



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Présenté par

Mr. MEKBEL Fawzi

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Thème

**Etude paramétrique d'un indicateur
d'erreur de contact à posteriori
pour les problèmes tridimensionnels**

Soutenu le : //

Devant le Jury composé de :

Mr MAZA	Mustapha	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr BOUZERD	Hamoudi	Maître de conférences A	Univ. de Skikda	Examinateur
Mr HAMRI	Okba	Maître de conférences A	Univ. de Bejaia	Examinateur
Mr BECHEUR	Abdelhamid	Maître de conférences B	Univ. de Bejaia	Invité

Année Universitaire : 2014/2015

Résumé

En mécanique des structures, les applications dans lesquelles interviennent les problèmes de contact sont nombreuses. Les plus connues sont celles relatives aux appuis, aux zones d'application ou de transmission des charges, et aux zones de liaisons ou d'assemblages, etc. La modélisation et la compréhension de ces problèmes constituent un enjeu de première importance. La simulation numérique de ces phénomènes non linéaires complexes est le plus souvent effectuée par la méthode des éléments finis. Pour l'utilisateur de cette méthode numérique, l'aspect le plus important est, évidemment, de pouvoir évaluer les erreurs de discrétisation dues à ce type d'approximation. Dans le cadre des problèmes non linéaires de contact unilatéral, les travaux portant sur les estimations d'erreur a posteriori, demeurent encore peu nombreux ; c'est pour cela qu'on a mis au point un indicateur construit sur la base d'une association entre deux méthodes connues. La première concerne l'erreur obtenue par les techniques de projections dont les propriétés de super convergence sont utilisées pour le lissage des champs de contraintes dans les solides. La seconde concerne l'erreur portée par les relations constitutives établies au niveau des zones de contact. Cela étant dit, l'objectif de ce mémoire, consiste en une étude de l'influence de certains paramètres sur la convergence de l'erreur de contact fournie par un indicateur mis au point dans le cadre de la loi de frottement de Coulomb.

Mots-clés :

Méthode des éléments finis - erreur à posteriori - loi de frottement de Coulomb - lissage du champ de contraintes - contacts tridimensionnels - étude paramétrique.

Abstract

In structural mechanics, applications where contact problems are involved are many. The best known of them are those related to support, application or load transfer areas, and to connections or assembly areas, etc. Modeling and understanding of these problems are a major issue. Numerical simulation of these complex non-linear phenomena is most often done by the finite element method. For the user of this digital method, the most important aspect is, of course, to evaluate the errors of discretization due to this type of approximation. In the context of unilateral contact nonlinear problems, work on the a posteriori error estimates, are still few; this is why we have devised an indicator constructed on the basis of an association between two known methods. The first relates to the error obtained by the techniques of projections whose great convergence properties are used for smoothing stress in solid fields. The second error concerns the scope established by the constitutive relations at the contact areas. That said, the objective of this memory is a study of the influence of some parameters on the convergence of the error of contact provided by an indicator developed under the Coulomb friction law.

Keywords:

finite element method - a posteriori error - Coulomb friction law - smoothing of the stress field - three-dimensional contacts - parametric study.

ملخص

هناك العديد من التطبيقات التي تشمل على مشاكل التلامس في ميدان الميكانيكا الهيكلية. أشهرها تلك المتعلقة بالدعامات ومناطق التطبيق أو نقل الأحمال، و مناطق الربط أو التلامس، إلخ. نمذجة وفهم هذه المشاكل تشكل قضية ذات أهمية قصوى. و غالبا ما تتم المحاكاة العددية لهذه الظواهر غير الخطية المعقدة باستخدام طريقة العناصر المحدودة. للمستخدم لهذا الأسلوب الرقمي، فإن الجانب الأكثر أهمية هو، بطبيعة الحال، قابلية تقييم أخطاء التقريد الذي هو نتيجة التقارب. في سياق مشاكل التلامس الأحادية و غير الخطية، العمل على تقديرات الخطأ اللاحق، لا تزال قليلة، لذلك نقوم بوضع مؤشر مبني على أساس وجود علاقة بين اثنين من الطرق المعروفة. وتتعلق المسألة الأولى بالخطأ التي تم الحصول عليه عن طريق الإسقاطات أين يتم استخدام خصائص التقارب لتمليس حقول الإجهاد في المواد الصلبة. المسألة الثانية تتعلق بالخطأ الناتج عن العلاقات الأساسية الموضوعية في مناطق التماس. و بهذا يمكن أن نقول، أن الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة تأثير بعض العوامل على تقارب خطأ التلامس المقدم من مؤشر موضوع في نقطة، وفقا لقانون كولوم للاحتكاك.

الكلمات المفتاحية : طريقة العناصر المحدودة - الخطأ اللاحق - قانون كولومب للاحتكاك - تلميس حقول الإجهاد - اتصال ثلاثي الأبعاد - دراسة متعددة المؤشرات.

Remerciements

Je tiens à proclamer toute ma reconnaissance au professeur Mr. TAHAKOURT Abdelkader, pour sa confiance et son soutien afin de mener à bien cette recherche, qu'il en soit profondément remercié.

Je tiens à manifester particulièrement toute ma plus vive gratitude à Mr. BECHEUR Abdelhamid, qui a toujours fait preuve de disponibilité et qui m'a éclairé tout au long de mon travail par ses conseils et orientations. Son enthousiasme ingénieux accentue ma volonté et mon inspiration.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Mr. MAZA Mustapha, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette soutenance.

Mes remerciements vont également à Mr. BOUZERD Hamoudi et Mr. HAMRI Okba pour avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie des membres de jury de ma soutenance.

Enfin, toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes chers parents qui m'ont toujours soutenu et orienté vers le bon chemin. Je leurs dois un grand merci et je leurs éprouve un sentiment de gratitude et d'amour.

A la mémoire de mes grands-parents.

A mes très chers frères.

A mes adorables sœurs et leurs maris.

A tous mes amis qui me sont très chers.

Table des matières

Introduction générale.....	1
Chapitre 01 : Problème de contact unilatéral et sa résolution par la MEF	
I. Généralités.....	3
I.1 Les types de contacts.....	3
I.2 Les non linéarités dues au contact.....	4
I.3 Les lois de frottement existantes dans la littérature	4
II. Les frottements.....	4
II.1 Les lois de frottement	4
II.1.1 La loi de Tresca	4
II.1.2 La loi de Coulomb.....	5
II.1.3 La loi de Coulomb régularisée	6
II.2 La Loi de Coulomb en quasi statique	7
III. Hypothèses et données du problème.....	8
IV. Le contact unilatéral sans frottements.....	9
IV.1 Formulation locale.....	9
IV.2 Prise en compte des jeux initiaux.....	10
IV.3 Formulation variationnelle	11
V. Le contact unilatéral avec frottements	11
V.1 Formulation locale.....	11
V.2 Formulation variationnelle	13
V.3 Le problème du point fixe	14
VI. Le cas particulier du problème de Signorini.....	14
VII. La méthode des éléments finis : une brève description	16
VII.1 Principe de la méthode.....	16
VII.2 Convergences et mise en œuvre de la méthode :	17
VII.3 Les défauts de la solution éléments finis	18
VII.3.1 Le cas général.....	18
VII.3.2 Le cas de problème de contact	19
VIII. Résolution du problème de contact par éléments finis	20
VIII.1 Les relations discrètes du contact	20

Table des matières

VIII.2 La formulation discrète du problème de contact	22
VIII.3 Les méthodes de résolution	22
VIII.3.1 Les méthodes de points fixes(ou bien méthode des statuts).....	22
VIII.3.2 La méthodes de pénalisation	23
VIII.3.3 La méthode des multiplicateurs de Lagrange	23
VIII.3.4 Les méthodes mixtes.....	24
IX. Conclusion.....	25

Chapitre 02 Contrôle et estimations d'erreurs pour les problèmes de contact

I. Introduction.....	27
II. Estimation des erreurs de discrétisation	27
II.1 Sur l'estimation d'erreur a priori et a posteriori	27
II.2 Quelques définitions.....	28
II.3 Estimateur basé sur l'extrapolation de Richardson	29
II.4 Estimateur basé sur l'analyse duale	30
II.5 Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement	30
II.6 Estimateur basé sur les défauts d'équilibre de la solution	32
II.7 Estimateur basé sur le lissage du champ de contraintes.....	33
III. Estimation d'erreur pour le problème de contact	36
III.1 Erreur de contact associée à l'erreur en relation de comportement.....	37
III.2 Erreur de contact associée aux défauts d'équilibre de la solution.....	38
III.3 Erreur de contact associée au lissage du champ de contraintes.....	39
IV. Un indicateur d'erreur pour les problèmes contact avec frottements de Coulomb	41
V. La procédure d'adaptation de maillage.....	46
V.1 Principe.....	46
V.2 Les techniques d'adaptation de maillages	46
V.2.1 La méthode -r	47
V.2.2 La méthode -h.....	47
V.2.3 La méthode -p	49
V.2.4 La méthode -h p	50
VI. Construction du maillage optimal	50
VI.1 Définition d'un maillage optimal.....	50
VI.2 Résolution du problème d'optimisation	51
VI.2.1 Cas d'une solution suffisamment régulière	51
VI.2.2 Cas d'une solution comportant des zones à forts gradients	53

Table des matières

VII. Conclusion	56
Chapitre 03 Essais numériques, Analyse, interprétation et discussion des résultats	
I. Introduction.....	57
II. Stratégie et technique adoptées pour la résolution par éléments finis du problème.....	58
II.1 Données du problème	58
II.2 Résolution du problème par la MEF.....	58
II.2.1 Stratégie de résolution adoptée	58
II.2.2 Statuts des nœuds en contact et actualisation de l'aire de contact	59
II.2.3 Critères de convergence des calculs itératifs:	60
III. Implantation de l'indicateur d'erreur mis au point.....	62
IV. Etude des propriétés de convergence de l'indicateur d'erreur adopté	63
IV.1 Influence de la régularité de la solution au niveau de la surface de contact	63
IV.2 Influence du coefficient de frottement	69
V. Quelques exemples numériques d'adaptation de maillages	74
V.1 Exemple 01 : Cas de deux solides élastiques de formes tétraédrique et de dimensions différentes.....	74
V.2 Exemple 02 : Application au cas d'une semelle isolée appuyée sur un sol supposé élastique et déformable.....	78
V.3 Exemple 3 : Maillage du contact du mur de soutènement avec un sol rigide supposé indéformable	84
VI. Discussion et conclusion.....	89

Liste des figures

Figure 1 : Loi de tresca.....	5
Figure 2 : loi de Coulomb	5
Figure 3 : Cône de Coulomb	6
Figure 4 : Cône de Coulomb en 3D.....	6
Figure 5 : Loi de Coulomb régularisée.....	7
Figure 6 : Loi de Norton Hoff	7
Figure 7 : Deux corps élastiques déformables en contact unilatéral	8
Figure 8 : Corps élastique déformable en contact avec un socle rigide indéformable (Problème de Signorini)	15
Figure 9 : Schéma de la structure à modéliser par élément finis.....	16
Figure 10 : Cas de non vérification de la condition de non pénétration (ou de contact).....	19
Figure 11 : Problème des forces généralisées sur les éléments cubiques à 20 nœuds	19
Figure 12 : Maillages compatibles sur l'interface	20
Figure 13 : Maillages incompatibles sur l'interface	20
Figure 14 : Élément nœud à nœud	21
Figure 15 : Élément nœud-facette	21
Figure 16 : Patches d'éléments et positions des points et nœuds.....	36
Figure 17 : Patch d'éléments pour le lissage des contraintes en zone de contact	40
Figure 18 : Procédure d'adaptation	46
Figure 19 : r-version	47
Figure 20 : h-raffinement/déraffinement local	47
Figure 21 : Nœud "pendant".....	48
Figure 22 : h-remailage global	48
Figure 23 : p-version	49
Figure 24 : Définition des tailles	51
Figure 25 : Normes des vecteurs tangents G_{k+1} (notés G2N, bleu) et G_k (notés G1N, violet) ainsi que le cône de frottement de Coulomb (en rouge) sur une abscisse curviligne pour uncontact 3D	61
Figure 26: densités de réactions tangentes corrigées et non corrigées sur la surface de contact	62
Figure 27 : premier cas : Essai de compression de deux solides en contact avec effet de poinçonnement (surface de contact 5*5 type 1).....	64
Figure 28: Second cas : Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact 10*10, type 2).....	64
Figure 29: Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact 15*15, type 3)	64
Figure 30 : Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact 20*20, type4)	64
Figure 27 bis : Exemple de maillage du premier cas avec 33280 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact.....	65
Figure 28 bis : Exemple de maillage du second cas avec 36864 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact.....	65
Figure 29 bis : Exemple de maillage du troisième cas avec 46592 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact.....	65

Liste des figures

Figure 30 bis : Exemple de maillage du second cas avec 21296 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact.....	65
Figure 31: Erreurs relatives globales en fonction du nombre total d'éléments pour	66
Figure 32: Erreurs relatives globales en fonction de la taille moyenne des éléments pour	66
Figure 33: Erreurs de maillages pour chaque cas en fonction du nombre d'éléments avec $\mu = 0.50$	67
Figure 34: Erreurs relatives de contact pour chaque cas avec un coefficient de frottement égal à 0.50.....	68
Figure 35: Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE01 .	69
Figure 36: Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement du cas 01	70
Figure 37: Erreurs relatives de contact pour différentes valeurs de μ dans le cas du Type 1 .	71
Figure 38: Erreurs relatives de maillages pour différentes valeurs de μ dans le cas du Type1	71
Figure 39 : Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04	72
Figure 40 : Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04	72
Figure 41 : Erreurs de maillage relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04(QUA4).....	73
Figure 42: Erreurs de contact relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04(QUA4).....	74
Figure 43: courbe de convergence de l'erreur globale pour le cas du type 02 avec $\mu = 0.2$	75
Figure 44: Maillage grossier de 1429 éléments et carte d'erreur donnant $\varepsilon = 7.57\%$	75
Figure 45: Carte des tailles en cm des éléments à prescrire au mailleur.....	76
Figure 46: maillage obtenu et composé de 20352 éléments.....	76
Figure 47: carte des contributions à l'erreur du maillage adapté offrant	77
Figure 48: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises du maillage grossier.	77
Figure 49: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises avant et après adaptation de maillages.....	78
Figure 50: semelle en béton armé de $1.85 * 1.85 \text{ m}^2$ à la base	78
Figure 51: Modélisation tridimensionnelle du contact sol semelle.....	79
Figure 52: Carte des contributions à une erreur globale de 22 %.	79
Figure 53 : Carte des tailles à prescrire en vue de l'adaptation de maillage	80
Figure 54: Nouveau maillage composé de 10876 éléments.	80
Figure 55: Carte des contributions du maillage adapté donnant une erreur globale de 15.60 %	81
Figure 56: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage du bloc inférieur	82
Figure 57: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage de la semelle	82
Figure 58 : Réactions tangentes sur la surface de contact avant remaillage correspondant à une erreur de contact de 4.84 %	83
Figure 59: Réactions tangentes sur la surface de contact après remaillage correspondant à une erreur de contact de 5.38 %	83
Figure 60: Maillage grossier composé de 1313 éléments et de 474 nœuds	84
Figure 61 : Carte des contributions à une erreur globale de 26.4 %.	85
Figure 62: Configuration déformée du mur de soutènement	85
Figure 63: Correction des champs de densités de réactions sur la surface de contact.	86
Figure 64: Carte des tailles à prescrire en vue de l'adaptation de maillage	86
Figure 65: Nouveau maillage et cartes d'erreur pour éléments linéaires	87
Figure 66: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises avant remaillage.	87
Figure 67 : Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage.	88

Liste des figures

Figure 68: Champs des forces de frottement sur la surface de contact avant remaillage correspondant à une erreur de contact de 2.08 %	88
Figure 69: Champs des forces de frottement sur la surface de contact après remaillage correspondant à une erreur de contact de 4.87 %	89

Liste des symboles et abréviations

σ_n	[kPa]	la contrainte normale
τ	[kPa]	la contrainte tangentielle
ΔU_t	[m]	déplacements relatifs tangentiels
ΔU_n	[m]	déplacements relatifs normal
F	[kn]	force
ν		Coefficient de Poisson .
E	[kPa]	module d'élasticité (d'Young)
E_b	[kPa]	Le module de déformation du béton
γ		Déformation de cisaillement
ε_1		Déformation axial
Q	[KN]	La charge totale
U C		Le champs de déplacement
RC		le champ de densités de réactions
f_d		Densité de forces volumiques
[K]	[kn/m]	matrice de rigidité globale
[F]	[kn]	vecteur forces généralisées
F_d	[kn/m ²]	une densité surfacique d'efforts
u_t	[m]	glissement
\dot{u}_t	[m/s]	la vitesse de glissement
F _n	[kn]	composantes normales des forces de contact
F _t	[kn]	composantes la tangentiels des forces de contact

Introduction générale

Les problèmes de contact non linéaires sont fréquemment rencontrés dans le domaine de la mécanique des structures. Outre les conditions de non pénétration, l'adoption d'un modèle plus réaliste exige de prendre en compte les phénomènes naturels de frottement qui sont fréquemment représentés par la loi classique de Coulomb. Par ailleurs, les méthodes d'approximation par éléments finis sont généralement utilisées dans la résolution numérique de ces problèmes. L'évaluation de la qualité numérique des calculs par éléments finis consiste en une tâche importante qui peut être effectuée en utilisant soit un estimateur d'erreur à priori ou à posteriori. Dans le cadre de l'erreur à posteriori, différentes approches conduisant à divers estimateurs ont été initialement développées pour des problèmes linéaires. En effet, nous pouvons citer l'estimateur basé sur les résidus des équations d'équilibre (Babuska et Rheinboldt, 1978); les estimateurs liés au lissage des champs de contraintes (Zienkiewicz et Zhu, 1987 et 1992); et l'estimateur basé sur les erreurs dans la relation de comportement (Ladevèze, 1975).

En outre, dans le cadre de la loi de frottement de Coulomb, le problème mathématique de la non unicité de la solution demeure non seulement posé à ce jour mais semble particulièrement plus critique dans le cas du contact tridimensionnel. En effet, l'existence de la solution a été démontré mathématiquement par Necas et al (1980) et Jarusek (1983). En contrepartie, et à notre connaissance, aucun résultat concernant l'unicité de la solution n'est encore totalement disponible dans la littérature. Ce qui a conduit à de grandes difficultés de convergence de la solution numérique, particulièrement en 3D. Néanmoins, certains résultats mathématiques partiels ont été établis par Hild (2004) et Renard (2006) qui ont prouvé le caractère unique pour les cas particuliers de faibles valeurs du coefficient de frottements et de solutions régulières ou à faibles gradients de contraintes.. Il faut aussi mentionner la contribution de Haslinger et al (2010) qui ont montré que pour une certaine discrétisation appropriée, le problème possède une solution unique et ce, pour d'assez faibles valeurs du coefficient de frottement.

Par ailleurs, les travaux portant sur les estimations d'erreur a posteriori dans le cadre des problèmes non linéaires de contact unilatéral, demeurent encore peu nombreux. Nous pouvons citer les travaux de Wriggers et al (1994, 1999 et 2001), de Coorevits et al (2001), de Louf et al (2003) et de Becheur et al (2008). Ces derniers ont mis au point un indicateur construit sur la base d'une association entre deux méthodes connues. La première concerne l'erreur obtenue par les techniques de projections dont les propriétés de super convergence sont utilisées pour le lissage des champs de contraintes dans les solides. La seconde concerne l'erreur portée par les relations constitutives établies au niveau des zones de contact.

L'objectif de la présente memoire, consiste en une étude de l'influence de certains paramètres essentiels sur la convergence de l'erreur fournie par l' indicateur précédent, dans le cadre de la loi de frottement de Coulomb. En effet, en tenant compte des difficultés

mathématiques citées précédemment, et de certains résultats partiels portant sur certaines conditions d'unicité de cette solution (Renard 2006), des tests numériques 3D seront effectués.

Par ailleurs, vu que la procédure d'adaptation de maillage ne peut être envisagée sans la connaissance préalable des propriétés de convergence de l'indicateur d'erreur utilisé, des tests de convergence doivent être effectués. En effet, il s'agit d'étudier la convergence de cet indicateur d'erreur en raffinements successifs de maillages à tailles uniformes (uniform h-type mesh refinement). Quant aux tests d'adaptation, ils consistent à étudier la faisabilité pratique de cet indicateur en 3D dans le domaine du calcul avec frottements de Coulomb des ouvrages du génie civil. En effet, en utilisant certaines procédures d'adaptation de maillages (adaptive h-type mesh refinement techniques), des tests d'optimisation (ou de minimisation sous contraintes) de maillages seront effectués grâce aux calculs d'erreurs globales, d'erreurs de maillages et d'erreurs de contact ainsi que grâce à l'obtention de cartes de contribution à l'erreur (cartes d'erreur) et de cartes de tailles à prescrire au mailleur CAST3M en vue de l'obtention du maillage optimal vis-à-vis de l'erreur prescrite au préalable par l'utilisateur..

Ce mémoire est structuré comme suit. Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique de l'état actuel des connaissances, comprenant à la fois les aspects théoriques et numériques du problème de contact. L' aspect théorique traite des principales définitions, des différentes lois de frottement ainsi que des différentes formulations existantes dans la littérature. Quant à l'aspect numérique, celui-ci englobera non seulement les principales méthodes de résolution par éléments finis mais aussi les défauts liés à cette solution approchée. Les différentes techniques d'estimation et de contrôle de l'erreur sont présentées au chapitre 02. Ces techniques portent sur les erreurs de discrétisation de manière générale, et sur les erreurs de contact en particulier. Il est à signaler que l'indicateur d'erreur utilisé dans la présente étude (Becheur et al, 2008) est succinctement présenté dans ce chapitre. Enfin, le chapitre 03 est consacré aux tests et applications numériques. où des simulations 3D des problèmes de contact notamment pour certains ouvrages du génie civil seront effectuées aussi bien pour l'étude de la convergence (raffinement successifs et uniformes de maillages) que pour l'étude d'adaptation de maillages. Les résultats obtenus seront analysés, discutés et suivis d'une conclusion générale.

Chapitre 01

Problème de contact unilatéral et sa résolution par la MEF

I. Généralités

Dans la plupart, des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment ces dernières réagissent notamment en présence de frottement. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes de contact unilatéral avec ou sans frottements de Coulomb dans le cas de petites déformations entre corps élastiques déformables.

L'étude des contacts entre les solides qui composent une structure est également délicate à mettre en œuvre car on maîtrise difficilement tous les paramètres :

- La forme et les états des surfaces en contact ;
- La vitesse relative ;
- Les conditions de lubrification (cas des pièces mécaniques) ;
- La température ;
- La répartition des pressions de contact.

Dans notre étude, nous ne retiendrons que deux données qui seront considérées comme fondamentales : l'aire de contact et les pressions de contact.

- **L'aire de contact**

Elle correspond à la surface de contact entre deux solides, définie par leur définition géométrique nominal

- **Les pressions de contact**

Ce sont les forces et les réactions appliquées entre deux solides en contact par unité de surface. Et leurs points d'application se trouvent uniquement sur l'aire de contact.

I.1 Les types de contacts

On distingue deux types de contacts :

- Le contact bilatéral : le contact est maintenu indépendamment de l'application de forces, de direction et d'orientation

- Le contact unilatéral : Le contact est maintenu si l'application des efforts des solides les uns contre les efforts de l'autre.

Dans ce travail, nous nous intéressons au contact unilatéral des problèmes des petites déformations d'un corps élastique avec et sans frottement.

I.2 Les non linéarités dues au contact

De nombreuses situations présentent simultanément plusieurs types de non-linéarités. Par exemple, les non-linéarités associées à la fissuration, l'endommagement, le contact.

Le contact mécanique est le problème des solides qui présente la non-linéarité les plus difficiles à prendre en compte.

Ceux-ci viennent au changement de comportement associé au phénomène du décollement ou du glissement des solides mis en contact.

I.3 Les lois de frottement existantes dans la littérature

Une loi de frottement doit essentiellement tenir compte de trois phénomènes :

- l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible
- une éventuelle dépendance de ce seuil vis à vis de l'intensité des efforts normaux appliqués.
- l'existence dans le cas d'un déplacement de glissement, d'une relation entre les forces de frottement et la vitesse de glissement.

Il est clair que ces relations de frottement ne doivent intervenir que lorsqu'il n'y a pas de décollement sur la zone de contact. Pour pouvoir définir les lois de frottement, on définit d'abord le glissement et la vitesse de glissement par :

$$u_t = ((u_2 - u_1) - (u_2 - u_1) \cdot n) \cdot n \quad (1.1)$$

$$\dot{u}_t = \frac{\partial u_t}{\partial t} \quad (1.2)$$

u_1, u_2 : vecteurs de glissements u_t : glissement n : vecteur normal

II. Les frottements

II.1 Les lois de frottement

Les premières traces d'étude du frottement entre deux corps aux travaux de Léonard de Vinci au début de 16ème siècle dans lesquels on retrouve des esquisses de machines à mesurer les forces de frottement. Ces études furent ensuite développées par Amontons en 1699 puis formalisées par Coulomb en 1785.

II.1.1 La loi de Tresca

La plus simple en apparence, est la loi de Tresca. le frottement a été rajoute aux problèmes

de contact et le problème a été écrit sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca et elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq g & \text{alors } u_t = 0 & \text{(adhérence)} \\ \text{Si } F_t = g & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_t = -\lambda F_t & \text{(Glissement)} \end{cases} \quad (1.3)$$

Où F_t et F_n sont les composantes normales et tangentielles des forces de contact respectivement, et g est un seuil d'adhérence / glissement fixé à priori. Il dépend entre autres de la limite d'élasticité du matériau f_y . Toutefois, cette loi demeure non linéaire. En effet, nous pouvons observer le très fort non linéarité de cette loi sur le graphe de la figure 1.

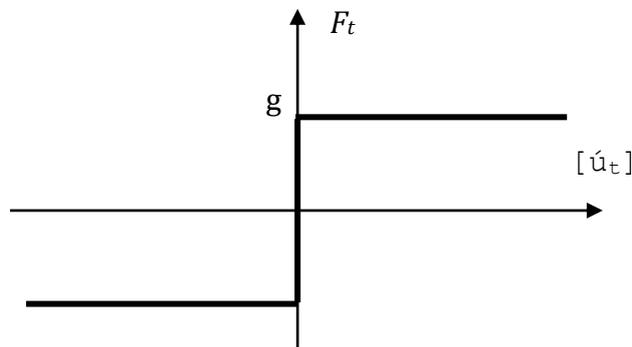


Figure 1 : Loi de tresca

II.1.2 La loi de Coulomb

Cette loi correspond la dépendance d'un seuil de frottement aux efforts normaux et définit, lors du glissement, la vitesse tangentielle comme directement opposée et proportionnelle aux efforts de frottement. μ est le coefficient de frottement, généralement considéré constant pour un problème donné, il dépend des matériaux en contact, des états de surface, de la température, de la vitesse de glissement.

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq \mu F_n & \text{alors } \dot{u}_t = 0 & \text{(Adhérence)} \\ \text{Si } F_t = \mu F_n & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_t = -\lambda F_t & \text{(Glissement)} \end{cases} \quad (1.4)$$

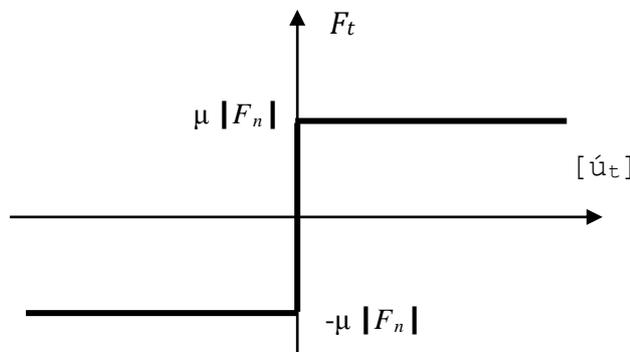


Figure 2 : loi de Coulomb

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact peut être représenté sous forme d'un cône, en 2D (figure 3) ou en 3D (figure 4). On l'appelle le cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface seuil du glissement dont la définition et l'utilisation est à rapprocher de la définition de la surface seuil en plasticité.

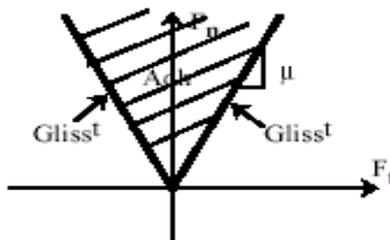


Figure 3 : Cône de Coulomb

Cela étant dit, la loi de Coulomb présente certains inconvénients :

- Le manque de relation biunivoque entre les forces de frottement et la vitesse de glissement. En effet, pour toute force de frottement située sur le seuil de glissement, il n'est pas possible de déterminer, selon cette loi, la vitesse de glissement qui lui correspond.
- le caractère non-différentiable de la loi,
- le changement brutal de comportement au passage adhérence/glissement.

Ces inconvénients sont les mêmes que ceux d'une loi de plasticité parfaite, par exemple.

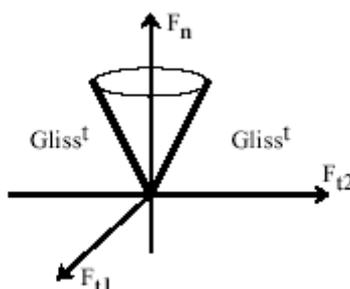


Figure 4 : Cône de Coulomb en 3D

II.1.3 La loi de Coulomb régularisée

Pour remédier aux inconvénients précédents, on utilise souvent des lois régularisées qui sont plus douces. Une loi autorisant un glissement élastique réversible paramétré par une raideur élastique K_e , est souvent utilisée. Nous pouvons l'observer sur la (figure 5). Toutefois, cette raideur est difficile à évaluer car elle dépend essentiellement de l'élasticité des aspérités des zones en contact. Sa valeur étant généralement très grande, de manière à être proche de la loi de Coulomb, ce qui laisse apparaître des problèmes numériques d'instabilités lors de la résolution.

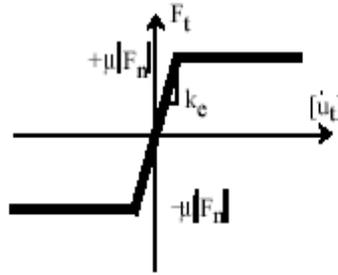


Figure 5 : Loi de Coulomb régularisée

Nous signalons également que pour cette loi de Coulomb régularisée, l'inconvénient majeur de relation non biunivoque entre efforts et vitesses lorsqu'il y a glissement irréversible, est toujours conservé.

II.1.1 Autres lois

Parmi les lois les plus couramment utilisées, nous pouvons citer la loi de Norton-Hoff qui s'écrit :

$$F_t = \mu \cdot F_n \cdot \dot{u}_t^{(\rho-1)} \cdot \dot{u}_t \tag{1.5}$$

Avec :

- μ = coefficient de frottement
- \dot{u}_t = vitesse de glissement
- F_n = force normale
- \dot{u}_t = vecteur vitesse de glissement
- ρ = seuil de glissement

Et dont le graphe est représenté sur la (figure 6)

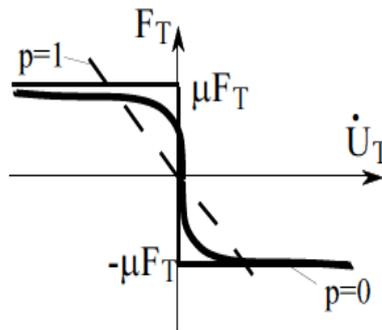


Figure 6 : Loi de Norton Hoff

II.2 La Loi de Coulomb en quasi statique

La loi de Coulomb peut s'écrire comme une relation entre les forces de frottement et le déplacement de glissement dans le cas de problèmes statiques ou quasi statiques :

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq \mu F_n & \text{alors } u_t = 0 & \text{(adhérence)} \\ \text{Si } F_t = \mu F_n & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_t = -\lambda F_t & \text{(Glissement)} \end{cases} \tag{1.6}$$

Cette formulation est adoptée et utilisable, si en tout point de la zone de contact la variation des efforts est monotone (il faut conserver la monotonie des chargements extérieurs).

III. Hypothèses et données du problème

Nous considérons le problème du contact unilatéral entre deux solides élastiques notés Ω^1 et Ω^2 respectivement (figure 07). Nous ne supposons que chaque frontière $\partial\Omega^l$ de Ω^l , $l = 1, 2$ est divisée en trois parties :

- Sur la première partie, notée $\partial_1\Omega^l$, nous supposons que le champ de déplacement est donné par :

$$U_{\partial_1\Omega^l}^l = U_d^l \quad l = 1, 2 \quad (1.7)$$

Par souci de simplicité, on supposera que :

$$U_d^l \quad l = 1, 2$$

- Sur la seconde partie notée $\partial_2\Omega^l$, une densité surfacique de forces F_d^l est appliquée
- La dernière partie (complémentaire) notée $\partial_c\Omega^l$ telle que $\partial_c\Omega^1 = \partial\Omega^1 - (\partial_1\Omega^1 \cup \partial_2\Omega^1)$ est la zone de contact.

Nous supposons que $\partial_c\Omega^1 = \partial_c\Omega^2$ que nous noterons Γ_c . Par ailleurs, les corps Ω^l , $l = 1, 2$, sont soumis à des forces volumiques f_d^l . Nous supposons que le tenseur des déformations (ϵ) est linéarisé et nous noterons K^l , l'opérateur d'élasticité du matériau associé à Ω^l .

\mathbf{n}^l : est la normale à la frontière de Ω^l orientée positivement vers l'extérieur.

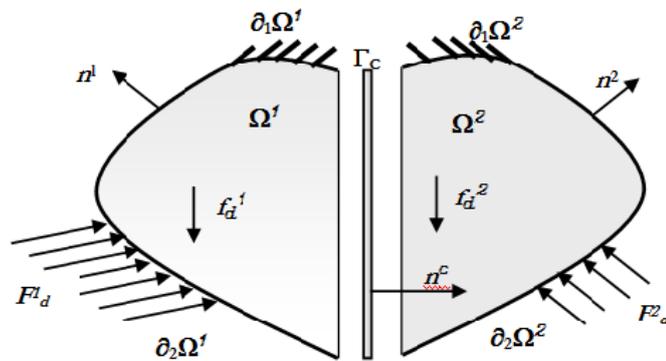


Figure 7 : Deux corps élastiques déformables en contact unilatéral

Dans le but d'exprimer clairement l'erreur de contact, nous considérons, comme Ladeveze (1996), la zone de contact Γ_c . Comme une entité mécanique à part entière munie de sa propre loi constitutive.

Nous choisissons l'orientation positive de la normale à Γ_c , en posant $\mathbf{n}^c = \mathbf{n}^1$. Nous introduisons alors sur l'interface Γ_c . Les fonctions W^1, W^2, R^1, R^2 et R^c qui représentent :

- Les deux champs de déplacements W^1 et W^2 (sur chaque côté de l'interface Γ_c).

