse volumique du matériau dans la configuration (C_0) .

$\overline{\overline{W}}(\overline{\overline{\varepsilon}})$ est une forme quadratique que l'on peut exprimer en fonction des invariants du tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$, définis par :

$$I_1(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{\varepsilon}}, \quad (\text{I.40})$$

$$I_2(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\varepsilon}}). \quad (\text{I.41})$$

Introduisant les équations (I-37) et (I-38) dans (I.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi &= W[I_1(\overline{\overline{\varepsilon}}), I_2(\overline{\overline{\varepsilon}})] = \alpha I_1^2(\overline{\overline{\varepsilon}}) + \beta I_2(\overline{\overline{\varepsilon}}) \\ &= \alpha (\overline{\overline{I}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) + \frac{\beta}{2} (\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

La loi de comportement dérive du potentiel thermodynamique de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} = \frac{\partial W(\overline{\overline{\varepsilon}})}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}}, \quad (\text{I.43})$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial I_1(\overline{\overline{\varepsilon}})} \frac{\partial I_1(\overline{\overline{\varepsilon}})}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} + \frac{\partial W}{\partial I_2(\overline{\overline{\varepsilon}})} \frac{\partial I_2(\overline{\overline{\varepsilon}})}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}}, \quad (\text{I.44})$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2\alpha I_1(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}} + \frac{\beta}{2} \overline{\overline{\varepsilon}}, \quad (\text{I.45})$$

On pose :

$$\frac{\beta}{2} = 2\mu \Rightarrow \beta = 4\mu, \quad (\text{I.46})$$

$$2\alpha = \lambda \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda_L}{2}. \quad (\text{I.47})$$

On retrouve ainsi la loi de Hooke pour un milieu élastique, linéaire, homogène et isotrope

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda_L\varepsilon_{ll}\delta_{ij}. \quad (\text{I.48})$$

Conclusion : La loi de comportement des milieux élastiques, linéaires, homogènes et isotropes peut être obtenue de deux manières : la première est l'approche directe reliant le tenseur des contraintes de Cauchy au tenseur des déformations ε ; la deuxième est indirecte, en dérivant le potentiel élastique \mathcal{W} par rapport au tenseur des déformations ε .

Chapitre II

Comportement élastique non linéaire.

Etudes bibliographique

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une étude bibliographique sur l'extension de la loi de Hooke des milieux élastiques, homogènes et isotropes au domaine non linéaire des grandes déformations. Les prédictions de ces modèles sont confrontées aux résultats expérimentaux de la littérature. Il s'avère que ces modèles donnent des résultats satisfaisants dans le domaine des moyennes déformations. Ainsi, le comportement élastique non linéaire s'inscrit dans le cadre de l'hyperélasticité ; en introduisant un potentiel élastique, W , à partir duquel dérivent les lois de comportement.

II-2 Modélisation du comportement élastique non linéaire : Approche directe

II.2.1 Concept de tenseurs conjugués

Afin de construire des modèles de comportement élastique non linéaire, les travaux de la littérature sont basés sur le concept des tenseurs conjugués de Hill (1968, 1970, 1978) qui s'énonce :

$$\dot{W} = J \bar{\sigma} : \bar{D} = \bar{T}^{(n)} : \bar{E}^{(n)}, \quad (\text{II-1})$$

où \dot{W} : La variation de l'énergie par unité de volume ;

$$J = \det \bar{F};$$

$\bar{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy (eulérien) ;

\bar{D} : Tenseur des déformations (eulérien) ;

$\bar{T}^{(n)}$: Tenseur des contraintes (Lagrangien) ;

$\bar{E}^{(n)}$: Tenseur des déformations (Lagrangien) ;

n : nombre n = -1, 0, 1, 2.

Les couples de tenseurs des contraintes-déformations $(\bar{\sigma}, \bar{D})$ ou $(\bar{T}^{(n)}, \bar{E}^{(n)})$ sont dits conjugués, ils sont objectifs et symétriques. Si n=2, alors $\bar{T}^{(2)} \equiv \bar{S}$ et $\bar{E}^{(2)} \equiv \bar{E}$, on obtient ainsi le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 (PK2), \bar{S} , qui est le conjugué du tenseur des déformations de Green-Lagrange \bar{E} .

Selon Hill (1978), la loi de Hooke des milieux élastiques, linéaires et isotropes peut être généralisée au domaine non linéaire des grandes déformations de la manière suivante :

$$\bar{T}^{(n)} = 2\mu \bar{E}^{(n)} + \lambda_L (\bar{I} : \bar{E}^{(n)}) \bar{I}, \quad (\text{II-2})$$

où μ , λ_L sont les constantes de Lamé.

Dans cette approche, la description lagrangienne est privilégié, le tenseur des déformations

$\overline{\overline{E}}^{(n)}$ est défini au sens de Seth-Hill par :

$$\overline{\overline{E}}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n}(\overline{\overline{U}}^n - \overline{\overline{I}}) & n \neq 0 \\ Ln(\overline{\overline{U}}) & n = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$\overline{\overline{U}}$ est le tenseur des déformations à droite obtenu à partir du théorème de la décomposition

polaire du gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$:

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{V}} \cdot \overline{\overline{R}}, \quad (\text{II.4})$$

$\overline{\overline{R}}$ est le tenseur des rotations, $\overline{\overline{V}}$ est le tenseur des déformations à gauche (eulérien).

On peut définir une relation entre les deux tenseurs conjugués de Hill, (1978) dans une base principale comme suit :

$$T_{ij}^{(n)} = \frac{n}{m} T_{ij}^{(m)} \frac{\sum_{r=1}^m \lambda_i^{m-r} \lambda_j^{r-1}}{\sum_{r=1}^n \lambda_i^{n-r} \lambda_j^{r-1}}, \quad (\text{II.5})$$

$T^{(n)}$ et $T^{(m)}$ sont les tenseurs conjugués de $E^{(n)}$ et $E^{(m)}$ respectivement.

En se basant sur le concept des tenseurs conjugués, Batra et al. (2000) ont développé quatre modèles de comportement élastique non linéaire pour les élastomères incompressibles. En description lagrangienne, le premier modèle est exprimé par une relation linéaire entre le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff $\overline{\overline{S}}$ et le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$. Au fait, en remplaçant $n=2$ dans l'équation (II-2), on retrouve ce modèle, pour les milieux incompressibles, on a :

$$\overline{\overline{T}}^{(2)} = 2\mu \overline{\overline{E}} - p \overline{\overline{C}}^{-1} \cdot \overline{\overline{I}} \Leftrightarrow \overline{\overline{S}} = 2\mu \overline{\overline{E}} - p \overline{\overline{C}}^{-1} \cdot \overline{\overline{I}}, \quad (\text{II-6})$$

où p est une pression hydrostatique qu'on détermine par les conditions aux limites.

Quant au deuxième modèle, il est donné par :

$$J \overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\overline{R}} = 2\mu \ln \overline{\overline{U}} - p \overline{\overline{I}}. \quad (\text{II-7})$$

En description eulérienne, le premier modèle est exprimé par :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \mu(\overline{\overline{B}} - \overline{\overline{I}}) - p \overline{\overline{I}}, \quad (\text{II-8})$$

En élasticité, il est communément admis que l'état naturel est libre de contrainte, c'est pourquoi dans l'équation (II.8) apparaît le terme $(\bar{\bar{B}} - \bar{\bar{I}})$.

Le deuxième modèle est formulé de la manière suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{A}} - p\bar{\bar{I}}, \quad (\text{II-9})$$

où : $\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{B}}^{-1})$ est le tenseur des déformations d'Almansi-Hamel.

Batra et al. (2000) affirment que les deux modèles exprimés en description eulérienne sont plus réalistes, car qualitativement sont en accord avec l'expérience. Afin de valider les modèles proposés par Batra et al, (2000), nous les avons confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature en l'occurrence les travaux standards de Treloar (1944). Treloar a effectué des essais de traction simple, cisaillement pur et traction équibiaxiale sur du Latex (caoutchouc naturel chargé au soufre 8%)

On montre sur les figures (II.1(a), II.1(b), II.1(c), II.1(d)) les prédictions de ces modèles comparés aux résultats expérimentaux de Treloar (1944).

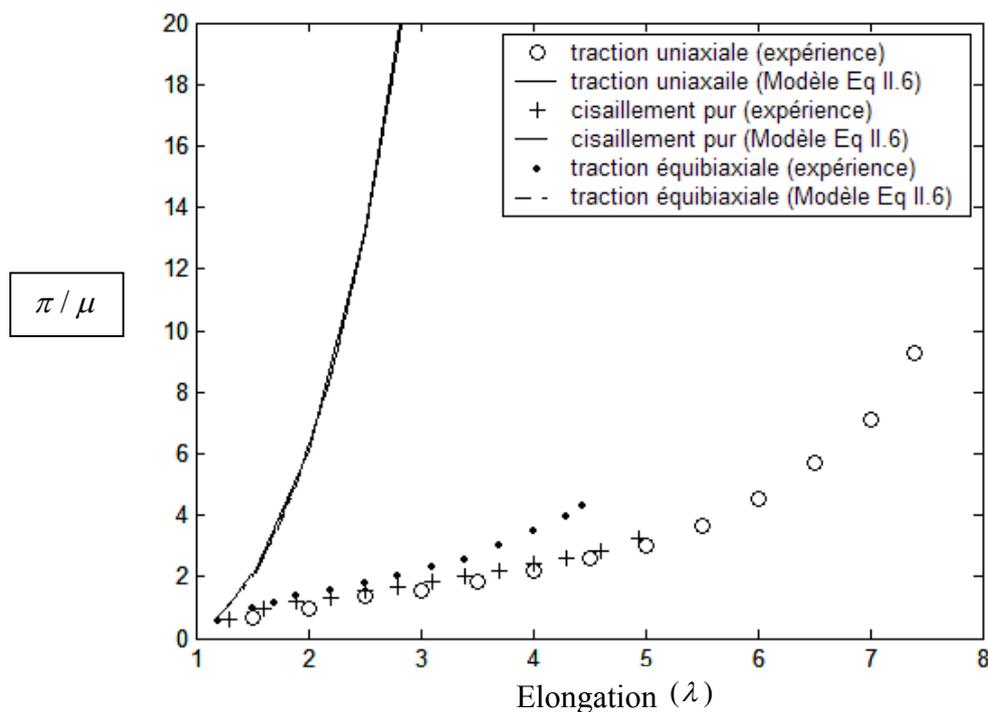


Fig. II.1(a) : Courbes contrainte-élongation pour le 1^{er} modèle Eq (II.6) comparées aux résultats expérimentaux de Treloar (1944).

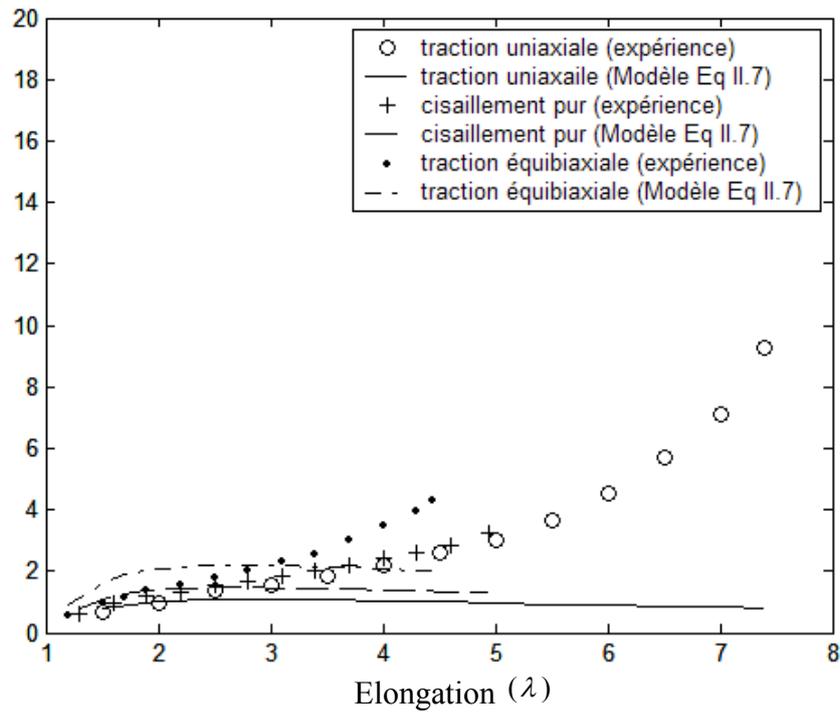


Fig. II.1(b): Courbes contrainte-élongation pour le 2^{em} modèle Eq (II.7) comparées aux résultats de l'expérience de Treloar (1944).

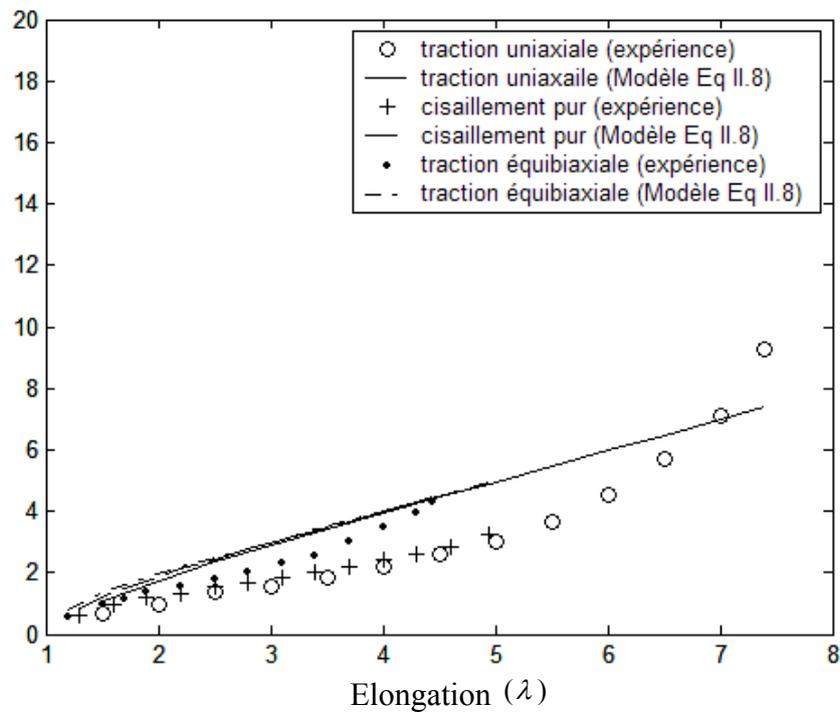


Fig. II.1(c): Courbes contrainte-élongation pour le 3^{em} modèle Eq (II.8) comparées aux résultats de l'expérience de Treloar (1944).