- Les deux champs de densité de forces surfaciques R^1 et R^2 (densité des efforts de réaction transmis entre Ω_1 et Ω_2), et qui correspondent aux pressions de contact.
- Un champ de contact intérieur à l'interface, de densité de forces surfaciques R^C tel que l'équilibre interne de l'interface soit représenté par :

$$R^C = R^1 \text{ et } R^C = -R^2 \text{ sur } \Gamma_C. \quad (1.8a)$$

$$\text{tel que : } R^l = \sigma^l : n^l, \quad l = 1, 2 \quad (1.8b)$$

IV. Le contact unilatéral sans frottements

IV.1 Formulation locale

Les champs de déplacement et les densités de forces qui vérifient les conditions de contact sans frottement à l'interface Γ_C , sont données par les relations suivantes :

$$W^C = W^1 - W^2 \quad (1.9)$$

Pour tout vecteur Z , on note :

$$Z = Z^T n^C \text{ et } Z_t = Z - Z_n n^C \quad (1.10)$$

Les champs de déplacement

$$W^C = W_n^C n + W_t^C t$$

Les champs de densités de forces

$$R^C = R_n^C + R_t^C$$

et aussi nous pouvons formulées ces conditions comme suit :

- dans le cas de décollement ou de non pénétration $W_n^C \leq 0$ (1.11)

- le cas où les composantes normales des densités de réactions ne peuvent correspondre qu'à la compression $R_n^C \leq 0$ (1.12)

- la condition de complémentarité(en tout point il y soit contact, soit décollement) $R_n^C W_n^C = 0$ (1.13)

- l'absence de frottement est justifiée par la nullité des composantes tangentielles des vecteurs densités de réactions $R_t^C = 0$ (1.14)

Le potentiel convexe φ est donnée par la fonction suivante :

$$\varphi(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_n \geq 0 \\ +\infty & \text{si } V_n < 0 \end{cases} \quad \text{son conjugué } \varphi^*(Z) = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n \leq 0 \text{ et } Z_t = 0 \\ +\infty & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (1.15)$$

Et par l'intégration Legendre Fenchel(Duvaut et lions1972), on aura :

$$\phi(V) + \phi^*(Z) - Z^T V \geq 0 \quad \forall V \text{ et } Z \quad (1.16)$$

on peut écrire la loi de contact précédentes sous les trois formes suivantes

$$\begin{aligned} -W^C &\in \partial \phi^*(R^C) \\ R^C &\in \partial \phi^*(-W^C) \\ \phi^*(-W^C) + \phi^*(R^C) - R^C W^C &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

pour le problème de contact unilatéral sans frottement, il s'agit de trouver les couples (U^1, σ^1) et (U^2, σ^2) définis respectivement dans Ω^1 et Ω^2 et $[(W^1, W^2), (R^1, R^2, R^C)]$ sur Γ_C , tel que :

- pour les couples (U^l, W^l)

$$U^l = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^l \quad \text{et} \quad U^l = W^l \text{ sur } \Gamma_C \quad \ell = 1, 2. \quad (1.18)$$

- Pour les couples $(\sigma^\ell, R^\ell, R^C) : \ell = 1, 2$

$$\int_{\Omega^l} Tr[\sigma^l \varepsilon(V^l)] d\Omega + \int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS + \int_{\Gamma_C} R^{lT} V^l dS = 0 \quad \forall V^l \in U_0^l \quad (1.19a)$$

avec :

$$U_0^\ell = \{U^\ell \text{ définis suffisamment régulières sur } \Omega^\ell \text{ tel que } U^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \}$$

$$\text{et } R^C = R^1 \text{ et } R^C = -R^2 \text{ sur } \Gamma_C \quad (1.19b)$$

- Les couples $(U^l, W^l, \sigma^l, R^C)$ tq : $\ell = 1, 2$. doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma^l = K^l \varepsilon(U^l) \\ \phi(-W^C) + \phi^*(R^C) + R^{CT} W^C = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

IV.2 Prise en compte des jeux initiaux

On peut également formulées les conditions de (1.11) à (1.14) sur l'interface Γ_C comme suit :

$$W_n^C \leq G_n \quad (1.21)$$

$$R_n^C \leq 0 \quad (1.22)$$

$$R_n^C (W_n^C - G_n) = 0 \quad (1.23)$$

$$R_t^C = 0 \quad (1.24)$$

Ces conditions restent valables dans le cas où certains points qui ne sont pas initialement en contact pourraient le devenir après la déformation, donc il faut considérer le jeu initial.

tg $G_n = G_n(x, y)$; $(x, y) \in \partial_c \Omega^\ell$ est une fonction positive représente la distance des points des deux corps situé sur la zone de contact.

IV.3 Formulation variationnelle

La résolution numérique de la formulation du problème de contact unilatéral sans frottement, doit être sous forme faible, pour permettre l'utilisation des méthodes variationnelles.

Soit $U_0 = U_0^1 + U_0^2$ avec :

$$U_0^\ell = \{U^\ell \text{ Définis suffisamment régulières sur } \Omega^\ell \text{ tq } U^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \}$$

Pour tout couple $U=(U^1, U^2)$ et $V=(V^1, V^2)$ appartenant à U_0 , on pose :

$$a(U, V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} Tr[\varepsilon(U^l) K^l \varepsilon(V^l)] d\Omega \quad (1.25)$$

$a(\dots)$ est la formule bilinéaire symétrique en élasticité.

Et aussi pour tout couple V appartenant à U_0 , on pose :

$$L(V) = \sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS \right) \quad (1.26)$$

Où $L(V)$ est une forme linéaire, elle prend en compte les chargements extérieurs f_d^{lT} et F_d^{lT} .

$$U_{ad} = \{V = (V^1, V^2) \in U_0 \text{ tel que } V^{1T} n^1 + V^{2T} n^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \} \quad (1.27)$$

U_{ad} représente le champ convexe de déplacements admissibles comprenant la condition de non pénétration entre les deux corps. et la formulation variationnelle consiste à trouver $U \in U_{ad}$ tel que :

$$a(U, V - U) \geq L(V - U) \quad \forall V \in U_{ad} \quad (1.28)$$

V. Le contact unilatéral avec frottements

V.1 Formulation locale

Nous avons limité notre étude à des problèmes d'évolution en quasi-statique donnés par la loi de frottement de coulomb. Les conditions de contact avec frottement à l'interface Γ_c peut être formulé comme suit :

$$W_n^c = W_n^1 - W_n^2 \leq 0 \quad (1.29)$$

$$R_n^\ell \leq 0 \quad \ell = 1, 2 \quad (1.30)$$

$$R_n^\ell W_n^c = 0 \quad \ell = 1, 2 \quad (1.31)$$

$$|R_t^\ell| \leq \mu |R_n^\ell| \quad \ell = 1, 2 \quad (1.32)$$

$$|R_t^\ell| < \mu |R_n^\ell| \Rightarrow W_t^\ell = 0 \quad \ell = 1, 2 \quad (1.33)$$

$$|R_t^\ell| = \mu |R_n^\ell| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tq } W_t^\ell = -\lambda R_t^\ell \quad \ell = 1,2 \quad (1.34)$$

Pour le potentiel convexe φ dans le cas de frottement (Ekeland et temam, 1976) est donné par

$$\varphi(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } V_n \geq 0 \\ +\infty, & \text{si } V_n < 0 \end{cases} \quad (1.35a)$$

$$\text{son conjugué } \varphi^*(Z) = \begin{cases} 0, & \text{si } Z_n \leq 0 & \text{et } |Z_t| \leq \mu |Z_n| \\ +\infty, & \text{si } Z_n > 0 & \text{ou } |Z_t| > \mu |Z_n| \end{cases} \quad (1.35b)$$

Et pour la fonction de De saxcé (1992) avec frottement, elle est définie comme suit :

$$\phi(V, Z) = \varphi(V) + \varphi^*(Z) + \mu |Z_n| |V_t| \quad (1.36)$$

La fonction $\phi(V, Z)$ est un bipotentiel, c'est-à-dire :

- Pour un V fixé, $\phi(V, Z)$ est convexe par rapport à Z.
- Pour un Z fixé, $\phi(V, Z)$ est convexe par rapport à V.
- Pour tout V et Pour tout Z, on a : $\phi(V, Z) - Z^T V \geq 0$

Les relations constitutives de contact peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} -W^C \in \partial \varphi^*(R^C) \\ R^C \in \partial \varphi^*(-W^C) \\ \varphi(-W^C) + \varphi^*(R^C) - R^C W^C = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Et d'après la fonction de De saxcé (ϕ) on peut aussi écrire :

$$\phi(-W^C, R^C) + W^{C^T} R^C = 0 \quad (1.38)$$

le problème de contact unilatéral avec frottement, il s'agit de trouver les couples (U^1, σ^1) et (U^2, σ^2) définis respectivement dans Ω^1 et Ω^2 et $[(W^1, W^2), (R^1, R^2, R^C)]$ sur Γ_C , tel que :

- $U^\ell = 0$ sur $\partial_I \Omega^\ell$ et $U^\ell = W^\ell$ sur Γ_C pour les couples (U^ℓ, W^ℓ) tq : $\ell = 1,2$
- Pour les couples $(\sigma^\ell, R^\ell, R^C)$

$$-\int_{\Omega^\ell} \text{Tr}[\sigma^\ell \varepsilon(V^\ell)] d\Omega + \int_{\Omega^\ell} f^{l^T} V^\ell d\Omega + \int_{\partial\Omega^\ell} F_d^{\ell^T} V^\ell dS + \int_{\Gamma_C} R^{\ell^T} V^\ell dS = 0 \quad \forall V^\ell \in U_0^\ell \quad (1.39)$$

Tel que : $\ell = 1,2$, avec :

$$U_0^\ell = \{U^\ell \text{ définis suffisamment régulières sur } \Omega^\ell \text{ tq } U^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell\}$$

$$\text{Et } R^C = R^1 \text{ et } R^C = -R^2 \text{ sur } \Gamma_C$$

- Les couples $(U^\ell, W^\ell, \sigma^\ell, R^C)$ tq : $\ell = 1, 2$. doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = K^\ell \varepsilon(U^\ell) \\ \Phi(-W^C, R^C) + W^{C^T} R^C = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

V.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle, elle est aussi obtenue par Duvant et lions (1972).

Soit $U_0 = U_0^1 \times U_0^2$ où $U_0^\ell = \{U^\ell \text{ définis suffisamment régulières sur } \Omega^\ell \text{ tq } U^\ell=0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \}$

On pose pour les couples $U = (U^1, U^2)$ et $V = (V^1, V^2)$ appartenant à U_0 :

$$a(U, V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} Tr[\varepsilon(U^l) K^l \varepsilon(V^l)] d\Omega \quad (1.41)$$

Où $a(U, V)$ est la forme bilinéaire symétrique en élasticité.

Et on pose aussi, pour tout couple V appartenant à U_0 :

$$L(V) = \sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS \right) \quad (1.42)$$

$$J(V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\partial_{c\Omega^l}} \mu |R_n^\ell| |V_t^\ell| dS \quad (1.43)$$

Les formes $L(V)$ et $J(V)$ prennent en compte respectivement les chargements extérieurs f_d^l et F_d^l et aussi le contact avec frottement.

$$U_{ad} = \{V = (V^1, V^2) \in U_0, \text{ tels que } V^{1T} n^1 + V^{2T} n^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \} \quad (1.44)$$

U_{ad} représente le champ convexe de déplacements admissibles comprenant la condition de non pénétration entre les deux corps.

La formulation variationnelle consiste à trouver $U \in U_{ad}$ tel que :

$$a(U, V - U) + J(V) - L(V) \geq L(V - U) \quad \forall V \in U_{ad} \quad (1.45)$$

Nous remarquons qu'il s'agit également d'un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité. Les premiers résultats d'existence pour ce problème de contact avec frottement, ont été obtenus par Necas, Jarusek et Haslinger (1980). Ils ont prouvé l'existence de la solution pour une barre élastique en dimension deux sous la condition d'un coefficient de frottement assez petit. Ensuite Jarusek (1983) ont apporté des améliorations à ce résultat.

En effet, ces derniers ont montré l'existence de la solution quand le coefficient de frottement μ est inférieur à $\frac{\sqrt{3-4\nu}}{2-2\nu}$, ν étant le coefficient de Poisson dans Ω^l . La difficulté est qu'il n'existe pas de relation bi univoque (dans la loi de Coulomb) entre l'effort normal et les déplacements.

En effet, soit la solution U telle que $U \in U_{ad}$ et minimisant l'énergie potentielle :

$$U \in U_{ad} \rightarrow E_C = \frac{1}{2}a(U, U) + J(U) - L(U) \quad (1.46)$$

Avec :

$$J(U) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\partial_{c\Omega^1}} g |U_t^\ell| dS \quad (1.47)$$

Dans le cas de la loi de coulomb et $g = \mu |R_n^\ell|$, $\ell = 1, 2$; on voit bien que l'énergie dépend de l'effort normal. Ainsi, cette énergie de déformation ne dépend pas uniquement des déplacements. Par contre, dans le cas de la loi de tresca où le seuil g est fixé, on peut appliquer le théorème de minimisation de l'énergie potentielle. Il en est de même pour le cas de contact sans frottement.

Cela étant dit, on peut maintenant voir plus clairement l'intérêt des lois de frottement régularisées. En effet grâce aux relations biunivoques qu'elles comportent (entre efforts et déplacements), la minimisation de l'énergie devient possible.

V.3 Le problème du point fixe

Le problème de contact avec frottement de Tresca a l'avantage de pouvoir se ramener à un problème de minimisation sous contraintes grâce à la formulation de point fixe proposé par Duvaut et Lions 1972.

Le principe de cette méthode est de résoudre le problème à seuil de frottement de Tresca g fixé et à chercher à chaque itération un point fixe sur le seuil de glissement tel que $g = \mu |R_n^\ell|$, $\ell = 1, 2$; il s'agit donc de trouver le point fixe de l'application :

$$g \rightarrow \mu |R_n^\ell(U)| \quad (g = \text{seuil}) \quad (1.48)$$

tel que $U \in U_{ad}$ et minimise l'énergie potentielle :

$$U \in U_{ad} \rightarrow E_C = \frac{1}{2}a(U, U) + J(U) - L(U) \quad (1.49)$$

Avec

$$J(U) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\partial_{c\Omega^1}} g |U_t^\ell| dS \quad (1.50)$$

VI. Le cas particulier du problème de Signorini

Signorini en 1933 a proposé une formulation de problème tel que le contact sans frottement d'un solide élastique sur un solide considéré indéformable (infiniment rigide) , on note par Ω le solide supérieur, élastique déformable, en contact avec le solide inférieur indéformable. Et on note par $\partial\Omega$ la frontière de Ω , avec :

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \cup \partial_c\Omega \quad \text{et} \quad \partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega \cap \partial_c\Omega = \emptyset \text{ telque :}$$

$\partial_1\Omega$: Déplacement imposée

$\partial_2\Omega$: Forces imposée

$\partial_c\Omega$: Zone de contact

\vec{n} : Normale sortante au contact

\vec{t} : Tangente au contact

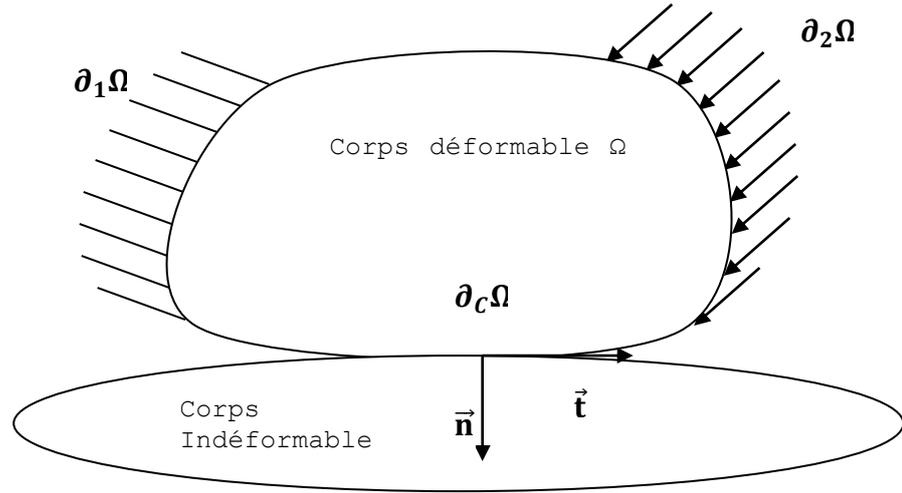


Figure 8 : Corps élastique déformable en contact avec un socle rigide indéformable (Problème de Signorini)

La zone de contact est notée aussi Γ_c ($\Gamma_c = \partial_c\Omega$)

Il s'agit donc de trouver les couples (U, σ) définis dans Ω et W, R définis dans Γ_c tel que :

- les conditions cinématiques.

$$U = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \text{ et } W=U \text{ sur } \Gamma_c \quad (1.51)$$

- Les équations d'équilibre :

$$-\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \ \varepsilon(\mathbf{V})] \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d^T \mathbf{V} \, d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d^T \mathbf{V} \, dS + \int_{\Gamma_c} \mathbf{R}^T \mathbf{V} \, dS = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{U}_0 \quad (1.52)$$

avec

$$\mathbf{U}_0 = \{ \mathbf{U} \text{ définis suffisamment régulières sur } \Omega \text{ tq } \mathbf{U} = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \}$$

$$\text{Et} \quad \mathbf{R} = \sigma^n \text{ sur } \partial_c\Omega \quad (1.53)$$

- La relation de comportement est donnée par :

$$\sigma = K \varepsilon(\mathbf{U}) \quad (1.54)$$

- Les conditions de contact :

$$\mathbf{W}_n \leq \mathbf{0} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{R}_n \leq \mathbf{0} \quad (1.56)$$

$$\mathbf{W}_n \mathbf{R}_n = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{0} \quad (\text{contact sans frottement})$$

Et dans le cas de contact avec frottement de coulomb

$$|\mathbf{R}_t| \leq \mu |\mathbf{R}_n|$$

$$|\mathbf{R}_t| < \mu |\mathbf{R}_n| \Rightarrow \mathbf{W}_t = 0 \quad (1.58a)$$

$$|\mathbf{R}_t| = \mu |\mathbf{R}_n| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tq } \mathbf{W}_t = -\lambda \mathbf{R}_t \quad (1.58b)$$

On peut également formuler le contact sans frottement en introduisant les potentiels convexes φ et leur conjugués φ^* :

$$-W \in \partial \varphi^*(R) \tag{1.59}$$

$$R \in \partial \varphi^*(-W) \tag{1.60}$$

$$\varphi(-W) + \varphi^*(R) - R^T W = 0 \tag{1.61}$$

Et dans cas de frottement :

$$-W \in \partial \varphi^*(R) \tag{1.62}$$

$$R \in \partial \varphi^*(-W) \tag{1.63}$$

$$\varphi(-W) + \varphi^*(R) + \mu |R_n| |W_t| + R_t W_t + R_n W_n = 0 \tag{1.64}$$

VII. La méthode des éléments finis : une brève description

VII.1 Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée dans ce domaine, Considérons le problème d'élasticité qui consiste à trouver les champs de déplacements. on considère un solide de domaine Ω , et une partie c du bord Ω , le champ de déplacement imposé : $U = U_d$

Sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$ on impose une densité surfacique d'efforts F_d .

Et aussi le solide de domaine Ω est soumis à une densité de forces volumiques f_d .

On fait l'hypothèse que le solide Ω subit uniquement de petites déformations.

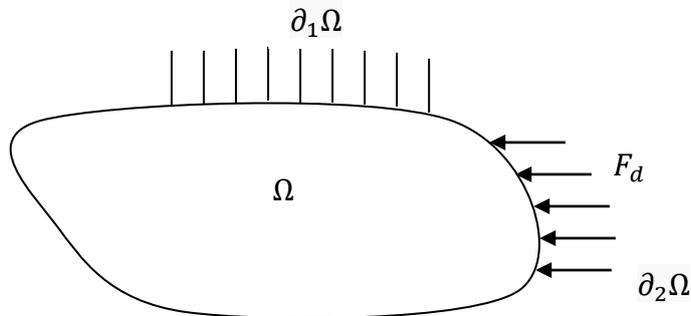


Figure 9 : Schéma de la structure à modéliser par élément finis

Le problème de contact par élément finis consiste à trouver le champ le déplacement $U(M)$ tel que :

- $U(M) \in V$, où V est l'ensemble des champs de déplacements admissibles dans Ω , et M un point quelconque appartenant au domaine Ω .
- $div\sigma(U) + f_d = 0$ dans Ω
- $\sigma(U) = H\varepsilon(U)$

A l'aide d'une proche énergétique, on pose le problème sous forme globale et par le théorème de l'énergie potentielle.

$$E_P(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} H \varepsilon(U) : \varepsilon(U) d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} F_d U ds + \int_{\Omega} f_d U d\Omega \tag{1.65}$$

Il s'agit de trouver $U \in V$, tel que U minimise l'énergie potentielle, et pour rendre la formule claire on approche $U(M)$ par : $U_h(M) = q_i w_i(M)$, $i = 1 \dots N$,
 Tel que q_i sont des paramètres scalaires, et les $w_i(M)$ sont des fonctions définies sur Ω qui dépend du type de problème traité ainsi que de la richesse de l'approximation. La recherche de la solution $U(M)$ est remplacée par la recherche de N paramètres scalaires q_i . Les fonctions $w_i(M)$ doivent être suffisamment dérivables sur Ω , Afin que le problème puisse être posé.

L'énergie potentielle deviendra :

$$E_p(U_h) = \frac{1}{2} q_i \left(\int_{\Omega} H \varepsilon(w_i) : \varepsilon(w_j) d\Omega \right) q_j - q_i \left(\int_{\partial_2 \Omega} F_d w_i dS + \int_{\Omega} f_d w_i d\Omega \right) \quad (1.66)$$

Et en forme matricielle

$$E_p(U_h) = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [q]^T [F] \quad (1.67)$$

Tel que $[K]$ est la matrice de rigidité globale, et $[F]$ est le vecteur des forces généralisées. Et par la dérivée, on obtient le minimum de l'énergie potentielle:

$$\frac{\partial E_p(U_h)}{\partial q} = 0 \quad (1.68)$$

Pour le problème approché, sa solution est obtenue par la résolution de système linéaire de taille N

$$[K][q] = [F] \quad (1.69)$$

Et pour les méthodes de résolution, on peut utiliser des méthodes direct (Gauss, Cholesky, Crout,...), et on peut également utilisées des méthodes itératives (Gauss-Seidel, gradient conjugué,...).

Les conditions aux limites sont données par la forme générale suivante : $[C][q] = [\beta]$

Tel que $[C]$ contient la réduction aux zones de liaison considérées et $[\beta]$ les valeurs imposées.

Le problème à résoudre finalement consiste à trouver le vecteur des inconnues $[q]$ tel que : $[q]$ minimise.

$$E_p(U_h) = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [q]^T [F] \quad (1.70)$$

et vérifie

$$[C][q] = [\beta] \quad (1.71)$$

VII.2 Convergences et mise en œuvre de la méthode :

L'organisation générale en éléments finis pour un problème de contact se commence par la lecture des propriétés matérielles et des conditions aux limites, et calcul du nombre d'inconnus et le profil de la matrice.

La préparation des données consiste en la définition du problème :

- Propriétés matérielles et géométriques : nombre de sous-domaines à propriétés physiques déterminées, valeurs de ces propriétés (par exemple module de Young E et coefficient de Poisson !) sur chaque sous-domaine (en général on les prend constantes) et avec des fonctions de calcul simples.
- Conditions aux limites : valeurs imposées de l'inconnue et de ses dérivées.
- Lecture d'un maillage du domaine : type de maille, coordonnées des nœuds et définition de chaque élément ; liste des nœuds ou des arêtes (des faces en 3D) formant les parties de frontière où sont imposées des conditions aux limites.
- La convergence rapidement soit vers la solution exacte, si celle-ci disponible, si non la convergence vers une solution de référence.

VII.3 Les défauts de la solution éléments finis

VII.3.1 Le cas général

Les trois types de défauts d'équilibre de la contrainte approché σ_h sont :

- La non vérification des conditions d'équilibre locales :

$$\operatorname{div}\sigma_h + f_d \neq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.72)$$

- Le non-respect des conditions limites en effort : la contrainte normale n'équilibre pas les charges données :

$$\sigma_h n \neq F_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega \quad (1.73)$$

- La non continuité de la contrainte normale à l'interface entre deux éléments :

$$\sigma_h n_{E1} + \sigma_h n_{E2} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_{E1E2} \quad (1.74)$$

Ces défauts sont dus au fait que la formulation énergétique du problème ait été établie en déplacements.

Cette méthode a été effectuée sur la base de champs de déplacements cinématiquement admissible, elle est donc précise pour trouver les champs de déplacements U_h mais moins précise pour trouver les champs de contraintes σ_h .

Pour pallier ces insuffisances, on peut établir une formulation énergétique du problème, en mettant en place une fonctionnelle dite Hellinger-Reisner (Reissner, 1950) en déplacement et en contraintes (U et σ) et en introduisant les multiplicateurs de Lagrange. La résolution est basé sur la minimisation de cette fonctionnelle. La discrétisation porte à la fois sur les champs des contraintes et sur les champs des déplacements. Il faut donc introduire les deux fonctions de bases simultanément.

Elle entraîne l'utilisation des éléments dits mixtes pour la méthode éléments finis. Et d'après certains auteurs notamment Fellipa (2003), cette formulation mixte ne conduit pas nécessairement à des meilleurs résultats que les approches en déplacement ou en

contraintes. A signaler aussi l'existence d'élément dit hybrides où des champs différents sont discrétisés indépendamment à l'intérieur de l'élément et sur ses bords.

VII.3.2 Le cas de problème de contact

Le problème de contact présente aussi des défauts de cette solution approchée en ce qui concerne la non linéarité lorsqu'on utilise des éléments d'ordre supérieur, la vérification de ces conditions de contact aux nœuds n'entraîne pas forcément la vérification de ces conditions en tout point de la zone de contact. Néanmoins, lorsque les maillages sont fins, il semble que l'erreur due à la violation de cette condition de non pénétration soit relativement faible devant l'augmentation de la qualité de la solution apportée par les éléments d'ordre supérieurs.

Il est à remarquer que ce problème ne se pose pas pour des éléments finis linéaires. Nous voyons donc ici beaucoup plus clairement, l'intérêt des estimations d'erreur pour le problème de contact.

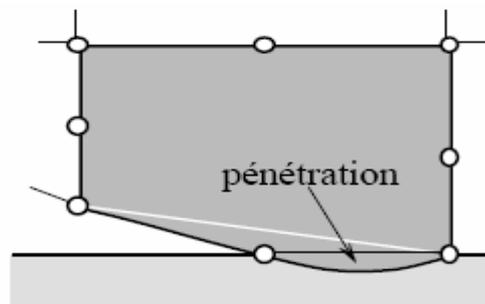


Figure 10 : Cas de non vérification de la condition de non pénétration (ou de contact)

Un autre défaut est constaté lorsque la condition de contact utilisée, porte sur le signe des multiplicateurs de Lagrange qui représentent la contrainte normale sur la zone de contact. En effet, considérons, à titre d'exemple, des éléments de type cube à 20 nœuds (Figure 11). A une répartition uniforme des pressions correspondent des forces généralisées (ou nodales) dont le signe varie entre les différents nœuds. Par conséquent, les solutions obtenues par ces méthodes peuvent être aberrantes. Pour remédier à ce type de défauts, il est préconisé d'utiliser des méthodes basées sur des conditions portant sur les signes des déplacements relatifs ou sur le signe des forces nodales.

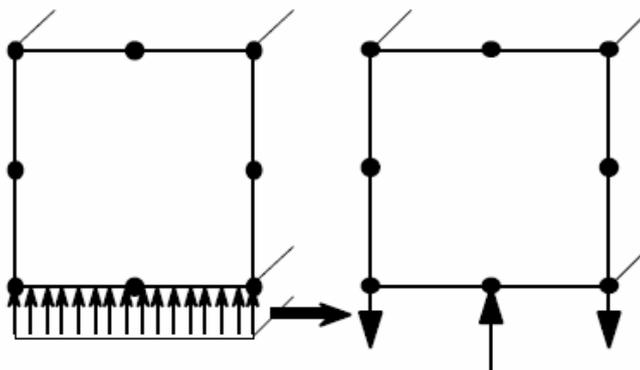


Figure 11 : Problème des forces généralisées sur les éléments cubiques à 20 nœuds

VIII. Résolution du problème de contact par éléments finis

VIII.1 Les relations discrètes du contact

On distingue deux méthodes différentes pour écrire les relations discrètes du contact :

- a) Les relations de types nodales :

Les relations et conditions de contact sont portées sur les inconnues nodales. Lorsque les maillages des deux corps sont compatibles sur Γ_C , les conditions de non pénétration sont des relations simples entre les degrés de liberté des nœuds en vis-à-vis. Par contre, dans la plupart des cas, les maillages en présence sont incompatibles, et les relations entre les degrés de liberté sont beaucoup moins simples à écrire.

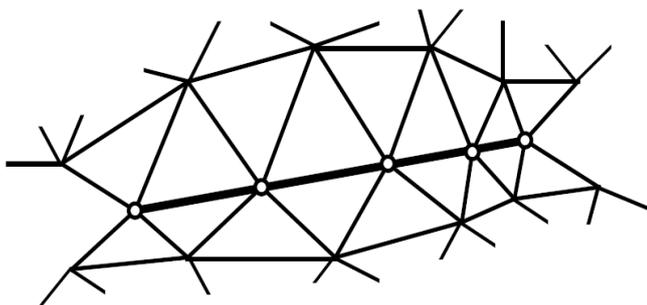


Figure 12 : Maillages compatibles sur l'interface

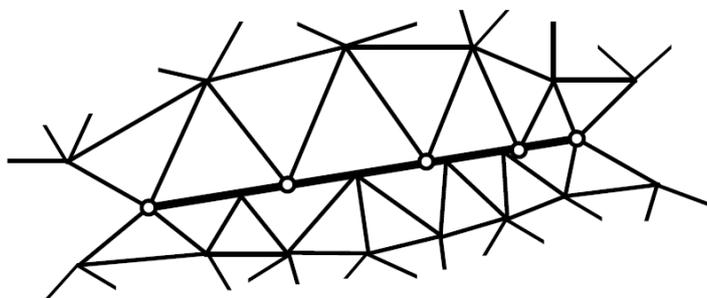


Figure 13 : Maillages incompatibles sur l'interface

- b) Les relations de type élémentaire :

Pour ce type, les relations sont portées par des éléments de contact et qui doivent avoir une loi de comportement. Cette dernière peut être soit sous forme d'une loi de frottement, soit sous forme de raideurs normales et tangentielles, utilisées par la méthode de la pénalisation. La définition de ce type d'éléments rejoint en quelque sorte la notion d'interface Γ_C introduite par Ladeveze (1996) (cf paragraphe III du chapitre I) munie de sa propre loi constitutive. Ils sont donc d'épaisseur nulle et disposés entre les maillages de deux solides en contact.

Par ailleurs, du point de vue géométrique, ces éléments peuvent être soit de type ponctuel (élément de contact « nœud à nœud »), soit de type linéique (élément de contact « nœud segment »), ou de type surfacique (élément de contact « nœud facette »). Tous ces éléments spécifiques de contact ont été développés dans la littérature (Chamoret 2002).

Pour résoudre le problème de contact entre deux corps déformables lorsqu'ils subissent de petits déplacements relatifs, on utilise généralement, l'élément de contact « nœud à nœud ». En effet, pour un problème où les glissements attendus sont petits, un maillage compatible des deux corps suffit.

Ce maillage met alors en vis-à-vis les nœuds des deux surfaces. Par ailleurs, pour les grands glissements, ceux-ci nécessitant l'utilisation des éléments de contact « nœud segment » pour les problèmes bidimensionnels, et des éléments de contact « nœud-facette » est constitué d'un nœud esclave et de nœuds maîtres caractérisant la facette de contact. Parmi les travaux où ont été utilisés ces types d'éléments, on peut citer Chamoret 2002 ainsi que Laursen 2002.

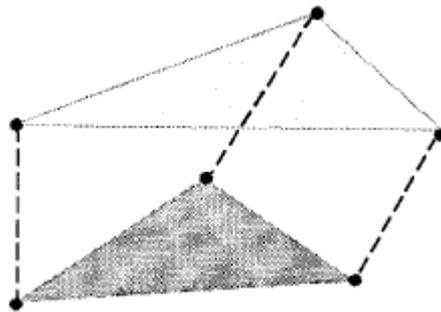


Figure 14 : Élément nœud à nœud

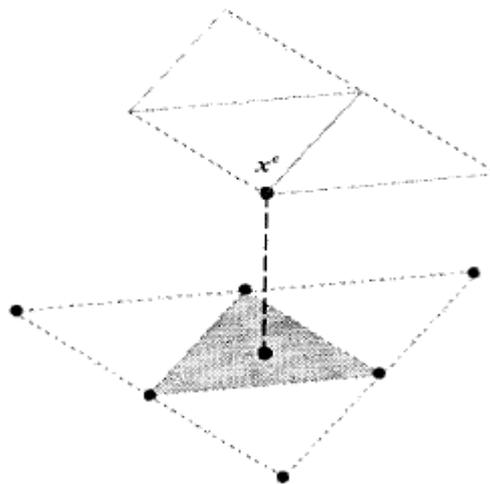


Figure 15 : Élément nœud-facette

VIII.2 La formulation discrète du problème de contact

Dans la formulation discrète du problème de contact, le théorème de l'énergie potentielle devient.

Soit \mathbf{H} la forme discrète du convexe U_{ad} tel que :

$$H = \{[q] \text{ tels que } [C][q] - [\beta] \geq 0\} \quad (1.75)$$

La solution U_h est telle que $U_h \in \mathbf{H}$ et minimise l'énergie potentielle :

$$E_p(U_h) = \frac{1}{2} [q]^T [K][q] - [q]^T [F] \quad (1.76)$$

Parmi tout les vecteurs $[q] \in \mathbf{H}$

Ici, $[K]$ est la matrice de rigidité globale des deux solides en contact $(\Omega^1 \cup \Omega^2)$ du problème et $[F]$ le vecteur des forces généralisées appliqué sur les deux solides $(\Omega^1 \cup \Omega^2)$.

La matrice $[C]$ assure la restriction à la zone de contact Γ_c . Le vecteur des jeux éventuels $[\beta]$ représente la construction des écarts en déplacement normaux. La solution discrétisée $[q]$ est alors la solution du système linéaire :

$$[K][q] = [F] \text{ sous la condition } [C][q] - [\beta] \geq 0\}$$

Il s'agit donc de résoudre un problème discret de minimisation sous contraintes d'inégalité.

VIII.3 Les méthodes de résolution

Les problèmes discrets à résoudre se présentent sous la forme de problèmes d'optimisation, et peuvent être résolus par des méthodes de calcul de minimum ou de recherche de point de selle. Et parmi ces méthodes :

- La méthode de point fixe (ou bien méthode des statuts)
- Les méthodes de projection
- La méthode de la pénalisation
- La méthode de multiplicateurs de Lagrange
- Les méthodes mixtes, tels que le lagrangien augmenté ou le Lagrangien perturbé etc...

VIII.3.1 Les méthodes de points fixes(ou bien méthode des statuts)

L'idée de la méthode consiste à déterminer un nombre fini, suffisamment grand, d'éléments d'une équation, de telle sorte que le dernier élément calculé soit une solution approché de la solution exacte.

Et pour notre résolution, on résout le problème en imposant toutes les conditions de contact, commençant par pénalité ou par multiplicateurs de Lagrange, la condition d'égalité :

$$[C][q] = [\beta]. \quad (1.77)$$

On cherche à résoudre le problème discret : $[K][q] = [F]$ et on calcule la solution $[q]$, donc l'inéquation variationnelle est transformée en une équation variationnelle.

On détecte (par un test en effort ou en déplacement) les contacts qui n'ont pas lieu d'être. Par la suite on relâche les relations qui leur sont associées, et on résout le problème avec les nouvelles conditions et reprendre le système $[K][q] = [F]$, puis on itère sur ce principe jusqu'à obtention de valeurs suffisamment stables.

VIII.3.2 La méthodes de pénalisation

La méthode des pénalités consiste à minimiser dans l'expression de la fonction de l'énergie potentielle la quantité suivant :

$$E_p(q) + \frac{g}{2} [C][q] - [\beta]^T [C][q][\beta] \quad (1.78)$$

Plus le paramètre scalaire g est élevé (tend vers l'infini par exemple), plus la condition à imposer $[C][q] = [\beta]$ est assurée.