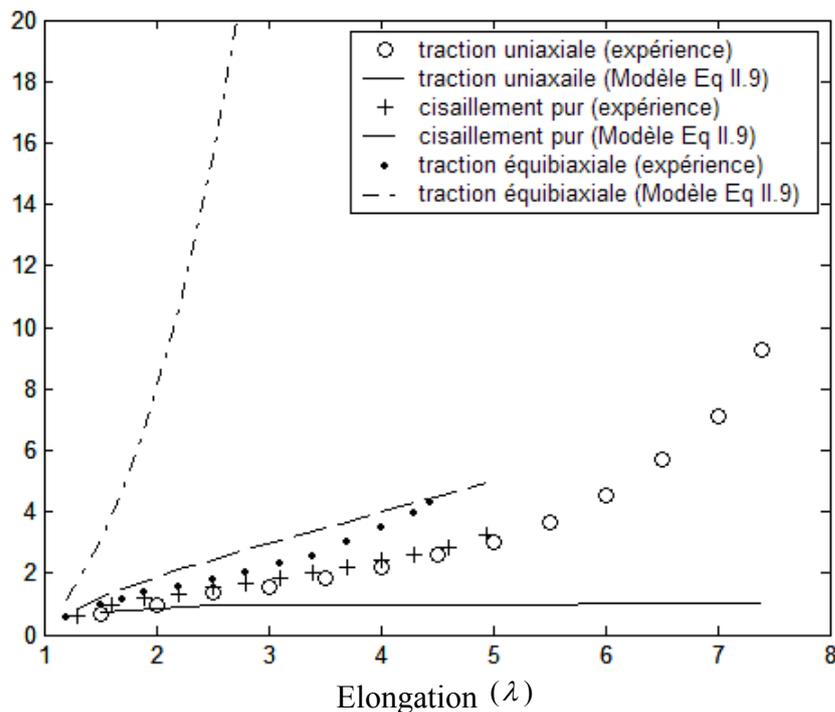


Fig. II.1(d): Courbes contrainte-élongation pour le 4^{em} modèle Eq (II.9) comparées aux résultats de l'expérience de Treloar (1944).

On peut constater que ces prédictions ne sont pas satisfaisantes, cependant le modèle de la fig. II.1(b), donne des résultats relativement bons dans le domaine des moyennes déformations.

En conclusion, les modèles de Batra et al, (2000) sont “séduisants” théoriquement, mais non convainquants pour décrire les résultats expérimentaux pour les chargements en traction uniaxiale, cisaillement pur et traction équibiaxiale.

II.2.2 Généralisation de la loi de Hooke aux grandes déformations: Tenseurs conjugués lagrangiens

Farahani et al. (2004) ont effectués une étude générale de l'équation (II-2) en utilisant un résultat établi par Hill (1978) (cf. Eq. II.5). Dans cette étude, le couple de tenseurs conjugués utilisés sont lagrangiens.

En effectuant des calculs pour un essai de traction uniaxiale pour une valeur de $m=2$, on a déterminé la contrainte nominale :

$$\pi / E = \lambda_1^{n-1} \frac{[(1-\nu)\lambda_1^n + 2\nu\lambda_2^n - \nu - 1]}{n(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{II.10})$$

en la comparant à l'équation hypo - élastique :

$$\overline{\dot{\sigma}} = 2\mu\overline{\dot{D}} + \lambda\text{tr}(\overline{\dot{D}})\overline{\dot{I}}, \quad (\text{II.11})$$

$$\overline{\dot{D}} = \overline{\dot{F}}\overline{\dot{F}}^{-1}, \quad (\text{II.12})$$

donnant :

$$\pi / E = \lambda^{-2\nu} \ln \lambda_1 \quad (\text{II.13})$$

La figure suivante représente la variation de la contrainte en fonction du déplacement pour une valeur du coefficient de Poisson, $\nu = 0.25$, le matériau est considéré compressible.

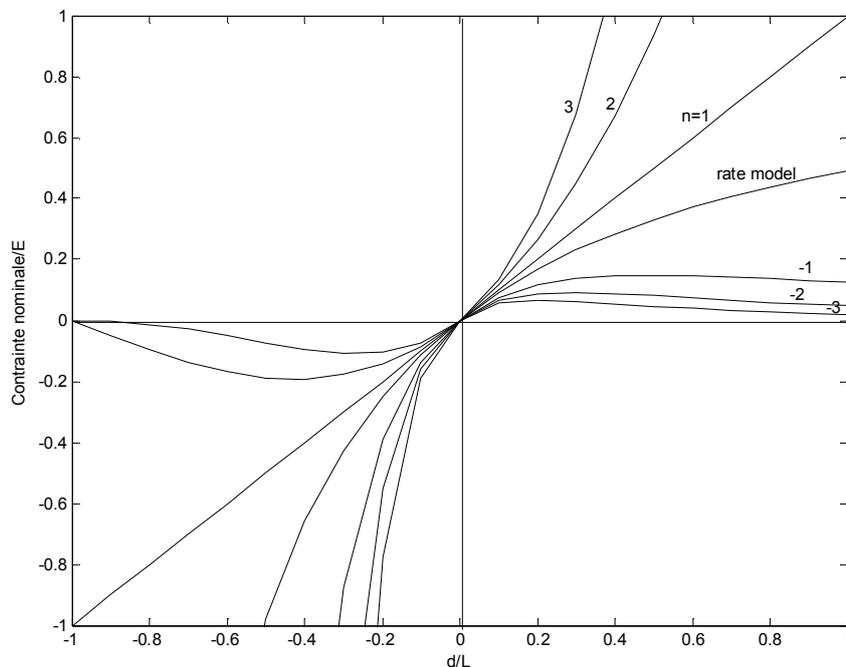


Fig. II.2 : Courbes contrainte - déplacement pour $\nu = 0.25$

On peut constater que pour $n = 1$, la loi prédit un comportement "idéal" : la courbe est identique en traction et en compression.

Afin de valider la loi hypoélastique, étudions la réponse du matériau aux grandes déformations en utilisant la loi de Farahani pour $n = 0$:

$$\overline{T}^{(0)} = 2\mu\overline{E}^{(0)} + \lambda \text{tr}(\overline{E}^{(0)})I, \quad (\text{II.14})$$

$$\overline{E}^{(0)} = \ln \overline{U}. \quad (\text{II.15})$$

Le tenseur $T^{(0)}$ est relié au 2^{em} tenseur de Piola Kirchhoff par :

$$T_{ii}^{(0)} = \lambda_{ii}^2 T_{ii}^{(2)}. \quad (\text{II.16})$$

On suppose que le matériau est homogène, isotrope et on s'intéressera à la traction uniaxiale, le cisaillement pur et à la traction équibiaxiale.

1. Traction uniaxiale

Considérons une éprouvette en élastomère subissant une déformation homogène en traction uniaxiale, la déformation est définie par :

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\nu}, \quad (\text{II.17})$$

les équations (II-14), (II-16) et (II-17), donnent l'expression de la contrainte de Cauchy :

$$\sigma / E = \lambda^{(2\nu-1)} \ln \lambda, \quad (\text{II.18})$$

en terme du premier tenseur de Piola-Kirchhoff π , on a :

$$\pi / E = \lambda^{2(\nu-1)} \ln \lambda. \quad (\text{II.19})$$

2. Traction équibiaxiale

La déformation en traction équibiaxiale est définie par :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = \lambda^{-2\nu/(1-\nu)}, \quad (\text{II.20})$$

les équations (II-14), (II-16) et (II-20) donnent l'expression de la contrainte de Cauchy :

$$\sigma / E = \frac{1}{1-\nu} \lambda^{\frac{-2(1-2\nu)}{1-\nu}} \ln \lambda, \quad (\text{II.21})$$

en terme de π , on a :

$$\pi / E = \frac{1}{1-\nu} \lambda^{\frac{(5\nu-3)}{1-\nu}} \ln \lambda. \quad (\text{II.22})$$

3. Cisaillement pur

La déformation est définie par :

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda^{-\nu/(1-\nu)}, \quad (\text{II.23})$$

les équations (II-14), (II-16) et (II-23) donnent l'expression de la contrainte de Cauchy :

$$\sigma / E = \frac{1}{(1-\nu)(1+\nu)} \lambda^{\frac{-(1-2\nu)}{1-\nu}} \ln \lambda, \quad (\text{II.24})$$

et la contrainte nominale :

$$\pi / E = \frac{1}{(1-\nu)(1-\nu)} \lambda^{\frac{(3\nu-2)}{1-\nu}} \ln \lambda. \quad (\text{II.25})$$

On montre sur les figures (Fig. II.3, II.4, II.5), les prédictions des équations (II.19), (II.22) et (II.25) que nous avons comparés aux résultats expérimentaux de Treloar, (1944).

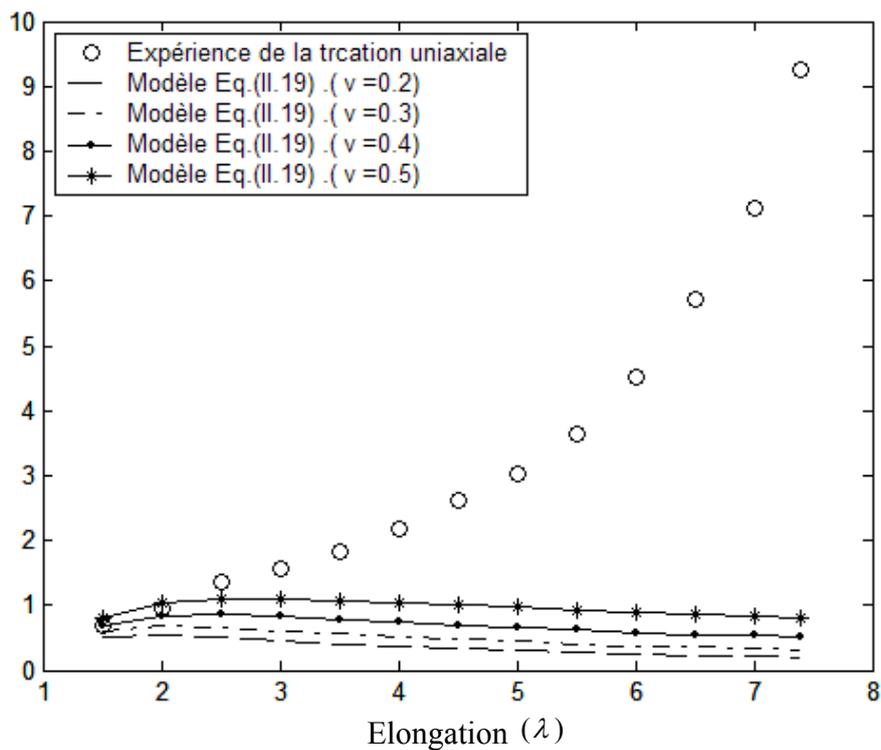


Fig.II.3: Courbes contrainte-élongation en traction uniaxiale pour différentes valeurs de ν .

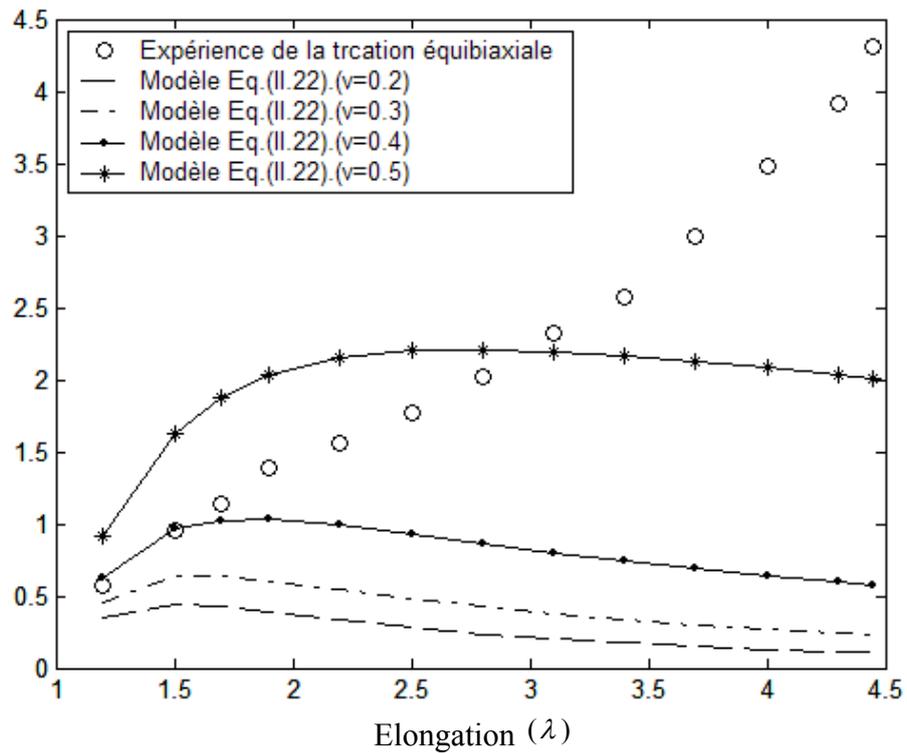


Fig. II.4: Courbes contrainte-élongation en traction équi-biaxiale pour différentes valeurs de ν .

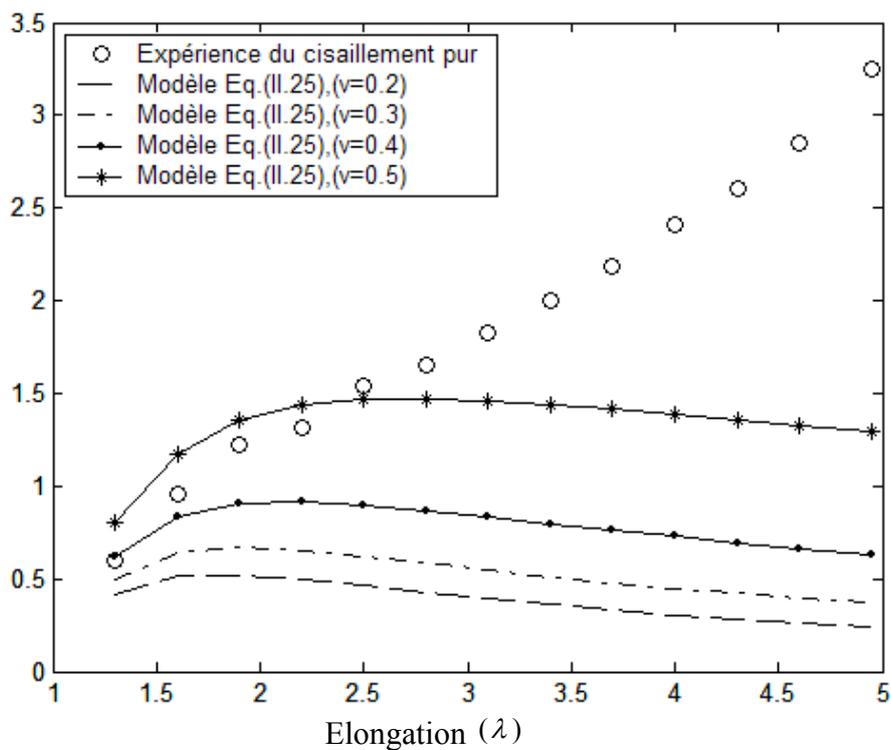


Fig.II.5: Courbes contrainte-élongation en cisaillement pur pour différentes valeurs de ν .