Dans cette expression, l'approche consiste à l'ajout de termes élevés dans le système linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (E_p(q) + \frac{g}{2} [C][q] - [\beta]^T [C][q][\beta]) = 0 \quad (1.79)$$

Ce qui donne

$$[[K] + g[C]^T[C]][q] = [F]g[C]^T[\beta] \quad (1.80)$$

Le principal inconvénient de la méthode des pénalités réside dans le choix du paramètre de pénalisation g et aussi d'un mauvais conditionnement du problème et d'instabilités numériques, sauf dans le cas où le coefficient g tend vers l'infini. Parmi les avantages de la méthode des pénalités, nous pouvons notamment mentionner la facilité de mise en œuvre et l'absence d'inconnues supplémentaires.

VIII.3.3 La méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste à chercher les extremums de :

$$E_p(q_i) + [\lambda]^T [C][q] - [\beta] \quad (1.81)$$

Avec $[\lambda]^T$ le vecteur ligne des multiplicateurs de Lagrange associé à chaque nœud en contact.

Ces extremums correspondant à :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (E_p(q_i) + [\lambda]^T [C][q] - [\beta]) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [K][F] + [\lambda]^T [C] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial q_i} (E_p(q_i) + [\lambda]^T [C][q] - [\beta]) &= 0 \\
&\Rightarrow [C][q] - [\beta] = 0
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Cette méthode permet de résoudre le problème en appliquant strictement les conditions de contact et de frottement $[C][q] = [\beta]$, mais implique généralement une convergence lente des algorithmes de résolution associés.

Le système linéaire à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} [K] & [C]^T \\ [C] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [q] \\ [\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [\beta] \end{bmatrix} \tag{1.83}$$

le multiplicateur de Lagrange λ_i sont les densités de réaction de contact associé aux nœud i . La résolution consiste donc à remplacer ces multiplicateurs par des densités de réactions de contact :

$$R^C = \lambda \tag{1.84}$$

Par rapport à la méthode de pénalités, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'éviter les problèmes liés au choix des coefficients de pénalité. L'inconvénient majeur réside dans le nombre supérieur d'inconnues (déplacements nodaux et multiplicateurs de Lagrange).

VIII.3.4 Les méthodes mixtes

Afin d'obtenir une efficacité et une précision optimales, des méthodes dites mixtes ont été mises au point. Elles ont pour objectif de combiner les avantages des deux méthodes précédentes (pénalisation et multiplicateurs de Lagrange). Parmi ces méthodes, les plus connues sont : la méthode du Lagrangien perturbé et la méthode du Lagrangien augmenté.

A. La méthode du Lagrangien perturbé

Cette méthode a été mise au point pour le problème de contact par Simo et coll (1985). La fonctionnelle de l'énergie totale utilisant les multiplicateurs de Lagrange est régularisée ou bien perturbée par un terme quadratique de la manière suivante :

$$E_p(q_i) + [\lambda]^T [C][q] - [\beta] - \frac{1}{g} [\lambda]^T [\lambda] \tag{1.85}$$

g étant toujours un paramètre de pénalisation choisi arbitrairement mais qui génère cette fois-ci, une base de multiplicateurs $[\lambda]$. Toutefois, on voit bien que lorsque g tend vers l'infini, la solution obtenue sera identique à celle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Par minimisation de cette fonctionnelle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(E_p(q_i) + [\lambda]^T [C][q] - [\beta] - \frac{1}{g} [\lambda]^T [\lambda] \right) = 0 \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [K][q] - [F] + [\lambda]^T [C] = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(E_p(q_i) + [\lambda]^T [[C][q] - [\beta]] - \frac{1}{g} [\lambda]^T [\lambda] \right) = 0 \\ &\Rightarrow [C][q] - [\beta] - \frac{1}{g} [\lambda] = 0 \end{aligned} \quad (1.87)$$

La résolution de (1.87) et la substitution de $[\lambda]$ dans (2.86) nous ramène à la méthode de la pénalisation. L'avantage est que tous les termes diagonaux de la matrice de rigidité sont non nuls. L'inconvénient est que l'on retombe sur le même problème qui est le choix du coefficient de pénalisation g .

B. Les méthodes du Lagrangien augmenté

Ces méthodes de Lagrangien augmenté (Simo et Laursen, 1992), (Paczelt et T. Szabo, 1995) utilisent la même fonctionnelle de l'énergie que celle utilisée dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange et y ajoutent un terme de pénalisation qui n'est pas forcément infini pour assurer la vérification des conditions de contact. La méthode de la pénalisation est donc utilisée mais l'objectif est de générer une base de multiplicateurs de Lagrange. La fonctionnelle de l'énergie totale augmentée, est comme suit :

$$E_p(q) + [\lambda]^T [[C][q] - [\beta]] + \frac{g}{2} [[C][q] - [\beta]]^T [[C][q] - [\beta]] \quad (1.88)$$

Par minimisation, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} [K][q] - [F] + [\lambda]^T [C] + g[C]^T [C][q] - g[C]^T [\beta] &= 0 \\ [C][q] - [\beta] &= 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

Par itérations successives, les valeurs des multiplicateurs de Lagrange ainsi que la solution en déplacement sont obtenues.

Le premier avantage de cette approche réside dans le fait que de tous petits paramètres de pénalisation peuvent être utilisés et ce, sans affecter la précision. D'autre part, la taille du problème n'est pas augmentée. Ainsi, la solution exacte du problème est déterminée. Le second avantage réside dans le fait qu'avec cette méthode, les termes diagonaux de la matrice de rigidité globale sont non nuls. Les risques de mauvais conditionnement de la matrice de rigidité sont donc moins élevés. Toutefois, le nombre d'itérations nécessaires pour trouver cette solution, est fortement augmenté. Ce qui semble être un inconvénient.

IX. Conclusion

De ce chapitre, nous pouvons conclure sur la très forte non linéarité du problème de contact. Cette non linéarité est d'avantage accentuée dans le cas avec frottements. Parmi les lois de frottements qui semblent être plus « réalistes », nous pouvons citer la loi de Coulomb. Toutefois, cette loi présente une difficulté majeure. En effet, hormis le problème

d'existence de la solution qui a été résolu, le problème de l'unicité demeure encore posé. Cela dit, en plus de l'absence de résultats disponibles dans la littérature, ce problème d'unicité a été mis en évidence lors de la formulation variationnelle. Nous avons passé en revue, tous les aspects liés à la résolution du problème de contact par éléments finis, ainsi que les principales techniques utilisées. Nous avons vu qu'hormis, la méthode du Lagrangien augmenté, les autres méthodes présentaient des difficultés plus ou moins grandes lors de la résolution. Toutefois, la méthode des multiplicateurs de Lagrange présente essentiellement des inconvénients en termes d'inconnues supplémentaires. La précision de la solution n'est généralement pas affectée. De plus, contrairement à la méthode du Lagrangien augmenté, son implantation dans un code de calcul est relativement moins difficile. Ce qui explique sa large utilisation dans les milieux industriels.

Chapitre 02

Contrôle et estimations d'erreurs pour les problèmes de contact

I. Introduction

Comme la majorité des techniques de simulation numérique, la méthode des éléments finis ne fournit qu'une solution approchée d'un problème donné. Les erreurs peuvent avoir plusieurs origines, comme par exemple : les erreurs dues aux hypothèses du modèle mathématique, les erreurs sur la connaissance des grandeurs physiques intervenant dans le problème, les erreurs numériques, les erreurs géométriques. La composante principale de l'erreur totale est généralement l'erreur de discrétisation, c'est-à-dire celle résultant de la discrétisation physique et fonctionnelle du champ inconnu. Heureusement, ce type d'erreur est également le plus simple à contrôler. En réalité, l'erreur de discrétisation tend asymptotiquement vers zéro quand la taille des éléments diminue (raffinement $-h$) ou lorsque le degré des fonctions d'approximation polynomiales augmente (raffinement $-p$) ou encore lorsque ces deux paramètres sont ajustés simultanément (raffinement $-hp$).

II. Estimation des erreurs de discrétisation

II.1 Sur l'estimation d'erreur a priori et a posteriori

Sous certaines hypothèses de régularité, l'estimation d'erreur à priori de l'approximation par éléments finis, s'écrit comme suit :

$$\exists C > 0 \text{ tel que : } \|U_{ex} - U_h\| \leq Ch^q \quad (2.1)$$

$\|\bullet\|$ est une norme sur les champs de déplacement, h la borne supérieure des tailles des éléments utilisés et q un réel positif dépendant du degré d'interpolation des éléments et de la régularité de la solution exacte.

Le second membre de l'inéquation (2.1) ne faisant pas intervenir la solution approchée, il est donc connu avant tout calcul éléments finis. C'est donc une estimation a priori de l'approximation.

Cette estimation est surtout de nature qualitative. En effet, elle caractérise la convergence de la solution approchée (U_h, σ_h) vers la solution exacte (U_{ex}, σ_{ex}) lorsque le maillage est raffiné, c'est-à-dire quand la taille h des éléments tend vers 0. Pour sa part, la vitesse de convergence est précisée par l'exposant q .

Par ailleurs, la constante C étant généralement impossible à évaluer, l'inéquation (2.1) ne donne aucune information quantitative sur l'ordre de grandeur de l'erreur de discrétisation. Nous pouvons donc affirmer que l'estimation a priori est uniquement d'ordre qualitative et non quantitative. En effet, si on divise la taille des éléments par deux, l'erreur est, en principe, divisée par 2^q , mais la valeur exacte de l'erreur demeure inconnue.

Pour pouvoir quantifier l'erreur de discrétisation, on doit effectuer une estimation a posteriori. C'est à dire que l'erreur est cette fois calculée à partir des résultats d'un calcul éléments finis. Lors des trente dernières années, de nombreux travaux ont été effectués sur les estimations d'erreurs a posteriori. Et des outils permettant réellement de quantifier la qualité des modélisations éléments finis ont été développés. Parmi ces travaux, on peut distinguer essentiellement, et par ordre chronologique :

- la démarche, basée sur les travaux de Ladevèze, (1975), qui a utilisé la notion d'erreur en relation de comportement et des techniques associées de construction de champs admissibles,
- la démarche, basée sur les travaux de Babuska et Rheinboldt (1978) qui ont utilisé la notion de résidu mesurant la non vérification des équations d'équilibre,
- la démarche de Zienkiewicz et Zhu (1987) qui ont utilisé l'écart en énergie entre la contrainte éléments Finis et une contrainte obtenue par lissage.

II.2 Quelques définitions

Soient les couples (U_{ex}, σ_{ex}) et (U_h, σ_h) respectivement la solution exacte du problème ; et la solution approchée obtenue après un calcul par éléments finis.

On définit l'erreur ponctuelle du champ des déplacements par la différence entre le champ des déplacements exact et le champ des déplacements éléments finis

$$(\mathbf{e}_h)_u = U_{ex} - U_h \quad (2.2)$$

On définit l'erreur ponctuelle du champ des contraintes par la différence entre le champ des contraintes exactes et le champ des contraintes éléments finis :

$$(\mathbf{e}_h)_\sigma = \sigma_{ex} - \sigma_h \quad (2.3)$$

La solution exacte n'étant en général pas connue, il faut donc calculer une estimation de l'erreur sur la solution éléments finis. L'erreur estimée au niveau global étant notée ε , nous pouvons donc l'écrire comme suit:

$$\varepsilon \cong (\mathbf{e}_h)_\Omega \quad (2.4)$$

Pour sa part, l'erreur estimée au niveau local ou élémentaire est notée ε_e ; nous pouvons donc l'écrire comme suit:

$$\varepsilon_e \cong (\mathbf{e}_h)_{\Omega_e} \quad (2.5)$$

Au niveau global, l'erreur relative exprimée en norme énergétique, est définie de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\|(\mathbf{e}_h)_\Omega\|}{\|u_h\|_\Omega} \quad (2.6)$$

Cette grandeur ne pouvant pas être calculée, elle est remplacée par l'expression suivante:

$$\tilde{\eta} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|u_h\|_{\Omega}^2 + \varepsilon^2}} \quad (2.7)$$

Et au niveau local, on peut écrire :

$$\tilde{\eta}_e = \frac{\varepsilon_e}{\sqrt{\|u_h\|_{\Omega_e}^2 + \varepsilon_e^2}} \quad (2.8)$$

Par ailleurs, quand la solution exacte est disponible, il existe deux indices qui permettent de mesurer la qualité de l'estimation de l'erreur. Le premier est l'indice d'effectivité (ou d'efficacité) qui peut être mesuré :

- soit au niveau de l'élément par l'indice d'effectivité élémentaire :

$$\theta_e = \frac{\varepsilon_e}{\|e_h\|_{\Omega_e}} \quad (2.9)$$

- soit au niveau global par l'indice d'effectivité globale :

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\|e_h\|_{\Omega}} \quad (2.10)$$

Le second est l'indice d'uniformité :

$$SD = \left[\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N (\theta_e - \bar{\theta})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

Où $\bar{\theta}$ est la moyenne arithmétique des θ_e .

Un estimateur est considéré comme fiable si. $0.8 \leq \theta \leq 1.2$ et $SD \leq 0.2$ (Zhong, 1991).

II.3 Estimateur basé sur l'extrapolation de Richardson

Cette méthode fut véritablement la première à traiter des estimations d'erreurs de discrétisation a posteriori. Elle a été mise au point par Richardson en 1910. dans le cadre des solutions obtenues par la méthode des différences finies. Elle a ensuite été étendue avec succès aux solutions obtenues par éléments finis par Babuska et Szabo (1982) et ensuite Gago et coll (1983).

Elle est basée sur la propriété de convergence asymptotique de la solution obtenue. En effet, pour estimer l'erreur de discrétisation, il faut disposer d'une suite de solutions éléments finis. Soit E une énergie de déformation asymptotique de référence, inconnue a priori. Soit E_h l'énergie de déformation de la solution éléments finis, liée à une discrétisation ou à un maillage quelconque, et tels que :

$$E_h = \frac{1}{2} \|u_h\|_{\Omega}^2 \quad (2.12)$$

La procédure d'extrapolation de Richardson consiste à déterminer une loi de convergence empirique de l'erreur globale. Celle ci est obtenue en effectuant une série d'au moins trois analyses éléments finis, et en résolvant un système d'équations pour déterminer E ainsi que des paramètres inconnus de cette loi.

Ainsi, à partir de la résolution de ce système, nous obtenons la valeur de l'énergie de

déformation asymptotique de référence E . D'autre part, à partir de chaque maillage, nous pouvons calculer l'énergie de déformation de la solution éléments finis E_h .

D'où l'estimation de l'erreur : $e = E - E_h$

Par ailleurs, afin de respecter au mieux la loi empirique, il est préférable que les discrétisations successives soient affinées de façon uniforme.

Toutefois, cette méthode présente des inconvénients. Ils sont comme suit :

- Cette méthode est coûteuse puisqu'elle nécessite au moins trois analyses éléments finis.
- La loi de convergence présente un caractère empirique.
- Et enfin, l'estimation de l'erreur établie est uniquement de nature globale.

Le principal avantage de cette méthode réside dans sa précision. En effet, lorsque la solution exacte n'est pas connue, cette méthode est utilisée lors de l'évaluation de la fiabilité globale des estimateurs d'erreur a posteriori.

II.4 Estimateur basé sur l'analyse duale

Fraeijs de Veubeke, (1965) proposa un estimateur d'erreur basé sur l'analyse duale. Cette méthode consiste à obtenir une borne supérieure et une borne inférieure de l'énergie de déformation au moyen de deux modèles différents d'éléments finis: le premier modèle de type cinématiquement admissible (CA) et le deuxième de type statiquement admissible (SA). Sachant que le premier tend asymptotiquement par défaut vers la valeur exacte, et le second l'approche par excès, un double calcul éléments finis à partir d'une même discrétisation, permet d'approcher l'énergie exacte par la moyenne arithmétique des énergies calculées.

L'inconvénient de cette méthode est que pour estimer l'erreur de discrétisation, il faut appliquer sur le même maillage, deux modèles différents : l'un en contraintes (SA) et l'autre en déplacements (CA). Ce qui augmente considérablement les coûts de calculs et constitue un inconvénient majeur. D'autre part, nous avons vu dans le chapitre 02, que le modèle éléments finis en contraintes était difficile à mettre en œuvre. Actuellement, et sauf pour quelques cas exceptionnels, cette méthode est rarement utilisée.

Récemment, Kempeneers (2005) a repris cet estimateur pour l'appliquer aussi bien aux problèmes bi dimensionnels que tridimensionnels. Selon l'auteur, cet estimateur s'est révélé très efficace du point de vue de la qualité de l'estimation, mais il demeure assez coûteux de par le calcul global qu'il nécessite. Toutefois, en améliorant la technique de construction de la solution équilibre d'une part, et grâce à la performance des ordinateurs ainsi qu'au développement des calculs parallèles, cette méthode semble connaître un regain d'intérêt.

II.5 Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement

La notion d'erreur en relation de comportement repose sur la classification des équations en liaisons cinématiques, équations d'équilibre et relations de comportement. Cet estimateur mesure l'écart entre la relation de comportement vérifiée par la solution élément finis et la relation de comportement du matériau en partant de l'hypothèse que, de toutes les équations du problème, celle-ci est « la moins fiable ». La difficulté apparaît dans la construction d'un couple déplacements contraintes admissibles. Ce concept d'erreur en relation de comportement introduit par Ladevèze (1975) est donc basé sur le principe de la dualité. En effet, cette méthode consiste d'abord à construire un champ de déplacements \hat{U} cinématiquement

admissibles (C A) et ensuite, un champ de contraintes $\hat{\sigma}$ statiquement admissibles (S A). A partir de ces 2 champs, on définit l'erreur en relation de comportement.

Principe

Soit un couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ de champs de déplacement \hat{U} cinématiquement admissible et de contrainte $\hat{\sigma}$ statiquement admissible. Ce couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ est supposé connu.

Ce couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ est la solution exacte du problème mécanique si et seulement si il vérifie la relation de comportement :

$$\hat{\sigma} = K\varepsilon(\hat{U}) \tag{2.13}$$

Si $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ ne vérifie pas l'équation (2.13), il constituera une solution approchée du problème.

Dans ce cas, la quantité $e = \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})$, sera non nulle. Cette quantité est appelée erreur en relation de comportement. Elle permet de mesurer la qualité de la solution éléments finis.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, après un calcul par éléments finis, la solution approchée obtenue (U_h, σ_h) n'est, en général, pas admissible. En effet, pour les éléments formulés en déplacement, le champ de déplacement U_h est cinématiquement admissible ; par contre, le champ de contraintes σ_h , calculé via la relation de comportement, n'est pas statiquement admissible.

Pour pouvoir calculer la quantité $(\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}))$, il faut donc construire le couple admissible $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ à partir de la solution (U_h, σ_h) et des données du problème. Une fois construit, ce couple de champs admissibles $(\hat{U}, \hat{\sigma})$, est alors considérée comme étant la solution approchée du problème.

L'erreur en relation de comportement est mesurée par la norme en énergie sur la structure considérée Ω . On définit l'erreur absolue globale par :

$$e = \left\| \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega} \quad \text{avec : } \|\bullet\|_{\sigma, \Omega} = \left[\int_{\Omega} Tr(\bullet K^{-1} \bullet) d\Omega \right]^2 \tag{2.14}$$

A partir de cette erreur absolue, on associe une erreur relative globale sur toute la structure :

$$\varepsilon = \frac{\left\| \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}}{\left\| \hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \tag{2.15}$$

De même, on peut définir la contribution à cette erreur d'une partie E de la structure. En pratique, on considère comme partie E de , un élément E du maillage utilisé. La contribution locale à cette erreur de chaque élément E de est définie par:

$$\varepsilon_E = \frac{\left\| \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, E}}{\left\| \hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \quad \text{avec : } \|\bullet\|_{\sigma, E} = \left[\int_E Tr(\bullet K^{-1} \bullet) dE \right]^2 \tag{2.16}$$

Si la structure est l'union d'un ensemble d'éléments E , on en déduit la relation entre l'erreur globale et les contributions locales :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \tag{2.17}$$

L'erreur globale ε permet d'évaluer la qualité globale de la solution approchée (U_h, σ_h) et de

mesurer l'erreur globale de discrétisation. Les contributions à l'erreur globale ε_E permettent d'évaluer les erreurs locales de discrétisation.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement, on choisit généralement :

$$\hat{U} = U_h \quad (2.18)$$

Pour appliquer cette méthode, la difficulté est de construire un champ $\hat{\sigma}$ qui vérifie rigoureusement les équations d'équilibre. De telles techniques ont été développées par plusieurs auteurs depuis plusieurs années. On peut citer les travaux de Ladevèze et coll (1986), Pelle et Rougeot (1989), Gastine et coll (1992), etc. La procédure est généralement divisée en deux phases. La première phase consiste à construire des efforts aux frontières de chaque élément. Puis en seconde phase, on construit un champ de contraintes élémentaires en équilibre. Il s'agit donc de constructions locales. La méthode dépend donc du type d'élément à équilibrer et de la situation du nœud dans le maillage (frontière, zone de contact, intérieur, etc...).

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Prager-Syngé (1947), on montre que l'erreur en relation de comportement majeure (ou bien surestime) toujours les erreurs en solution

$$\|e_h\| = \|K\varepsilon(U - U_h)\|_{\Omega} \leq e \quad (2.19)$$

U étant la solution exacte.

Ce résultat est important car il garantit à l'utilisateur de ne jamais sous-estimer l'erreur obtenue. La mesure d'erreur en relation de comportement est donc conservative et l'indice d'effectivité est toujours supérieur ou égal à 1.

II.6 Estimateur basé sur les défauts d'équilibre de la solution

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les erreurs de la solution éléments finis d'un modèle cinématiquement admissible, se traduisent essentiellement par l'apparition de résidus dans les équations d'équilibre, et par la présence de discontinuités du champ de contraintes le long des interfaces séparant les éléments.

La non vérification des équations d'équilibre locales est représentée par le résidu r_h , défini par:

$$r_h = \text{div}\sigma_h + f_d \text{ dans l'élément } E \quad (2.20)$$

La non continuité de la contrainte normale à l'interface entre deux éléments et la non vérification des conditions d'équilibre sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$, où les efforts F_d sont appliqués, sont mesurées par le résidu t_h défini par :

$$t_h = \sigma_h n_E - F_E \text{ sur chaque face de } \partial E \text{ (} \Gamma \not\subset \partial_1\Omega \text{)} \quad (2.21)$$

Si la face Γ d'un élément E n'appartient pas à la frontière $\partial\Omega$, et si \bar{E} désigne l'élément adjacent à E suivant la face, on a :

$$F_E = -\sigma_h n_{\bar{E}} \quad (2.22)$$

et si la face Γ appartient à $\partial_2\Omega$, on a :

$$F_E = F_d \quad (2.23)$$

Ces défauts d'équilibre sont des indicateurs d'erreur, mais ne constituent pas directement une mesure de l'erreur. L'estimation de l'erreur consiste à trouver des relations approximatives entre la norme énergétique de l'erreur et ces défauts d'équilibre.

En effet, le calcul de l'erreur $e_h = U - U_h$, telle que e_h soit nulle sur $\partial_1\Omega$, se fait par la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \forall U^* \text{ tel que } U^* = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \\ \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e_h)K \varepsilon(U^*)]d\Omega = \sum_E \int_E r_d U^* dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_h U^* d\Gamma \end{cases} \quad (2.24)$$

où les données en effort sont les résidus d'équilibre r_h et t_h définis pour tout élément E de la discrétisation et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} div[K \varepsilon(e_h)] + r_h = 0 \text{ dans } E \\ K \varepsilon(e_h)n_E + K \varepsilon(e_h)n_{\bar{E}} = -t_h \text{ sur } \Gamma \subset \partial E \quad (\Gamma \not\subset \partial_2\Omega) \\ K \varepsilon(e_h)n_E = -t_h \text{ sur } \Gamma \subset \partial E \cap \partial_2\Omega \end{cases} \quad (2.25)$$

Si on choisit $U^* = e_h$ dans (2.25), on obtient :

$$\|e_h\|_{u,\Omega}^2 = \sum_E \int_E r_h e_h dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_h e_h d\Gamma \quad (2.26)$$

Cette équation (2.27) montre clairement que l'erreur de discrétisation dépend directement du niveau des résidus des équations d'équilibre. Autrement dit, que la qualité d'un calcul élément finis est liée au niveau de ces résidus. Elle exprime donc d'avantage les défauts de la solution approchée, et qui ont été énoncés au paragraphe II.3 du chapitre précédent.

En partant de cette idée et en résolvant de façon plus ou moins approchée le système (2.26), plusieurs types d'estimateurs d'erreur ont été construits.

Les estimateurs proposés par Babuska et Rheinboldt (1978) pour le cas unidimensionnel; et ensuite Kelly et coll (1983) pour le cas bidimensionnel, sont de la forme suivante :

$$\|e_h\|_{\Omega} = C_1 \int_{\Omega} R^T R d\Omega + C_2 \int_I J^T J dI \quad (2.27)$$

C1 et C2 sont des constantes dépendant de la taille des éléments et de leur degré d'interpolation. Ω est le volume de la structure et I l'ensemble des interfaces entre éléments.

Il est à signaler que cet estimateur d'erreur est calculé explicitement à partir de la solution éléments finis. Il est donc connu sous le nom d'estimateur explicite. Toutefois, cet estimateur explicite présente un inconvénient majeur. Il réside dans le choix des constantes C1 et C2 qui sont en général inconnues. En effet, leurs valeurs sont dictées par des critères de sécurité. Ce qui conduit à un estimateur particulièrement pessimiste.

II.7 Estimateur basé sur le lissage du champ de contraintes

A. La version ZZ¹

En général, le degré polynomial des éléments peut être insuffisant pour représenter correctement la solution exacte qui peut être soit de degré plus élevé, soit une fonction non polynomiale. D'autre part, les contraintes sont discontinues de part et d'autre des interfaces entre éléments. Toutes ces raisons ont pour conséquence que la solution éléments finis soit généralement moins lisse que la solution exacte.

A partir de cette observation, et en adoptant l'hypothèse que le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ peut être considéré comme une bonne approximation de la contrainte exacte σ_{ex} , Zienkiewicz et Zhu (1987) ont eu l'idée de construire un estimateur d'erreur basé sur le lissage des champs de contraintes. Le principe de cet estimateur consiste à construire, à partir de la solution éléments finis, un champ de contraintes lissé de degré supérieur afin de mieux approcher la solution exacte. Pour sa mise au point, ils ont utilisé la propriété de super convergence du champ de contraintes. En effet, Hinton et Campbell (1974) ont constaté que la solution éléments finis oscillait autour de la solution exacte et qu'en certains points appelés points de super convergence les deux solutions coïncidaient.

L'erreur en énergie pouvant être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \|e_h\|_{u,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e_h)K\varepsilon(e_h)]d\Omega \\ &= \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{ex} - \sigma_h)K^{-1}(\sigma_{ex} - \sigma_h)]d\Omega \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'indicateur global est obtenu en remplaçant σ_{ex} par $\tilde{\sigma}_h$:

$$\theta^2 = \int_{\Omega} Tr[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)K^{-1}(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)]d\Omega \quad (2.29)$$

Les indicateurs locaux pour les éléments E de Ω sont définis par :

$$\theta_E^2 = \int_E Tr[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)K^{-1}(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)]dE \quad (2.30)$$

où $\tilde{\sigma}_h$ est le champ de contraintes lissé.

La difficulté de cette technique est de construire un champ $\tilde{\sigma}_h$ donnant un indicateur fiable. Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est obtenu en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}_h$ et le champ éléments finis σ_h . Par exemple, $\tilde{\sigma}_h$ peut être défini par :

$$\tilde{\sigma}_h = \mathbf{N}\bar{\sigma}_h \quad (2.31)$$

où \mathbf{N} représente la matrice des fonctions de base utilisées dans l'analyse éléments finis et $\bar{\sigma}_h$ des valeurs nodales qui sont déterminées par la minimisation de :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^T K^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega \quad (2.32)$$

Donc $\tilde{\sigma}_h$ est obtenu en résolvant le système obtenu à partir de la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

Donc

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{\sigma}_h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_h d\Omega \quad (2.34)$$

Ce qui donne un système linéaire :

$$\mathbf{M}\{\bar{\sigma}_h\} = \mathbf{b} \quad (2.35)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_h d\Omega. \quad (2.36)$$

La matrice \mathbf{M} est une sous matrice de la matrice des masses correspondant à une composante du champ des déplacements. Cette matrice est symétrique et définie positive et ne doit être

évaluée qu'une seule fois, car elle est indépendante du champ des contraintes.

On obtient ainsi l'indicateur ZZ^1 proposé par Zienkiewicz et Zhu (1987). Le système global, (2.36) est à résoudre sur chacune des composantes du tenseur des contraintes. Toutefois, cette méthode est coûteuse car, pour un problème 3-D (tenseur de contraintes à 6 composantes) on doit résoudre 6 systèmes du même ordre de grandeur que le système éléments finis.

Pour pallier à cet inconvénient, d'autres méthodes locales (qualifiées soit de nodales soit d'élémentaires), consistent à utiliser des procédés de lissage conduisant à des calculs plus locaux. A ce titre, nous pouvons citer les travaux de Ainsworth et coll. (1989), Zienkiewicz et Zhu (1991), Beckers et Zhong (1991), Strouboulis & Haque (1992 a, b). Toutefois Strouboulis et Haque (1992a) et Dufeu (1997), ont montré que ces méthodes locales (élémentaires et nodales) ne sont fiables que pour des éléments de degré 1.

B. La version ZZ^2

L'une des techniques locales les plus connues est la version ZZ^2 proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a, b). Cette technique est également connue sous le nom de méthode de recouvrement ou en anglais sous le nom de : « the Super convergence Patch Recovery » (S.P.R).

Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est évalué à partir de domaines (généralement appelés "patch") comportant plusieurs éléments finis et se superposant. Ces domaines peuvent être définis à partir de la notion de distance ou de la connectivité des éléments. En utilisant la notion de « superconvergence » des points d'intégrations, cette méthode consiste à construire sur un patch d'éléments S_E autour d'un nœud (figure 16), une approximation du type :

$$\tilde{\sigma}_{h|S} = \mathbf{P}a_S \quad (2.37)$$

où \mathbf{P} contient les termes polynomiaux appropriés et a_S les coefficients inconnus des monômes correspondants. Par exemple, pour les triangles à 3 nœuds, on a :

$$\mathbf{P} = [1, x, y] \quad \text{et} \quad a_S^T = [a_1, a_2, a_3] \quad (2.38)$$

La détermination des coefficients du polynôme a_S se fait en minimisant la fonctionnelle :

$$F(a) = \sum_{i=1}^N (\sigma_h(x_i, y_i) - \tilde{\sigma}_{h|S}(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^N (\sigma_h(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i)a_S)^2 \quad (2.39)$$

où N est le nombre total de points d'intégrations des éléments du patch et (x_i, y_i) leurs coordonnées ; soit la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i) a_S = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (2.40)$$

Ce qui donne un système linéaire :

$$\mathbf{A}a_S = \mathbf{b} \quad (2.41)$$

avec :
$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (2.42)$$

La matrice \mathbf{A} peut être très mal conditionnée voire impossible à inverser. Une normalisation des coordonnées sur chaque patch est alors utilisée [Zienkiewicz et coll., 1993].

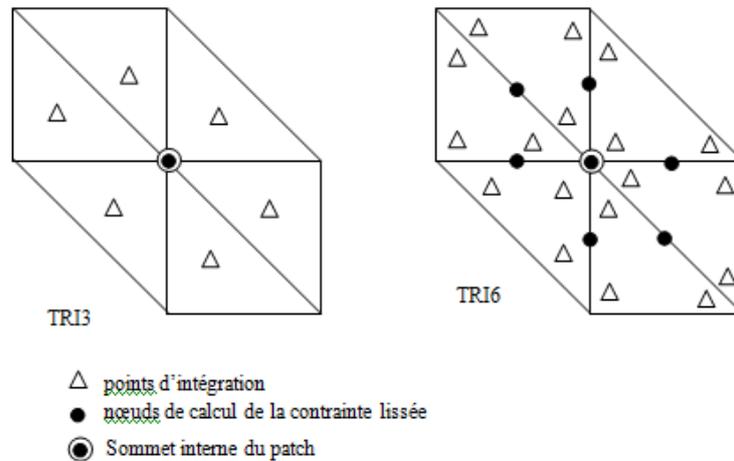


Figure 16 : Patches d'éléments et positions des points et nœuds

La version ZZ^2 présente, dans le cas de mélange d'éléments, un problème de validité de a_s si l'espace est trop riche, et en contre partie, une perte de super convergence s'il ne l'est pas (Desroches, 1994). De plus, son extension au cas 3D semble délicate.

Cette méthode a ensuite été améliorée par d'autres auteurs (Wiberg et Abdulwahab, 1993), (Boroomand et Zienkiewicz, 1997) ainsi que (Zienkiewicz et coll. 1998). Ces auteurs ont enrichi le champ lissé $\tilde{\sigma}$ en introduisant des conditions supplémentaires sur l'équilibre interne et sur les tractions imposées sur la surface du modèle (Dufeu 1997) et (Beckers et Dufeu 1998).

III. Estimation d'erreur pour le problème de contact

Dans le cadre des problèmes de contact unilatéral, il semble que peu de travaux aient été réalisés sur les estimations d'erreur *a posteriori*. On peut citer néanmoins les travaux de Wriggers et Miehe (1994) qui ont utilisé une méthode de pénalisation permettant de transformer l'inéquation variationnelle en une équation variationnelle et ainsi de construire, dans ce cadre, un estimateur d'erreur basé sur les résidus des équations d'équilibre. L'inconvénient majeur de cette démarche est que le paramètre de pénalisation intervient directement dans l'estimation de l'erreur.

Un autre indicateur d'erreur a été proposé, dans le cadre d'une étude comparative, par Wriggers et Sherf (1998). Cet indicateur est basé sur des techniques locales de lissage des contraintes, appliquées sur des groupes d'éléments ou « Patch ». Il s'agit de la version ZZ^2 proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a et b). L'inconvénient majeur de cette technique est que la prise en compte des erreurs de contact, ait été faite de manière implicite. En effet, on ne peut pas distinguer entre les contributions à l'erreur de la discrétisation du maillage seul et celles des conditions de contact.

Dans le cadre des estimateurs fondés sur l'erreur en relation de comportement, Coorevits et coll (1999) ont proposé une méthode d'estimation pour le problème de Signorini sans frottement. Puis cette méthode a été étendue au cas du contact (toujours sans frottements) de solides déformables avec des maillages compatibles et incompatibles (Coorevits et coll, 2000). Ensuite

une extension au cas du problème avec frottements de Coulomb en quasi statique, a été réalisée par Coorevits et coll (2001) pour le cas du problème de Signorini ; et par Louf et coll (2003) pour le cas du contact entre deux solides déformables. Toutefois, leur principale difficulté consiste en la construction des champs admissibles, notamment pour le cas tridimensionnel où celle ci (la construction) semble délicate.

III.1 Erreur de contact associée à l'erreur en relation de comportement

Pour la présentation de ce type d'estimateur, nous nous limiterons uniquement aux cas de deux corps déformables en contact. tels qu'illustrés par les données du problème de la figure 07 du chapitre 01.

➤ Le cas avec frottement

On dit qu'un couple $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{c})$ est admissible si :

- $\hat{u} = (\hat{U}^1, \hat{U}^2, \hat{W}^1, \hat{W}^2)$ vérifie les liaisons cinématiques (1.37)

- $\hat{c} = (\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{R}^1, \hat{R}^2, \hat{R}^c)$ vérifie les équations d'équilibre (1.38)

Pour tout couple admissible $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{c})$, on définit l'erreur en relation de comportement comme suit :

$$e(\hat{s}) = \left[\sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell)\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + 2 \int_{\Gamma_c} \left(\varphi(-\hat{W}^c) + \varphi^*(\hat{R}^c) + \mu |\hat{R}_n^c| |\hat{W}_t^c| + \hat{R}_t^c \hat{W}_t^c + \hat{R}_n^c \hat{W}_n^c \right) d\Gamma_c \right]^{1/2} \quad (2.43)$$

On remarque que $e(\hat{s})$ est toujours positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si les relations de comportement (1.39) sont vérifiées. La quantité $e(\hat{s})$ est par définition la mesure d'erreur en relation de comportement associée au couple admissible \hat{s} .