Les résultats obtenus montrent que le modèle de Farahani (pour $n = 0$) qui présente une forme linéaire entre le tenseur de Kirchhoff et le tenseur naturel en description lagrangienne n'ajuste les résultats expérimentaux que dans le domaine des déformations modérées (moyennes).

II.2.3 Généralisation de la loi de Hooke aux grandes déformations : Tenseurs conjugués eulériens

Xiao et al. (2003) ont montré que l'utilisation du couple de tenseurs conjugués eulériens $(\bar{\tau}, \bar{h})$

où \bar{h} est le tenseur logarithmique qui est défini par : $\bar{h} = \ln \bar{V} = \frac{1}{2} \ln \bar{B}$ et $\bar{\tau}$ le tenseur de

Piola-Kirchhoff défini par $\bar{\tau} = J \bar{\sigma}$, conduit à une écriture de la loi de Hooke de la manière suivante :

$$\bar{\tau} = J \bar{\sigma} = 2\mu \bar{h} + \lambda \text{tr}(\bar{h}) \bar{I} . \quad (\text{II.26})$$

On note que l'équation (II.26) a été introduite par Hencky (1928 ,1931 ,1933) pour l'étude de la réponse des élastomères aux grandes déformations.

Nous allons comparer les prédictions de l'équation (II.26) avec les résultats expérimentaux de Treloar(1944).

1. Traction uniaxiale

La déformation est donnée par :

$$x = \lambda . X ; y = \lambda^{-\nu} . Y ; z = \lambda^{-\nu} . Z \quad (\text{II.27})$$

L'opérateur gradient de la transformation s'écrit :

$$(F)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

il vient alors :

$$\bar{B} = FF^T \rightarrow (B)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \ln \bar{B} \rightarrow (h)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \ln \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 \ln \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 \ln \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Le Jacobien de la transformation est calculé par :

$$J = \det(\bar{F}) = \lambda^{1-2\nu} \quad (\text{II.31})$$

En utilisant l'équation (II.26), on peut calculer la contrainte de Cauchy :

$$\sigma^{TU} = \sigma_{11} = \frac{1}{\lambda^{1-2\nu}} (2\mu \ln \lambda + \lambda_L (-\ln \lambda)) \quad (\text{II.32})$$

$$\sigma^{TU} = \frac{1}{\lambda^{1-2\nu}} (2\mu - \lambda_L) \ln \lambda \quad (\text{II.33})$$

Sachant que le coefficient de Lamé λ_L est donné par :

$$\lambda_L = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (\text{II.34})$$

L'équation (II.33) s'écrit :

$$\sigma^{TU} / \mu = 2 \frac{1}{\lambda^{(1-2\nu)}} \cdot \left(\frac{1-3\nu}{1-2\nu} \right) \ln \lambda. \quad (\text{II.35})$$

2. Cisaillement pur

La déformation est donnée par :

$$x = \lambda.X ; y = Y ; z = \lambda^{-\nu/(1-\nu)}.Z \quad (\text{II.36})$$

L'opérateur gradient de la transformation s'écrit :

$$(F)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\nu/(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Il vient alors :

$$\bar{B} = \bar{F}\bar{F}^T \rightarrow (B)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2\nu/(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \ln \bar{B} \rightarrow (h)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \ln \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2\nu/(1-\nu)) \cdot \ln \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Le Jacobien de la transformation est calculé par :

$$J = \det(\bar{F}) = \lambda^{(1-2\nu)/(1-\nu)} \quad (\text{II.40})$$

En utilisant l'équation (II.26), on peut calculer la contrainte de Cauchy :

$$\sigma^{CP} = \sigma_{11} = \frac{1}{\lambda^{(1-2\nu)/(1-\nu)}} (2\mu \cdot \ln \lambda + \lambda_L \cdot \ln \lambda \cdot (\frac{1-2\nu}{1-\nu})) \quad (\text{II.41})$$

$$\sigma^{CP} = \frac{1}{\lambda^{(1-2\nu)/(1-\nu)}} (2\mu + \lambda_L \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu}) \ln \lambda \quad (\text{II.42})$$

En tenant compte de l'expression du coefficient de Lamé λ_L (cf. Équation (II.34)), l'équation (II.42) s'écrit :

$$\sigma^{CP} / \mu = \frac{1}{\lambda^{(1-2\nu)/(1-\nu)}} 2 \left(\frac{1}{1-\nu} \right) \cdot \ln \lambda. \quad (\text{II.43})$$

3. Traction équi-biaxiale

La déformation est définie par :

$$x = \lambda \cdot X ; y = \lambda \cdot Y ; z = \lambda^{-2\nu/(1-\nu)} \cdot Z \quad (\text{II.44})$$

L'opérateur gradient de la transformation s'écrit :

$$(F)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2\nu/(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

Il vient alors :

$$\bar{B} = \bar{F} \bar{F}^T \rightarrow (B)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-4\nu/(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \ln \bar{B} \rightarrow (h)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \ln \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 \ln \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (-4\nu/(1-\nu)) \cdot \ln \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Le Jacobien de la transformation est donné par :

$$J = \det(\overline{\overline{F}}) = \lambda^{2(1-2\nu)/(1-\nu)} \quad (\text{II.48})$$

En utilisant l'équation (II.26), on peut calculer la contrainte de Cauchy :

$$\sigma^{TEB} = \sigma_{11} = \frac{1}{\lambda^{2(1-2\nu)/(1-\nu)}} (2\mu \cdot \ln \lambda + 2 \cdot \lambda_L \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \ln \lambda) \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma^{TEB} = \frac{1}{\lambda^{2(1-2\nu)/(1-\nu)}} 2(\mu + \lambda_L \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu}) \cdot \ln \lambda \quad (\text{II.50})$$

En tenant compte de l'expression du coefficient de Lamé λ_L (cf. Équation (II.34)), l'équation (II.50) s'écrit :

$$\sigma^{TEB} / \mu = \frac{1}{\lambda^{2(1-2\nu)/(1-\nu)}} 2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \cdot \ln \lambda . \quad (\text{II.51})$$

Les figures ci-dessous illustrent la variation de la contrainte de Cauchy en fonction de l'élongation en traction uniaxiale, cisaillement pur et traction équilibaxiale comparées à l'expérience pour différentes valeurs de ν .

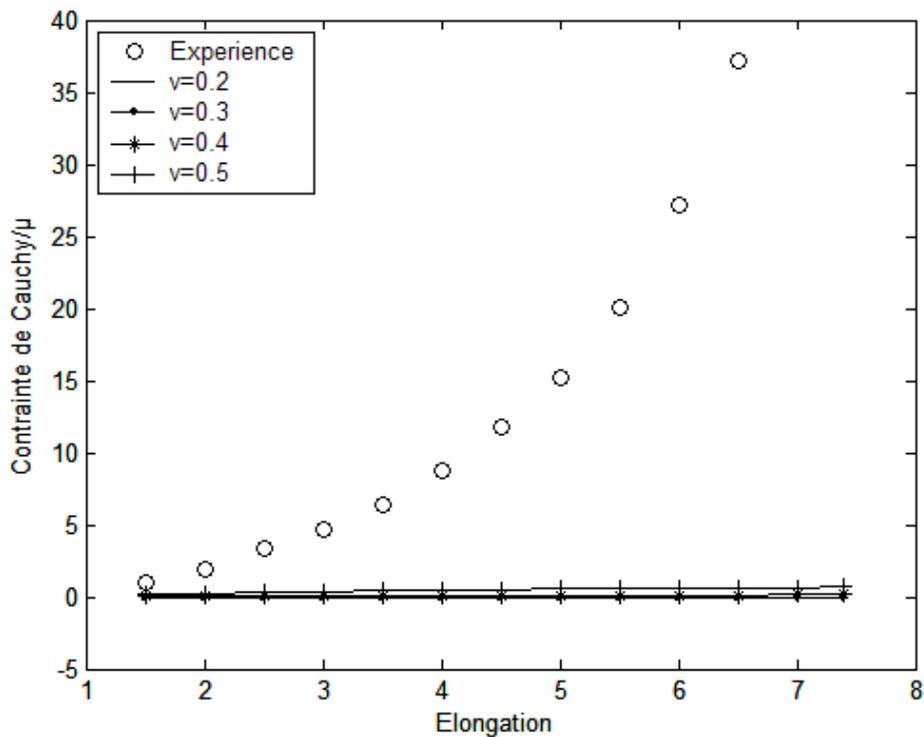


Fig. II.6: Courbes contrainte-élongation en traction uniaxiale pour différentes valeurs de ν .

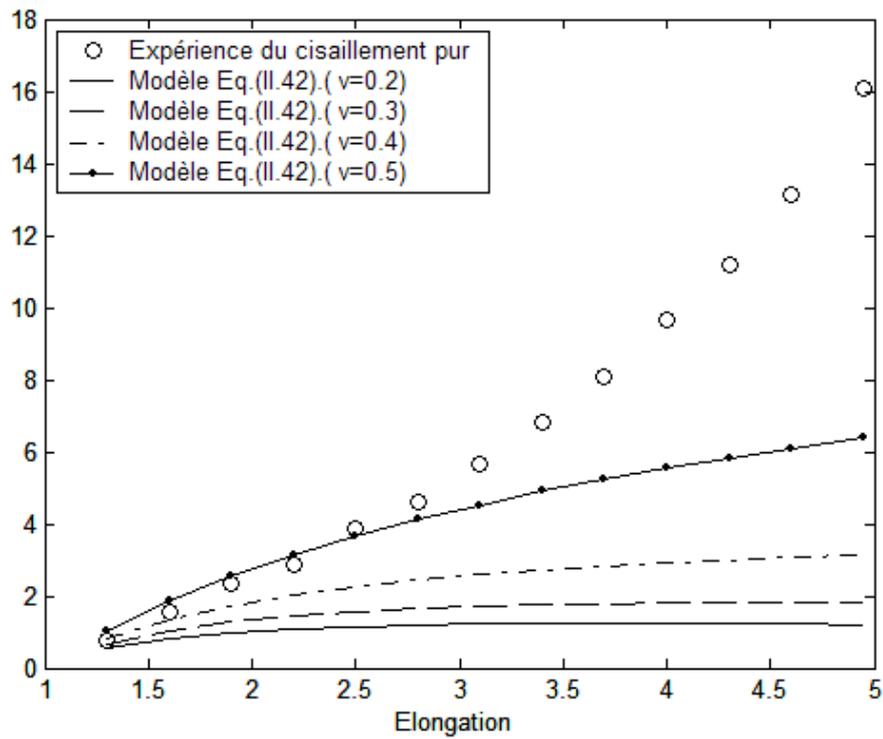


Fig. II.7: Courbes contrainte-élongation en cisaillement pur pour différentes valeurs de ν .

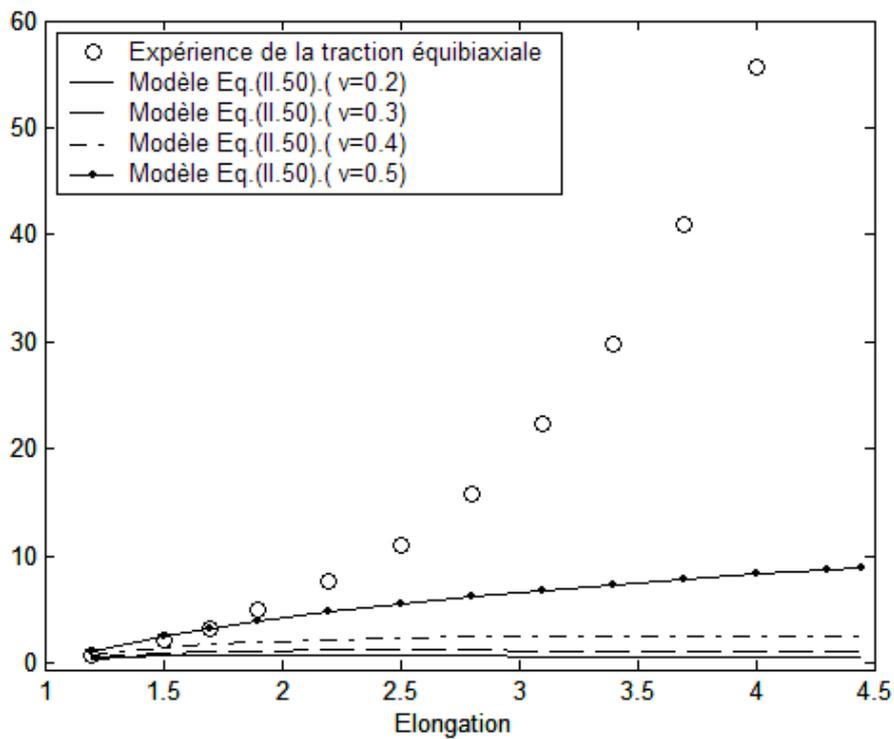


Fig. II.8: Courbes contrainte-élongation en traction équiaxiale pour différentes valeurs de ν .

Conclusion

L'approche qui consiste à étendre la loi de Hooke pour les milieux élastiques, homogènes et isotropes aux grandes déformations est mise en défaut. En effet, deux voies sont possibles : selon que l'on choisi la description lagrangienne développée par Farahani et al. (2004), ou eulérienne récemment proposée par Xiao et al. (2003). Ceci est dû au comportement fortement non linéaire et multiaxial des élastomères, ainsi on doit approcher ce comportement en introduisant un potentiel élastique afin de tenir compte des fortes non linéarités matérielles.

II.3 Modélisation avec l'approche indirecte : potentiel élastique basé sur la théorie de Green [G. Marckmann, 2004]

On postule l'existence d'un potentiel élastique, W , dépendant uniquement de l'état de déformation courant $\overline{\overline{F}}(t)$ et dont dérive les contraintes. En faisant l'hypothèse d'incompressibilité ($J = 1$ et $I_3 = 1$), les différents tenseurs de contraintes peuvent s'exprimer en fonction de W :

En écriture Lagrangienne :

$$\overline{\overline{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \overline{\overline{C}}} - p \overline{\overline{C}}, \quad (\text{II.52})$$

En écriture Eulérienne :

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2 \overline{\overline{B}} \frac{\partial W}{\partial \overline{\overline{B}}} - p \overline{\overline{I}}. \quad (\text{II.53})$$

Le principe d'objectivité impose d'écrire W sous une forme scalaire exprimée en fonction du tenseur de Cauchy Green droit $\overline{\overline{C}}$. En faisant de plus l'hypothèse d'isotropie, W peut s'exprimer en fonction des seuls invariants I_2 et I_3 de $\overline{\overline{C}}$.

$$W = W(I_2, I_3) \quad (\text{II.54})$$

Les invariants du tenseur $\overline{\overline{C}}$ sont donnés dans une base principale par :

$$\begin{cases} I_1(\overline{\overline{C}}) = \text{trace}(\overline{\overline{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2(\overline{\overline{C}}) = \frac{1}{2}[(\text{trace}(\overline{\overline{C}}))^2 - \text{trace}(\overline{\overline{C}})^2] = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 \\ I_3(\overline{\overline{C}}) = \det(\overline{\overline{C}}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

Avec $I_1(\overline{\overline{B}}) = I_1(\overline{\overline{C}})$; $I_2(\overline{\overline{B}}) = I_2(\overline{\overline{C}})$; $I_3(\overline{\overline{B}}) = I_3(\overline{\overline{C}})$.

De nombreuses formes du potentiel élastique ont été proposées dans la littérature, la plus citée est celle de Rivlin (1948) qui est exprimée sous forme polynomiale de $(I_1 - 3)$ et de $(I_2 - 3)$:

$$W = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \quad (\text{II.56})$$

où C_{ij} sont des coefficients d'élasticité et $C_{00} = 0$

L et M sont des entiers tels que $L \geq 1$ et $M \geq 1$

En se limitant au premier terme de l'équation (I.56), on obtient le modèle Néo-Hookien qui permet de donner une bonne corrélation pour des taux de déformations modérées. Il est traduit par la loi :

$$W = C_{10} (I_1 - 3). \quad (\text{II.57})$$

Le modèle de Mooney-Rivlin (1940), est implémenté dans bon nombre de codes de calcul par éléments finis. Prend en compte les deux premiers termes du développement de Rivlin :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3). \quad (\text{II.58})$$

Le modèle phénoménologique de Yeoh (1990), est bien adapté pour les caoutchoucs chargés en noir de carbone, où $\frac{\partial W}{\partial I_2} \ll \frac{\partial W}{\partial I_1}$ pour les mélanges. Yeoh a proposé alors une énergie de

déformation à trois coefficients, où le second invariant n'apparaît pas :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3. \quad (\text{II.59})$$

Valanis et Landel (1967) ont postulé que l'énergie de déformation peut être écrite comme la somme de trois fonctions séparables :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3), \quad (\text{II.60})$$

les fonctions pouvant être développées sous forme logarithmique :

$$w = 2\mu \sum_{k=1}^{k=3} \lambda_k (\log \lambda_k - 1). \quad (\text{II.61})$$

Ogden (1972) introduit l'idée que W peut s'exprimer en fonction des élongations principales et propose une forme mathématique en série de puissances réelles :

$$W = \sum_{n=0}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3), \quad (\text{II.62})$$

où α_n sont des constantes sans dimension et les μ_n désignent les coefficients de cisaillement,

avec : $2\mu = \sum_{k=1}^N \mu_k \alpha_k$ (μ est le module de cisaillement du matériau). En général, une très

bonne corrélation avec les résultats expérimentaux est observée pour $N=3$. Le modèle d'Ogden donne une identification plus stable par rapport au modèle polynomial, et un meilleur lissage des résultats expérimentaux est obtenu jusqu'à des taux de déformation assez élevés.

Conclusion

L'utilisation de potentiel élastique dépendant des invariants classiques du tenseur de Green-Lagrange $W(I_1(\bar{C}), I_2(\bar{C}) \text{ et } I_3(\bar{C}))$ conduit à l'identification des paramètres du matériau dans le domaine des grandes déformations. La base de données expérimentales se limite à deux types d'essais : la traction uniaxiale et équibiaxiale (Diani et al, 1999), ou bien la traction uniaxiale et la compression plane (Chevalier, 2002 ; Béchir et al, 2006). En conséquence, ces paramètres sont mis en défaut dans le domaine des moyennes déformations. En d'autres termes, il est nécessaire de déterminer les paramètres du matériau dans ce domaine de déformation, ceci induit une gêne lors de l'implantation de ces modèles de comportement dans les codes de calcul par éléments finis (les valeurs numériques des paramètres du matériau dépendent du domaine de déformation).

Afin de s'affranchir de cette difficulté, on suggère l'introduction d'invariants logarithmiques, $W(I(\bar{h}), II(\bar{h}) \text{ et } III(\bar{h}))$. Notre apport constitue un complément aux travaux de Watanabe. (1992) ; Criscione et al. (2000) ; Diani et al. (2005).

Chapitre III

*Modélisation du Comportement hyper-
élastique et hyper-viscoélastique des
élastomères*

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons proposer un potentiel élastique original basé sur les invariants logarithmiques et non sur les invariants classiques de l'approche de Green. Afin de valider notre modèle, ses prédictions seront confrontées à des résultats expérimentaux de la littérature. Une tentative d'extension de ce modèle aux milieux hyper-viscoélastique est développée par la suite et cela sans passer par les modèles rhéologiques.

III.2 Modélisation du comportement élastique non linéaire

III.2.1 Modèle proposé

Considérons la relation établie par Xiao et al. (2003) :

$$\dot{\bar{W}} = \bar{\tau} : \bar{D} = \bar{\tau} : \dot{\bar{h}}, \quad (III.1)$$

on peut définir le couple de tenseurs contrainte-déformation conjugués :

$$\bar{\tau} = J \cdot \bar{\sigma}, \quad (III.2)$$

$$\bar{h} = \ln \bar{V}, \quad (III.3)$$

le matériau est supposé élastique, homogène et isotrope, selon Noll et al. (1965), le tenseur $\bar{\tau}$ peut s'exprimer par :

$$\bar{\tau} = a_0 \bar{I} + a_1 \bar{h} + a_2 (\bar{h})^2, \quad (III.4)$$

Le potentiel élastique est invariant par changement de coordonnées de l'espace, il convient alors de l'exprimer en fonction des invariants de \bar{h} (Watanabe et al, 1992) :

$$W = W(I(\bar{h}), II(\bar{h}) \text{ et } III(\bar{h})). \quad (III.5)$$

Par conséquent, la loi de comportement dérive du potentiel élastique de la manière suivante :

$$\bar{\tau} = \frac{\partial W}{\partial \bar{h}} = \frac{\partial W}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \bar{h}} + \frac{\partial W}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial \bar{h}} + \frac{\partial W}{\partial III} \frac{\partial III}{\partial \bar{h}} \quad (III.6)$$

On pose :

$$a_i = \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad (III.7)$$

$a_i = a_i(I, II, III)$ sont les paramètres du matériau dépendants des invariants I, II, III

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{h}} = \bar{I} \Rightarrow I = \bar{I} : \bar{h} \quad (III.8)$$

$$\frac{\partial II}{\partial \bar{h}} = \bar{h} \Rightarrow II = \frac{1}{2} (\bar{h} : \bar{h}) \quad (III.9)$$

$$\frac{\partial III}{\partial \bar{h}} = \bar{h}^2 \Rightarrow III = \frac{1}{3}(\bar{h}^3) \quad (III.10)$$

\bar{I} tenseur identité.

Pour un matériau incompressible on a :

$$J = 1 \quad (III.11)$$

$$I = h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (III.12)$$

Donc l'expression de la contrainte de Cauchy est :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + a_2\bar{h} + a_3(\bar{h})^2 \quad (III.13)$$

III.2.2 Étude des invariants du tenseur des déformations \bar{h}

En déformation homogène et dans une base principale, les invariants de \bar{h} ont pour expressions :

$$\begin{aligned} I(\bar{h}) &= h_1 + h_2 + h_3 \\ &= \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 \end{aligned} \quad (III.14)$$

$$\begin{aligned} II(\bar{h}) &= \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \\ &= \frac{1}{2}[(\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2 + (\ln \lambda_3)^2] \end{aligned} \quad (III.15)$$

$$\begin{aligned} III(\bar{h}) &= \frac{1}{3}(h_1^3 + h_2^3 + h_3^3) \\ &= \frac{1}{3}[(\ln \lambda_1)^3 + (\ln \lambda_2)^3 + (\ln \lambda_3)^3] \end{aligned} \quad (III.16)$$

Considérons les déformations fréquemment utilisées en mécanique des élastomères afin de hiérarchiser la pertinence de ces invariants

1. Traction uniaxiale

La déformation est donnée par

$$x = \lambda X ; y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y ; z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z, \quad (III.17)$$

Et les invariants sont de la forme :

$$I = 0 ; \quad (III.18)$$

$$II = \frac{3}{4}(\ln \lambda)^2 ; \quad (III.19)$$

$$III = \frac{1}{4}(\ln \lambda)^3 . \quad (III.20)$$

2. Cisaillement pur

La déformation est définie par :

$$x = \lambda X ; y = Y ; z = \frac{1}{\lambda} Z, \quad (\text{III.21})$$

les invariants sont :

$$I = 0 ; \quad (\text{III.22})$$

$$II = (\ln \lambda)^2 ; \quad (\text{III.23})$$

$$III = 0. \quad (\text{III.24})$$

3. Traction équibiaxiale

La déformation est donnée par :

$$x = \lambda X ; y = \lambda Y ; z = \frac{1}{\lambda^2} Z, \quad (\text{III.25})$$

les invariants sont donnés par :

$$I = 0 ; \quad (\text{III.26})$$

$$II = 3(\ln \lambda)^2 ; \quad (\text{III.27})$$

$$III = -2(\ln \lambda)^3 . \quad (\text{III.28})$$

Les figures (III.1, III.2) illustrent la variation des invariants en fonction de la déformation vraie et la variation du second invariant en fonction du troisième invariant.

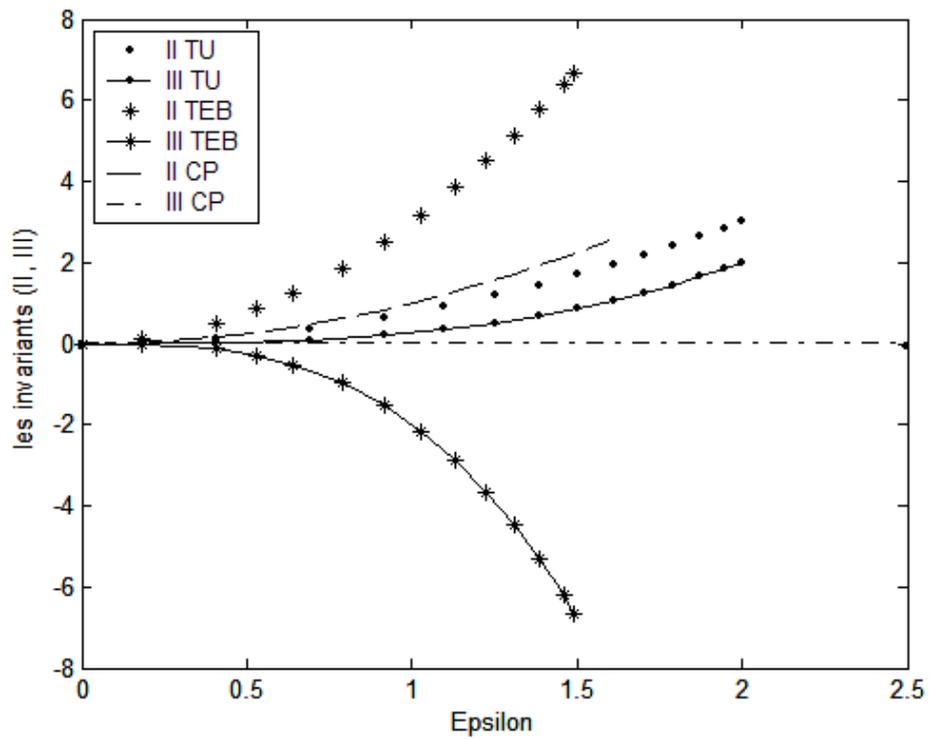


Fig. III.1 : Courbes des invariants en fonction de la déformation vraie, $\epsilon = \ln \lambda$

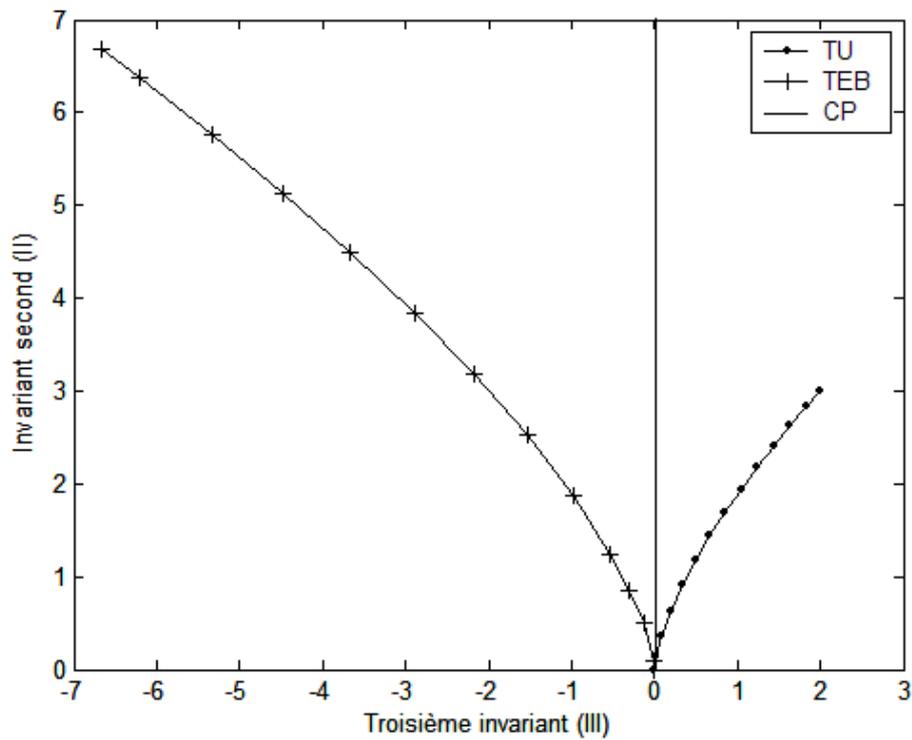


Fig. III.2: Courbes de la variation du second invariant en fonction du troisième invariant.