On associe à l'erreur en relation de comportement, l'erreur relative ε et définie par :

$$\varepsilon = \left[\frac{\sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell)\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + 2 \int_{\Gamma_c} \left(\varphi(-\hat{W}^c) + \varphi^*(\hat{R}^c) + \mu |\hat{R}_n^c| |\hat{W}_t^c| + \hat{R}_t^c \hat{W}_t^c + \hat{R}_n^c \hat{W}_n^c \right) d\Gamma_c}{\sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell + K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell)\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (2.44)$$

Soit E une partie de Ω^ℓ . On définit alors la contribution locale de l'élément E à l'erreur globale (2.43) par la quantité ε_E :

$$\varepsilon_E = \left[\frac{\|\hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell)\|_{\sigma, E}^2 + 2 \int_{\Gamma_c \cap E} \left(\varphi(-\hat{W}^c) + \varphi^*(\hat{R}^c) + \mu |\hat{R}_n^c| |\hat{W}_t^c| + \hat{R}_t^c \hat{W}_t^c + \hat{R}_n^c \hat{W}_n^c \right) d\Gamma_c}{\sum_{\ell=1}^2 \|\hat{\sigma}^\ell + K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell)\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (2.45)$$

Par ailleurs, dans le cas du contact avec frottement, Coorevits et al (2001) ont également montré, en effectuant une extension du théorème de Prager-Synge (1947) en élasticité linéaire, que cet estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement majore toujours les erreurs en solution. Par conséquent, quel que soit le cas (avec ou sans frottement), l'estimation d'erreur de contact basée sur l'erreur en relation de comportement garantit à l'utilisateur de ne jamais sous-estimer l'erreur obtenue.

Par ailleurs, signalons qu'en écrivant l'erreur de contact de manière explicite, ces estimateurs basés sur la notion d'erreur en relation de comportement, possèdent l'avantage principal de pouvoir dissocier entre l'erreur de contact et l'erreur de discrétisation du maillage seul. Cette dissociation a permis de montrer (Louf et coll, 2003) que la seule adaptation du maillage est insuffisante pour améliorer la qualité du calcul lorsque les erreurs dues au traitement approché des conditions de contact et de frottement sont importantes. En effet, ces auteurs ont montré à travers des exemples traités, que l'erreur de contact stagne rapidement en augmentant le nombre d'éléments du maillage. En conséquence, le raffinement du maillage ne peut pas toujours avoir l'influence souhaitée sur la qualité globale des calculs.

III.2 Erreur de contact associée aux défauts d'équilibre de la solution

Pour le problème élastique linéaire, l'estimation d'erreur basée sur les résidus d'équilibre peut être écrite, sous la forme générale suivante (Johnson et Hansbo 1992) :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\Omega} \leq \int_{\Omega} h C_1 R_1^T(\sigma_h) R_1(\sigma_h) d\Omega + \int_I h C_2 R_2^T(\sigma_h) R_2(\sigma_h) dI \quad (2.46)$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\Omega} \leq \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma - \sigma_h) k^{-1}(\sigma - \sigma_h) d\Omega$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_1(\sigma_h) = \text{div} \sigma_h + f_d & \text{dans l'élément } E \\ R_2(\sigma_h) = \frac{1}{h_T} (\sigma_h n_E + \sigma_h n_{\bar{E}}) & \text{sur } I \subset \partial E (I \not\subset \partial_2 \Omega) \\ R_2(\sigma_h) = \frac{1}{h_T} (\sigma_h n_E + F_d) & \text{sur } I \subset (\partial E \cap \partial_2 \Omega) \end{array} \right. \quad (2.47)$$

h_T représente une longueur caractéristique de l'élément E . et I l'ensemble des interfaces inter éléments .

Dans le cas d'un problème de contact, un terme supplémentaire a été introduit pour l'erreur associée, par Wriggers et coll (1994) :

$$R_3(\sigma_h) = |g_n U_{hn} n_E - t_h | n_E + F_d) \quad \text{sur } \partial E \cap \Gamma_c \quad (2.48)$$

Ce résidu correspond à la perte d'équilibre local par la solution approchée au niveau de la zone de contact. Le terme $g_n U_{hn} n_E$ peut être interprété comme une pression de contact sur Γ_c

tandis que le vecteur contrainte t_h est donné par $t_h = \sigma_h n_E$ (Wriggers et Sherf 1998).

L'addition de (2.48) à (2.46) donne pour le problème élastique et linéaire de contact, l'estimateur d'erreur suivant:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\Omega} \leq \int_{\Omega} h C_1 R_1^T(\sigma_h) R_1(\sigma_h) d\Omega + \sum_{k=2}^3 \int_1 h C_k R_k^T(\sigma_h) R_k(\sigma_h) dI \quad (2.49)$$

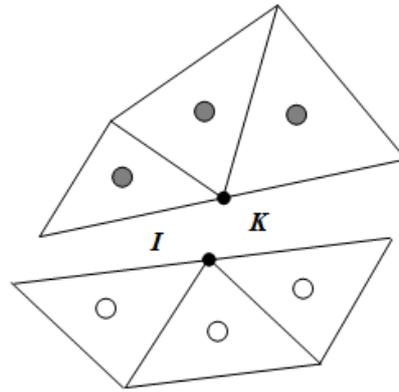
A travers une étude comparative appliquée sur des adaptations de maillages et utilisant différents estimateurs et indicateurs d'erreur de contact, Wriggers et sherf (1998) ont montré les performances de cet estimateur. Néanmoins, cet estimateur a été obtenu suite à la transformation de l'inéquation variationnelle en une équation variationnelle. Ceci a été effectué grâce au rajout d'un terme supplémentaire portant un coefficient de pénalisation g_n choisi arbitrairement. Cela étant, nous pouvons également constater sur l'expression (2.49), que l'estimateur d'erreur mis au point, est lui-même pénalisé par ce coefficient g_n . Ce qui constitue un inconvénient majeur.

Par ailleurs, en analysant les solutions éléments finis obtenues par la méthode de la pénalisation dans le cadre du problème de contact, Barlam et Zahavi (1999) ont montré la dépendance, des résultats obtenus après calcul (pressions et déplacement) ainsi que de l'erreur calculée vis-à-vis du coefficient de pénalisation introduit. Cette dépendance semble particulièrement plus importante pour le cas du contact tridimensionnel.

III.3 Erreur de contact associée au lissage du champ de contraintes

Dans le cadre du problème de contact sans frottements, un indicateur d'erreur basé sur des techniques de lissage, a été proposé par Wriggers et Sherf (1998). Par la suite, il a été étendu au cas tridimensionnel par Rieger et Wriggers (2001). Il est à signaler que l'indicateur mis au point, est basé sur des techniques locales. Plus précisément, les lissages sont effectués sur des groupes d'éléments ou « Patch ». Il s'agit donc de l'application au problème de contact, de la version ZZ² (ou de la méthode dite « Super convergent Patch Recovry ») proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a,b).

En effet, cette technique de projection particulièrement adaptée au problème de contact, utilise des groupes d'éléments spécifiques ou « Patch d'éléments » qui sont définis au voisinage de la zone de contact de la manière suivante. Pour chaque nœud I appartenant à $\partial_C \Omega^1$, on cherche le nœud K le plus proche et appartenant à $\partial_C \Omega^2$ (figure 17). Au nœud I , sont connectés des éléments appartenant à Ω^1 et définissant un « Patch dit primitif ». Au nœud K , sont connectés des éléments appartenant à Ω^2 et définissant un « Patch dit étendu ». Ces deux « Patches » (primitif et étendu) vont alors former un « Patch global et unique » sur lequel l'opération de lissage des contraintes sera effectuée.



● : Points de Gauss pour patch d'éléments primitifs ;
○ : Points de Gauss pour patch d'éléments étendus.

Figure 17 : Patch d'éléments pour le lissage des contraintes en zone de contact

Par ailleurs, en adoptant l'hypothèse que le champ de contraintes est non seulement continu mais ne comportant pas de sauts au niveau de la zone de contact, il est procédé au lissage des contraintes au niveau de ces « Patch globaux » définis précédemment. En utilisant cette procédure ainsi que les propriétés de super convergence des éléments (Hinton et Campbell 1974), le champ de contraintes lissées sera calculé sur l'ensemble des deux solides

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et ce, en minimisant la quantité $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{P}[\tilde{\sigma}_h - \sigma_h]$; \mathbf{P} étant un opérateur de projection.

Le champ de contraintes lissées $\tilde{\sigma}_h$, est donc obtenu en résolvant

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{P}[\tilde{\sigma}_h - \sigma_h] = 0 \quad (2.50)$$

Par la suite, l'erreur globale sera définie de la manière suivante :

$$e = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \text{Tr}[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)] d\Omega \quad (2.51)$$

Dans le cadre d'une procédure d'adaptation des maillages, les performances de cet estimateur ont été étudiées par Wriggers et Sherf (1998). Les maillages obtenus par cette procédure d'adaptation étant incompatibles, ces auteurs ont essayé d'étudier la qualité de plusieurs estimateurs à travers trois paramètres :

- la continuité des contraintes principales sur la zone de contact,
- la distribution de l'erreur sur la zone de contact en fonction des maillages adaptés
- la convergence et le taux de convergence vers la solution exacte de référence (nous rappelons que nous sommes toujours dans le cas sans frottement).

Par rapport à l'estimateur en résidu d'équilibre (défini dans le paragraphe précédent), les résultats de cette étude comparative, ont montré que l'adaptation de maillages basée sur cet estimateur donne un état de contraintes principales, jugé moins satisfaisant (du point de vue continuité) au niveau de la zone de contact. Il est à signaler également, une meilleure convergence vers la solution de référence pour des maillages adaptés et issus de l'erreur portant sur les résidus d'équilibre.

Par ailleurs, nous remarquons que la prise en compte des erreurs de contact, a été faite de manière implicite. En effet, on ne peut pas distinguer, entre les contributions à l'erreur de la

discrétisation des conditions de contact et celle de la discrétisation du maillage seul. Ce qui constitue un inconvénient majeur.

Cela étant, nous proposons dans le chapitre 03, un estimateur basé sur des techniques de lissage et qui dissocie entre l'erreur de contact proprement dite et l'erreur de discrétisation du maillage seul.

IV. Un indicateur d'erreur pour les problèmes contact avec frottements de Coulomb

Dans ce paragraphe, nous rappelons l'indicateur d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral développé par Becheur et al (2008). cet indicateur consiste en une technique d'estimation d'erreurs assez simple à mettre en œuvre, facile à implémenter dans un code de calcul par éléments finis, et pouvant mesurer correctement l'erreur de discrétisation du problème de contact aussi bien pour le cas bidimensionnel que tridimensionnel. Cet indicateur a été construit sur la base d'une association entre deux méthodes d'estimation connues. La première concerne l'erreur obtenue par les techniques de projections dont les propriétés de super convergence sont utilisées pour le lissage des champs de contraintes dans les solides. Notre choix a été porté sur la méthode de Zienkiewicz et Zhu (1991) connue sous le nom de la SPR (SUPER CONVERGENT PATCH RECOVERY). La seconde concerne l'erreur portée par les relations constitutives introduites par Ladeveze (1996) et établies uniquement au niveau des zones de contact.

Comme illustré dans la figure 07 du chapitre 01, considérons le cas général de deux corps élastiques déformables en contact avec frottements. La formulation du problème a déjà été effectuée au paragraphe V du même chapitre (01). Toutefois, pour la suite de nos développements, nous reproduisons ici uniquement le problème de référence. Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur au paragraphe sus cité.

Soit donc le problème de référence suivant et qui consiste à trouver les couples $(\mathbf{U}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ définis dans Ω^1 et $(\mathbf{U}^2, \boldsymbol{\sigma}^2)$ définis dans Ω^2 et $[(\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2), (\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^c)]$ définis sur Γ_C tels que :

- les couples $(\mathbf{U}^\ell, \mathbf{W}^\ell)$, vérifient les conditions cinématiques :

$$\mathbf{U}^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^\ell = \mathbf{W}^\ell \text{ sur } \Gamma_C \quad \ell=1,2 \quad (2.52)$$

- $(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{R}^\ell, \mathbf{R}^c)$, $\ell=1,2$ satisfassent les équations d'équilibre :

$$-\int_{\Omega^\ell} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(V^\ell)] d\Omega + \int_{\Omega^\ell} f_d^{\ell T} V^\ell d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^\ell} F_d^{\ell T} V^\ell dS + \int_{\Gamma_C} R^{\ell T} V^\ell dS = 0 \quad \forall V^\ell \in U_0^\ell$$

$$\text{avec } U_0^\ell = \left\{ \mathbf{U}^\ell \text{ définis et suffisamment réguliers sur } \Omega^\ell \text{ tels que } U^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \right\} \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{R}^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^c = -\mathbf{R}^2 \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (2.53b)$$

$$\text{et tels que :} \quad \mathbf{R}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell : \mathbf{n}^\ell, \quad \ell = 1,2 \quad (2.53c)$$

- $(\mathbf{U}^\ell, \mathbf{W}^\ell, \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{R}^c)$, $\ell = 1,2$ vérifient les relations constitutives :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathbf{K}^\ell \varepsilon(\mathbf{U}^\ell) & \ell = 1,2 & (2.54a) \\ \Phi(-\mathbf{W}^c, \mathbf{R}^c) + \mathbf{W}^{cT} \mathbf{R}^c = 0 & \ell = 1,2 & (2.54b) \end{cases}$$

Soient les couples $((\sigma^\ell, \mathbf{R}^\ell); (\mathbf{U}^\ell, \mathbf{W}^\ell))$ avec $\ell = 1,2$, la solution exacte du problème de référence.

Soient les couples $((\sigma_h^\ell, \mathbf{R}_h^\ell); (\mathbf{U}_h^\ell, \mathbf{W}_h^\ell))$ avec $\ell = 1,2$, la solution éléments finis en déplacement du problème de référence, tels que le champ \mathbf{U}_h^ℓ de type E.F. et vérifie (2.52) et tel que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{V}_h^\ell \text{ de type E.F. avec : } \mathbf{V}_h^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell \text{ et } \mathbf{V}_h^\ell = \mathbf{W}_h^\ell \text{ sur } \Gamma_c \quad \ell = 1,2 \\ - \int_{\Omega^\ell} \text{Tr} [\varepsilon(\mathbf{U}_h^\ell)^T \mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{V}_h^\ell)] d\Omega + \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_d^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^\ell} \mathbf{F}_d^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{R}_h^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

et le champ de contraintes approché est calculé via la loi de comportement :

$$\sigma_h^\ell = \mathbf{K}^\ell \varepsilon(\mathbf{U}_h^\ell) \quad \ell = 1,2 \quad (2.56)$$

Si l'on compare le problème de référence (2.52) à (2.54) et le problème approché (2.55) et (2.56), on constate que la solution approchée $((\sigma_h^\ell, \mathbf{R}_h^\ell); (\mathbf{U}_h^\ell, \mathbf{W}_h^\ell))$ vérifie, comme la solution exacte $((\sigma^\ell, \mathbf{R}^\ell); (\mathbf{U}^\ell, \mathbf{W}^\ell))$, les liaisons cinématiques et les relations (2.54a) et (2.56) respectivement. Par contre, le champ approché σ_h^ℓ ne vérifie pas les équations d'équilibre (2.53) : dans la méthode des éléments finis formulés en déplacements, l'approximation porte sur les équations d'équilibre.

Par ailleurs,, les champs \mathbf{W}_h^c et \mathbf{R}_h^c ne vérifient pas strictement les relations constitutives sur la zone de contact. Ainsi, la quantité $(\Phi(-\mathbf{W}_h^c, \mathbf{R}_h^c) + \mathbf{W}_h^{cT} \mathbf{R}_h^c)$ n'est pas égale à zéro puisque $\mathbf{W}_h^c \neq \mathbf{W}^c$ and $\mathbf{R}_h^c \neq \mathbf{R}^c$. Toutefois, la fonction $\Phi(-\mathbf{W}_h^c, \mathbf{R}_h^c)$ doit avoir une valeur finie. A cet effet, les densités de réaction doivent toujours être incluses (ou corrigées) dans le cône de frottement et la condition de non pénétration satisfaite. Ceci impose après une première résolution par la méthode des éléments finis, une éventuelle correction des densités de réactions et des déplacements. Par conséquent, la condition d'équilibre imposera pour la seconde fois, une deuxième correction des champs de contraintes approchés σ_h^ℓ .

Définition de l'erreur:

Pour tout couple $((\sigma_h^\ell, \mathbf{R}_h^\ell); (\mathbf{U}_h^\ell, \mathbf{W}_h^\ell))$ défini sur Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$, défini comme solution éléments finis, soit la quantité :

$$e = \left[\sum_{\ell=1}^2 \|\sigma^\ell - \sigma_h^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} \left(\Phi(-\mathbf{W}_h^C, \mathbf{R}_h^C) + \mathbf{W}_h^{C^T} \mathbf{R}_h^C \right) d\Gamma_C \right]^{1/2} \quad (2.57).$$

$$\text{Avec} \quad \|\sigma^\ell - \sigma_h^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell} = \left(\int_{\Omega^\ell} (\sigma^\ell - \sigma_h^\ell)^T \mathbf{K}^{-1} (\sigma^\ell - \sigma_h^\ell) d\Omega \right)^{1/2} \quad (2.58).$$

Par définition, la quantité e est la mesure de l'erreur exacte associée aux couples solution éléments finis $((\sigma_h^\ell, \mathbf{R}_h^\ell); (\mathbf{U}_h^\ell, \mathbf{W}_h^\ell))$, $\ell = 1, 2$.

Cela étant dit, pour que l'erreur soit finie, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\varphi(-\mathbf{W}_h^C) = \varphi^*(\mathbf{R}_h^\ell) = 0 \quad (2.59).$$

Autrement dit, il faut que $-\mathbf{W}_h^C \in \partial\varphi^*(\mathbf{R}_h^\ell)$ et $\mathbf{R}_h^\ell \in \partial\varphi(-\mathbf{W}_h^C)$. Ce qui n'est pas forcément le cas pour les couples solutions éléments finis $((\sigma_h^\ell, \mathbf{R}_h^\ell); (\mathbf{U}_h^\ell, \mathbf{W}_h^\ell))$. Par conséquent, une correction des champs de déplacements \mathbf{W}_h^ℓ et des champs de réactions \mathbf{R}_h^ℓ , s'impose.

Dans ce cas, la condition d'équilibre impose une seconde résolution de ce que l'on peut désigner par le problème corrigé, et qui consiste à :

Trouver les champs \mathbf{U}_c^ℓ définis dans Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$ de type E.F et vérifiant (2.59) tels que :

- $\forall \mathbf{V}_h^\ell$ de type E.F tel que $\mathbf{V}_h^\ell = 0$ sur $\partial_1 \Omega^\ell$ et $\mathbf{V}_h^\ell = \mathbf{W}_h^\ell$ sur Γ_C (2.60a)

- $-\mathbf{W}_c^C \in \partial\varphi^*(\mathbf{R}_h^\ell)$ et $\mathbf{R}_c^\ell \in \partial\varphi(-\mathbf{W}_h^C)$ (2.60b)

- Les équations d'équilibre :

$$-\int_{\Omega^\ell} \text{Tr}[\varepsilon(\mathbf{U}_c^\ell) \mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{V}_h^\ell)] d\Omega + \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_d^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^\ell} \mathbf{F}_d^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mathbf{R}_c^{\ell T} \mathbf{V}_h^\ell d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{V}_h^\ell \in \mathbf{U}_0^\ell \quad (2.60c)$$

avec $U_0^\ell = \{U^\ell \text{ définis et suffisamment réguliers dans } \Omega^\ell \text{ tels que } U^\ell = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^\ell\}$

Et le champ de contraintes corrigé est calculé via la relation constitutive :

$$\sigma_c^\ell = \mathbf{K}^\ell \varepsilon(U_c^\ell) \quad \ell = 1, 2 \quad (2.60d)$$

Ceci donne lieu à un nouveau couple solution corrigé, que nous noterons par $((\sigma_c^\ell, \mathbf{R}_c^\ell); (U_c^\ell, W_c^\ell))$, et tel que $\varphi(-W_c^C) = \varphi^*(\mathbf{R}_c^\ell) = 0$.

Ainsi, la mesure de l'erreur, peut s'écrire comme suit :

$$e = \left[\sum_{\ell=1}^2 \|\sigma^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + \int_{\partial_c \Omega^\ell} (\mu |R_{c_n}^\ell| |W_{c_t}^\ell| + R_{c_t}^\ell W_{c_t}^\ell + R_{c_n}^\ell W_{h_n}^C) d\Gamma_c \right]^{1/2} \quad (2.61)$$

La solution exacte n'étant en général pas connue, il faut donc calculer une estimation de l'erreur sur la solution éléments finis. L'idée consiste à remplacer, dans notre cas, $\sigma^\ell, \ell = 1, 2$ (le champ de contraintes exact) par un champ de contraintes $\tilde{\sigma}^\ell, \ell = 1, 2$ dont les propriétés d'équilibre interne ou de continuité entre éléments doivent être suffisamment vérifiées.

Par ailleurs, afin de mieux approcher la solution exacte, et en constatant que la solution éléments finis est moins lisse que la solution exacte, construisons à partir de la solution éléments finis, un champ de contraintes lissé de degré supérieur. Pour cela, on utilise la propriété de super convergence du champ de contraintes. En effet, Hinton et Campbell (1974) ont constaté que la solution éléments finis oscillait autour de la solution exacte et qu'en certains points appelés points de super convergence les deux solutions coïncidaient.

Pour pouvoir estimer l'erreur, le premier terme de l'erreur exacte portée sur le champ de contraintes de l'expression (2.61), peut donc être remplacé par le terme suivant $\|\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}$ avec :

$$\|\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell} = \left(\int_{\Omega^\ell} (\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell)^T \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell) d\Omega \right)^{1/2} \quad (2.62)$$

Finalement, on peut calculer une approximation de l'erreur qui sera portée par un indicateur d'erreur noté e_S , et telle que :

$$e_S = \left[\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + \int_{\partial_c \Omega^\ell} \left(\mu |R_{c_n}^\ell| |W_{c_t}^\ell| + R_{c_t}^\ell W_{c_t}^\ell + R_{c_n}^\ell W_{c_n}^C \right) d\Gamma_C \right]^{1/2} \quad (2.63)$$

et où $\tilde{\sigma}^\ell$ est le champ de contraintes lissé sur chaque corps Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$.

Par ailleurs, nous avons vu précédemment, que le champs de contraintes lissé ($\tilde{\sigma}^\ell$) peut être obtenu par plusieurs méthodes différentes. Ce sont soit des méthodes dites globales, locales ou de recouvrement (SPR : Super convergent Patch Recovry).

Par ailleurs, on associe à cette mesure d'erreur e_S , l'erreur relative ε définie par:

$$\varepsilon = \left[\frac{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + \int_{\partial_c \Omega^\ell} \left(\mu |R_{c_n}^\ell| |W_{c_t}^\ell| + R_{c_t}^\ell W_{c_t}^\ell + R_{c_n}^\ell W_{c_n}^C \right) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell + \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (2.64)$$

Ainsi ε est une précision globale qui permet d'évaluer la qualité globale de la solution E. F.

Soit E une partie de Ω^ℓ . On définit alors la contribution locale de E à l'erreur globale ε par la quantité ε_E , telle que :

$$\varepsilon_E = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}^\ell - \sigma_c^\ell\|_{\sigma, E}^2 + \int_{\partial_c \Omega^\ell \cap E} \left(\mu |R_{c_n}^\ell| |W_{c_t}^\ell| + R_{c_t}^\ell W_{c_t}^\ell + R_{c_n}^\ell W_{c_n}^C \right) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^\ell + \sigma_c^\ell\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (2.65)$$

En pratique, E est un élément quelconque du maillage associé à Ω^ℓ . Les contributions locales permettent ainsi de localiser les erreurs sur la structure. Par construction, on a :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \quad (2.66)$$

V. La procédure d'adaptation de maillage

V.1 Principe

L'amélioration de la qualité d'un calcul par la modification des paramètres de discrétisation nécessite la mise en place de procédures efficaces qui permettent d'atteindre le niveau de qualité désirée par l'utilisateur tout en minimisant au mieux les coûts de calcul.

Schématiquement, ces procédures (Figure 18), appelées procédures d'adaptation, consistent à effectuer un premier calcul sur un maillage (qui peut être relativement grossier) avec des interpolations de faible degré (généralement linéaire) puis à évaluer les erreurs de discrétisation commises. Ensuite, en utilisant ces résultats, il s'agit de déterminer les paramètres (tailles des éléments et degré d'interpolation) qui permettent d'obtenir une précision donnée tout en minimisant les coûts. La nouvelle discrétisation est alors effectuée en respectant ces paramètres et une nouvelle analyse éléments finis est réalisée.

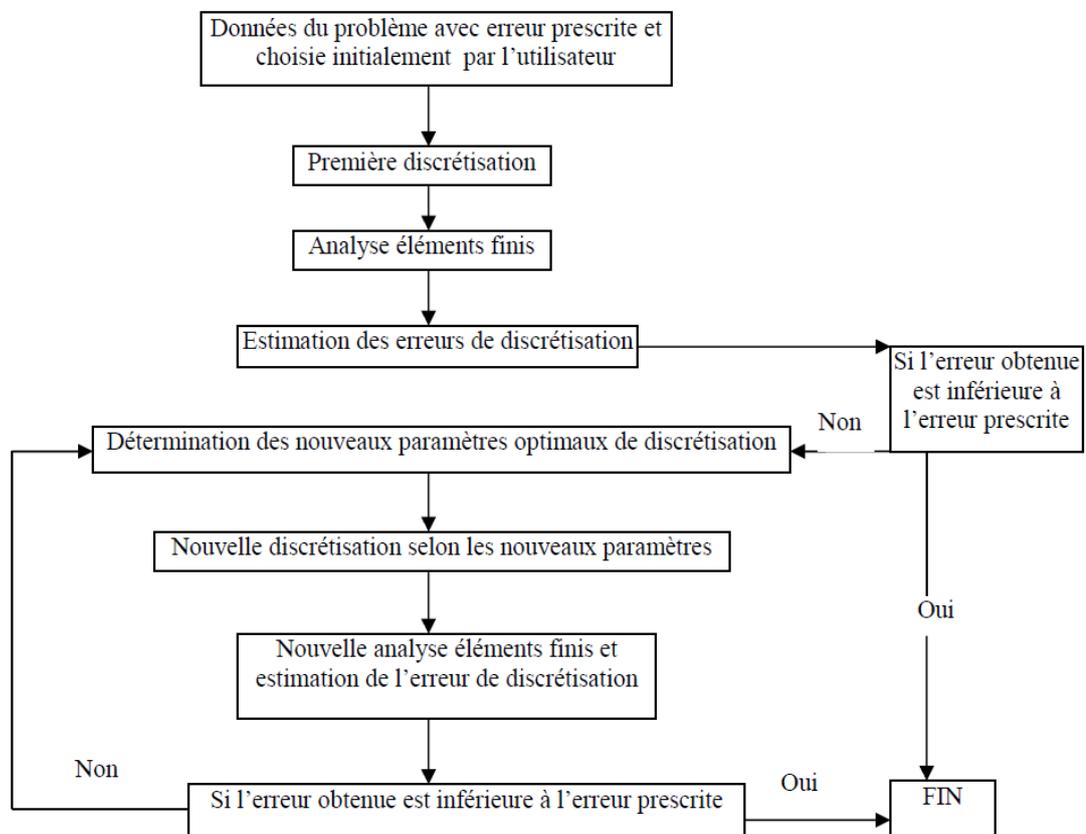


Figure 18 : Procédure d'adaptation

V.2 Les techniques d'adaptation de maillages

Depuis de nombreuses années, diverses techniques ont été développées pour adapter les maillages de façon à améliorer la qualité des solutions, mais c'est surtout depuis l'apparition de méthodes efficaces de contrôle d'erreur que les techniques adaptations des maillages ont vraiment été utilisées. Actuellement, on distingue généralement trois méthodes adaptation connues sous les noms de r -version, de h -version et de p -version.

V.2.1 La méthode -r

Cette méthode est apparue dans les années 70 [Carrol & Barker, 1973], [Turcke & Mc Neice, 1974]. Elle consiste, dans son principe, à garder la topologie du maillage (nombre de nœuds et connectivité) ainsi que le type d'interpolation et à chercher à positionner les nœuds de façon à minimiser l'erreur entre la solution exacte et la solution éléments finis (03.4).

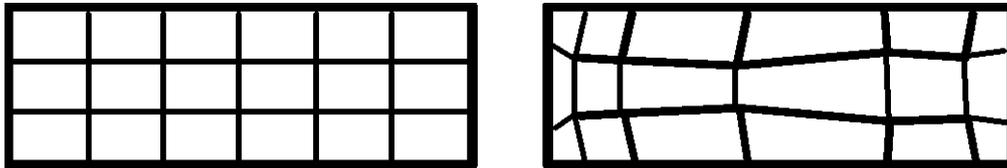


Figure 19 : r-version

Son application conduit à résoudre un problème d'optimisation sur la structure comportant les coordonnées des nœuds comme variables d'optimisation. Il s'agit donc d'une méthode numériquement très coûteuse. Diverses variantes ont été proposées pour en diminuer le coût :

- positionnement des nœuds sur les courbes iso-densité de déformation [Turcke & Mc Neice, 1974]
- algorithmes itératifs adaptés [Diaz & al., 1983], [Kikuchi, 1986].

Néanmoins, ces méthodes sont très peu utilisées en calcul de structures, surtout depuis l'apparition des mailleurs automatiques.

V.2.2 La méthode -h

Dans cette méthode, on conserve toujours le type d'interpolation, mais on modifie partiellement ou complètement le maillage (position et nombre des nœuds, connectivité, etc...). En pratique cette méthode a été utilisée sous deux formes différentes :

- la méthode locale de h -raffinement/déraffinement
- la méthode globale de h -remaillage

- **La méthode locale de h -raffinement/déraffinement**

Dans ce cas, la méthode consiste à conserver la trame du maillage initial et à subdiviser ou à regrouper certains éléments (Figure 20). Cette méthode a été très utilisée en liaison avec les indicateurs d'erreur [Babuska & Szabo, 1982], [Kelly & al., 1983], [Baudron & Trompette, 1986], [Rivara, 1984], [Rivara, 1989], [Aubry & Tie, 1991].

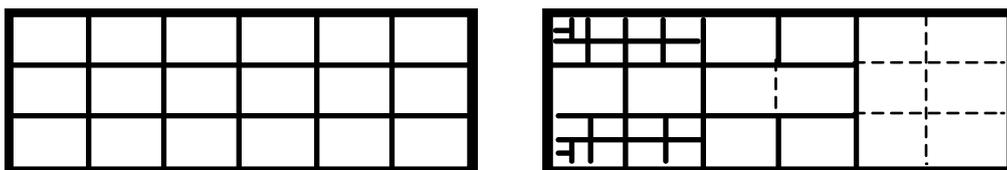


Figure 20 : h -raffinement/déraffinement local

En particulier lorsqu'on se limite à des raffinements locaux, elle peut être facilement utilisée avec un mailleur relativement rudimentaire puisque le maillage initial est conservé. Elle

présente néanmoins quelques difficultés de mise en œuvre. Lorsque l'on effectue un raffinement local, on crée des nœuds "pendants" qui nécessitent un traitement spécial pour assurer la continuité du champ de déplacement. Une première technique consiste à imposer le déplacement de ces nœuds en fonction du déplacement des nœuds voisins de façon à assurer la continuité à l'interface (figure 21).

Par exemple, dans le cas de quadrilatères à 4 nœuds, on impose :

$$U_3 = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (2.67)$$

Cependant, si le maillage comporte beaucoup de nœuds de ce type, il en résulte un accroissement important des coûts de résolution (résolution d'un système linéaire avec de nombreuses relations linéaires entre les degrés de liberté). Une autre technique consiste à introduire des éléments finis spéciaux dissymétriques pour prendre en compte ces nœuds "pendants".

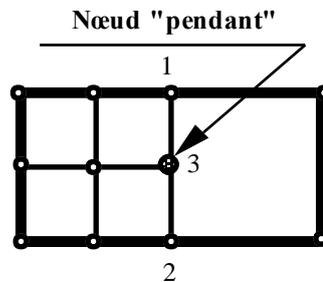


Figure 21 : Nœud "pendant"

Le traitement le plus élégant est dû à Zienkiewicz, [Zienkiewicz & Craig, 1986], [Zienkiewicz & al., 1982], [Aubry & Tie, 1992].

Il consiste à introduire des éléments hiérarchiques. Mais cette méthode, qui nécessite une organisation spéciale des calculs, n'est pas actuellement disponible dans les codes industriels classiques.

Si le nœud milieu est "pendant", en bloquant à zéro les degrés de liberté correspondants, on assure la continuité du champ de déplacement sur le côté considéré.

- **La méthode globale de h-remailage**

Dans cette méthode, le maillage est entièrement recréé. Le maillage initial sert uniquement de support pour définir les tailles des éléments du nouveau maillage (Figure 22).

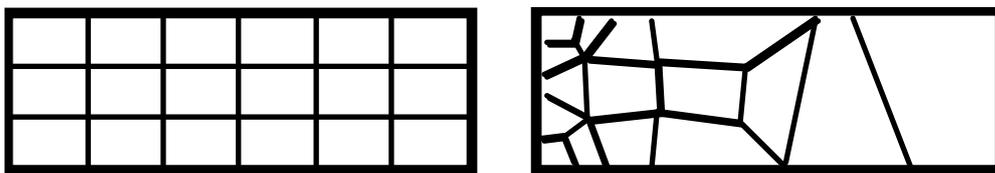


Figure 22 : h-remailage global

Cette méthode a été utilisée plus tardivement car elle nécessite l'utilisation de maillages automatiques capables de respecter correctement des consignes de tailles. Les premières utilisations peuvent être trouvées dans [Carnet & al., 1981], [Ladevèze & Leguillon, 1983] pour des problèmes de thermique 2D en utilisant un mailleur automatique frontal développé par Carnet [Carnet, 1978], dans [Coffignal & Ladevèze, 1983] pour des problèmes d'élasticité et de plasticité 2D en utilisant le mailleur automatique Araignée [Coffignal, 1987] et dans [Ladevèze & Pelle, 1984], [Pelle, 1985] pour les problèmes de vibrations en utilisant le mailleur de Carnet.

Actuellement pour les problèmes 2D, il s'agit de la méthode d'adaptation de maillages la plus utilisée car de nombreux maillages automatiques 2D ont été développés [George, 1991].

En dimension 3, cette méthode pose encore des difficultés pour sa mise en œuvre, même si des progrès récents ont été réalisés [Coorevits & al., 1995b,c], [Dumeau, 1995], [Coorevits & al., 1996].

V.2.3 La méthode $-p$

La p -version est plus une méthode d'adaptation du type interpolation qu'une méthode d'adaptation du maillage au sens strict [Babuska & al., 1981], [Babuska & Suri, 1990], [Szabo, 1986], [Szabo, 1990]. En effet, cette méthode consiste à conserver le maillage initial et à augmenter dans certaines zones le degré de l'interpolation utilisée (Figure 23).

Cependant, ce maillage "grossier" ne doit pas être réalisé sans quelques précautions si l'on veut pouvoir utiliser des valeurs élevées de p . En particulier, il faut éviter les éléments trop aplatis ; pour des pièces 3D un peu complexes, ceci conduit à des maillages finalement plus fins que ce que l'on pouvait espérer a priori.

Cette méthode a des aspects très séduisants notamment au niveau des coûts de réalisation du maillage. En effet, un seul maillage est nécessaire. De plus, dans les applications qui sont généralement présentées, le maillage utilisé comporte toujours très peu d'éléments et il est donc très facile à réaliser. En compensation, des fonctions d'interpolation de degré élevé sont utilisées.

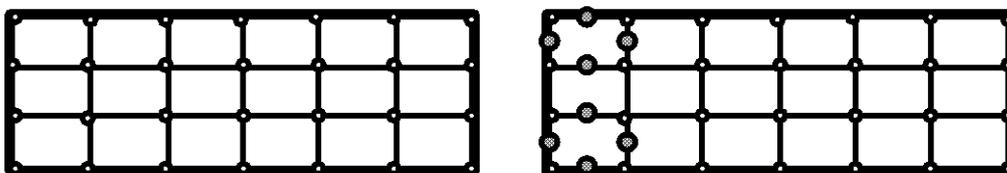


Figure 23 : p -version

De plus, en cas de changement local de degré d'interpolation, cette méthode introduit également des nœuds "pendants". Là encore l'utilisation de bases hiérarchiques [Zienkiewicz & Taylor, 1988] permet de résoudre élégamment cette difficulté.

Actuellement cette méthode est encore peu utilisée car, à l'exception de quelques codes réalisés spécialement pour la p -version, par exemple [Probe, 1985], [Fiesta, 1986], les codes industriels possèdent rarement des éléments de degré supérieur à 2.

Une autre difficulté, qui actuellement n'est pas correctement résolue, est de prévoir le degré p à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant les coûts de calcul.

V.2.4 La méthode -h p

Pour terminer ce bref aperçu sur les méthodes d'adaptation des maillages, signalons également les recherches effectuées sur la h-p-version, qui consiste à effectuer à la fois des changements de maillages et des changements de fonctions d'interpolation [Babuska, 1986], [Zienkiewicz & al., 1989], [Oden & Demkowicz, 1991].

Cette technique sophistiquée permet d'obtenir des taux de convergence très élevés. Mais comme pour la p-version, la prédiction des paramètres pour obtenir une qualité donnée n'est pas facile à réaliser.

VI. Construction du maillage optimal

VI.1 Définition d'un maillage optimal

Dans la suite, nous utiliserons uniquement la h-version.

L'objectif de toute procédure d'adaptation est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision ε_0 tout en minimisant les coûts de calcul. Pour évaluer les erreurs de discrétisation, on utilise une mesure globale relative ε et les contributions locales associées ε_E .

Comme critère d'optimalité nous utilisons le critère introduit dans [Pelle, 1985] et [Ladevèze & al., 1986] :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ε si :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^* = \varepsilon_0 \text{ précision demandée} \\ N^* \text{ nombre d'éléments minimum} \end{array} \right\} \quad (2.68)$$

Ce critère d'optimisation conduit naturellement à minimiser les coûts de calcul.

Un autre critère est également souvent utilisé [Ladevèze & Leguillon, 1981], [Gago & al., 1983], [Oden & al., 1989], [Strouboulis & Haque, 1992], ...

Il consiste à définir un maillage optimal T^* par :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^* = \varepsilon_0 \text{ précision demandée} \\ \varepsilon_E^* \text{ uniforme sur } T^* \end{array} \right\} \quad (2.69)$$

La définition (2.68) revient à dire que le meilleur maillage correspond à une répartition uniforme des erreurs de discrétisation. Contrairement à la définition (2.58), il n'est pas du tout évident que ce choix conduise à minimiser les coûts de calcul.

Pour des problèmes dont la solution est régulière, nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes. Par contre, ceci n'est plus vrai pour des solutions qui présentent des singularités.

Sans informations supplémentaires, il est évidemment impossible de déterminer un maillage optimal. Par contre, si l'on utilise, comme informations supplémentaires, les résultats d'une première analyse éléments finis et si l'on dispose d'une méthode fiable et robuste d'évaluation des erreurs de discrétisation, on peut déterminer un maillage optimal selon le schéma de principe suivant :

- On effectue un premier calcul sur un maillage T relativement grossier,

- On calcule pour ce maillage l'erreur globale ε et les contributions locales ε_E ,
- On utilise ces informations pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* .

On construit ensuite le maillage \mathbf{T}^* à l'aide d'un mailleur automatique et l'on effectue une seconde analyse éléments finis.

VI.2 Résolution du problème d'optimisation

Une fois le premier calcul éléments finis effectué sur le maillage \mathbf{T} , l'idée est d'utiliser la valeur de l'erreur globale ε et les contributions locales ε_E pour définir les tailles des éléments du nouveau maillage afin de respecter la précision désirée tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage.

Pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* , notre méthode consiste à calculer sur chaque élément E du maillage \mathbf{T} un coefficient de modification de tailles :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} \quad (2.70)$$

où h_E est la taille de l'élément E et h_E^* la taille (inconnue) qu'il faut imposer aux éléments de \mathbf{T}^* dans la zone de E pour assurer l'optimalité (Figure 24).

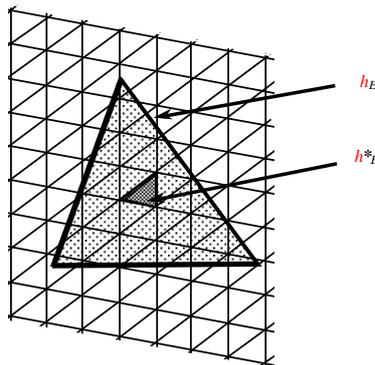


Figure 24 : Définition des tailles

Le calcul des coefficients r_E est basé sur le taux de convergence de l'erreur :

$$\varepsilon = O(h^q) \quad (2.71)$$

Où q dépend du type d'élément utilisé mais aussi de la régularité de la solution.

On suppose que le taux de convergence de l'estimateur d'erreur est égal à l'ordre de convergence de la solution éléments finis.

VI.2.1 Cas d'une solution suffisamment régulière

Dans le cas où la solution du problème est suffisamment régulière, on adopte l'hypothèse d'une répartition uniforme des éléments du maillage optimal sur un élément du maillage initial.

D'autre part, le taux de convergence (ou bien q) ne dépendra, dans ce cas, que du type d'élément utilisé (Strang et Fix, 1976) et (Ciarlet, 1978).. Par exemple, pour un problème 2D, on a :

$$\begin{aligned} q &= 1 \text{ pour les triangles à 3 nœuds} \\ q &= 2 \text{ pour les triangles à 6 nœuds} \end{aligned}$$

Ainsi, pour prédire les tailles optimales, on peut écrire que le rapport des tailles est lié au rapport des contributions à l'erreur par :

$$\frac{\epsilon_E^*}{\epsilon_E} = \left[\frac{h_E^*}{h_E} \right]^q = r_E^q \quad (2.72)$$

où ϵ_E^* représente la contribution des éléments de \mathbf{T}^* situés dans la zone E , c'est-à-dire :

$$\epsilon_E^* = \left[\sum_{\mathbf{E}^* \subset E} \epsilon_{\mathbf{E}^*}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

Le carré de l'erreur sur le maillage \mathbf{T}^* peut donc être évalué par :

$$\sum_E (\epsilon_E^*)^2 = \sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2$$

et le nombre d'éléments de \mathbf{T}^* par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2} \quad (2.74)$$

Le problème à résoudre consiste donc à :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2} \text{ avec } \sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2 = \epsilon_0^2 \quad (2.75)$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec une contrainte sur les variables d'optimisation qui sont les coefficients de modification des tailles (inconnues). Ce problème a été résolu en utilisant l'équation de Lagrange. L'écriture de la condition d'externalité a permis d'obtenir les nouveaux coefficients de tailles, tel que :

$$r_E = \frac{\epsilon_0^{\frac{1}{q}}}{\epsilon_E^{\frac{1}{q+1}} \left[\sum_E \epsilon_E^{\frac{2}{q+1}} \right]^{\frac{1}{2q}}} \quad (2.76)$$

Par ailleurs, pour généraliser aux autres dimensions 1D et 3D, un calcul analogue en dimension n (avec $n = 1, 2$ ou 3) conduit au résultat suivant :

$$r_E = \frac{\epsilon_0^{\frac{1}{q}}}{\epsilon_E^{\frac{2n}{2q+n}} \left[\sum_E \epsilon_E^{\frac{2n}{2q+n}} \right]^{\frac{1}{2q}}} \quad (2.77)$$

Avec :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^n} \quad (2.78)$$

A signaler également que la définition de la taille de l'élément de référence, dépend de la propriété d'isotropie ou d'anisotropie du maillage. En effet, pour le cas 2D de maillages formés d'éléments triangulaires, le triangle de référence est supposé équilatéral parfait. Dans ce cas, la taille h_E est liée à la surface de l'élément E par :

$$h_E = \left[\frac{4 \text{mes}(E)}{\sqrt{3}} \right]^{1/2} \quad (2.79)$$

On parle dans cette situation de maillage "isotrope".

Dans le cas de maillages "anisotropes", tels que ceux relatifs aux applications dynamiques ou en présence de bandes de cisaillement, il peut être intéressant d'utiliser des éléments pour lesquels la référence est un triangle rectangle dont l'une des dimensions est petite devant l'autre.

VI.2.2 Cas d'une solution comportant des zones à forts gradients

La méthode précédente ne s'applique que pour des problèmes dont la solution peut être considérée comme suffisamment régulière. Dans le cas contraire, où la solution présente des singularités ou bien des zones à forts gradients de contraintes, la méthode précédente ne peut être appliquée. En effet, l'hypothèse d'une répartition uniforme d'éléments du maillage optimal sur un élément du maillage initial, ne peut être adoptée au niveau de ces zones. Dans ce cas, l'utilisation d'hypothèses beaucoup plus fines, devient nécessaire, (Coorevits et coll 1994).

Par ailleurs, nous avons vu que le calcul des tailles optimales repose sur le taux de convergence de la mesure d'erreur utilisée. Or ce taux est également lié à l'ordre de convergence de la solution éléments finis. D'autre part, lorsque la solution exacte du problème présente des singularités ou des zones à forts gradients de contraintes, il est connu que l'ordre de convergence de la solution éléments finis devient modifié. Dans ces conditions, il a été théoriquement et numériquement démontré que le taux de convergence de l'erreur devient indépendant du degré des éléments finis utilisés (Strang & Pix, 1976).

En effet, Coorevits et coll (1994) ont montré que le taux de convergence numérique dépend de l'influence de la singularité (par l'intermédiaire des facteurs d'intensités) et ne peut donc être fixé a priori sur la base des seuls résultats théoriques. De plus, il a constaté que le taux de convergence des contributions locales S_E des éléments connectés à la singularité est proche du degré de cette singularité, alors que, pour les autres éléments, il est proche du degré des éléments.

Ainsi, afin d'obtenir une bonne prédiction des maillages optimisés, les constatations précédentes conduisent à utiliser un taux de convergence P_E par élément tel que :

$$\varepsilon_E = Ch^{p_E} \quad (2.80)$$

Une première démarche due à Rougeot (1989), consiste à définir localement ces coefficients p_E de la manière suivante :

- si l'élément E est connecté à une singularité d'ordre a , on prend : $p_E = a$,
- pour tous les autres éléments, on prend : $p_E = p$ où p est le degré de l'interpolation utilisée.

En plus de sa simplicité, cette méthode a permis d'améliorer significativement la qualité des maillages optimisés construits. En revanche, elle présente l'inconvénient de demander à l'utilisateur d'une part de situer les zones correspondant à une singularité et, d'autre part, de connaître l'ordre théorique de ces singularités. Dans ces conditions, cette procédure ne peut être utilisée efficacement que si l'utilisateur connaît parfaitement le problème mécanique qu'il est en train de traiter.

Pour y remédier, Coorevits (1994) a mis au point une autre procédure entièrement automatique qui permet de détecter les zones sensibles et de calculer la valeur de p_E dans ces zones. En effet, pour prédire les tailles optimales, il a modifié le calcul de la carte des tailles en remplaçant (2.) par l'expression suivante :

$$\frac{\varepsilon_E^*}{\varepsilon_E} = \left[\frac{h_E^*}{h_E} \right]^{p_E} = r_E^{p_E} \quad (2.81)$$

Ensuite, pour tenir compte des zones de transition entre les singularités et les autres zones, il a constaté que l'hypothèse de modification par des tailles localement uniformes ne pouvait être appliquée. Autrement dit, afin de faire varier rapidement la taille dès que l'on s'éloigne de la singularité, il fallait adopter l'hypothèse de surfaces variables sur un élément E du maillage initial. Pour des raisons pratiques, on suppose que cette variation est linéaire. Ceci a conduit à définir la carte des tailles optimales directement au moyen de coefficients définis aux sommets des éléments.

Par ailleurs, le traitement automatique des zones à forts gradients doit permettre l'utilisation des techniques précédentes sans connaissance préalable du problème mécanique traité. A cet effet, Coorevits et coll (1994) ont mis au point une procédure qui permet :

- de détecter automatiquement les nœuds "singuliers",
- d'évaluer numériquement le coefficient p_E pour les éléments connectés aux nœuds considérés comme singuliers.
- de fixer $p_E = p$ pour les autres éléments avec p le degré du type d'éléments utilisé.

L'idée est d'utiliser les erreurs locales. En effet, les expériences montrent que ces erreurs locales présentent un pic au voisinage d'une singularité. Pour chaque nœud i du maillage, on compare donc l'erreur moyenne \bar{m}^i des éléments connectés au nœud i à l'erreur moyenne \bar{M} sur l'ensemble de la structure. Le nœud i est considéré comme singulier si :

$$\bar{m}^i \geq \beta \bar{M}$$

Avec

$$\bar{m}^i = \sqrt{\frac{\sum_{E \text{ connecté à } i} \varepsilon_E^2}{\sum_{E \text{ connecté à } i} \text{mes}(E)}} \quad \bar{M} = \sqrt{\frac{\sum_{E \in \text{structure}} \varepsilon_E^2}{\sum_{E \in \text{structure}} \text{mes}(E)}}$$

où β est un coefficient plus grand que 1 et $\text{mes}(E)$ la surface en 2D ou le volume en 3D de l'élément E . Les expériences numériques ont montré que, dans le cas sans contact, les nœuds singuliers sont bien détectés en fixant $\beta = 2$ en dimension 2, $\beta = 3$ en dimension 3 pour des éléments finis linéaires et $\beta = 2$ en dimension 3 pour des éléments finis quadratiques.

Soit ε_E^* la contribution des éléments de T^* situés dans la zone E , c'est-à-dire :

$$\varepsilon_E^* = \left[\sum_{E^* \subset E} \varepsilon_{E^*}^2 \right]^{1/2}$$

Le carré de l'erreur sur le maillage T^* peut donc être évalué par :

$$\sum_E (\varepsilon_E^*)^2 = \sum_E r_E^{2q_E} \varepsilon_E^2$$

et le nombre d'éléments de T^* est toujours évalué par :

$$N^* = \sum \frac{1}{r_E^d}$$

Le nouveau problème à résoudre est donc :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum \frac{1}{r_E^d} \text{ avec } \sum_E r_E^{2q_E} \varepsilon_E^2 = \varepsilon_0^2 \quad (2.82)$$

qui est un problème d'optimisation avec une contrainte sur les variables d'optimisation. En introduisant un multiplicateur de Lagrange, noté A , le problème revient à rendre extremum le Lagrangien :

$$L(\{r_E\}_{E \in \mathbf{T}}; A) = \sum_E \frac{1}{r_E^d} + A \left(\sum_E r_E^{2q_E} \varepsilon_E^2 - \varepsilon_0^2 \right)$$

Les conditions d'extrémalité donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial r_E} = -\frac{d}{r_E^{d+1}} + 2Aq_E \varepsilon_E^2 r_E^{2q_E-1} = 0 \quad \forall E \in T$$

D'où

$$r_E = \left[\frac{d}{2Aq_E \varepsilon_E^2} \right]^{1/(2q_E+d)} \quad (2.83)$$

En reportant dans la seconde équation de (2.82), on obtient une équation non linéaire en A :

$$\sum_E \left[\left[\frac{d}{2Aq_E \varepsilon_E^2} \right]^{1/(2q_E+d)} \varepsilon_E^{2d/(2q_E+d)} \right] - \varepsilon_0^2 = 0 \quad (2.84)$$

Cette équation est résolue par la méthode de Newton (le multiplicateur de Lagrange est initialisé en prenant le multiplicateur de Lagrange de la solution régulière c'est-à-dire l'expression avec laquelle $q_E = p$). Une fois A calculé, on en déduit r_E par l'équation (2.83).

Il est à noter que cette technique, s'applique aussi bien aux singularités qu'aux zones de concentration de contraintes qui mathématiquement ne sont pas des singularités. D'autre part, dans le cas de l'optimisation en 3D, les calculs sont plus complexes, car les points singuliers ne sont pas isolés, et se trouvent souvent sur une arête. On parle alors d'arête singulière.

VII. Conclusion

De ce chapitre, nous pouvons conclure que l'estimation de l'erreur pour le problème est effectuée par la méthode des erreurs de contact associée à l'erreur en relation de comportement. En raison de la difficulté de la construction des champs admissibles, cet estimateur semble, du point de vue de facilité de la construction d'un estimateur et de son implantation dans un code de calcul est difficile. Par contre, cet estimateur possède non seulement l'avantage de toujours surestimer les erreurs en solution, mais surtout de sa capacité de pouvoir dissocier entre l'erreur de discrétisation du maillage seul et l'erreur de contact. Et on a utilisé la méthode $-h$ avec remaillage globale pour l'adaptation du maillage.

Chapitre 03

Essais numériques, Analyse, interprétation et discussion des résultats

I. Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste en une étude de l'influence de certains paramètres essentiels sur la convergence de l'erreur fournie par l'indicateur adopté, dans le cadre de la loi de frottement de Coulomb. En effet, en tenant compte des difficultés mathématiques liées à l'existence et à l'unicité de la solution, et de certains résultats partiels portant sur certaines conditions d'unicité de cette solution (Renard 2006), des tests numériques 3D seront effectués.

Par ailleurs, vu que la procédure d'adaptation de maillage ne peut être envisagée sans la connaissance préalable des propriétés de convergence de l'indicateur d'erreur utilisé, des tests de convergence doivent être effectués. En effet, il s'agit d'étudier la convergence de cet indicateur d'erreur en raffinements successifs de maillages à tailles uniformes (uniform h-type mesh refinement). Quant aux tests d'adaptation, ils consistent à étudier la faisabilité pratique de cet indicateur en 3D dans le domaine du calcul avec frottements de Coulomb des ouvrages du génie civil. En effet, en utilisant certaines procédures d'adaptation de maillages (adaptive h-type mesh refinement techniques), des tests d'optimisation (ou de minimisation sous contraintes) de maillages seront effectués grâce aux calculs d'erreurs globales, d'erreurs de maillages et d'erreurs de contact ainsi que grâce à l'obtention de cartes de contribution à l'erreur (cartes d'erreur) et de cartes de tailles à prescrire au mailleur CAST3M en vue de l'obtention du maillage optimal vis-à-vis de l'erreur prescrite au préalable par l'utilisateur..

Ainsi, des exemples de calculs de deux corps prismatiques à base rectangulaire déformables et de différentes dimensions, et avec différentes valeurs du coefficient de frottement seront traités. Il faut signaler que le paramètre "régularité de la solution" est également pris en compte dans cette étude où le cas de la solution "régulière" (à faible gradient) correspond au cas de deux blocs en contact sur deux surfaces planes et de dimensions identiques (voir figure 30). Par contre, le cas de la solution irrégulière à fort gradient de contraintes correspond au cas de deux corps prismatiques à base rectangulaire dont les surfaces de contact sont planes mais dont les aires des surfaces en vis-à-vis sont différentes (voir figure 27-28-29). A cet effet, plus le rapport de ces surfaces est faible, plus la solution en champ de contraintes devient irrégulière (gradient élevé ou bien à fortes concentrations de contraintes au niveau des angles des surfaces de contact). En ce qui concerne l'adaptation de maillage, trois cas tests seront traités. Pour le premier, il s'agit de deux corps prismatiques à base rectangulaire déformables de dimensions différentes (cas à fort gradient). Pour le second, il s'agit du cas d'une semelle isolée axialement chargée en contact avec un sol déformable. Pour le troisième, il s'agit d'un mur de soutènement en contact avec un socle rigide indéformable (cas de du problème de Signorini).

II. Stratégie et technique adoptées pour la résolution par éléments finis du problème

II.1 Données du problème

Toute procédure de résolution du problème de contact par éléments finis, doit d'abord commencer par l'introduction des données du problème et par l'adoption d'hypothèses de résolution. En effet, il s'agit de :

- la définition des maillages des solides en contact.
- la définition des surfaces de contact. Les maillages de ces surfaces peuvent être compatibles ou incompatibles. S'agissant de petites déformations, nous ne nous intéresserons, dans le cadre de ce mémoire, qu'aux cas des maillages compatibles
- l'adoption de lois de comportement des matériaux composant ces solides ainsi que leurs caractéristiques mécaniques. Cela étant dit, nous adopterons dans tous ce qui va suivre un comportement élastique linéaire. Ces matériaux seront également supposés isotropes.
- l'adoption de l'hypothèse de petites perturbations (ou déformations)
- la méthode de résolution se fera en quasi statique.
- l'adoption de la loi de frottement. Dans ce cadre, notre choix sera porté sur la loi de Coulomb qui semble être la plus utilisée.
- Et enfin, de la définition des conditions aux limites qui sont soit sous forme de déplacements imposés, soit sous forme de forces (ou de chargements) imposés.

II.2 Résolution du problème par la MEF

La résolution consiste non seulement à trouver « les inconnues classiques » telles que les champs de déplacements, de déformations, de contraintes, internes à chaque solide, mais surtout à trouver les champs de déplacements relatifs ainsi que de densités de réactions vérifiant à la fois les conditions cinématiques de contact (condition de non pénétration) ainsi que la loi de frottement adoptée (loi de Coulomb). Il est à rappeler qu'à l'issue de la résolution du problème de contact, l'analyse et la vérification de la solution éléments finis obtenue, constituent une étape indispensable avant toute poursuite de calcul d'estimation d'erreur. A cet effet, l'un des outils de vérification consiste en la visualisation de la déformée ainsi que des champs de contraintes.

Par ailleurs, en ce qui concerne le code de calcul utilisé et où sera implanté notre indicateur d'erreur, notre choix s'est porté sur le logiciel CAST3M qui a été développé au commissariat à l'énergie atomique CEA en France. En plus de sa large diffusion et de sa disponibilité, l'une des raisons essentielles qui ont motivé ce choix, consiste au fait que CAST3M soit un code de type orienté objet et ouvert aussi bien aux calculs qu'aux développements. En effet, ce code offre la possibilité d'effectuer à la fois des calculs que des implantations de techniques, de modèles, de lois de comportement, etc.

II.2.1 Stratégie de résolution adoptée

La méthode de résolution adoptée est celle des multiplicateurs de Lagrange associée à la méthode des statuts ou du point fixe (cf paragraphe VIII.3.1 , chapitre 01). En effet, en raison de la non linéarité du problème, la résolution consiste en un calcul itératif. En vue de calculer les champs

de réactions de contact entre les deux solides, on impose « provisoirement » à la première boucle d'itération, un blocage total des déplacements relatifs entre les deux surfaces de contact. A cette étape, la résolution se fera comme si les deux solides ne constituaient qu'un seul corps. Toutefois, ceci permettra de calculer le champ des réactions au niveau de cette zone de contact. Celui-ci (le champ de réactions) sera ensuite décomposé en deux composantes : un champ de réactions normales R_n et tangentielles R_t qui seront portés normalement et tangentiellement à ces surfaces. A partir de la seconde itération, les blocages imposés précédemment au niveau des zones de contact seront supprimés, mais en contrepartie, on imposera deux champs d'efforts tangents G_1 et G_2 sur chaque surface de contact et tels que la condition d'équilibre soit toujours vérifiée. Autrement dit, $G_1 = -G_2$. Ces efforts tangents G_1 et G_2 à imposer à chaque itération, ne sont rien d'autres que les champs de réactions tangentielles R_t calculés à la première itération et actualisés en fonction des statuts des nœuds en contact. Ainsi, le problème sera résolu en imposant, à chaque itération, les champs G_i , ($i=1,2$) sur les deux surfaces de contact. Toutefois, en raison des possibilités de glissement et de décollement lors du chargement, l'aire de contact doit à chaque fois être actualisée, et cet effort tangent ne doit être imposé que sur l'aire de contact effective (actualisée). Ainsi, le maillage de contact de l'aire actualisée ne doit contenir que les nœuds qui sont soit en état d'adhérence, soit en état de glissement relatif. Les nœuds se trouvant en état de décollement doivent être exclus de l'aire de contact ; et aucun effort tangent ne leur doit être appliqué.

Par ailleurs, dans le cadre de la loi de frottement adoptée de type Coulomb, les efforts tangents à imposer aux nœuds glissants doivent avoir pour intensité maximale celle correspondante au cône de frottement μR_n . (μ étant le coefficient de frottement). Ainsi, nous pouvons constater que, de même que pour l'aire de contact, les champs d'efforts tangents G_i doivent également être actualisés à chaque itération et ce, en fonction des statuts des nœuds en contact. Autrement dit, l'actualisation doit porter à la fois sur l'aire de contact et sur l'effort tangent G_i à imposer à chaque itération.

II.2.2 Statuts des nœuds en contact et actualisation de l'aire de contact

Les nœuds du maillage de contact doivent à chaque itération être classés dans l'une de ces trois catégories suivantes: nœuds adhérents, nœuds glissants ou nœuds décollants. Ainsi, une définition correcte de seuils de glissement et de décollement s'avère nécessaire. En effet, soient S_n et S_t des seuils définis respectivement pour le décollement et le glissement des nœuds de maillages compatibles et situés initialement en vis-à-vis. Les valeurs de ces seuils sont généralement définies en fonction du degré de précision requis, des dimensions des pièces en contact ainsi que de la taille des éléments du maillage de contact (distance entre nœuds).

Pour illustrer la méthode, considérons le cas de deux nœuds i et j initialement en contact. Soient W_n et W_t les composantes normales et tangentielles du déplacement relatif entre ces deux nœuds, telles que :

$$W_n = u_{ni} - u_{nj} \quad W_t = u_{ti} - u_{tj}$$

1. Ces nœuds auront un statut « d'adhérents » : si leur déplacements relatifs normal et tangentiel sont négligeables. Autrement dit, si les relations suivantes sont vérifiées :

$$W_n < S_n \quad \text{et} \quad W_t < S_t .$$

2. Ces nœuds auront le statut « de glissants » : si leur déplacement relatif normal est négligeable mais en contre partie le déplacement relatif tangentiel est important. Ceci peut être écrit de la manière suivante :

$$W_n < S_n \quad \text{et} \quad W_t \geq S_t .$$

3. Ces nœuds auront le statut « de décollants » : si leur déplacement relatifs normal est tel que :

$$W_n \geq S_n$$

II.2.3 Critères de convergence des calculs itératifs:

Du point de vue mathématique, toute validation d'un calcul numérique discrétisé et itératif doit satisfaire à la fois aux conditions de stabilité, de consistance et de convergence. Ces trois propriétés consistent en des liens entre la solution exacte du problème continu (si elle existe), la solution exacte des équations discrétisées et la solution numérique obtenue. Par ailleurs, en raison de l'inexistence de résultats sur l'unicité de la solution, la solution exacte du problème de contact avec frottements de Coulomb, demeure inconnue. Pour remédier à cette difficulté, l'idée consiste à adopter une solution dite « de référence » comme étant la solution exacte du problème. Cette solution de référence correspond la solution numérique obtenue en utilisant des maillages fortement raffinés et dont la taille de ces éléments tend vers zéro.

Reproduisons ci-dessous, les définitions mathématiques de ces trois conditions. Soit un problème régis un système d'équations aux dérivées partielles et dont la solution exacte est supposée connue. La discrétisation du problème conduit à la résolution d'un système d'équations discrétisé qui possède lui aussi une solution exacte. La résolution de ce système discrétisé étant effectuée par des méthodes numériques, la solution obtenue sera désignée par : « solution numérique obtenue ».

1- La condition de stabilité est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées, soit bornée.

2- La condition de consistance est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte du problème lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

3- La condition de convergence est la propriété la plus recherchée. En effet, cette condition assure que la solution numérique obtenue tende vers la solution exacte du problème. D'après le théorème de Lax, si le schéma numérique est consistant (ou bien si la condition de consistance est vérifiée), la stabilité devient alors une condition nécessaire et suffisante pour la convergence. D'après un autre théorème de Lax-Wendroff, si le schéma numérique est consistant, alors la solution numérique converge vers la solution faible des équations. L'une des conséquences de ce théorème est que la solution numérique n'est pas nécessairement unique. Ce qui est le cas du problème de contact avec frottement de Coulomb.

Dans le cas de la résolution du problème de contact, il est généralement difficile de vérifier et de s'assurer de la consistance des calculs itératifs. Dans le cas de la présente méthode, nous pouvons considérer cette condition comme étant satisfaite lorsque le champ d'effort tangent G_{k+1} à imposer à

l'itération ($k+1$) devient sensiblement identique au champ G_k de l'itération précédente (k). Cela étant dit, l'un des critères de consistance que nous pouvons adopter, peut être écrit de la manière suivante :

$$((| \text{Max } G_{k+1} | - | \text{Max } G_k |) / (| \text{Max } G_{k+1} |)) \leq \theta,$$

avec θ une précision préalablement fixée par l'utilisateur et qui est généralement de l'ordre de 10^{-3} , 10^{-4} ou 10^{-5} . Il est à signaler que plus le degré de précision θ est faible, plus le temps de calcul devient élevé, notamment dans les cas tridimensionnels.

Afin de vérifier d'avantage ce critère et d'ajuster éventuellement ce paramètre θ , un outil supplémentaire de vérification peut être adopté, et qui consiste en une visualisation sous formes courbes représentées sur un graphe. L'axe des abscisses est dans ce cas, un axe d'abscisses curvilignes d'un chemin parcourant (en une seule fois) toutes les frontières entre éléments finis du maillage de contact, et passant par tous les nœuds. Pour sa part, l'axe des ordonnées porte sur les normes (ou intensités) des efforts tangents G_k et G_{k+1} à imposer au niveau de chaque nœud et qui doivent être représentés simultanément sur le graphe (figure 25). Ainsi, quels que soit la dimension du problème à traiter (2D ou 3D), les normes de ces efforts tangents G_k et G_{k+1} peuvent être visualisées directement sur un graphique. Cette technique de visualisation est très efficace car elle permet d'optimiser le temps de calculs en choisissant de manière succincte et judicieuse ce paramètre de précision θ . En effet, plus les courbes de G_k et G_{k+1} sont proches (voir confondues), plus la stabilité est satisfaite.

En ce qui concerne la condition de stabilité, celle-ci est généralement vérifiée. Elle dépend essentiellement des méthodes de résolutions des systèmes d'équations. Parmi les cas connus de pertes de stabilité en éléments finis, on peut citer le cas de la matrice de rigidité de la structure devenant singulière lorsque par exemple, la loi de comportement atteint son extremum (cas des matériaux endommageables) ou bien, dans le cas d'un problème mal posé où la structure manque de liaison et le système devient hypostatique.

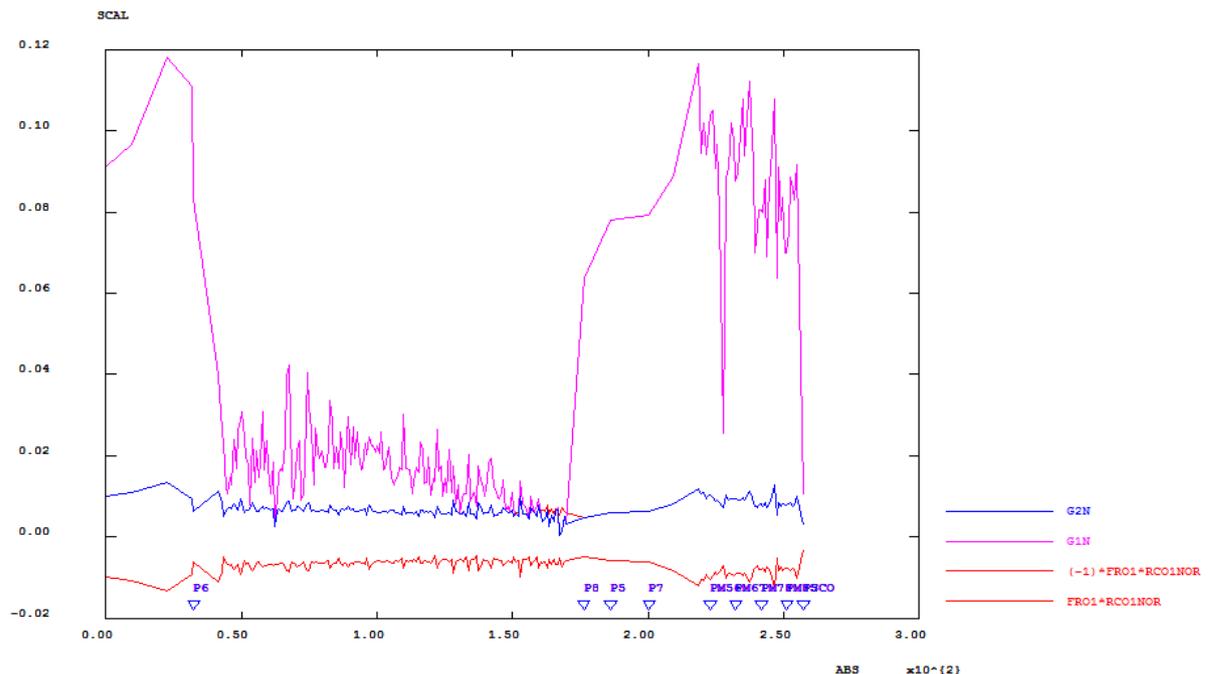


Figure 25 : Normes des vecteurs tangents G_{k+1} (notés G2N, bleu) et G_k (notés G1N, violet) ainsi que le cône de frottement de Coulomb (en rouge) sur une abscisse curviligne pour un contact 3D

III. Implantation de l'indicateur d'erreur mis au point

L'implantation de l'indicateur d'erreur mis au point doit se faire selon le principe d'un schéma de calcul à posteriori. Autrement dit, l'estimation de l'erreur ne peut être effectuée qu'après avoir résolu le problème de contact et obtenu les champs solutions éléments finis du problème. Cela étant dit, d'après la définition de notre estimateur, la construction de champs dits corrigés au niveau de la zone de contact est indispensable. Il est à rappeler que ces champs corrigés doivent vérifier rigoureusement la condition cinématique de non pénétration et les conditions relatives à la loi de frottement de Coulomb. A cet effet, il est clair que cette construction consiste en le post traitement de la solution éléments finis obtenue.

Par ailleurs, il est à noter que conformément à la formulation établie, cette correction doit porter sur les champs de densité de réaction et non sur les champs de réactions nodales. En conséquence, il est nécessaire de transformer le champ de réactions nodales en un champ de densités de réactions et ce, en utilisant les matrices masses et en résolvant le système d'équations suivant ::

$$F_i = M_i R_i \quad i = 1,2$$

F_i étant connu et obtenu lors de la résolution du problème de contact, il représente le vecteur réactions nodales au niveau de la surface de contact Γ_i

M_i étant la matrice masse liée à la discrétisation du solide Ω_i

R_i est l'inconnue qu'il faut obtenir et désigne le vecteur champ de densité de réactions nodales.

Cela étant dit, la technique exposée dans le paragraphe précédent et qui consiste à visualiser un champ tridimensionnel 3D sous la forme d'un graphe bidimensionnel en 2D, constitue un outil qui permettra également de vérifier et de s'assurer de l'admissibilité des champs de densités de réactions tangentes vis-à-vis de la loi de frottement de type Coulomb. En effet, si les densités de réactions tangentes se trouvent en dehors du cône de frottement, celles-ci apparaîtront directement sur le graphe (figures 26). Ce qui permettra d'implanter notre indicateur d'erreur tout en s'assurant de la correction des champs de densités de réactions en vue du calcul de l'estimation de l'erreur de contact.