L'objectif est de formuler un potentiel élastique dont la loi de comportement peut reproduire la réponse du matériau pour n'importe quel chargement. Pour les matériaux incompressibles, on a : $I(\bar{h}) = 0$, le potentiel élastique dépend alors de deux invariants $II(\bar{h})$ et $III(\bar{h})$,

$$W = W(II(\bar{h}), III(\bar{h})) \quad (\text{III.29})$$

on suppose que le potentiel s'exprime de la manière suivante :

$$W = \int f(II).dII + \int g(III).dIII \quad (\text{III.30})$$

Cette approche par séparation des variables du potentiel élastique a été utilisée par Alexandre, (1968) ; Gent, (1996) et d'autres.

III.2.3 Identification des paramètres comportementaux du matériau

On identifie le potentiel élastique W découpé en deux termes qui dépendent des invariants II , III , on utilise les données expérimentales des essais de traction uniaxiale et de cisaillement pur effectués par Treloar (1944) sur du latex.

On définit les fonctions f et g à partir du potentiel W par :

$$\frac{\partial W}{\partial II} = f(II) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial III} = g(III). \quad (\text{III.31})$$

Notons que, du fait de la complexité des expressions, l'identification par simple minimisation de l'écart entre les données expérimentales et l'expression analytique peut ne pas être unique. Il est donc important d'avoir une bonne approximation initiale avant de commencer le processus de minimisation. Puisque l'invariant $III = 0$ dans le cas du cisaillement pur, la fonction $f(II)$ peut alors être directement identifiée à partir des résultats expérimentaux de la contrainte du cisaillement pur σ^{CP} :

$$\sigma^{CP} = f(II) \frac{\partial II}{\partial \ln \lambda}, \quad (\text{III.32})$$

$$\sigma^{CP} = 2 \ln \lambda . f(II), \quad (\text{III.33})$$

$$f(II) = \frac{\lambda \pi^{CP}}{2 \ln \lambda}. \quad (\text{III.34})$$

Nous avons choisi, pour approcher cette fonction, une forme polynomiale de degré 1 en fonction de $(II^{CP})^2$. Ce choix offre une bonne approximation avec un nombre limité de paramètres.

$$f(II) = a_1 + a_2 (II^{CP})^2 \quad (\text{III.35})$$

Connaissant la fonction $f(II)$, nous sommes maintenant capable de déterminer la fonction $g(III)$ à partir des résultats de la traction uniaxiale :

$$g(III) = \frac{4}{3(\ln \lambda)^2} [\lambda \pi^{TV} - \frac{3}{2} f(II) \ln \lambda] \quad (III.36)$$

La procédure d'identification consiste alors à minimiser l'écart entre la fonction théorique et les valeurs expérimentales. Nous avons choisi une forme exponentielle pour approcher g :

$$g(III) = B \exp(D \cdot III) \quad (III.37)$$

Les fonctions définitives obtenues sont utilisées pour prédire le comportement du matériau en traction uniaxiale, cisaillement pur et traction équi-biaxiale.

La contrainte de Cauchy en traction équi-biaxiale est calculée comme suit :

$$\sigma^{TEB} = f(II) \frac{\partial II}{\partial \ln \lambda} + g(III) \frac{\partial III}{\partial \ln \lambda}, \quad (III.38)$$

$$\sigma^{TEB} = 3 \ln \lambda f(II) - 3(\ln \lambda)^2 g(III). \quad (III.39)$$

III.2.4 Validation du modèle proposé

On va comparer les prédictions de notre modèle aux résultats expérimentaux de Treloar effectué sur le Latex en traction uniaxiale, cisaillement pur et traction équi-biaxiale. Les résultats de l'identification sont portés sur le tableau suivant :

	Les paramètres (MPa)
La fonction $f(II)$	$a_1 = 0.92561$ $a_2 = 0.28334$
La fonction $g(III)$	$B = 0.26264$ $D = 1.72077$

Tableau III.1 : Paramètres identifiés à partir de l'essai du cisaillement pur et de l'essai de traction uniaxiale [Treloar (1944)].

On représente sur les figures (III.3, III.4, III.5) les prédictions de notre modèle qu'on compare aux résultats expérimentaux de Treloar (1944).

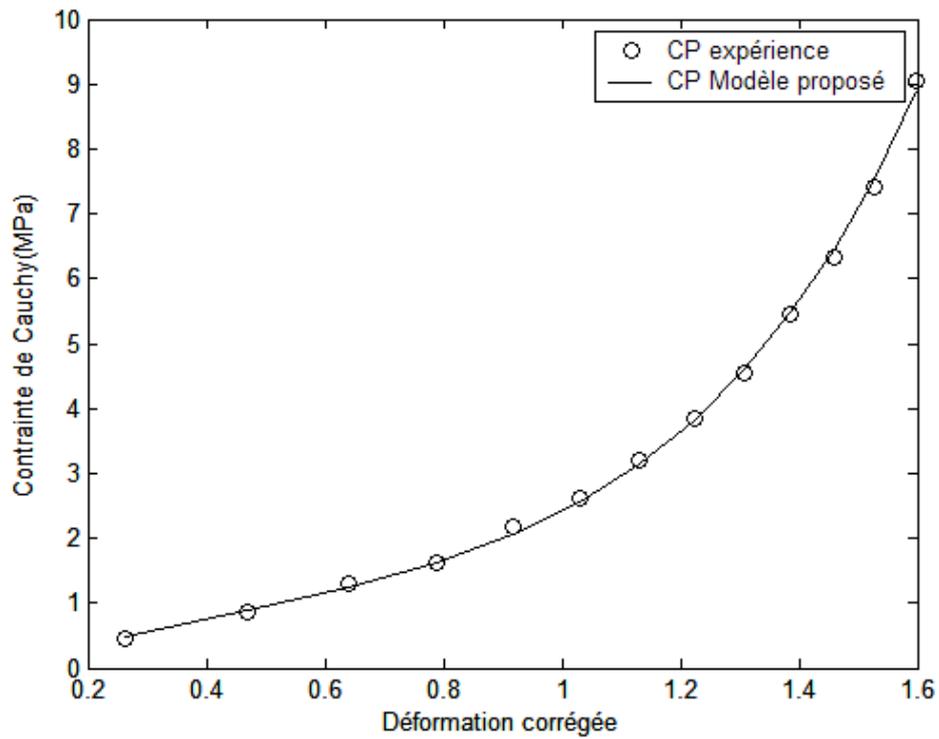


Fig .III.3 : Comparaison des prédictions de notre modèle aux résultats expérimentaux de Treloar(1944) en cisaillement pur.

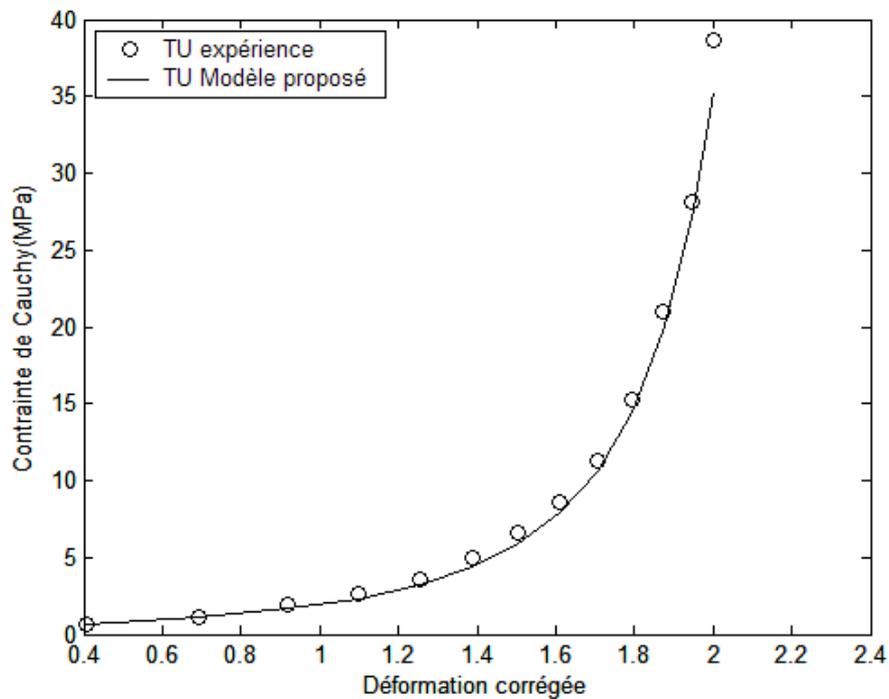


Fig .III.4: Comparaison des prédictions de notre modèle aux résultats expérimentaux de Treloar(1944) en traction uniaxiale.

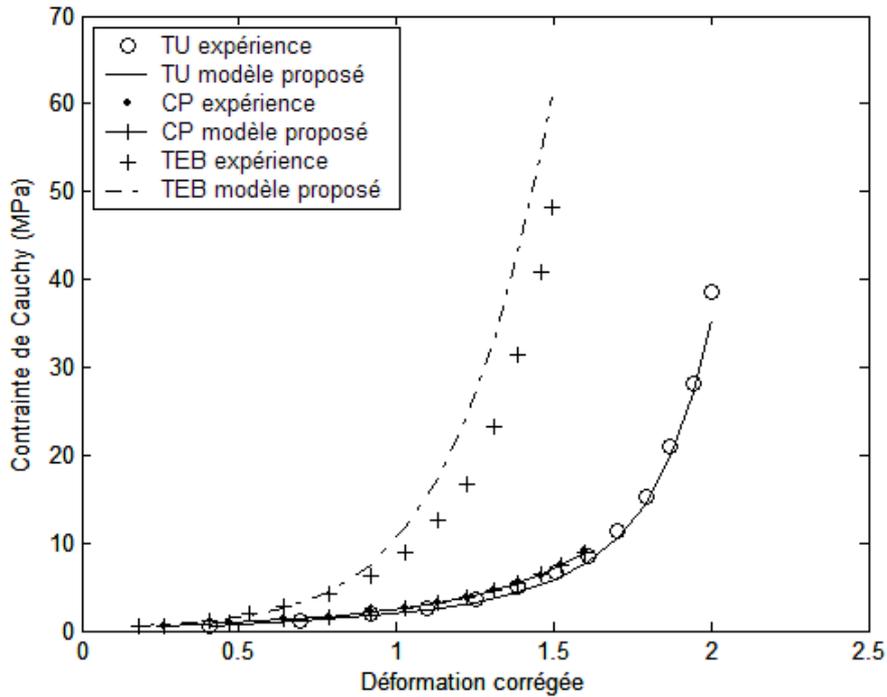


Fig .III.5 : Comparaison des prédictions de notre modèle aux résultats expérimentaux de Treloar(1944) pour les trois modes de chargement.

2.5 Discussion des résultats

Il est important de noter qu'un modèle de comportement doit prédire le comportement du matériau pour tout types de chargement, on constate que notre modèle simule avec une bonne précision la réponse des élastomères en traction uniaxiale et cisaillement pur dans les domaines des petites et des grandes déformations. Il simule correctement la réponse en traction équibiaxiale pour des déformations modérées ($\lambda \leq 3$).

Ce modèle contient un nombre de paramètres réduit conduisant à une identification relativement simple de ces constantes.

III.3 Modélisation du comportement hyper viscoélastique

Introduction

L'expérience montre que le comportement des élastomères (élasticité et amortissement) dépend du temps d'application de la charge ou de la fréquence d'excitation de la sollicitation en régime harmonique. En d'autres termes, le comportement de ces matériaux est viscoélastique non linéaire. Les essais classiques permettant de mettre en évidence ce comportement sont les essais de relaxation (ou de fluage) : on impose un déplacement et on enregistre la réponse (force) décroissante en fonction du temps. Le deuxième essai courant est d'appliquer un déplacement (ou une force) variable au cours du temps et mesurer la rigidité qui se présente sous forme complexe, présentant une partie réelle et une partie imaginaire. La partie réelle nous renseigne sur l'énergie stockée dans la structure, quant à la partie imaginaire est corrélée à la dissipation de l'énergie sous forme de frottement dû à la viscosité du matériau. On se limite à ces deux types de chargement dans le cadre de ce mémoire.

III.3.1 Loi de comportement viscoélastique linéaire [Christensen, 1983]

Le comportement viscoélastique linéaire peut être défini à partir uniquement de la donnée de l'une des fonctions réponse : de fluage (évolution de la déformation en réponse à un échelon de contrainte), ou de relaxation (évolution de la contrainte en réponse à un échelon de déformation). Les hypothèses de linéarité du comportement, ainsi que le principe de superposition de Boltzmann (si l'on superpose deux histoires de sollicitations, la réponse est la superposition des réponses) permettent alors d'écrire la réponse à toute histoire de sollicitation à partir de la connaissance des fonctions de retard ou de relaxation. Les hypothèses retenues pour établir la formulation fonctionnelle d'un problème de viscoélasticité linéaire sont les suivantes :

- La contrainte $\sigma(t)$ (respectivement déformation) est une fonctionnelle de toute l'histoire des déformations (respectivement contraintes) ;
- Le matériau est non vieillissant (les fonctions de retard et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable temporelle) ;
- La fonctionnelle est linéaire.

La loi de comportement viscoélastique linéaire d'un matériau peut être obtenue, en appliquant le principe de correspondance (Christensen, 1983), c'est-à-dire, le produit simple de la loi de comportement définie en élasticité linéaire se transforme en produit de convolution. La loi de comportement en élasticité linéaire d'un matériau homogène et isotrope est :

$$\bar{\sigma}(t) = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda_L (\bar{\varepsilon} : I) \bar{I}, \quad (\text{III.40})$$

en viscoélasticité linéaire, l'équation (III.40) se transforme de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = 2\mu(t) * \bar{\varepsilon}(t) + \lambda_L(t) * (\bar{\varepsilon}(t) : I) \bar{I}, \quad (\text{III.41})$$

ou

$$\bar{\sigma}(t) = 2 \int_0^t \mu(t-s) \dot{\bar{\varepsilon}}(s) ds + \int_0^t \lambda_L(t-s) \text{tr}(\dot{\bar{\varepsilon}})(s) ds \quad (\text{III.42})$$

Il est commode de séparer les contributions des parties déviatoriques et sphériques :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \bar{\sigma}(t) - \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}(t) \bar{I} \\ \bar{e}(t) = \bar{\varepsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\varepsilon}(t) \bar{I} \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

$\bar{e}(t)$ et $\bar{\sigma}^D(t)$ sont respectivement les parties déviatoriques du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes.

En fonction de ces paramètres, la loi de comportement devient

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \int_0^t 2\mu(t-s) \dot{\bar{e}}(s) ds \\ \text{tr} \bar{\sigma}(t) = 3 \int_0^t K(t-s) \text{tr} \dot{\bar{\varepsilon}}(s) ds \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

où K est le coefficient de dilatation volumique, relié aux coefficients de Lamé par :

$$3K(t) = 3\lambda_L(t) + 2\mu(t) \quad (\text{III.45})$$

une forme équivalente de la relation (III.42) est alors :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t 2\mu(t-s) \dot{\bar{e}}(s) ds + \int_0^t K(t-s) \text{tr} \dot{\bar{\varepsilon}}(s) ds \quad (\text{III.46})$$

Si l'on considère que le matériau est complètement incompressible, seule la partie déviatorique des contraintes est à prendre en compte. L'incompressibilité se traduit par l'introduction d'une pression hydrostatique indéterminée, et on écrit :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t 2\mu(t-s) \dot{\bar{e}}(s) ds - p(t) \bar{I} \quad (\text{III.47})$$

Toutefois, la théorie de la viscoélasticité linéaire est défailante pour prédire le comportement de ces matériaux : elle ne prend pas en compte l'aspect grandes déformations.

III.3.2 Viscoélasticité non linéaire

La modélisation du comportement viscoélastique non linéaire des élastomères fait l'objet d'intenses recherches ces dernières années compte tenu de leur importance croissante dans des applications technologiques. Globalement, existe deux voies d'approche du comportement de ces matériaux : bon nombre de modèles sont développés en se basant sur le concept de configuration intermédiaire introduite par Siddoroff, (1974,1975). Dans ce cadre, on peut citer les travaux de Resse et al, (1998a, b) ; Huber et al, (2000) ; Laiarinandrasara et al, (2003). Quant à la deuxième voie est l'approche fonctionnelle généralisant l'intégrale de superposition de Boltzmann de la viscoélasticité linéaire. Au fait, pour les élastomères on cherche à étendre les modèles hyperélastiques avec la prise en compte de l'effet mémoire. Dans ce contexte, on peut citer les travaux de Christensen, (1980) ; O'Dowd et Knauss, (1995) ; Fosdick et Yu, (1998). L'originalité de ces modèles est que l'effet mémoire s'exprime à travers une convolution simple, comme dans le domaine linéaire. Dans ces modèles, les non linéarités sont simplement traitées en découplant les effets temps et déformation. La viscoélasticité du matériau s'exprime à travers une fonction de relaxation (isotrope) fonction du temps (mais indépendante de la déformation). Tandis que les effets des grandes déformations sont intégrés dans le potentiel élastique W des élastomères.

III.3.3 Modèle proposé

On applique le théorème de correspondance (Christensen, 1983) qui transforme le produit simple en produit de convolution à notre modèle (cf. Eq III.13) et en tenant compte du fait que le matériau est incompressible, on obtient :

$$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{I} + a_2(t) * \bar{h}(t) + a_3(t) * (\bar{h})^2(t) \quad (\text{III.48})$$

qu'on peut écrire sous forme intégrale de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \int_{-\infty}^t a_2(t-s) \frac{d\bar{h}(s)}{ds} ds + \int_{-\infty}^t a_3(t-s) \frac{d\bar{h}^2(s)}{ds} ds \quad (\text{III.49})$$

\bar{I} est le tenseur identité, p est la pression hydrostatique.

Pour tenir compte de l'effet temps, on pose :

$$a_2(t) = \frac{\partial W}{\partial II} + \varphi(t) \quad (\text{III.50})$$

$$a_3(t) = \frac{\partial W}{\partial III} + \psi(t) \quad (\text{III.51})$$

L'équation (III.49) s'écrit :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \bar{h}(t) + \frac{\partial W}{\partial III} \cdot \bar{h}^2(t) + \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \frac{d\bar{h}(s)}{ds} ds + \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \frac{d\bar{h}^2(s)}{ds} ds \quad (III.52)$$

L'essai de relaxation est défini par :

$$\lambda(t) = 1 + (\lambda_0 - 1) \cdot H(t), \quad (III.53)$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside

Considérons une éprouvette en élastomère isotrope et incompressible, subissant une déformation homogène en traction (ou compression) uniaxiale, la déformation est définie par :

$$h_1(t) = \ln \lambda(t), \quad h_2(t) = h_3(t) = -\frac{1}{2} \ln \lambda(t) \quad (III.54)$$

$\lambda(t)$ est l'élongation selon la direction de la traction. A l'aide des équations (III.53) et (III.54) et en éliminant la pression hydrostatique (cf. Annexe II), on obtient l'expression de la contrainte de Cauchy:

$$\sigma^{TU}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda_0)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \right) \cdot (\varphi(t) + \ln \lambda_0 \psi(t)) \quad (III.55)$$

Pour montrer que les deux dérivées partielles du potentiel élastique par rapport aux deux

invariants II et III sont convexes il suffit de calculer la dérivée seconde $\frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2}$:

on a :

$$\pi^{TU} = \frac{\sigma^{TU}}{\lambda_0} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} + \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} \quad (III.57)$$

on pose :

$$\pi_{hyp} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} \quad (III.58)$$

$$\pi_R = \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} \quad (III.59)$$

La composante hyperélastique de la contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\sigma_{hyp}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda_0)^2 \quad (III.60)$$

il vient alors :

$$\pi_{hyp} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot \frac{(\ln \lambda_0)^2}{\lambda_0} \quad (III.61)$$

$$\pi_{hyp} = \frac{3}{2}(a_0 + a_1 \frac{9}{16}(\ln \lambda_0)^4) \cdot \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} + \frac{3}{4} \cdot B \cdot \exp(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3) \cdot \frac{(\ln \lambda_0)^2}{\lambda_0} \quad (III.62)$$

La dérivée première est :

$$\frac{d\pi_{hyp}}{d\lambda_0} = \frac{3}{2 \cdot \lambda_0^2} [a_0(1 - \ln \lambda_0) + a_1 \frac{9}{16}(\ln \lambda_0)^4 \cdot (5 - \ln \lambda_0)] + \frac{3 \cdot B}{4 \cdot \lambda_0^2} \cdot (\ln \lambda_0) \cdot \exp(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3) \cdot [2 - \ln \lambda_0 + \frac{9 \cdot D}{16}(\ln \lambda_0)^3] \quad (III.63)$$

et la dérivée seconde donne :

$$\frac{d^2 \pi_{hyp}}{d\lambda_0^2} = \frac{3}{2 \cdot \lambda_0^3} [a_0(2 \cdot \ln \lambda_0 - 3) + a_1 \frac{9}{16}(\ln \lambda_0)^3 \cdot (20 - 15 \cdot \ln \lambda_0 + 2 \cdot (\ln \lambda_0)^2)] + \frac{3 \cdot B}{4 \cdot \lambda_0^3} \cdot \exp(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3) \cdot [2(1 - \ln \lambda_0 - (\ln \lambda_0)^2) + \frac{15 \cdot D}{4}(\ln \lambda_0)^3 + \frac{3 \cdot D}{4}(\ln \lambda_0)^4 \cdot (\frac{5}{2} + \frac{9 \cdot D}{16}(\ln \lambda_0)^2)] \quad (III.64)$$

La composante visqueuse de la contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \int [\varphi(t-s) + \psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s)] \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \cdot ds \quad (III.65)$$

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 \cdot [\varphi(t) + \frac{1}{2} \ln \lambda_0 \cdot \psi(t)] \quad (III.66)$$

$$\pi_R = \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} = \frac{3}{2} \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} \cdot [\varphi(t) + \frac{1}{2} \ln \lambda_0 \cdot \psi(t)] \quad (III.67)$$

on pose :

$$\varphi(u) = \frac{2}{3} r(u) \quad (III.68)$$

(III.67) s'écrit :

$$\pi_R = \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} \cdot r(t) + \frac{3}{4} \frac{(\ln \lambda_0)^2}{\lambda_0} \cdot \psi(t) \quad (III.69)$$

on calcule la dérivée première:

$$\frac{d\pi_R}{d\lambda_0} = (\frac{1 - \ln \lambda_0}{\lambda_0^2}) \cdot r(t) + \frac{3}{4} \ln \lambda_0 (\frac{2 \cdot - \ln \lambda_0}{\lambda_0^2}) \cdot \psi(t) \quad (III.70)$$

et la dérivée seconde est :

$$\frac{d^2 \pi_R}{d\lambda_0^2} = [\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3}] \cdot r(t) + \frac{3}{2} [\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3}] \cdot \psi(t) \quad (III.71)$$

$$\frac{d^2 \pi_R}{d\lambda_0^2} \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3} \right] r(t) + \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3} \right] \psi(t) \leq 0 \quad (\text{III.72})$$

$$\Rightarrow \psi(t) \geq \left[\frac{2 \cdot (3 - \ln \lambda_0)}{3 \cdot (1 + \ln \lambda_0 (\ln \lambda_0 - 3))} \right] r(t) \quad (\text{III.73})$$

La dérivée seconde de π^{TU} est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2} = & \left[\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3} \right] r(t) + \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3} \right] \psi(t) + \\ & \frac{3}{2 \cdot \lambda_0^3} [a_0 (2 \cdot \ln \lambda_0 - 3) + a_1 \frac{9}{16} (\ln \lambda_0)^3 \cdot (20 - 15 \cdot \ln \lambda_0 + 2 \cdot (\ln \lambda_0)^2)] + \\ & \frac{3B}{4 \cdot \lambda_0^3} \cdot \exp\left(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3\right) \cdot [2(1 - \ln \lambda_0 - (\ln \lambda_0)^2) + \frac{15D}{4} (\ln \lambda_0)^3 + \frac{3D}{4} (\ln \lambda_0)^4 \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{9D}{16} (\ln \lambda_0)^2\right)] \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

Il faut que :

$$\frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2} \leq 0 \quad (\text{III.75})$$

III.3.4 Détermination du module d'Young complexe

Afin de déterminer le module d'Young complexe, nous allons étudier un essai dynamique sous sollicitation sinusoïdale, en considérant toujours le modèle :

$$\begin{aligned} \sigma^{TU}(t) = & \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda(t))^2 \\ & + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (\varphi(t-s) + \ln \lambda(s) \cdot \psi(t-s)) \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

On considère la déformation sinusoïdale $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$, le régime permanent s'établit pour $t \gg t_0$, ω , étant la fréquence circulaire d'excitation de la structure. Les déformations sont petites, de sorte que $|\varepsilon_0| \ll 1$, et les termes d'ordre supérieur en $\varepsilon(s)$ sont négligeables.

L'histoire du chargement est donnée par l'équation :

$$\lambda(t) = \lambda_0 (1 + \varepsilon(t)), \quad (\text{III.77})$$

on pose :

$$\sigma^{TU}_{Hyp}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda(t))^2 \quad (\text{III.78})$$

$$\sigma^* = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (\varphi(t-s) + \ln \lambda(s) \cdot \psi(t-s)) \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds \quad (\text{III.79})$$

En tenant compte du fait que :

$$\frac{\partial W}{\partial II} = a_1 + a_2 \cdot II^2 \quad (\text{III.80})$$

$$\frac{\partial W}{\partial III} = B \cdot \exp(D \cdot III) \quad (\text{III.81})$$

en substituant l'équation (III.77) dans les équations (III.78), (III.80) et (III.81) et en retenant que les termes du premier ordre en $\varepsilon(t)$, l'équation (III.78) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma^{TU}_{Hyp}(t) = a_1 + \frac{9}{16} a_2 (\ln \lambda_0)^4 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) + \\ \left[\frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] \cdot \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

on pose :

$$\varphi(t-s) = k \psi(t-s) \quad (\text{III.83})$$

L'équation (III.79) s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{3}{2} (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (\text{III.84})$$

en faisant le changement de variables :

$$u = t - s \quad (\text{III.85})$$

on aboutit à :

$$\sigma^* = \frac{3}{2} (1 + k \cdot \ln \lambda_0) i \omega \varepsilon(t) \int_0^{+\infty} \varphi(u) \cdot \exp(-i \omega u) du \quad (\text{III.86})$$

afin de déterminer les fonctions de relaxation $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, nous allons tendre λ_0 vers un, afin de retrouver le module complexe d'Young dans le domaine linéaire :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E^*(i\omega, \lambda_0) = E^*(i\omega) \quad (\text{III.87})$$

en en déduit que :

$$\varphi(u) = \frac{2}{3} r(u) \quad (\text{III.88})$$

L'équation (III.86) s'écrit :

$$\sigma^* = (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \cdot \varepsilon(t) \quad (\text{III.89})$$

on pose :

$$\Delta \sigma^{TU}(t) = \sigma^{TU}(t) - \left[a_1 + \frac{9}{16} a_2 (\ln \lambda_0)^4 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \right] \quad (\text{III.90})$$

$$\frac{\Delta \sigma^{TU}}{\varepsilon(t)} = \left[\frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \quad (\text{III.91})$$

Et le module complexe d'Young est donné par :

$$E^*(i\omega, \lambda) = \left[\frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \quad (\text{III.92})$$

Les deux parties réelle et imaginaire du module complexe d'Young ont pour expressions :

$$E'(\omega, \lambda) = \left[\frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega) \quad (\text{III.93})$$

$$E''(\omega, \lambda) = (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E''(\omega) \quad (\text{III.94})$$

on pose :

$$E_\infty = \frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \quad (\text{III.95})$$

L'équation (III.93) s'écrit :

$$E'(\omega, \lambda) = E_\infty + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega) \quad (\text{III.96})$$

on calcule la limite des deux parties réelle et imaginaire du module complexe en faisant tendre

λ_0 vers un :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E'(\omega, \lambda_0) = E'(\omega) \quad (\text{III.97})$$

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E''(\omega, \lambda_0) = E''(\omega) \quad (\text{III.98})$$

L'amortissement dans le domaine non linéaire est donné par :

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \frac{E''(\omega, \lambda_0)}{E'(\omega, \lambda_0)} = \frac{(1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E''(\omega)}{E_\infty + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega)} \quad (\text{III.99})$$

ou encore :

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \frac{(1 + k \cdot \ln \lambda_0)}{1 + \frac{E_\infty}{E'(\omega)} + k \cdot \ln \lambda_0} \eta(\omega) \quad (\text{III.100})$$

on a :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} \eta(\omega, \lambda_0) = \eta(\omega) \quad (\text{III.101})$$

$\eta(\omega)$ est l'amortissement dans le domaine linéaire

*Conclusion et
perspectives*

Conclusion et perspectives

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la modélisation du comportement viscohyperélastique des élastomères. Dans une première étape nous nous sommes intéressés au comportement hyperélastique (élastique non linéaire) de ces matériaux, deux approches ont été développées : dans la première nous avons généralisé la loi de Hooke des milieux élastiques, linéaires homogènes et isotropes au domaine non linéaire des grandes déformations. La loi de comportement a été étudiée en descriptions lagrangienne et eulérienne ; nous avons montré que la loi de Hooke dans le domaine non linéaire prédit correctement le comportement des élastomères dans le domaine des moyennes déformations de l'ordre de 50%.