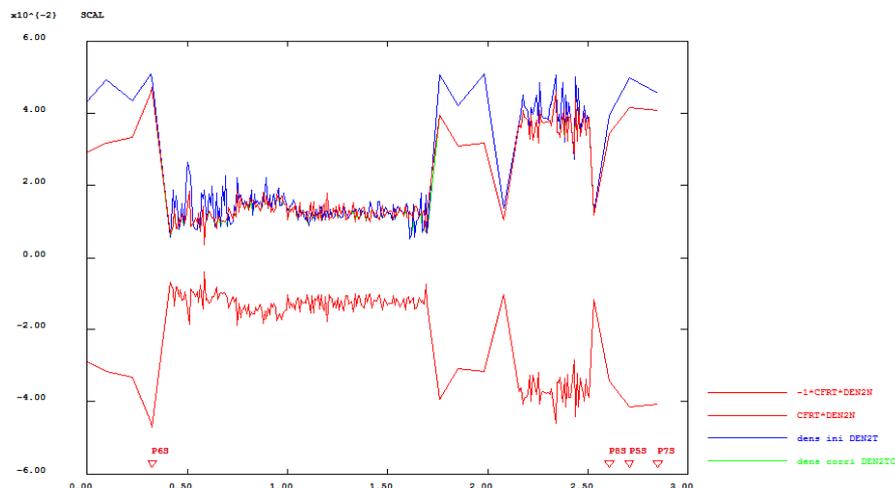


Figure 26: densités de réactions tangentes corrigées et non corrigées sur la surface de contact

IV. Etude des propriétés de convergence de l'indicateur d'erreur adopté

Toute adaptation de maillage est basée sur le type d'estimateur ou d'indicateur d'erreur qu'elle utilise. Cela étant dit, avant toute tentative d'implantation et d'utilisation d'une quelconque méthode d'adaptation, il est nécessaire de disposer d'un ensemble d'informations relatives aux propriétés de convergence de l'indicateur mis au point en fonction du taux de raffinement du maillage. Ces propriétés peuvent essentiellement être résumées aux influences de certains paramètres sur l'évolution de l'erreur relative globale en fonction de la taille des éléments ou du nombre d'éléments du maillage. Ces paramètres peuvent être énumérés comme suit.

a)- **La dimension du problème** : Dans notre cas, l'évolution de l'erreur globale pour des maillages raffinés en convergence $-h$, sera étudiée uniquement dans le cas tridimensionnels. Ce qui est l'objet de ce mémoire.

b)- **Les types d'éléments finis utilisés** : Dans le cadre du problème de contact tridimensionnel et en fonction du taux de raffinement du maillage (plus précisément du nombre total d'éléments), l'évolution de l'erreur globale, peut dépendre du type d'élément utilisé; plus précisément du degré des fonctions d'interpolations dans les éléments. Toutefois, nous nous limiterons dans le cadre de ce mémoire aux éléments linéaires qui, certes sont moins précis, mais présentent l'avantage, par rapport aux éléments quadratiques, d'un temps de calcul beaucoup plus réduit.

c)- **La présence de zones à forts gradients au niveau des surfaces de contact** (ou bien de la régularité de la solution)

d)- **Le coefficient de frottement** : Dans le cadre de la loi de Coulomb, les évolutions des différentes erreurs relatives (globale, de maillage et de contact) seront étudiées en fonction du coefficient de frottement.

e)- **Les valeurs des seuils de glissements S_n et de décollements S_t** (cf. paragraphe précédent II.2.2) adoptés lors de la résolution. Toutefois, l'étude de l'influence de ce paramètre s'avère assez complexe.

Par conséquent, pour la présente étude, nous nous limiterons uniquement à l'étude de deux paramètres essentiels pour les calculs en 3D, à savoir : la régularité de la solution (ou bien la présence de zones à forts ou à très fort gradients de contraintes) au niveau des surfaces de contact ainsi que l'intensité du frottement mis en jeu et qui est représenté par les différentes valeurs du coefficient de frottement.

IV.1 Influence de la régularité de la solution au niveau de la surface de contact

Afin d'étudier l'influence de la régularité de la solution au niveau de la surface de contact dans le cas 3D, considérons quatre types d'exemples différents. Les trois premiers types (figure 27 à 29) sont des essais de compression de deux éprouvettes prismatiques à bases rectangulaires de dimensions différentes et donnant lieu au niveau des surfaces de contact à un fort gradient de contraintes d'intensité variable et d'allure décroissante et ce, en allant du premier vers le troisième cas. Le quatrième cas (figure 30) est un essai de compression de deux éprouvettes de mêmes dimensions et où la solution présente le gradient le plus faible (solution "la moins irrégulière" ou

bien "la plus régulière") Pour la présente étude , nous nous limiterons uniquement aux maillages contenant des éléments linéaires quadrangulaires à quatre nœuds de type QUA4 pour les éléments de contact et cubiques à huit nœuds CUB8 pour les éléments massifs (ou volumiques) en dehors des zones de contact . Toutes ces éprouvettes sont acier dont le module d'Young $E = 210000\text{MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le poids volumique a été négligé. Le bloc inférieur est de dimensions fixes et inchangées pour les quatre cas $20 * 20 * 20 \text{ cm}^3$. Tandis que pour le bloc supérieur, ses dimensions varient comme suit : pour le premier cas T1 : $5 * 5 * 5 \text{ cm}^3$ (figure 27), pour le second cas T2 : $10 * 10 * 10 \text{ cm}^3$ (figure 28), pour le troisième cas T3 : $15 * 15 * 15 \text{ cm}^3$ (figure 29) et enfin pour le quatrième cas T4, ses dimensions sont identiques à celles du bloc inférieur (figure 30). Pour les conditions aux limites, une contrainte de compression est appliquée à la surface supérieure du bloc supérieure. Cette contrainte est constante pour les quatre cas. Elle est égale à 3.125 MPa . Quant au bloc inférieur, celui-ci est supposé encasté à base.

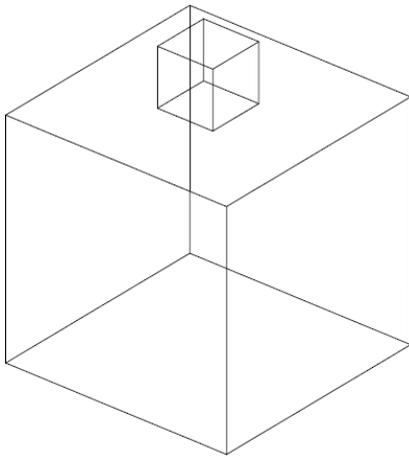


Figure 27 : premier cas : Essai de compression de deux solides en contact avec effet de poinçonnement (surface de contact $5*5$ type 1)

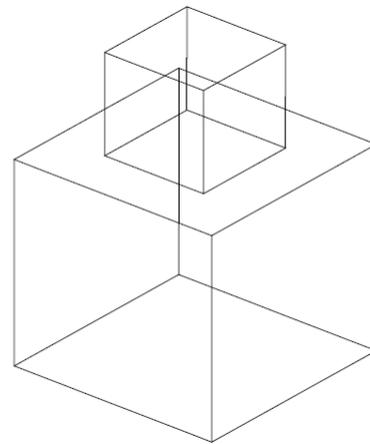


Figure 28: Second cas : Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact $10*10$, type 2)

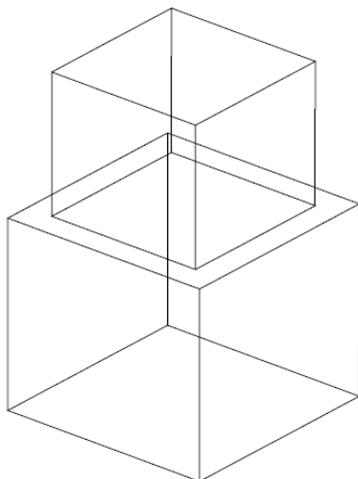


Figure 29: Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact $15*15$, type 3)

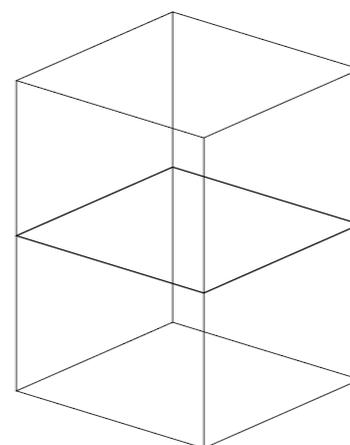


Figure 30 : Essai de compression de deux solides en contact (surface de contact $20*20$, type 4)

Cela étant dit, la démarche consiste à étudier les évolutions des erreurs relatives globales, de maillages et de contact en fonction des degrés de raffinement de maillages, et ce, pour les différents types de problèmes (types 1 à 4). Rappelons que ces raffinements doivent se faire de manière uniforme. Les maillages utilisés sont de type compatibles. Des exemples de maillages utilisés sont illustrés dans les figures suivantes 27bis, 28bis, 29bis et 30bis. Les résultats obtenus sont illustrés par les courbes des évolutions de ces erreurs représentées dans les figures 31, 32, 33 et 34..

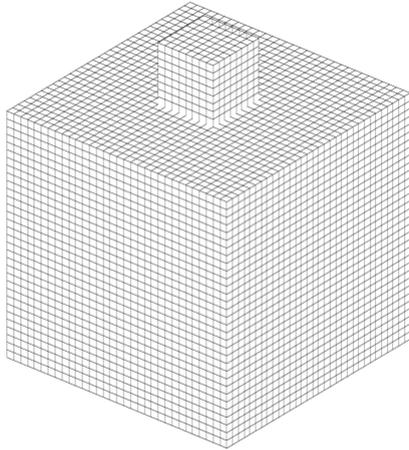


Figure 27 bis : Exemple de maillage du premier cas avec 33280 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact

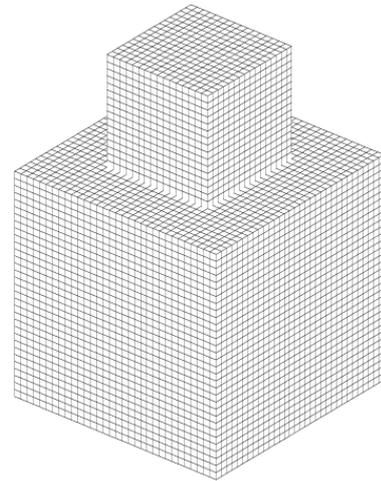


Figure 28 bis : Exemple de maillage du second cas avec 36864 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact

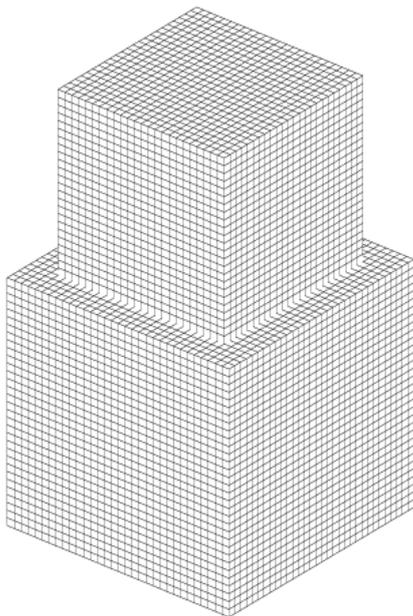


Figure 29 bis : Exemple de maillage du troisième cas avec 46592 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact

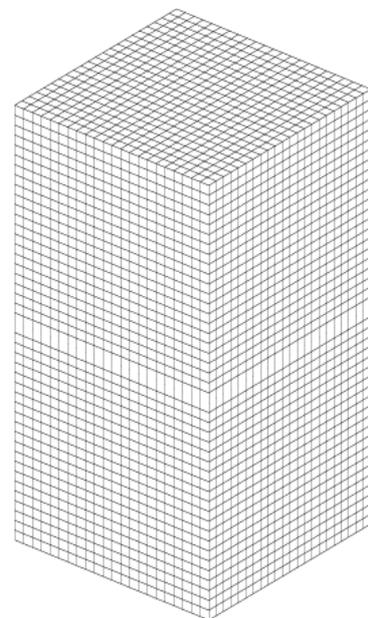


Figure 30 bis : Exemple de maillage du second cas avec 21296 éléments massifs de type CUB8 et des QUA4 au niveau des surfaces de contact

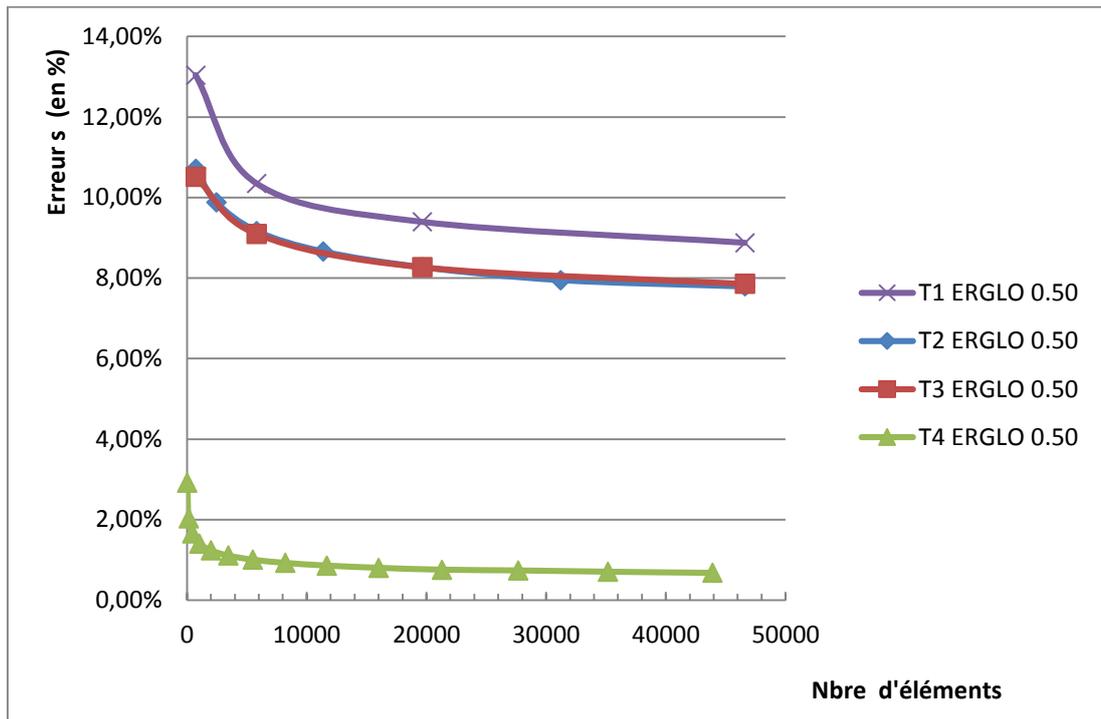


Figure 31: Erreurs relatives globales en fonction du nombre total d'éléments pour chaque type d'exemple avec $\mu = 0.50$

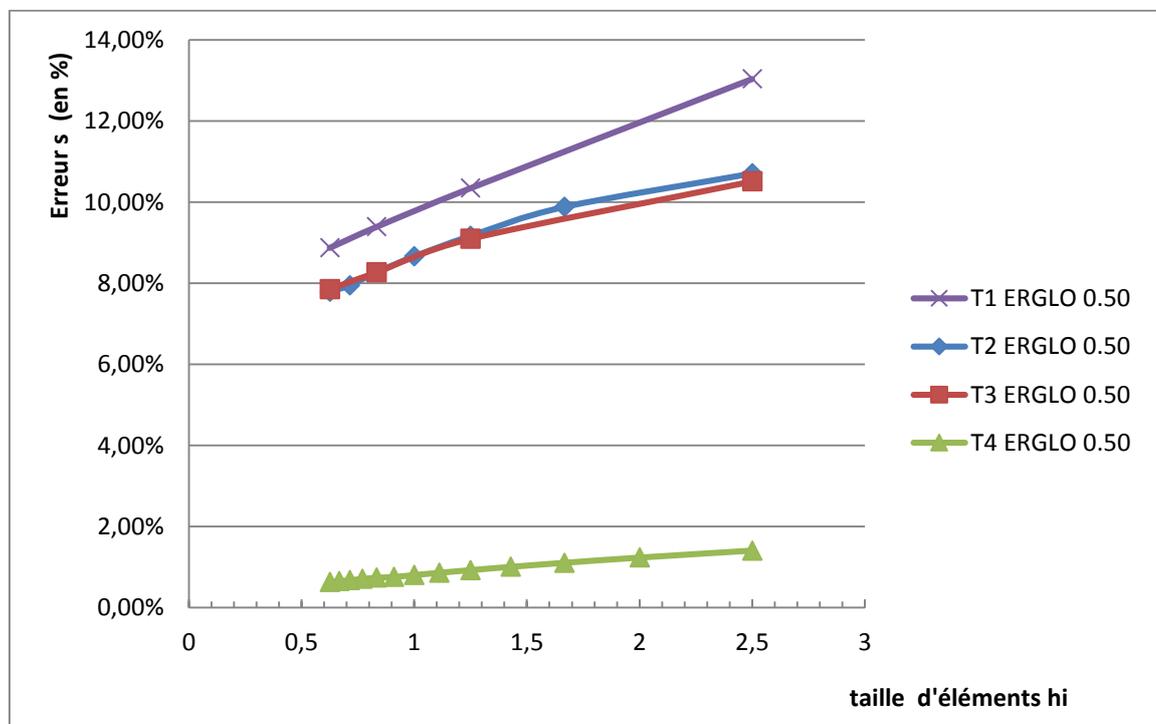


Figure 32: Erreurs relatives globales en fonction de la taille moyenne des éléments pour chaque type d'exemple avec $\mu = 0.50$

Les courbes obtenues au niveau de la figure 31 pour les erreurs relatives globales avec un coefficient de frottement assez élevé égal à 0.50 présentent des allures globalement décroissantes, régulières, et diminuant jusqu' à atteindre, pour un maillage très raffiné (où la taille moyenne de chaque élément atteint approximativement la valeur de 0.60 cm : voir la figure 32 correspondante ci dessus), des "valeurs quasi asymptotiques" mais très différentes; variant de 0.68% (pour le cas de la solution régulière : exemple type 04) à 08.88% (pour le cas de la solution à fort gradient: exemple type 01). Ainsi, l'analyse de ces courbes permet de constater des valeurs assez faibles et donc une meilleure convergence de l'erreur globale le cas de la solution régulière de deux blocs identiques du type 04. Par contre, pour le cas du type 01, malgré le raffinement très dense du maillage, l'erreur globale n'a pu descendre en dessous de 8.88 %. Une question peut alors se poser sur la cause de ce résultat. Est il dû aux erreurs de discrétisation ou aux erreurs de contact? Vu que l'indicateur étudié présente l'avantage de distinguer (grâce à ses deux termes, cf paragraphe IV équation 2.65), entre l'erreur de maillage et l'erreur de contact, nous avons pu tracer sur les figures 33 et 34 les évolutions de ces erreurs (de maillage et de contact) en fonction des nombres des éléments.

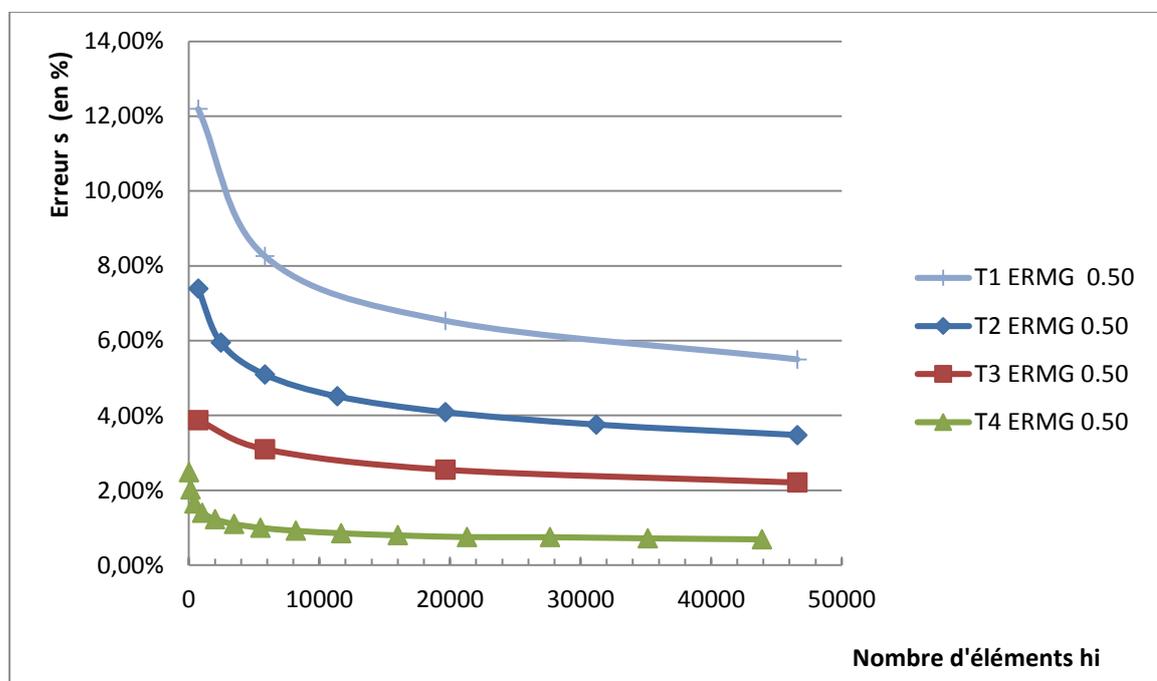


Figure 33: Erreurs de maillages pour chaque cas en fonction du nombre d'éléments avec $\mu = 0.50$

Les courbes représentant les erreurs de maillages de la figure 33 pour le même coefficient de frottement (égal à 0.50) présentent des allures nettement plus distinguées que celles des erreurs globales de la figure 31. Ces courbes mettent en évidence le caractère progressif du gradient des champs de contraintes, et ce, en passant du gradient le plus faible vers le gradient le plus élevé. On constate qu'elles sont toutes décroissantes, régulières et diminuent progressivement jusqu' à atteindre des "valeurs quasi asymptotiques" variant de 0.69% (pour le T4) à 5.50% (pour le T1). L'analyse de ces courbes permet de constater que l'erreur de maillage la plus faible correspond à celle du type 04 (cas de deux blocs identiques) où la solution présente le gradient le plus faible. Par contre pour les autres cas, on remarque la forte influence de l'intensité du gradient des champs de contraintes au niveau des zones à fort gradient. En effet, en allant de la courbe T4 vers les courbes T2, T3 et enfin

T4, on peut aisément remarquer que plus le gradient des champs de contraintes augmente, plus cette valeur asymptotique de l'erreur de maillage augmente. jusqu' à atteindre pour le cas T1 (le plus "sévère") une valeur de 5.5 % .

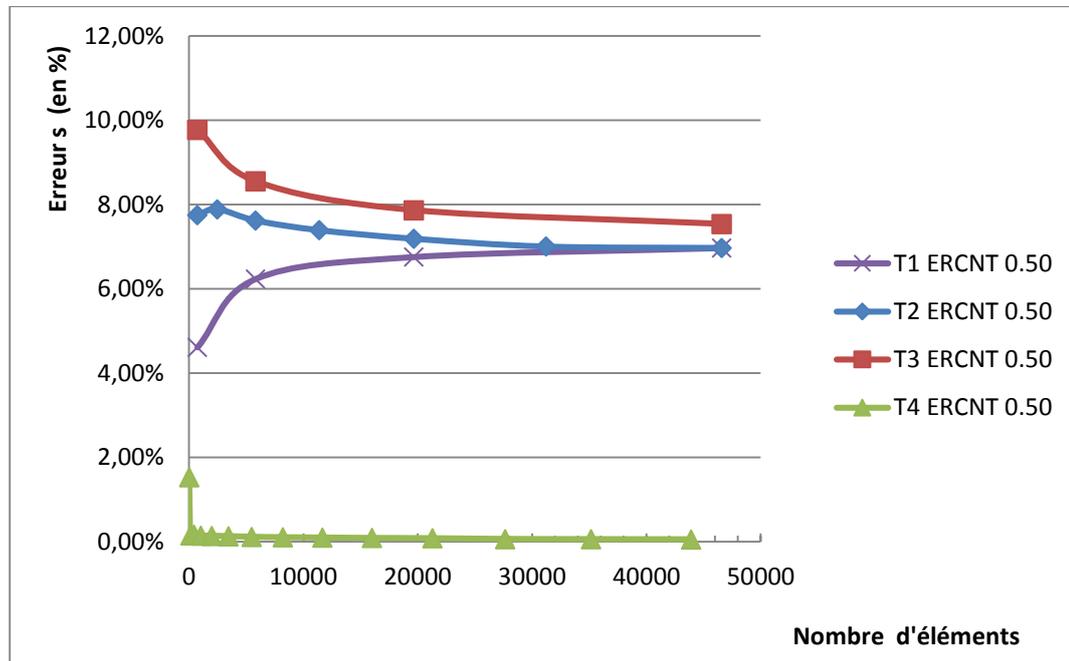


Figure 34: Erreurs relatives de contact pour chaque cas avec un coefficient de frottement égal à 0.50

Quant aux erreurs de contact, les courbes obtenues pour μ égal à 0.50 (figure 34 ci dessus) présentent des allures distinctes. En effet, malgré leurs différences très nettes, les trois courbes T2, T3 et T4 sont globalement décroissantes. Par contre, celle du cas du premier cas T1, présente une allure croissante. Ainsi, l'analyse de ces courbes permet de constater une divergence de l'erreur de contact pour l'exemple du premier cas. Ce qui est vraisemblablement dû à la forte influence du caractère très irrégulier à fort gradient de la solution. Par ailleurs, on peut remarquer que l'erreur de contact du quatrième cas (cas de deux blocs identiques du le gradient le plus faible) présente des valeurs très faibles variant de 1.5% pour un maillage très grossier à 0.006% pour un maillage très raffiné.

Suite à ces résultats nous pouvons déduire que l'erreur globale dépend à la fois des erreurs de maillage et de contact. En présence de zones de contact à fort gradient, on constate, lors du raffinement du maillage, que les deux erreurs de contact et de maillage tendent vers des valeurs assez élevées. Ce qui donne lieu à une erreur globale avoisinant 8.88 %. Par contre, en l'absence de zones à forts gradients, l'erreur de contact devient négligeable. Par conséquent, l'erreur globale est quasiment identique à celle du maillage.

IV.2 Influence du coefficient de frottement

Comme signalé auparavant, l'objectif de ce paragraphe est de montrer l'influence du coefficient de frottement sur les évolutions des erreurs relatives globales, de maillage et de contact et ce, en fonction de la présence ou non des zones à forts gradients au niveau des surfaces de contact. A cet effet, notre démarche consistera à étudier ces évolutions pour les deux "cas extrêmes", à savoir le type 01 (surface de contact 5*5 cm² et le type 04 (éprouvettes de mêmes dimensions).

Cas du contact de deux blocs de dimensions différentes avec présence de zones à fort gradient (type 01 : cf figure 27):

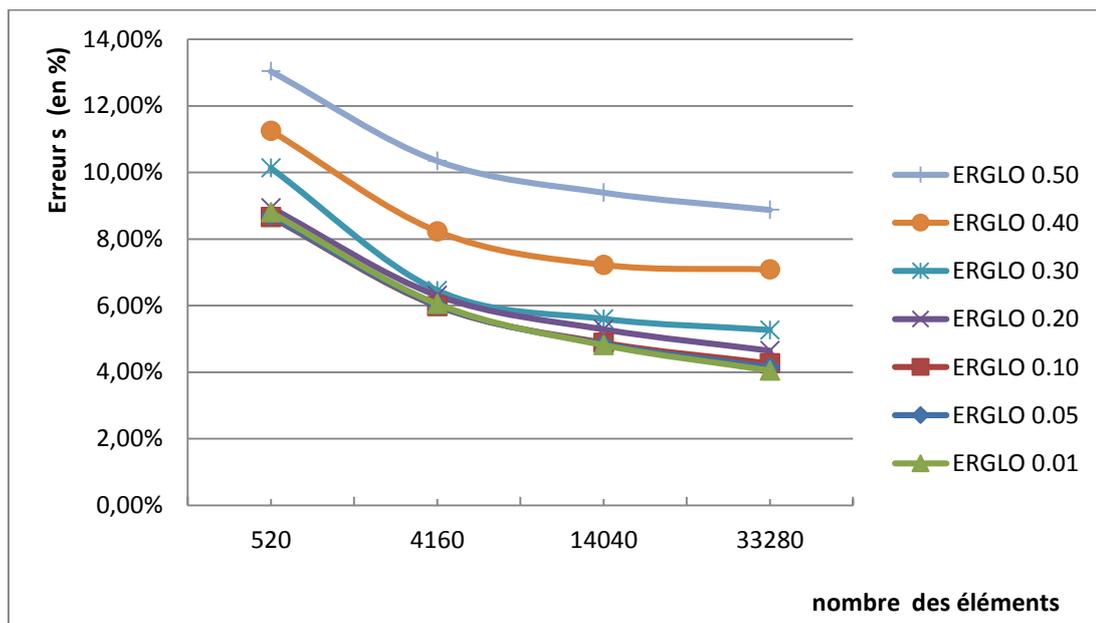


Figure 35: Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE01

Les courbes illustrées sur la figure 35 ci-dessus montrent la forte influence du coefficient de frottement sur la valeur de l'erreur globale et confirment les résultats mathématiques portant sur l'unicité de la solution en fonction de la valeur du coefficient de frottement. En effet, pour un coefficient de frottement assez élevé (égal à 0.5), l'erreur globale diminue de 13,04% pour un maillage grossier composé de 520 éléments cubiques de type CUB8 (correspondant à une taille moyenne de 2.5 cm: voir figure 36 ci dessous) à une valeur de 8.88% pour un maillage très dense composé de 33280 éléments (correspondant à une taille moyenne de 0.6 cm). Par contre pour un très faible coefficient de frottement égal à 0.01, l'erreur diminue de 8.80% à 4.05%.

Il y a lieu de signaler que ces courbes permettent de mieux connaître les propriétés de convergence de l'indicateur d'erreur mis au point et facilitent d'avantage toute procédure d'adaptation de maillage. A ce titre, il est clair que dans le cas du présent exemple T1 et en présence d'un coefficient de frottement $\mu = 0.5$, le génération d'un maillage optimal (ou adapté) par les techniques d'adaptation de maillages et ce, pour une erreur globale prescrite par l'utilisateur située en dessous des 8 % serait difficile à obtenir. Par contre, pour une autre valeur de ce coefficient inférieure à la précédente ($\mu=0.2$ par exemple), l'utilisateur pourra prescrire sa précision jusqu'à 5% environ (voir figure 35) et obtenir son maillage optimal sans grande difficulté.

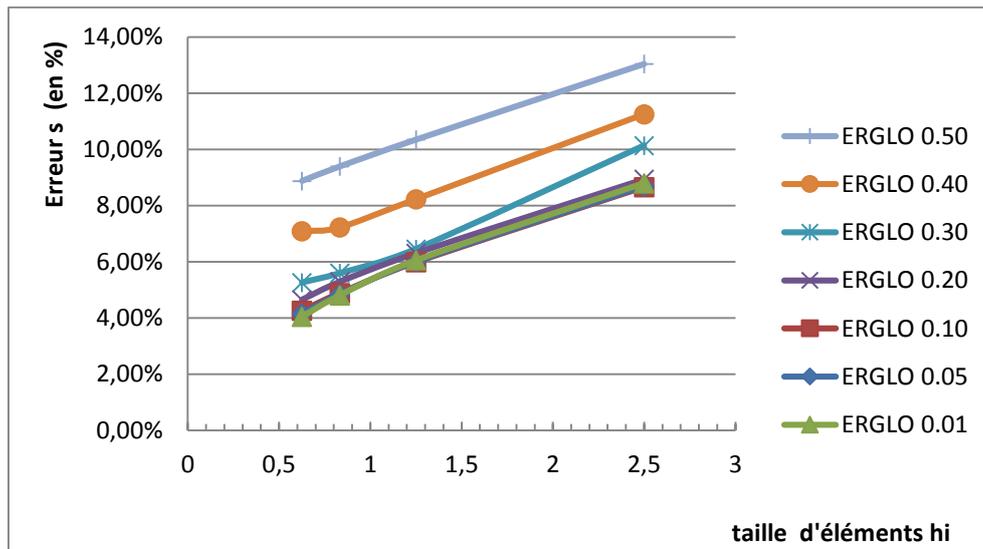


Figure 36: Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement du cas 01

Par ailleurs, la représentation de l'évolution de l'erreur globale en fonction de la taille moyenne des éléments (en adoptant un maillage à tailles uniformes à chaque raffinement), permet de calculer mathématiquement le taux de convergence de l'erreur

En effet, rappelons que du point de vue mathématique, l'erreur estimée de l'approximation par éléments finis, possède la propriété suivante :

$$\exists C > 0 \text{ tel que : } \varepsilon \leq C \cdot h^\alpha$$

avec ε l'erreur globale, h étant la taille moyenne des éléments utilisés et α un réel positif dépendant du degré d'interpolation de ces éléments et de la régularité de la solution. La détermination du paramètre α permet d'apprécier qualitativement la convergence de la solution approchée obtenue par éléments finis vers la solution exacte lorsque le maillage est raffiné, c'est-à-dire quand la taille h des éléments tend vers 0. A ce titre, en utilisant les courbes précédentes de la figure 36, on peut déterminer facilement les paramètres C et l'exposant α qui représente le taux de convergence de l'erreur et ce, grâce à l'utilisation de la méthode des moindres carrés. Il y a lieu de signaler également que plus α est petit, moins la solutions converge et plus l'adaptation de maillages serait difficile à obtenir. Ceci se produit très souvent en cas de présence de singularités ou de zones à forts gradients dans la structure.

A titre d'exemple, l'approximation de la courbe précédente (figure 36) correspondant à $\mu = 0.5$, par la méthode des moindres carrés donne $\varepsilon \approx C \cdot h^\alpha \approx 0.0994 \cdot h^{0.287}$. Les différentes valeurs du coefficient α en fonction du coefficient de frottement sont illustrées dans le tableau 01 ci-dessous :

Coefficient de frottement μ	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
C	0.0531	0.0531	0.0538	0.0575	0.0620	0.0793	0.0994
α	0.554	0.538	0.518	0.477	0.517	0.366	0.287

Tableau 01: Evolution de α en fonction de μ en présence de zones à fort gradient (exemple type 01)

Un autre résultat qui nous paraît important, consiste en le fait que le coefficient de frottement influe non seulement sur l'erreur de contact (figure 37) mais aussi sur l'erreur de maillage. Ceci est illustré sur la figure 38 ci-dessous.