Afin de prédire le comportement élastique non linéaire de ces matériaux dans le domaine des grandes déformations, un potentiel élastique original a été introduit. En effet, ce potentiel s'exprime en terme d'invariants logarithmiques : on rappelle que dans l'approche classique de Green, le potentiel élastique est fonction des trois invariants du tenseur de Green-Cauchy droit \bar{C} . L'avantage des invariants logarithmiques est de permettre l'identification des paramètres du matériau sans distinction des domaines des petites et des grandes déformations. Le modèle proposé a été validé sur les résultats expérimentaux de la littérature, en l'occurrence ceux de Treloar, (1944). La détermination des paramètres du modèle se limite à la base de données expérimentales de deux essais relativement simple à mettre en œuvre : le cisaillement pur (ou simple) et la traction simple. Aussi, le modèle prédit avec une bonne précision le comportement du matériau en traction équibiaxiale, cet essai est difficilement réalisable d'un point de vue expérimental.

Dans la deuxième étape, le modèle élastique non linéaire proposé est étendu aux milieux visco-hyperélastiques ; la contrainte de Cauchy se présente alors comme la somme de deux composantes : hyperélastique et visqueuse. Le terme mémoire de la loi de comportement contient deux fonctions de relaxation $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ dont $\varphi(t)$ est corrélée à la fonction de relaxation définie dans le domaine linéaire $r(t)$. Cependant, la deuxième fonction de relaxation $\psi(t)$ reste à déterminer ; nous avons supposé qu'elle est proportionnelle à $\varphi(t)$: $\psi(t) = k\varphi(t)$, cette approximation doit être justifiée à l'avenir.

Nous avons calculé ensuite le module complexe d'Young dans le domaine non linéaire ; l'amortissement ainsi obtenu dépend de l'élongation imposée. Contrairement, les modèles de

la littérature présentent une seule fonction de relaxation conduisant à des amortissements indépendants de la pré-déformation, contredisant ainsi les résultats expérimentaux de la littérature (par ex. Nashiff et al, 1975). Par conséquent, notre modèle permet une prédiction prometteuse dans le domaine fréquentiel en comparaison avec les modèles existants de la littérature.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- [1] **Batra R, C and all. (1999).** Linear constitutive relations in isotropic finite viscoelasticity. *J. of elasticity.*55, 33-77.
- [2] **Batra R, C. (2000).** Comparison of results from four linear constitutive relations in isotropic finite elasticity. *Int. J. Non Linear Mechanics.*36, 421-432.
- [3] **Bechir H and all. (2006).** Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the Seth strain measures invariant. *European. J of Mechanics and Solids.* 25, 110-124.
- [4] **Blatz P, J., Ko W, L. (1962).** Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. *Transactions of the Society of Rheology.* 6, 223-251.
- [5] **Blatz P, J and all. (1974).** Strain energy function for rubber like materials based on a generalized measure of strain. *Transactions of the Society of Rheology.*18, 145-161.
- [6] **Chevalier L., Marco Y. (2004).** Application de la mesure de champs à la caractérisation uniaxiale ou multiaxiale des matériaux polymères. *Rhéologie.* 6, 45-53.
- [7] **Coirier. (2001).** Mécanique des milieux continus. Dunod.
- [8] **Criscione J.C and all. (2000).** An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *J. Mech.Phys.Solids.* 48, 2445-2465.
- [9] **Diani J., Gilormini P. (2005).** Combining the logarithmic strain and the full-network model for a better understanding of the hyperelastic behaviour of rubber-like material. *Journal of Mechanics and Physics of Solids.*53, 2579-2596.
- [10] **Farahani K., Bahai H (2004).** Hyperelastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensor for the Seth-Hill strain measures. *International Journal of Engineering Science.*42, 29-41.
- [11] **Farahani K., Naghdabadi R. (2000).** Conjugate stress of the Seth-Hill strain tensors. *International Journal of Solids and Structures.*37, 5247-5255.
- [12] **Hains D, W., Wilson W, D. (1979).** Strain energy density function for rubber-like materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids.*27, 345-360.
- [13] **Garrigues J. (2002).** Mécanique des milieux continus. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille.
- [14] **Germain P. (1995).** Cours de mécanique des milieux continus. Paris. Masson.

- [15] **Gregory M, J. (1979)**. The stress / strain behaviour of filled rubber at moderate strains. *Plastics and Rubber Materials and Applications*.184-188.
- [16] **Laiarinan drasana L et al. (2003)**. Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept with lagrangian formulation. *International Journal of plasticity*. 19, 977-1000.
- [17] **Lemaitre. (1985)**.Cours de mécanique des milieux continus. Paris. Dunod.
- [18] **Le Tallec P. (2006)**. Cours de mécanique des milieux continus. Ecole polytechnique.
- [19] **Lin R, C., Schomgurg V., Kletschkowski T. (2003)**. Analytical stress solution of a closed deformation path with stretching and shearing using the hypoelastic formulations .*Eur.J. Mech.Solids*.22, 443-461.
- [20] **Mandel J. (1966)**. Cours de mécanique des milieux continus. Les grands classiques.
- [21] **Marckmann G. (2004)**. Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflés. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- [22] **Nevière R. (2005)**. An extension of the non linear viscoelastic solids. *International Journal of Solids and Structures*.
- [23] **Resse, S., Govindje, S. (1998 a)**. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*.35, 3455-3482.
- [24] **Resse, S., Govindje, S. (1998 b)**. Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymer. *International Journal of Solids and Structures*.35, 3455-3482.
- [25] **Siddoroff F. (1974)**. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J de Mécanique*.13.
- [26] **Siddoroff F. (1975)**. Variable interne en viscoélasticité. Milieux avec configuration intermédiaire. *J de Mécanique*.14.
- [27] **Treloar L.R.G. (1944)**. Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc*.40,59-70.
- [28] **Watanabe O. (1992)**. Hyperelasticity theory based on rotationless strain. *JSME International Journal*.35, 53-61.

- [29] **Xiao H., Chen L, S. (2003).** Hencky's logarithmic strain and dual stress-train and train-stress relations in isotropic finite hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*.40, 1455-1463.

Annexe

Annexe I**Résultats expérimentaux de Treloar sur le Latex**

Le tableau suivant regroupe les résultats expérimentaux de Treloar effectués sur le latex, pour les chargements en traction uniaxiale, cisaillement pur et traction équi-biaxiale :

Traction uniaxiale		Cisaillement pur		Traction équi-biaxiale	
Elongatio n (λ)	Contrainte(MP a) (PK1)	Elongatio n (λ)	Contrainte(MP a) (PK1)	Elongatio n (λ)	Contrainte(MP a) (PK1)
1.5	0.39	1.3	0.34	1.20	0.32
2.0	0.54	1.6	0.54	1.50	0.54
2.5	0.76	1.9	0.69	1.70	0.64
3.0	0.88	2.2	0.74	1.90	0.78
3.5	1.03	2.5	0.87	2.20	0.88
4.0	1.23	2.8	0.93	2.50	1.00
4.5	1.47	3.1	1.03	2.80	1.14
5.0	1.71	3.4	1.13	3.10	1.31
5.5	2.06	3.7	1.23	3.40	1.45
6.0	2.55	4.0	1.36	3.70	1.69
6.5	3.23	4.3	1.47	4.00	1.96
7.0	4.02	4.6	1.61	4.30	2.21
7.5	5.22	5.0	1.83	4.45	2.43

Les paramètres du matériau sont (en MPa):

$$C_{10} = 0.179$$

$$C_{01} = 0.0090$$

$$C_{20} = -0.0018$$

$$C_{11} = -8.46 \times 10^{-5}$$

$$C_{02} = -3.71 \times 10^{-5}$$

$$C_{30} = 4.45 \times 10^{-5}$$

Le module du cisaillement peut être calculé à partir :

$$\mu = 3(C_{10} + C_{01}) = 0.564$$

Annexe II :**A. Calcul de la contrainte de Cauchy**

On applique le théorème de correspondance (Christensen, 1983) transformant le produit simple en produit de convolution. En partant de la loi constitutive de l'élasticité non linéaire (cf. Eq III.13) et en tenant compte que le matériau est incompressible, on obtient :

$$\bar{\sigma}(t) = -\bar{p}(t)\bar{I} + a_2(t) * \bar{h}(t) + a_3(t) * (\bar{h})^2(t) \quad (1)$$

qu'on peut écrire sous forme intégrale de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = -\bar{p}(t)\bar{I} + \int_{-\infty}^t a_2(t-s) \frac{\partial \bar{h}(s)}{\partial s} ds + \int_{-\infty}^t a_3(t-s) \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial s^2} ds \quad (2)$$

Le matériau est supposé non vieillissant, c'est-à-dire, nous avons une invariance par translation dans le temps.

On pose :

$$a_2(t) = \frac{\partial W}{\partial II} + \varphi(t) \quad (3)$$

$$a_3(t) = \frac{\partial W}{\partial III} + \psi(t) \quad (4)$$

L'équation (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) = -\bar{p}(t)\bar{I} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial W}{\partial II} \frac{\partial \bar{h}(s)}{\partial s} ds + \int_{-\infty}^t \frac{\partial W}{\partial III} \frac{\partial^2 \bar{h}(s)}{\partial s^2} ds + \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \frac{\partial \bar{h}(s)}{\partial s} ds \\ + \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \frac{\partial^2 \bar{h}(s)}{\partial s^2} ds \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) = -\bar{p}(t)\bar{I} + \frac{\partial W}{\partial II} (\bar{h}(t) - \bar{h}(-\infty)) + \frac{\partial W}{\partial III} (\bar{h}^2(t) - \bar{h}^2(-\infty)) + \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \frac{\partial \bar{h}(s)}{\partial s} ds \\ + \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \frac{\partial^2 \bar{h}(s)}{\partial s^2} ds \end{aligned} \quad (6)$$

En tenant compte du fait que $\bar{h}(s)$ est causale, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{h}(-\infty) = 0, \\ \bar{h}^2(-\infty) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation (6) s'écrit :

$$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{I} + \frac{\partial W}{\partial II} \bar{h}(t) + \frac{\partial W}{\partial III} \bar{h}^2(t) + \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \cdot \frac{\partial \bar{h}(s)}{\partial s} ds + \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \cdot \frac{\partial \bar{h}^2(s)}{\partial s^2} ds \quad (8)$$

L'essai de relaxation est défini par :

$$\lambda(t) = 1 + (\lambda_0 - 1)H(t) \quad (9)$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside, définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Considérons une éprouvette en élastomère isotrope et incompressible, subissant une déformation homogène en traction (ou compression) uniaxiale, la déformation est définie par :

$$h_1(t) = \ln \lambda(t), \quad h_2(t) = h_3(t) = -\frac{1}{2} \ln \lambda(t) \quad (11)$$

$\lambda(t)$ est l'élongation selon la direction de la traction.

Pour un essai de traction uniaxiale on a :

$$\sigma^{TU} = \sigma_{11} \quad (12.a)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (12.b)$$

A l'aide des équations (8) et (11) et pour éliminer la pression hydrostatique, on calcule la différence $\sigma_{11} - \sigma_{22}$, on aboutit à l'expression de la contrainte de Cauchy :

$$\sigma(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \ln \lambda(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} (\ln \lambda(t))^2 + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \cdot \frac{d \ln \lambda(s)}{ds} ds + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s) \frac{d \ln \lambda(s)}{ds} ds \quad (13)$$

en tenant compte du fait que :

$$\ln \lambda(t) = \ln \lambda_0, \quad (13)$$

$$\frac{d \lambda(s)}{ds} = (\lambda_0 - 1) \delta(s), \quad (14)$$

L'équation (II.12) s'écrit :

$$\sigma(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} (\ln \lambda_0)^2 + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (\varphi(t-s) + \psi(t-s) \cdot \ln \lambda_0) \frac{1}{\lambda_0} (\lambda_0 - 1) \delta(s) ds \quad (15)$$

en utilisant la propriété de la distribution $\delta(s)$:

$$\delta(s) = \delta(-s) \quad (16)$$

on aboutit à l'expression de la contrainte de Cauchy :

$$\sigma^{TU}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda_0)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \right) \cdot (\varphi(t) + \ln \lambda_0 \psi(t)) \quad (17)$$

B. calcul de dérivée seconde de π^{TU}

le modèle proposé est défini par :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \bar{h}(t) + \frac{\partial W}{\partial III} \cdot \bar{h}^2(t) + \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \frac{d\bar{h}(s)}{ds} ds + \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \frac{d\bar{h}^2(s)}{ds} ds \quad (1)$$

$$\sigma^{TU}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda_0)^2 + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t [\varphi(t-s) + \psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s)] \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \quad (2)$$

on a :

$$\pi^{TU} = \frac{\sigma^{TU}}{\lambda_0} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} + \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} \quad (3)$$

on pose :

$$\pi_{hyp} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} \quad (4)$$

$$\pi_R = \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} \quad (5)$$

les deux composantes hyperélastique et visqueuse de la contrainte de Cauchy sont données par :

$$\sigma_{hyp}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda_0)^2 \quad (6)$$

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t [\varphi(t-s) + \psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s)] \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \cdot ds \quad (7)$$

on pose :

$$\Phi_1(t) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \cdot ds \quad (8)$$

$$\Phi_2(t) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t [\psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s)] \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \cdot ds \quad (9)$$

on utilise l'intégration par partie :

$$\Phi_1(t) = \frac{3}{2} (\varphi(t-s) \cdot \ln \lambda(s)) \Big|_0^- - \frac{3}{2} \int_0^- \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds \quad (10)$$

$$\Phi_1(t) = \frac{3}{2} \varphi(0) \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{2} \int_0^- \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial (t-s)} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds \quad (11)$$

$$\frac{3}{2} \int_{0^-}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds = \frac{3}{2} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds + \frac{3}{2} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds \quad (12)$$

$$= 0 + \frac{3}{2} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda(s) \cdot ds \quad (13)$$

$$= \frac{3}{2} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda_0 \cdot ds \quad (14)$$