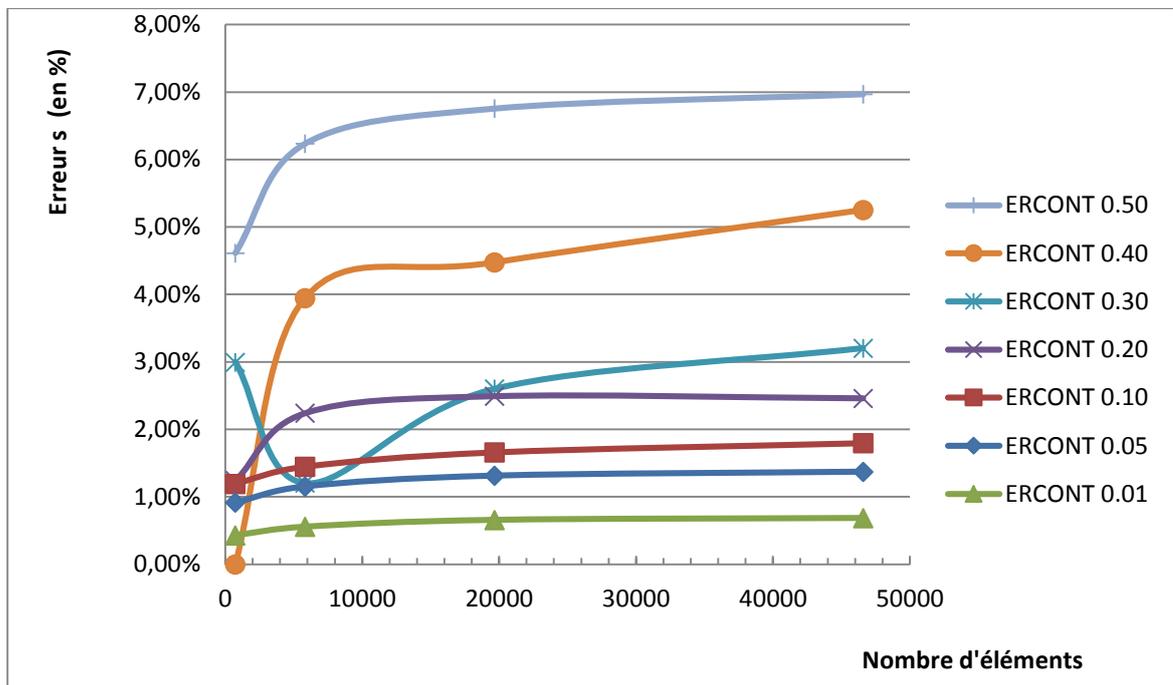


Figure 37: Erreurs relatives de contact pour différentes valeurs de μ dans le cas du Type 1

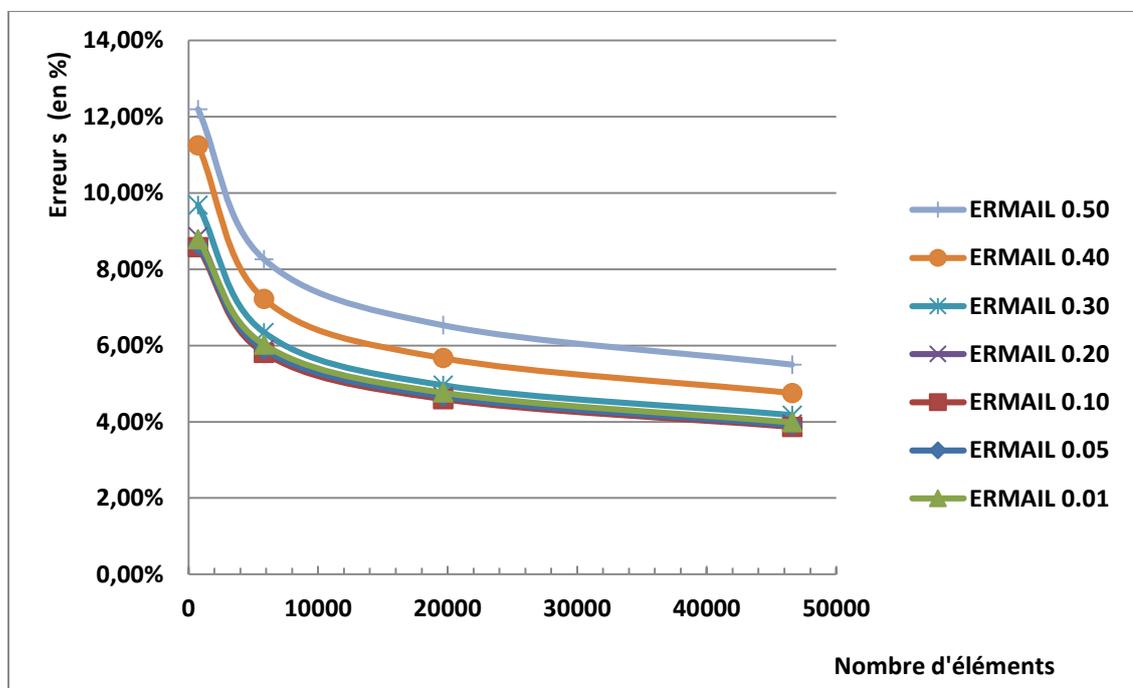


Figure 38: Erreurs relatives de maillages pour différentes valeurs de μ dans le cas du Type 1

Cas du contact de deux blocs identiques de même dimensions en l'absence de zones à fort gradient (type 04 : voir figure 30):

Pour ce cas, où la solution semble présenter un gradient relativement faible, les courbes obtenues pour les différentes valeurs du coefficient de frottement sont quasiment confondues. Ce résultat semble très intéressant, dans la mesure où il montre clairement la faible contribution de l'erreur de contact à l'erreur globale. Ce qui confirme d'avantage les résultats de Renard (2006) sur les conditions d'unicité de la solution de contact dans le cas où la solution est régulière. Par ailleurs, les valeurs des erreurs globales sont relativement faibles devant celles des autres cas à fort gradients. En effet (voir figures 39 et 40 ci-dessous), l'erreur globale est comprise (pour toutes valeurs de μ confondues) entre 02.8% pour un maillage grossier composé de 16 éléments (correspondant à une taille moyenne de 10 cm) et 0.76% pour un maillage très dense composé de 21296 éléments (correspondant à une taille moyenne de 0.91 cm).

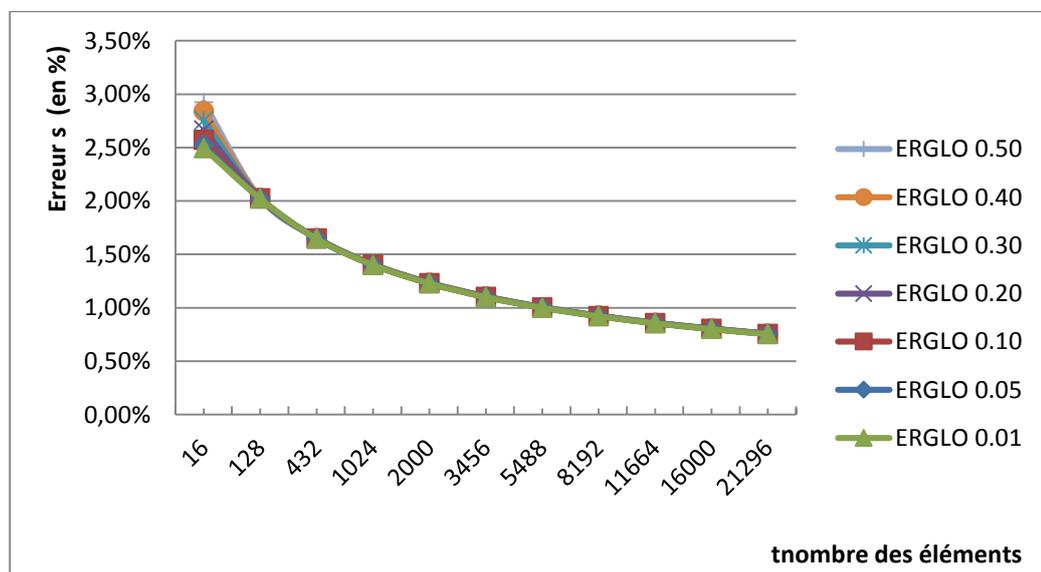


Figure 39 : Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04

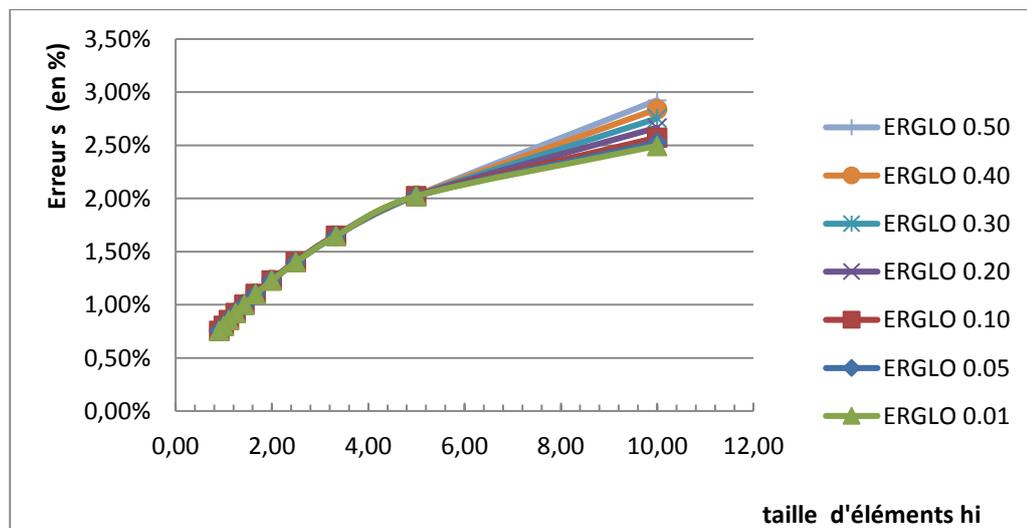


Figure 40 : Erreurs globales relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04

Par ailleurs, l'approximation des courbes précédentes par les courbes de la forme $\varepsilon \approx C \cdot h^\alpha$ (figure 40) par la méthode des moindres carrés donne au tableau 02 ci-dessous les différents coefficients C et α en fonction du coefficient de frottement:

Coefficient de frottement μ	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
C	0.0086	0.0086	0.0085	0.0085	0.0085	0.0084	0.0083
α	0.48	0.48	0.4929	0.5078	0.5221	0.5357	0.5489

Tableau 02: Evolution de C et α en fonction de μ en présence de zones à faible gradient (type 04)

La comparaison des valeurs des exposants α des tableaux 01 et 02, permet de constater que dans le cas à faible gradient celui-ci varie entre 0.48 et 0.55. Tandis que dans le cas à fort gradient, ce coefficient décroît de 0.54 pour de faibles frottement jusqu'à atteindre la valeur de 0.29 pour des frottements assez élevés ($\mu = 0.5$). Ce qui montre clairement le faible taux de convergence de la solution et donc la difficulté d'obtenir un maillage optimal, en présence à la fois d'un fort gradient et d'un frottement assez élevé.

De même, pour les erreurs de maillage (figure 41) de ce quatrième cas de contact, l'observation permet de relever, l'absence de l'influence du coefficient de frottement sur les erreurs de maillages (figure 41). En effet, les courbes obtenues sont toutes confondues. Ce qui était prévisible, vu que les erreurs de contact (figure 42) demeurent négligeables devant les erreurs de maillages.

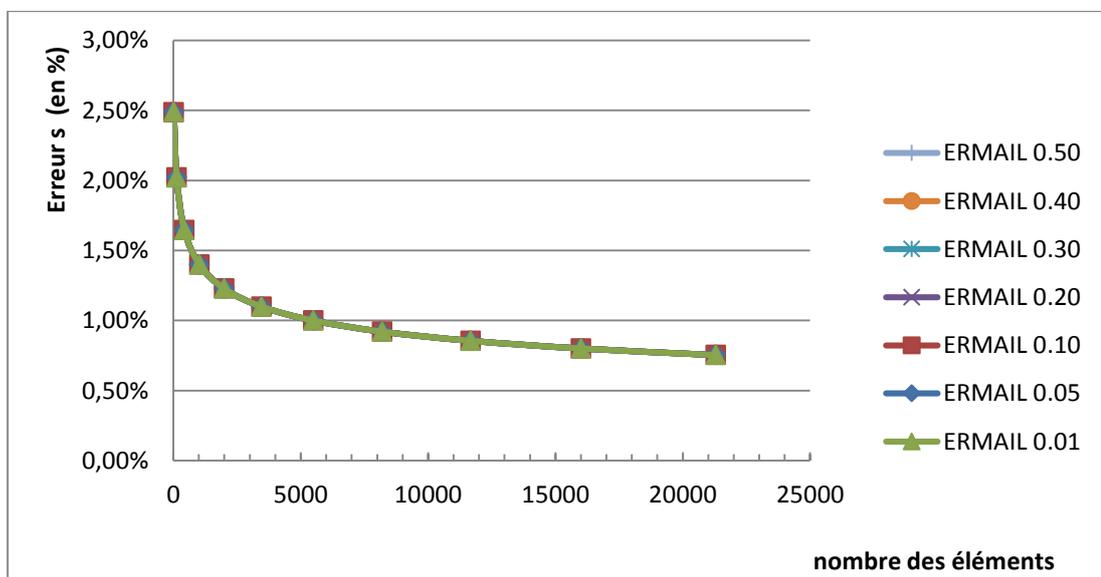


Figure 41 : Erreurs de maillage relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04(QUA4)

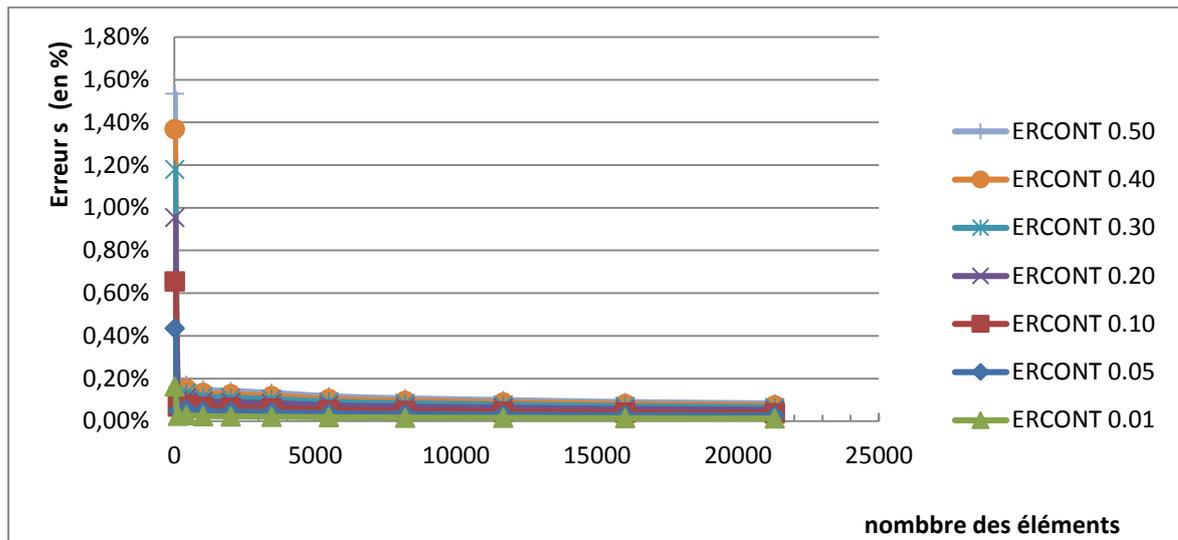


Figure 42: Erreurs de contact relatives avec différents coefficients de frottement de TYPE04(QUA4)

Finalement, il en ressort clairement que le coefficient de frottement influe non seulement sur l'erreur de contact mais également sur l'erreur de maillage. Toutefois, cette influence est conditionnée par la présence de zones à fort gradients de contraintes dans les surfaces de contact.

V. Quelques exemples numériques d'adaptation de maillages

V.1 Exemple 01 : Cas de deux solides élastiques de formes tétraédrique et de dimensions différentes.

Dans le cadre de l'étude de l'adaptation des maillages en 3D, reprenons l'exemple du TYPE2 (figure 28) où deux solides de formes prismatiques à base rectangulaire et de dimensions différentes sont en contact avec frottement de Coulomb sur une surface de contact de $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Choisissons le coefficient de frottement le plus courant adopté par l'Eurocode 03 dans le cas de surfaces métalliques non traitées où μ est pris égal à 0.2. En appliquant notre indicateur, un calcul d'erreur a posteriori effectué sur un maillage grossier composé de 1429 éléments linéaires de type tétraèdre à quatre nœuds TET4 pour les éléments massifs et triangulaires à trois nœuds TRI3 pour les éléments de contact, donnera une erreur relative globale de de 7.57 % avec une erreur de maillage de 7.38 % et de une erreur de contact de 1.7 %. (figures 44).

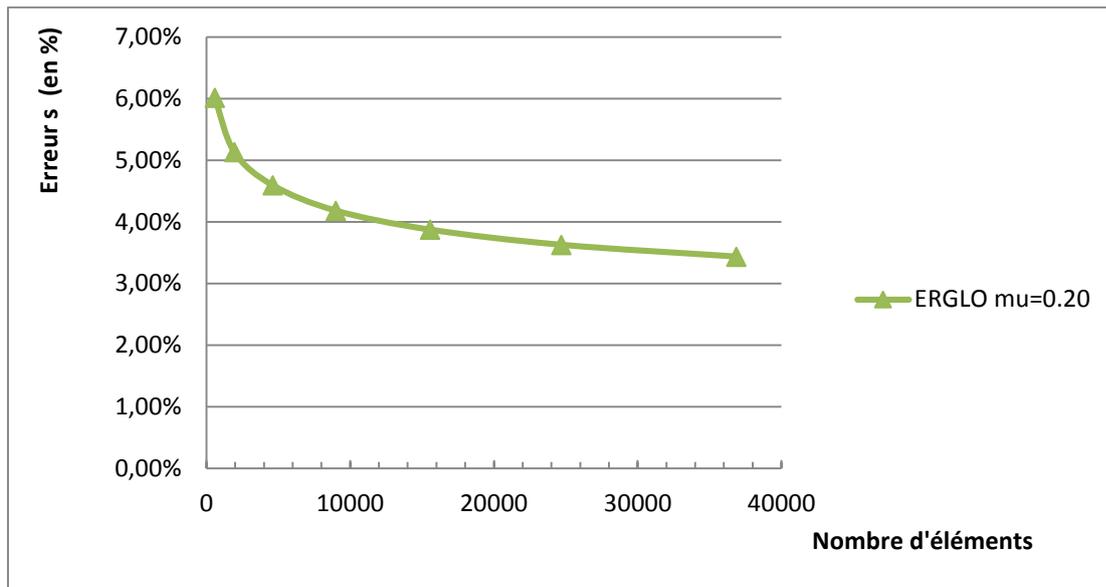


Figure 43: courbe de convergence de l'erreur globale pour le cas du type 02 avec $\mu = 0.2$

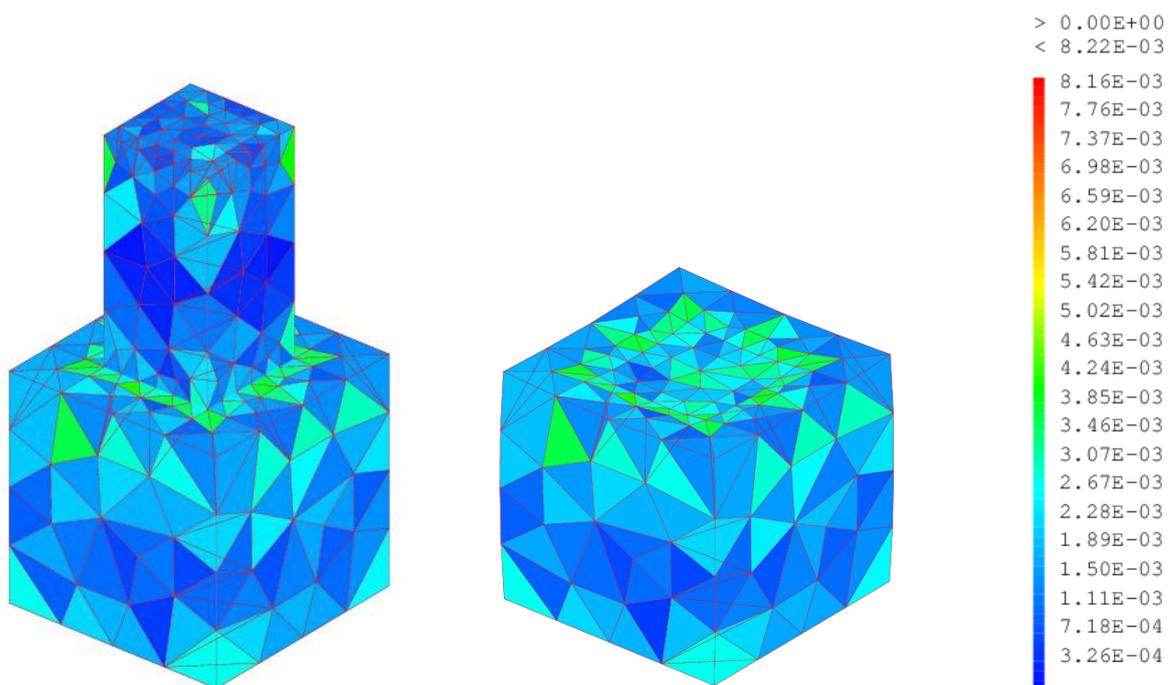


Figure 44: Maillage grossier de 1429 éléments et carte d'erreur donnant $\varepsilon = 7.57\%$

Pour la procédure d'adaptation du maillage, sachant que la courbe de convergence obtenue par raffinements successifs et uniformes avec un coefficient de frottement $\mu = 0.2$ (figure 43) offre une limite inférieure de l'ordre de 03.44 % correspondant à un maillage très densifié composé de 36864 éléments, prescrivons dans ce cas, une erreur globale légèrement supérieure $\varepsilon_0 = 4\% = 0.04$. Les résultats obtenus du problème de minimisation de l'erreur globale sous la contrainte d'un cout de calcul le plus réduit (dans notre cas d'un nombre d'éléments le plus faible possible) montrent une carte de tailles des éléments à prescrire au mailleur illustrée en figure 45.

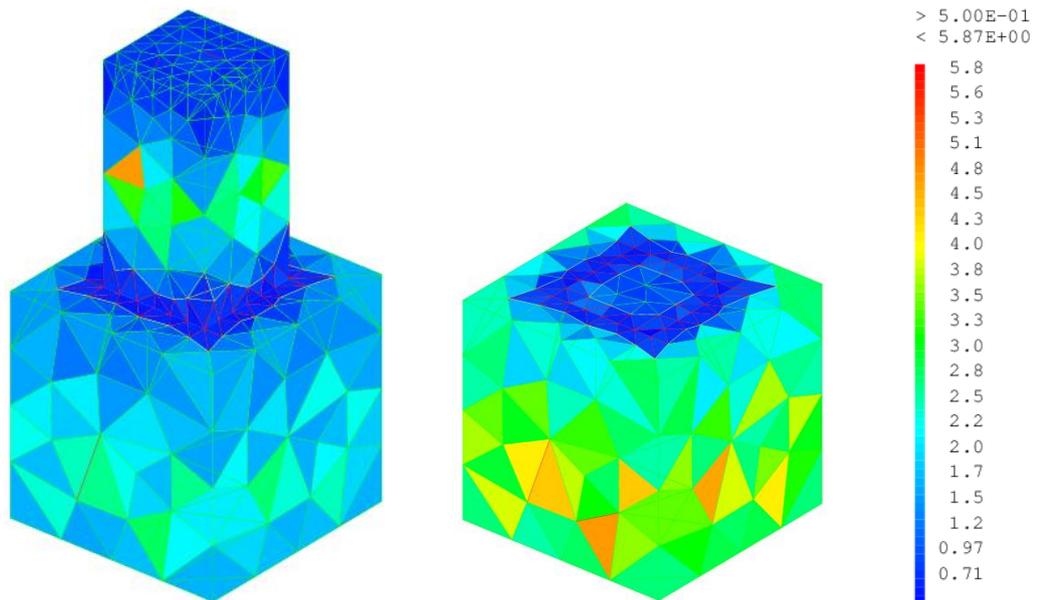


Figure 45: Carte des tailles en cm des éléments à prescrire au mailleur obtenue après résolution du problème de minimisation

Il s'en suit le maillage fourni par le mailleur CAST3M et illustré en figure 46. Ce maillage composé de 20352 éléments dont la carte des contributions à l'erreur globale est représentée en figure 47, offre une erreur globale de 4.98 % avec une erreur de maillage de 10^{-4} et une erreur de contact de 10^{-3} .

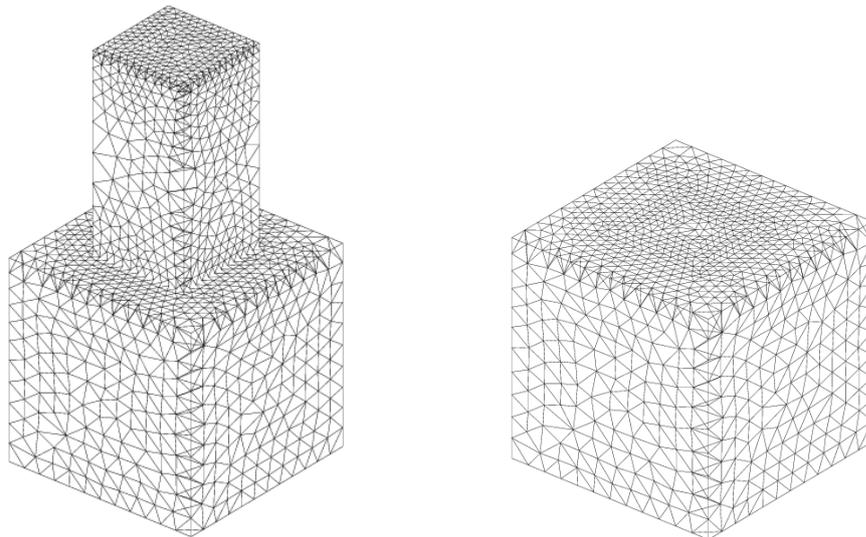


Figure 46: maillage obtenu et composé de 20352 éléments

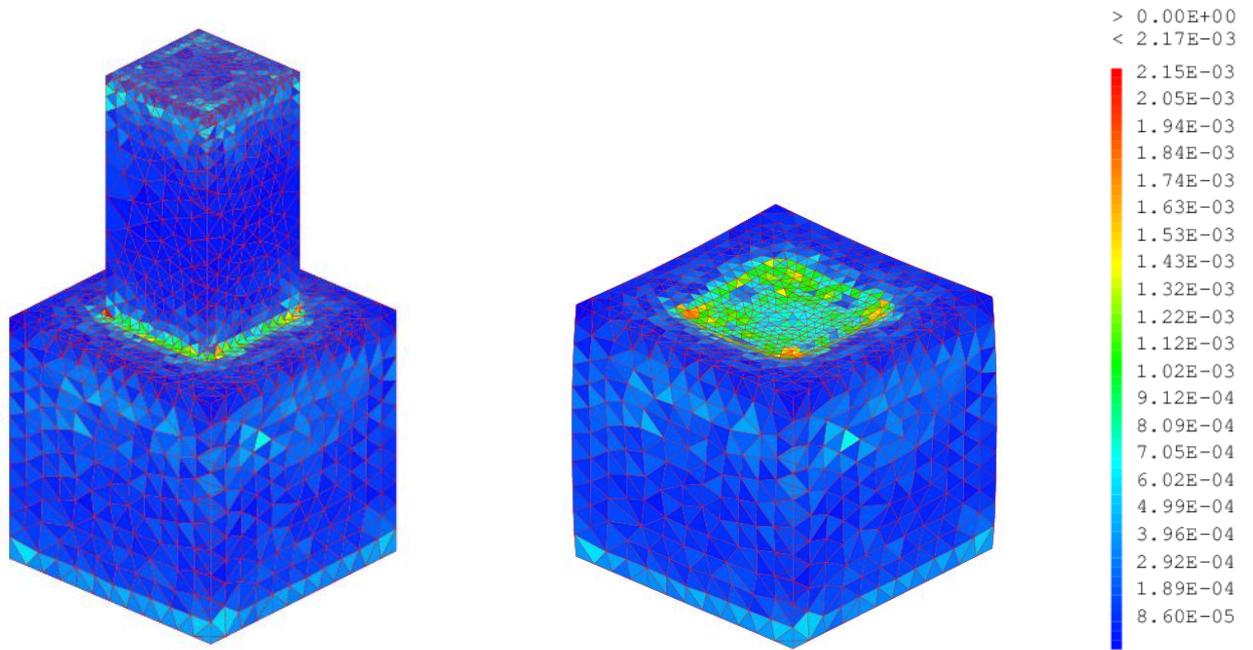


Figure 47: carte des contributions à l'erreur du maillage adapté offrant une erreur globale de 4.98 % pour une erreur prescrite de 4 %.

Par ailleurs, en termes de qualité de la solution obtenue, il est clair que la procédure d'adaptation de maillage donnera des distributions de contraintes nettement plus précises que celles du maillage grossier. En vue de comparer les résultats, les contraintes équivalentes de Von Mises sont représentées en figure 48 pour le maillage grossier et 49 pour le maillage adapté.

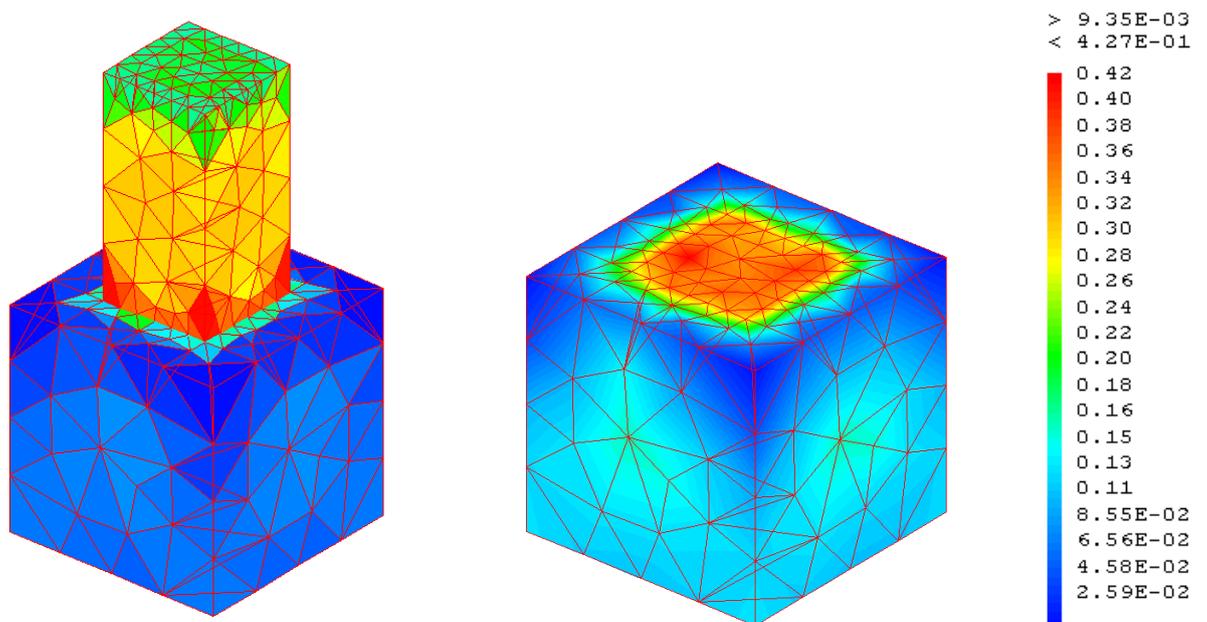


Figure 48: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises du maillage grossier.

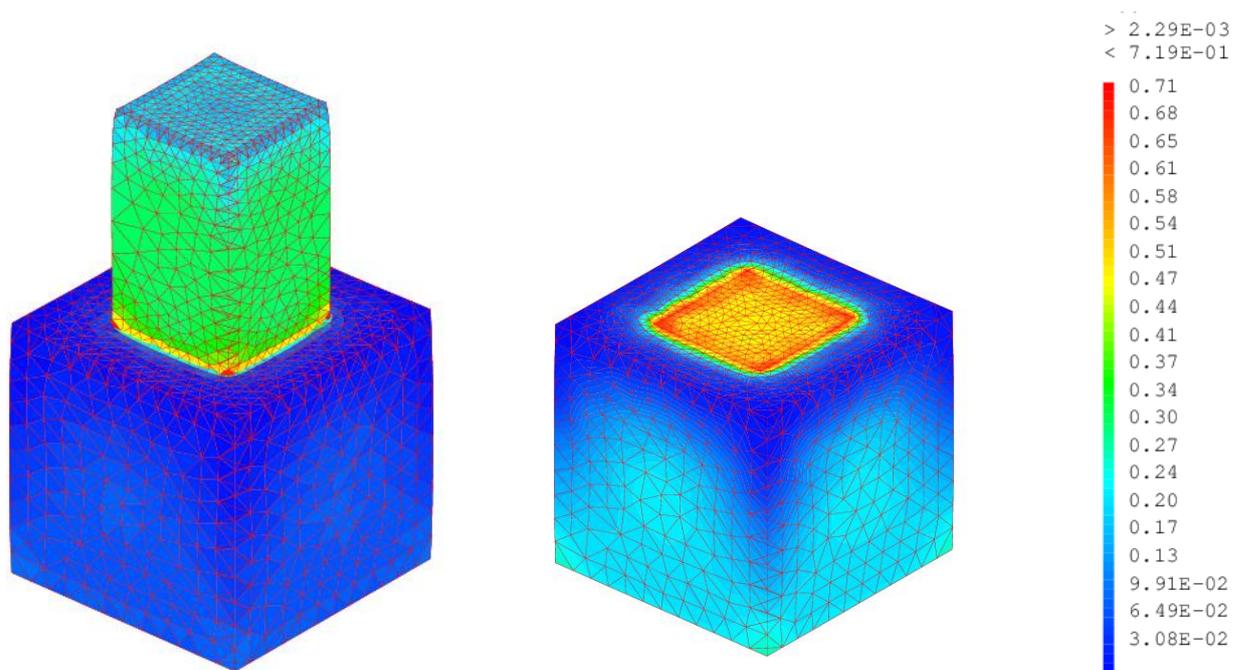


Figure 49: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises avant et après adaptation de maillages.

V.2 Exemple 02 : Application au cas d'une semelle isolée appuyée sur un sol supposé élastique et déformable.

Considérons une semelle isolée en béton armé dont les dimensions sont $1.85 * 1.85 \text{ m}^2$ à la base et une hauteur de 45 cm, et un empattement de 20 cm (figure 50). Ainsi, selon les règles du BAEL91, la condition de non poinçonnement de la semelle par le poteau est vérifiée. Les propriétés mécaniques de cette semelle sont celles du béton avec un module d'Young $E = 32164 \text{ MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.2$. Le coefficient de frottement est supposé égal à $\mu = 0.2$.

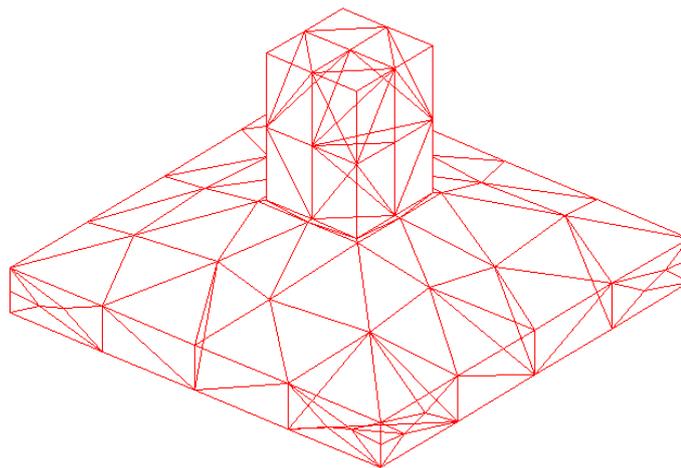


Figure 50: semelle en béton armé de $1.85 * 1.85 \text{ m}^2$ à la base

Afin d'étudier l'interaction de cette semelle avec le sol, supposons que ce sol soit homogène et isotrope et qu'il soit muni d'un comportement élastique. Il est à signaler que cette hypothèse de comportement élastique n'est valable que pour des sols faiblement saturés et sur consolidés. Cela dit, malgré sa validité dans un intervalle relativement réduit, cette hypothèse, a été utilisée par de

nombreux auteurs, notamment Boussinesq, qui afin d'étudier la diffusion des contraintes dans le massif de sol, a utilisé la théorie de la mécanique des milieux continus pour démontrer l'existence des bulbes de pressions dans le massif. Correspondant au cas des sols composés de sables moyennement grossiers, le module d'élasticité longitudinal E sera pris égal à 45.2 MPa et le coefficient de Poisson égal à 0.2 (Braja, M DAS, 1985). On constate que ce module d'élasticité est faible par rapport à celui du béton de la semelle. On supposera que les dimensions du massif de sol sont finies avec des dimensions en plan trois fois plus grandes que celles de la semelle et une profondeur de 2.00 m (figure 51). Cette semelle subit un effort normal centré de 303,75 KN donnant lieu à une contrainte moyenne en sous face de 0.9 Kgf / cm².