On utilise un changement de variable :

$$t - s = u$$

(14) s'écrit :

$$\frac{3}{2} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot \ln \lambda_0 \cdot ds = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 \cdot [\varphi(t) - \varphi(0)] \quad (15)$$

donc :

$$\Phi_1(t) = \frac{3}{2} \varphi(0) \cdot \ln \lambda_0 + \frac{3}{2} \ln \lambda_0 \cdot [\varphi(t) - \varphi(0)] \quad (16)$$

$$\Phi_1(t) = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 \cdot \varphi(t) \quad (17)$$

de la même manière, on calcule :

$$\Phi_2(t) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \cdot \ln \lambda(s) \cdot \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \cdot ds \quad (18)$$

$$\frac{d}{ds} [\ln \lambda(s)]^2 = 2 \cdot \ln \lambda(s) \cdot \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s)) \quad (19)$$

(18) s'écrit :

$$\Phi_2(t) = \frac{3}{4} \int_{-\infty}^t \psi(t-s) \cdot \frac{d}{ds} (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds \quad (20)$$

L'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= \frac{3}{4} (\psi(t-s) \cdot (\ln \lambda(s))^2) \Big|_{0^-}^t - \frac{3}{4} \int_{0^-}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds \\ &= \frac{3}{4} \psi(0) \cdot (\ln \lambda_0)^2 - \frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds &= \frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds + \frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial s} \cdot (\ln \lambda(s))^2 \cdot ds \\ &= 0 - \frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial(t-s)} \cdot (\ln \lambda_0)^2 \cdot ds \end{aligned} \quad (22)$$

on fait le changement de variable :

$$t - s = u$$

$$-\frac{3}{4} \int_{0^+}^t \frac{\partial \varphi(t-s)}{\partial (t-s)} (\ln \lambda_0)^2 . ds = -\frac{3}{4} . (\ln \lambda_0)^2 [\psi(t) - \psi(0)] \quad (23)$$

Donc :

$$\Phi_2(t) = \frac{3}{4} (\ln \lambda_0)^2 \psi(0) - \frac{3}{4} (\ln \lambda_0)^2 [\psi(t) - \psi(0)] \quad (24)$$

$$\Phi_2(t) = \frac{3}{4} (\ln \lambda_0)^2 \psi(t) \quad (25)$$

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) \quad (26)$$

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 \varphi(t) + \frac{3}{4} (\ln \lambda_0)^2 \psi(t) \quad (27)$$

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 [\varphi(t) + \frac{1}{2} \ln \lambda_0 \psi(t)] \quad (28)$$

On pose :

$$\psi(t) = k . \varphi(t) \quad (29)$$

(28) s'écrit :

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \ln \lambda_0 (1 + \frac{k}{2} \ln \lambda_0) . \varphi(t) \quad (30)$$

en tenant compte du fait que :

$$\lambda_0 = 1 + \varepsilon_0 \quad (31)$$

$$\ln \lambda_0 = \ln(1 + \varepsilon_0) = \varepsilon_0 \quad (32)$$

(28) s'écrit :

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 (1 + \frac{k}{2} \varepsilon_0) \varphi(t) \quad (33)$$

Sachant que :

$$\varepsilon_0 \ll 1 \quad (34)$$

$$\frac{k}{2} \varepsilon_0^2 \ll 1 \quad (35)$$

(30) s'écrit :

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \varphi(t) \quad (36)$$

en linéaire, on a :

$$\Phi(t) = \varepsilon_0 . r(t) \quad (37)$$

à partir des équations (33) et (34), on aboutit à :

$$\varphi(t) = \frac{2}{3}r(t) \quad (38)$$

on a :

$$\pi_R = \frac{\Phi(t)}{\lambda_0} = \frac{3 \ln \lambda_0}{2 \lambda_0} \cdot [\varphi(t) + \frac{1}{2} \ln \lambda_0 \cdot \psi(t)] \quad (39)$$

$$\pi_R = \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} \cdot r(t) + \frac{3 (\ln \lambda_0)^2}{4 \lambda_0} \cdot \psi(t) \quad (40)$$

on calcule la dérivée première:

$$\frac{d\pi_R}{d\lambda_0} = \left(\frac{1 - \ln \lambda_0}{\lambda_0^2}\right) \cdot r(t) + \frac{3}{4} \ln \lambda_0 \left(\frac{2 - \ln \lambda_0}{\lambda_0^2}\right) \cdot \psi(t) \quad (41)$$

et la dérivée seconde est :

$$\frac{d^2\pi_R}{d\lambda_0^2} = \left[\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3}\right] \cdot r(t) + \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3}\right] \cdot \psi(t) \quad (42)$$

$$\frac{d^2\pi_R}{d\lambda_0^2} \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3}\right] \cdot r(t) + \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3}\right] \cdot \psi(t) \leq 0 \quad (43)$$

$$\Rightarrow \psi(t) \geq \left[\frac{2 \cdot (3 - \ln \lambda_0)}{3 \cdot (1 + \ln \lambda_0 (\ln \lambda_0 - 3))}\right] \cdot r(t) \quad (44)$$

On a :

$$\pi_{hyp} = \frac{\sigma_{hyp}}{\lambda_0} = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot \frac{(\ln \lambda_0)^2}{\lambda_0} \quad (45)$$

$$\pi_{hyp} = \frac{3}{2} (a_0 + a_1 \frac{9}{16} (\ln \lambda_0)^4) \cdot \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} + \frac{3}{4} \cdot B \cdot \exp\left(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3\right) \cdot \frac{(\ln \lambda_0)^2}{\lambda_0} \quad (46)$$

La dérivée première est :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_{hyp}}{d\lambda_0} = & \frac{3}{2 \cdot \lambda_0^2} [a_0 (1 - \ln \lambda_0) + a_1 \frac{9}{16} (\ln \lambda_0)^4 \cdot (5 - \ln \lambda_0)] + \\ & \frac{3 \cdot B}{4 \cdot \lambda_0^2} \cdot (\ln \lambda_0) \cdot \exp\left(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3\right) \cdot \left[2 - \ln \lambda_0 + \frac{9 \cdot D}{16} (\ln \lambda_0)^3\right] \end{aligned} \quad (47)$$

et la dérivée seconde donne :

$$\frac{d^2 \pi_{hyp}}{d\lambda_0^2} = \frac{3}{2\lambda_0^3} [a_0 (2 \ln \lambda_0 - 3) + a_1 \frac{9}{16} (\ln \lambda_0)^3 \cdot (20 - 15 \ln \lambda_0 + 2 \cdot (\ln \lambda_0)^2)] +$$

$$\frac{3.B}{4\lambda_0^3} \cdot \exp\left(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3\right) \cdot [2(1 - \ln \lambda_0 - (\ln \lambda_0)^2) + \frac{15.D}{4} (\ln \lambda_0)^3 + \frac{3.D}{4} (\ln \lambda_0)^4 \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{9.D}{16} (\ln \lambda_0)^2\right)] \quad (48)$$

On a :

$$\pi^{TU} = \pi_R + \pi_{hyp} \quad (49)$$

$$\frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2} = \frac{d^2 \pi_R}{d\lambda_0^2} + \frac{d^2 \pi_{hyp}}{d\lambda_0^2} \quad (50)$$

Les équations (42) et (48) donnent la dérivée seconde de π^{TU} :

$$\frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2} = \left[\frac{2 \ln \lambda_0 - 3}{\lambda_0^3} \right] \cdot r(t) + \frac{3}{2} \left[\frac{1 + \ln \lambda_0 \cdot (\ln \lambda_0 - 3)}{\lambda_0^3} \right] \cdot \psi(t) +$$

$$\frac{3}{2\lambda_0^3} [a_0 (2 \ln \lambda_0 - 3) + a_1 \frac{9}{16} (\ln \lambda_0)^3 \cdot (20 - 15 \ln \lambda_0 + 2 \cdot (\ln \lambda_0)^2)] +$$

$$\frac{3.B}{4\lambda_0^3} \cdot \exp\left(\frac{D}{4} \cdot (\ln \lambda_0)^3\right) \cdot [2(1 - \ln \lambda_0 - (\ln \lambda_0)^2) + \frac{15.D}{4} (\ln \lambda_0)^3 + \frac{3.D}{4} (\ln \lambda_0)^4 \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{9.D}{16} (\ln \lambda_0)^2\right)] \quad (51)$$

Il faut que :

$$\frac{d^2 \pi^{TU}}{d\lambda_0^2} \leq 0 \quad (52)$$

C. Calcul du module d'Young complexe

$$\sigma^{TU}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda(t))^2 + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (\varphi(t-s) + \ln \lambda(s) \cdot \psi(t-s)) \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds \quad (1)$$

on pose :

$$\sigma^{TU}_{Hyp}(t) = \frac{3}{2} \frac{\partial W}{\partial II} \cdot \ln \lambda(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial W}{\partial III} \cdot (\ln \lambda(t))^2 \quad (2)$$

$$\sigma^* = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (\varphi(t-s) + \ln \lambda(s) \cdot \psi(t-s)) \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds \quad (3)$$

On considère une déformation sinusoïdale

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

Le chargement est donné par :

$$\lambda(t) = \lambda_0 (1 + \varepsilon(t)) \quad (5)$$

$$\varepsilon(t) \ll 1 \quad (6)$$

$$\ln \lambda(t) = \ln \lambda_0 + \varepsilon(t) \quad (7)$$

$$\ln^2 \lambda(t) = \ln^2 \lambda_0 + 2 \cdot (\ln \lambda_0) \cdot \varepsilon(t) \quad (8)$$

Après calcul, on aura :

$$\frac{\partial W}{\partial III} = B \cdot \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{4} D (\ln \lambda_0)^2 \cdot \varepsilon(t)\right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial II} = a_1 + \frac{9}{4} a_2 \cdot (\ln \lambda_0)^3 \cdot \left(\frac{\ln \lambda_0}{4} + \varepsilon(t)\right) \quad (10)$$

En tenant compte des équations (7), (8), (9) et (10), l'équation (2) s'écrit :

$$\sigma^{TU}(t) = a_1 + \frac{9}{16} a_2 (\ln \lambda_0)^4 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) + \left[\frac{9}{4} a_2 (\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4} D \cdot (\ln \lambda_0)^2\right] \cdot \varepsilon(t) \quad (11)$$

on pose :

$$\varphi(t-s) = k \psi(t-s) \quad (12)$$

L'équation (3) s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^t (1 + k \cdot \ln \lambda(s)) \cdot \varphi(t-s) \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds \quad (13)$$

On a :

$$\frac{1}{\lambda(s)} = \frac{1}{\lambda_0} (1 + \varepsilon(s)) \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda(s)}{ds} = \lambda_0 \cdot \dot{\varepsilon}(s) \quad (15)$$

En négligeant les termes du second ordre en $\varepsilon(s)$, l'équation (13) s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{3}{2}(1 + k \cdot \ln \lambda_0) \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \cdot \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (16)$$

On a :

$$\dot{\varepsilon}(s) = i\omega \varepsilon_0 \exp(i\omega s) \quad (17)$$

L'équation (16) s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{3}{2}(1 + k \cdot \ln \lambda_0) i\omega \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \varphi(t-s) \cdot \exp(i\omega s) \cdot ds \quad (18)$$

En faisant le changement de variables :

$$u = t - s$$

L'équation (18) s'écrit :

$$\sigma^* = \frac{3}{2}(1 + k \cdot \ln \lambda_0) i\omega \varepsilon_0 \cdot \exp(i\omega t) \int_0^{+\infty} \varphi(u) \cdot \exp(-i\omega u) \cdot du \quad (19)$$

Ou encore :

$$\sigma^* = \frac{3}{2}(1 + k \cdot \ln \lambda_0) i\omega \varepsilon(t) \int_0^{+\infty} \varphi(u) \cdot \exp(-i\omega u) \cdot du \quad (20)$$

En viscoélasticité linéaire, le module complexe d'Young est égale à la transformée de Fourier de la fonction de relaxation $r(t)$ ([Ferry, 1980]), c'est-à-dire :

$$E^*(i\omega) = \tilde{\varphi}(u) \quad (21.a)$$

$$E^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \varphi(u) \cdot \exp(-i\omega u) \cdot du \quad (21.b)$$

Ce qui impose à poser :

$$\varphi(u) = \frac{2}{3} r(u) \quad (22)$$

$r(u)$ est la fonction de relaxation en linéaire.

L'équation (20) s'écrit alors :

$$\sigma^* = (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \cdot \varepsilon(t) \quad (23)$$

On pose :

$$\Delta\sigma^{TU}(t) = \sigma^{TU}(t) - [a_1 + \frac{9}{16} a_2 (\ln \lambda_0)^4 + B \exp(\frac{D}{4} (\ln \lambda_0)^2)] \quad (24)$$

$$\Delta\sigma^{TU}(t) = \left[\frac{9}{4}a_2(\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4}(\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4}D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] \cdot \varepsilon(t) + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \cdot \varepsilon(t) \quad (25)$$

$$\frac{\Delta\sigma^{TU}}{\varepsilon(t)} = \left[\frac{9}{4}a_2(\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4}(\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4}D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \quad (26)$$

Il vient alors :

$$E^*(i\omega, \lambda) = \left[\frac{9}{4}a_2(\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4}(\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4}D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E^*(i\omega) \quad (27)$$

Les deux parties réelle et imaginaire du module d'Young sont données par :

$$E'(\omega, \lambda) = \left[\frac{9}{4}a_2(\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4}(\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4}D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \right] + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega) \quad (28)$$

$$E''(\omega, \lambda) = (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E''(\omega) \quad (29)$$

on pose :

$$E_\infty = \frac{9}{4}a_2(\ln \lambda_0)^3 + B \exp\left(\frac{D}{4}(\ln \lambda_0)^2\right) \cdot \frac{3}{4}D \cdot (\ln \lambda_0)^2 \quad (30)$$

L'équation (III.) devient :

$$E'(\omega, \lambda) = E_\infty + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega) \quad (31)$$

on calcule la limite des deux parties réelle et imaginaire quand λ_0 tend vers un :

on a :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E_\infty = 0 \quad (32)$$

il vient alors :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E'(\omega, \lambda_0) = E'(\omega) \quad (33)$$

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} E''(\omega, \lambda_0) = E''(\omega) \quad (34)$$

L'amortissement est donné par :

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \frac{E''(\omega, \lambda_0)}{E'(\omega, \lambda_0)} = \frac{(1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E''(\omega)}{E_\infty + (1 + k \cdot \ln \lambda_0) \cdot E'(\omega)} \quad (35)$$

ou encore :

$$\eta(\omega, \lambda_0) = \frac{(1 + k \cdot \ln \lambda_0)}{1 + \frac{E_\infty}{E'(\omega)} + k \cdot \ln \lambda_0} \eta(\omega) \quad (36)$$

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} \eta(i\omega, \lambda_0) = \eta(i\omega) \quad (37)$$