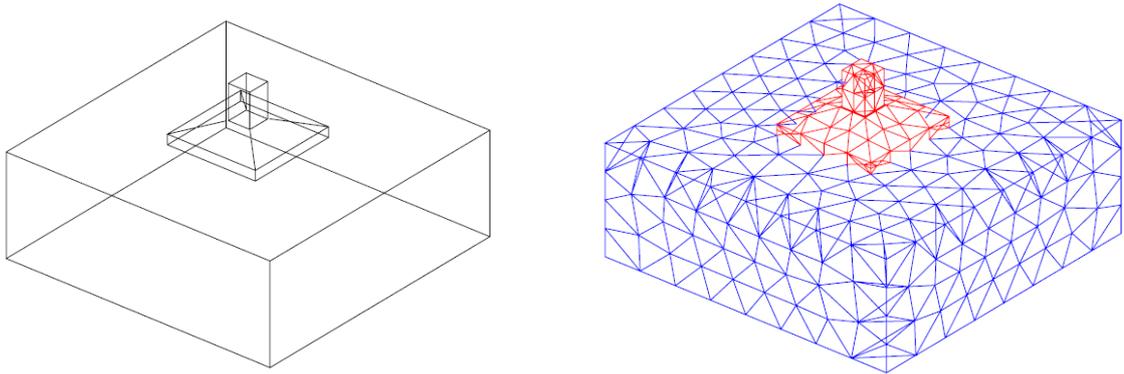


Figure 51: Modélisation tridimensionnelle du contact sol semelle.

Soit le maillage grossier de la semelle, composé de 2179 éléments linéaires de type tétraèdre à quatre nœuds (TET4) et de 125 nœuds (figure 51). Un premier calcul effectué sur ce maillage grossier donnera une erreur relative globale de 22.% avec une erreur de maillage de 21.4 % et une erreur de contact de 4.84 %. La carte des contributions à l'erreur est représentée sur la figure ci-dessous (figure 52).

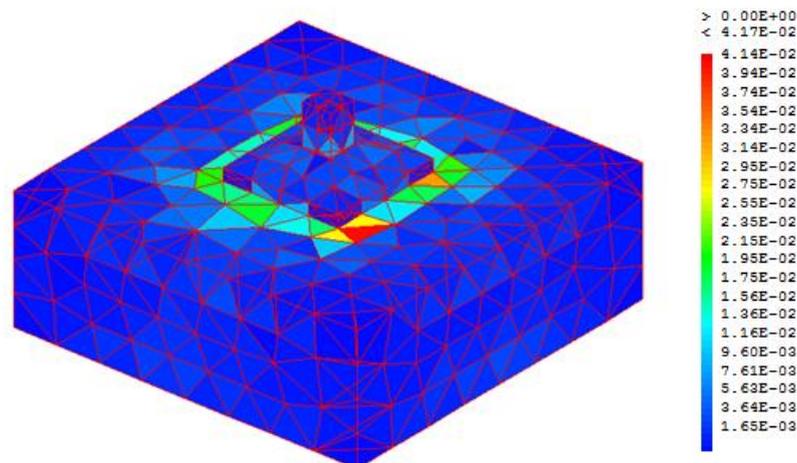


Figure 52: Carte des contributions à une erreur globale de 22 %.

Ainsi, nous remarquons que l'erreur de maillage obtenue pour ce maillage grossier, est relativement élevée. Ceci est également dû à l'existence de zones à forts gradients de contraintes, et qui se trouvent cette fois, dans deux zones différentes. La première se trouve au niveau de la jonction du poteau avec la semelle et la seconde dans le sol lui-même et où de fortes concentrations de contraintes ont été constatées au niveau des zones de contact avec les sommets des bords de la semelle.

Par ailleurs, en raison de l'existence de ces zones à forts gradients, les expériences numériques ont montré qu'un maillage 3D fortement densifié (et à priori non optimal) ne pourrait donner une erreur globale inférieure à 15 %. Cela étant dit, une erreur globale du même ordre de grandeur que la limite précédente (15%) sera prescrite.

En ce qui concerne l'adaptation de maillage, la carte des tailles à prescrire, est représentée sur la figure 53 . Composée de 10696 éléments, le nouveau maillage obtenu (figure 54) offre, pour une erreur globale prescrite de 15%, une erreur relative globale de 15.60 % avec une erreur de maillage de 14.64% et une erreur de contact de 5.41 %. La carte des contributions à l'erreur du nouveau maillage, étant représentée sur la figure 55, nous pouvons remarquer une plus grande contribution à l'erreur au niveau des zones à forts gradients.

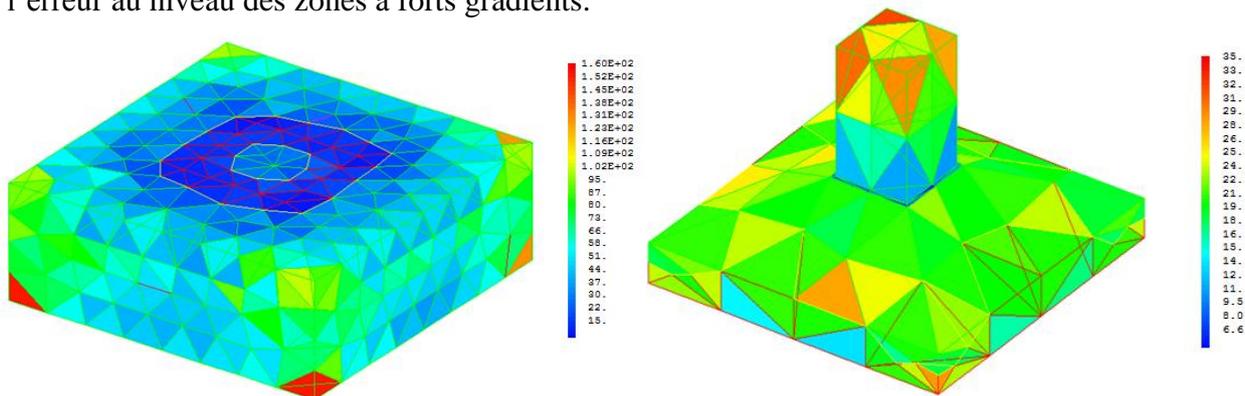


Figure 53 : Carte des tailles à prescrire en vue de l'adaptation de maillage

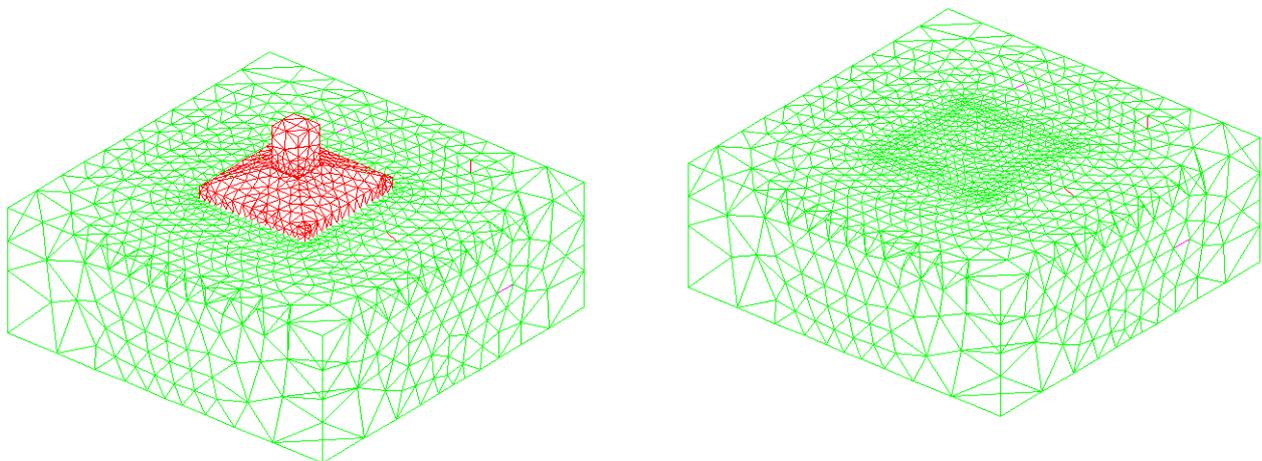


Figure 54: Nouveau maillage composé de 10876 éléments.

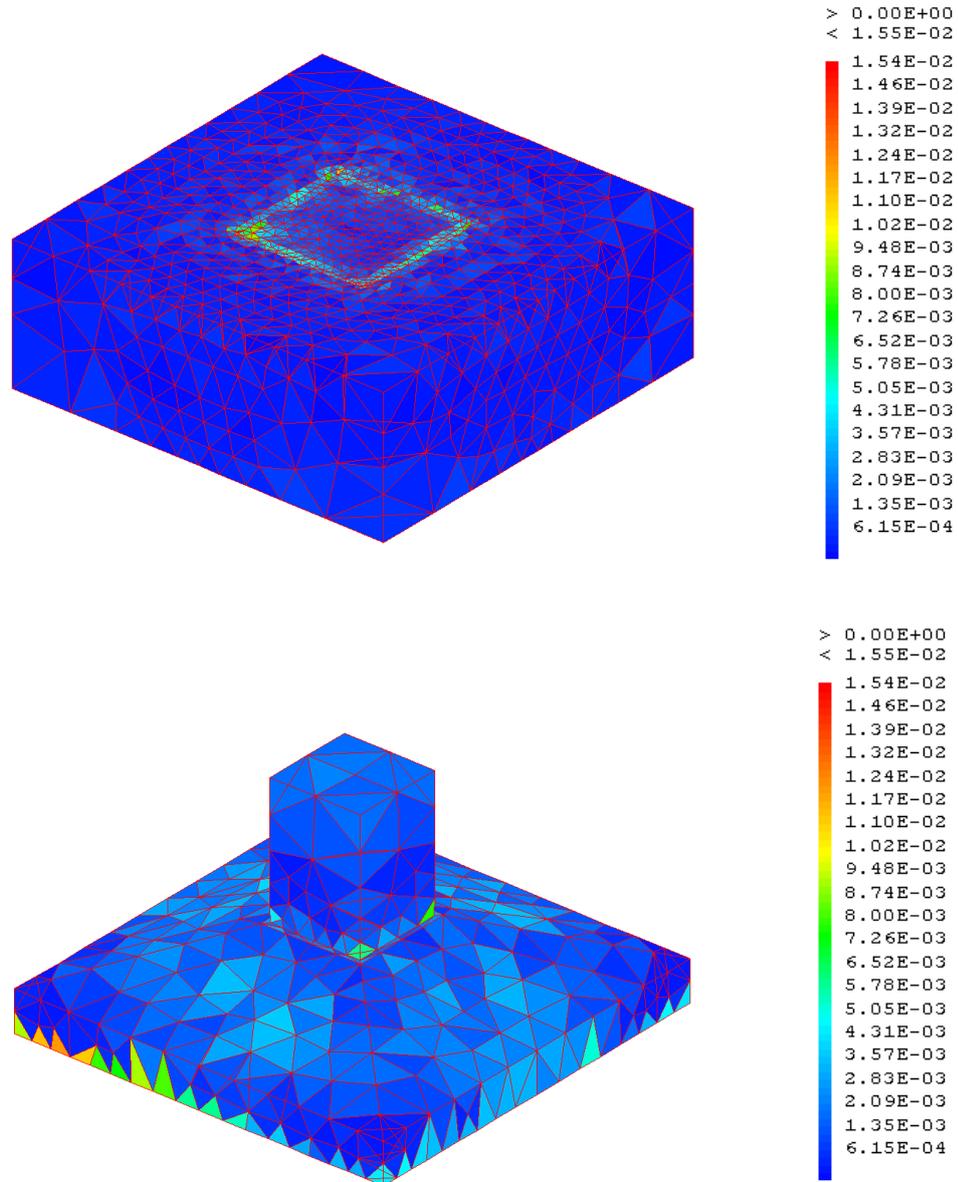


Figure 55: Carte des contributions du maillage adapté donnant une erreur globale de 15.60 %

En ce qui concerne les contraintes de Von Mises, celles-ci peuvent être visualisées sur les figures 56 et 57. Nous pouvons également constater une meilleure représentation de ces champs de contraintes après adaptation de maillage.

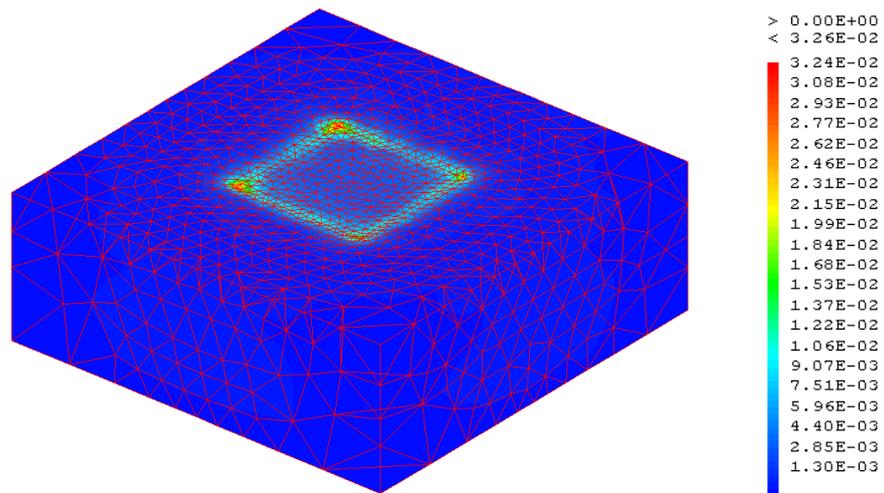


Figure 56: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage du bloc inférieur

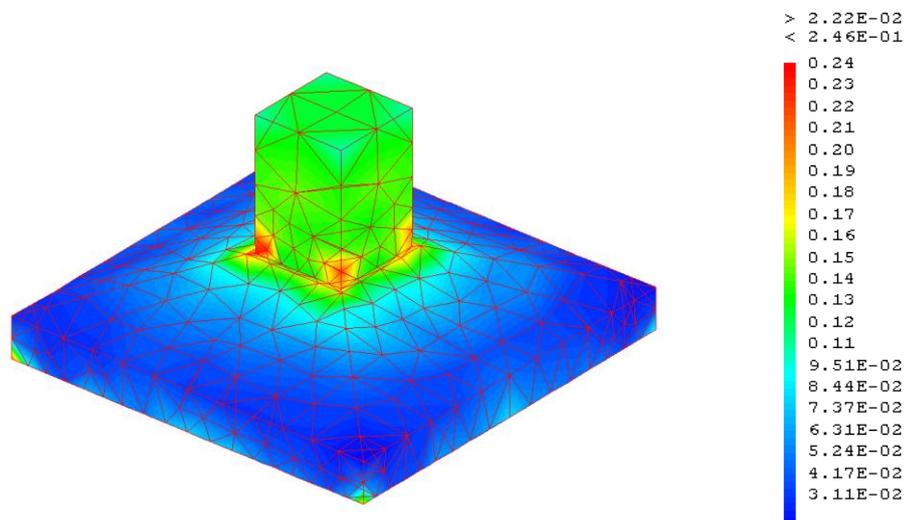


Figure 57: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage de la semelle

Par ailleurs, malgré l'adoption d'une valeur assez modérée du coefficient de frottement ($\mu=0.2$), il a été également constaté, lors de cette adaptation de maillage, que l'erreur de contact a augmenté de 4.84 % à 5.41 %. L'analyse de la distribution des forces de frottements sur le maillage de la surface de contact (figure 58 avant remaillage, et 59 après remaillage), permet de conclure sur une meilleure représentation des forces de frottement après adaptation de maillage et ce, malgré l'augmentation de cette erreur de contact. Ainsi, notre indicateur semble, dans ce cas, sous estimer l'erreur de contact dans le cas de maillages grossiers.

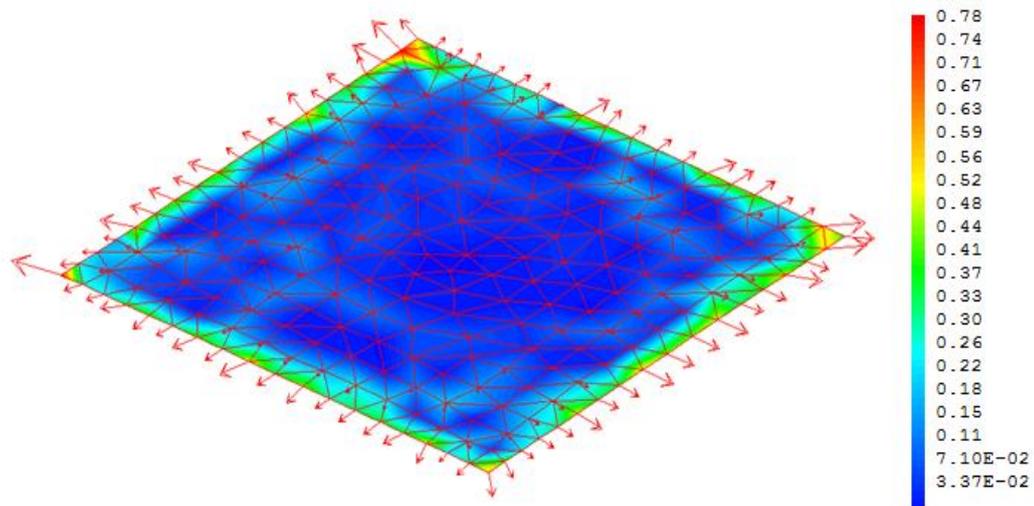


Figure 58 : Réactions tangentes sur la surface de contact avant remaillage correspondant à une erreur de contact de 4.84 %

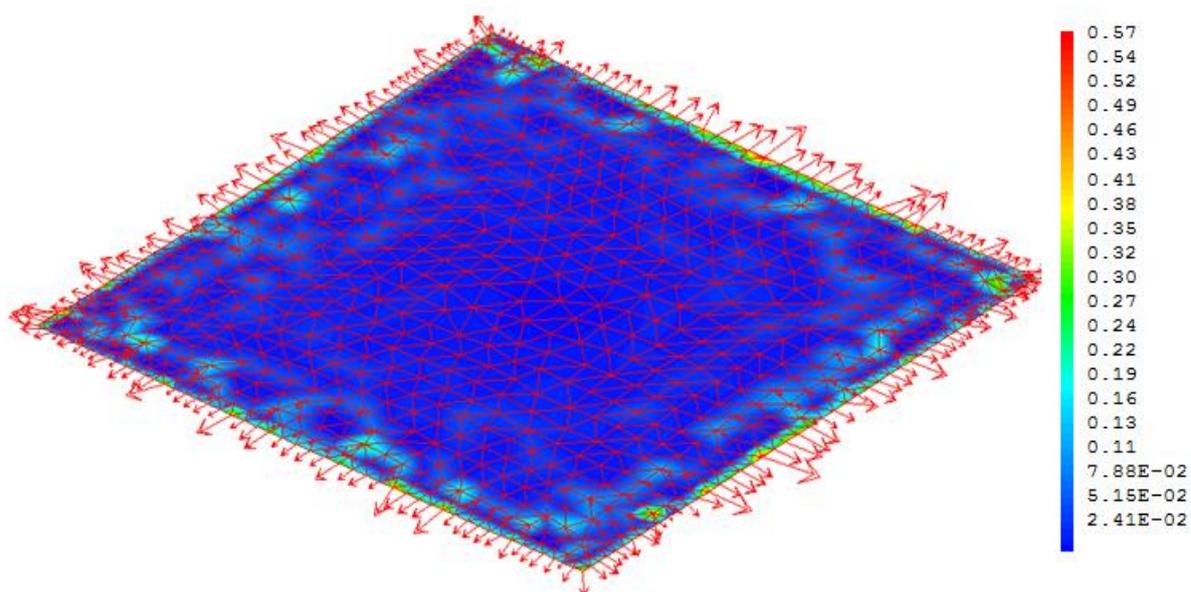


Figure 59: Réactions tangentes sur la surface de contact après remaillage correspondant à une erreur de contact de 5.38 %.

V.3 Exemple 3 :Maillage du contact du mur de soutènement avec un sol rigide supposé indéformable

Soit un mur de soutènement reposant sur un sol supposé rigide et parfaitement indéformable (cas du problème de Signorini), Le maillage grossier est composé de 1313 éléments linéaires de type tétraèdre à quatre nœuds (TET4) et de 474 nœuds (figure 60). Les dimensions de ce mur sont comme suit. D'épaisseur variable avec 50cm à la base et 25 cm au sommet, ce mur rideau a une hauteur de 3.95 m, et une longueur de 3.00 m. La semelle a une épaisseur de 45 cm, une longueur de 2.00 m pour la partie arrière et de 50 cm pour la partie avant.

Les caractéristiques mécaniques sont comme suit :

- Le module de Young : $E=32164$ MPa.
- Béton de classe C25 (une résistance caractéristique $f_{c28}=25$ MPa)
- Le poids volumique : $\rho=25$ KN/m³.
- Le coefficient de poisson : $\nu=0.2$.
- Le coefficient de frottement pris égal à 0.3.

Un premier calcul effectué sur ce maillage grossier donnera une erreur relative globale de 26.4% avec une erreur de maillage de 26.31% et une erreur de contact de 2.08%. La carte des contributions à l'erreur est représentée sur la figure 63.

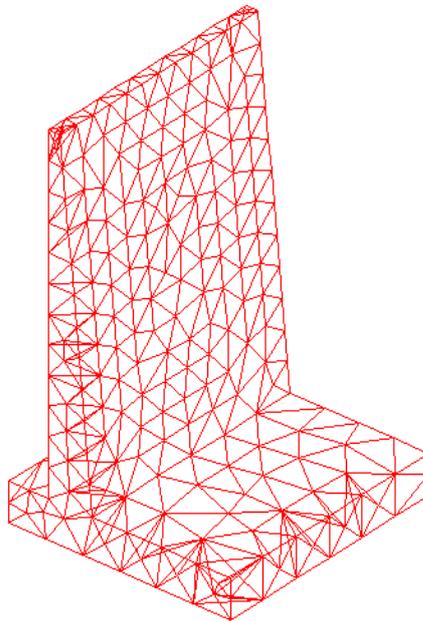


Figure 60: Maillage grossier composé de 1313 éléments et de 474 nœuds

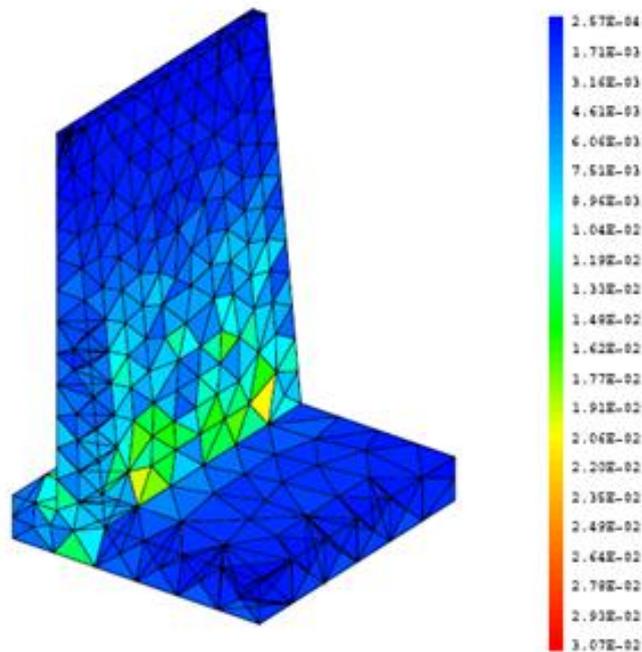


Figure 61 : Carte des contributions à une erreur globale de 26.4 %.

Nous pouvons remarquer que l'erreur de maillage obtenue avec le maillage grossier est très élevée. Cette erreur est due au fort gradient de contrainte qui existe dans la zone de la jonction rideau-semelle. Notre objectif lors de l'adaptation de ce maillage est de raffiner cette zone et pour cela nous allons prescrire une erreur de 15 %.

La configuration déformée du mur est représentée sur la figure 62. Pour sa part, la correction des densités de réactions en 3D peut être visualisée par les courbes représentées sur le graphe de la figure 63. En effet, on peut constater que, pour vérifier la loi de frottement de Coulomb, toutes les densités de réactions situées en dehors du cône de frottement ont été corrigées avec succès.

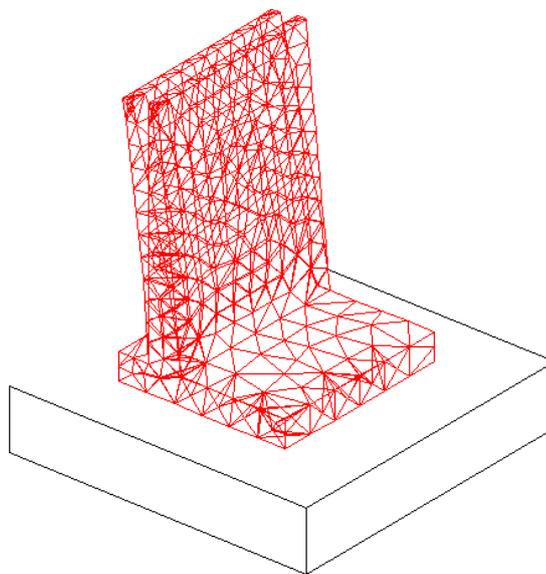


Figure 62: Configuration déformée du mur de soutènement

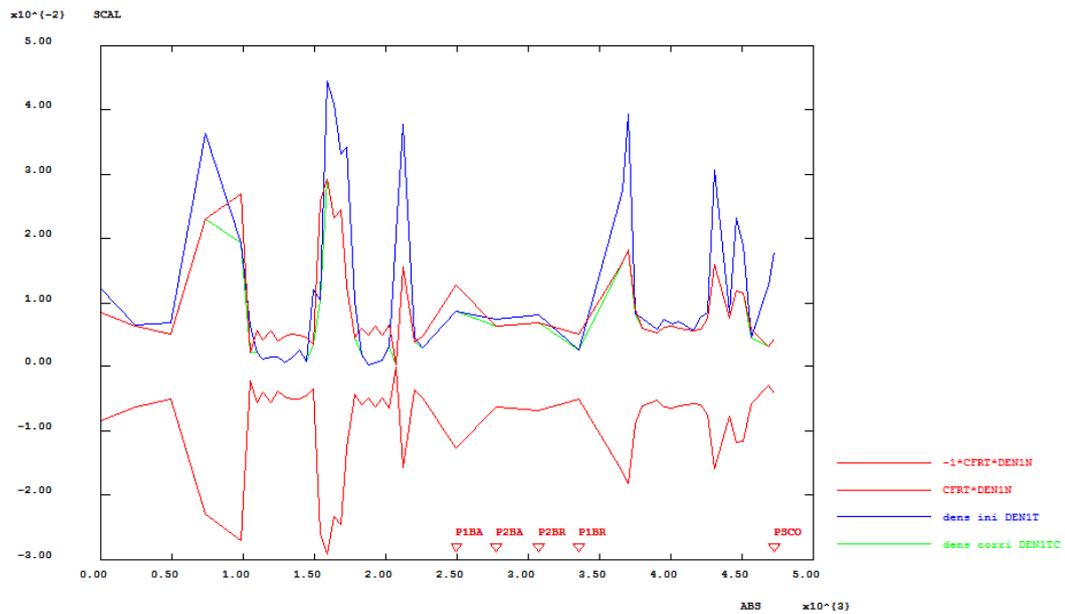


Figure 63: Correction des champs de densités de réactions sur la surface de contact.

En ce qui concerne l'adaptation de maillage, la carte des tailles est représentée sur la figure 64. Composé de 19944 éléments et de 4895 nœuds, le nouveau maillage obtenu (figure 67 a) offre, pour une erreur globale prescrite de 15%, une erreur relative globale de 15.44 % avec une erreur de maillage de 14.65% et une erreur de contact de 4.87 %. La carte des contributions à l'erreur étant représentée sous différents angles de vue, nous pouvons remarquer une plus grande contribution à l'erreur au niveau des zones de jonction mur semelle ainsi que dans la zone située au droit du mur, et en sous face de la semelle.

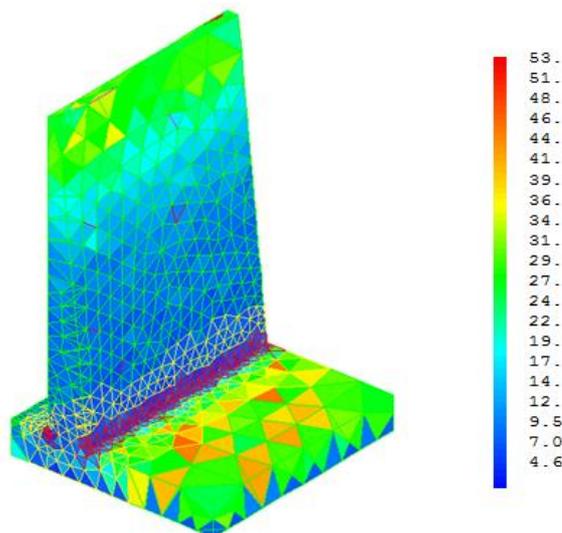


Figure 64: Carte des tailles à prescrire en vue de l'adaptation de maillage

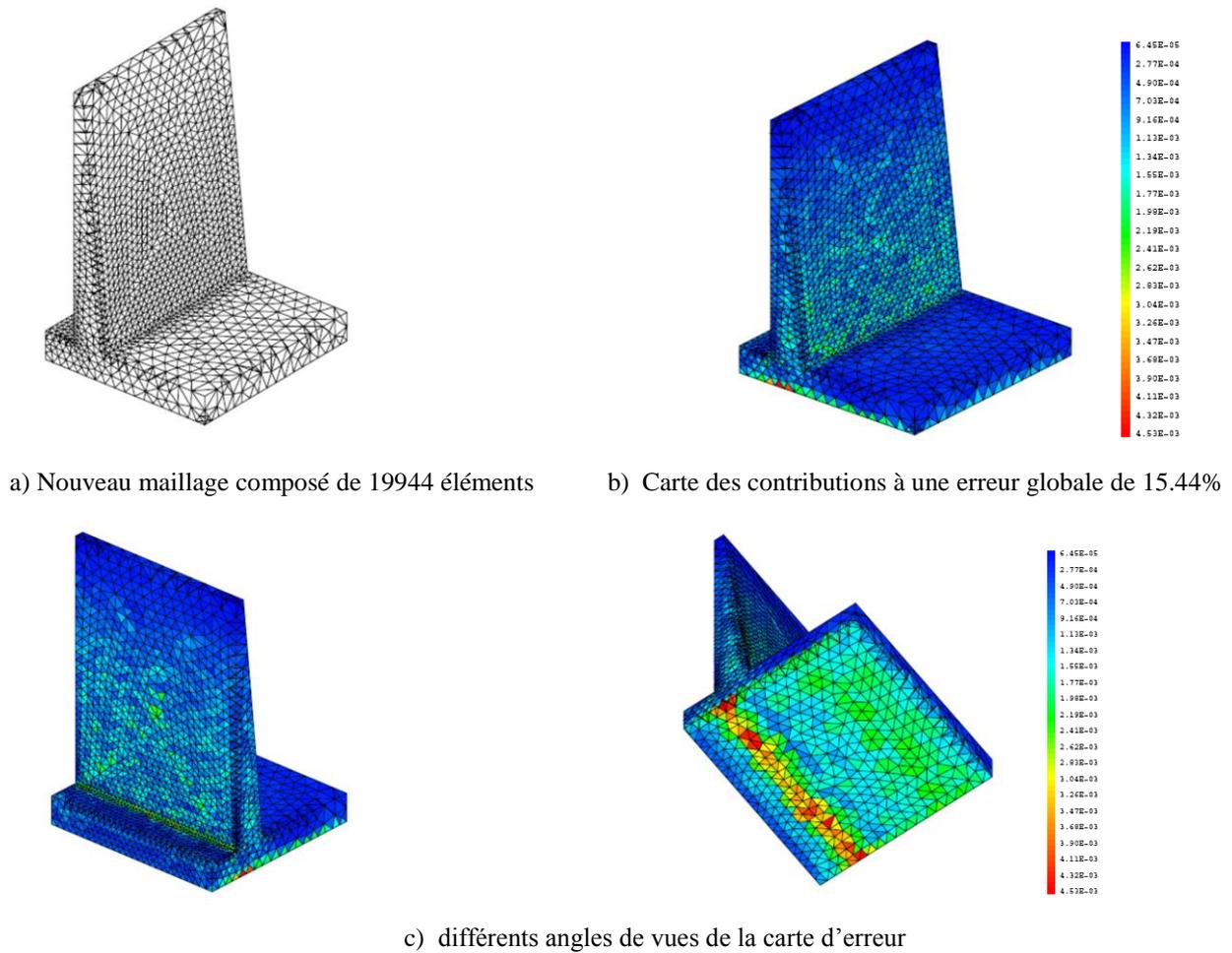


Figure 65: Nouveau maillage et cartes d'erreur pour éléments linéaires

En ce qui concerne les contraintes de Von Mises, celles-ci peuvent être visualisées sur les figures 68. et 69 correspondant aux cas avant et après remaillage et sous différents angles de vues. Nous pouvons également constater une meilleure représentation de ces champs de contraintes après adaptation de maillage

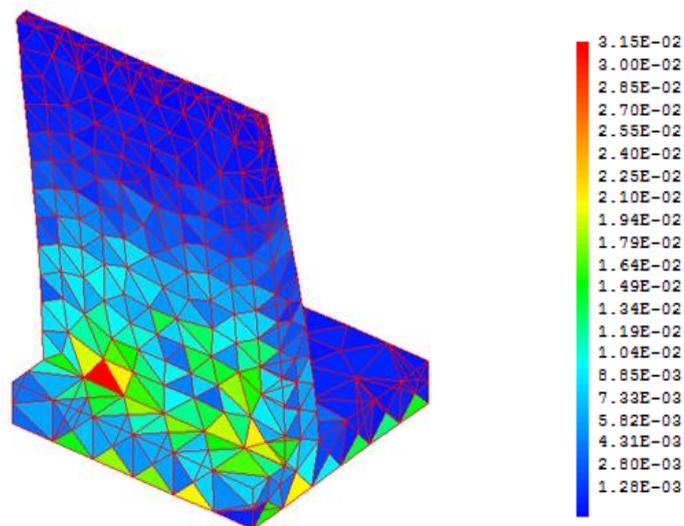


Figure 66: Champs de contraintes équivalentes de Von Mises avant remaillage.

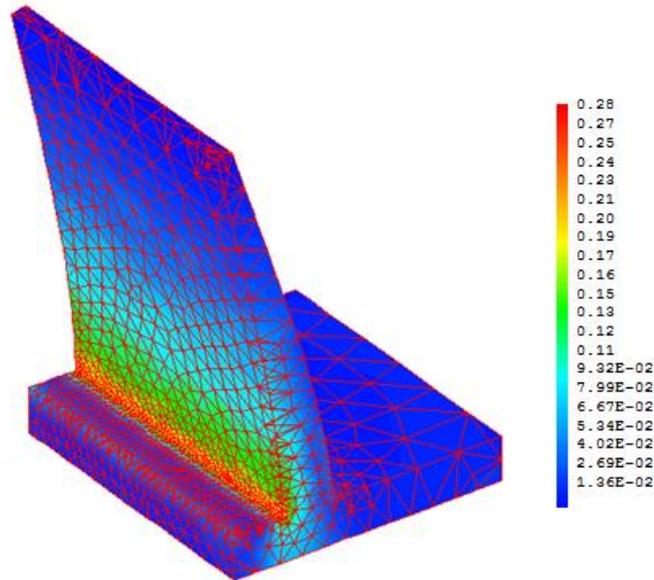


Figure 67 :Champs de contraintes équivalentes de Von Mises après remaillage.

Il a été également constaté que, lors de cette adaptation de maillage, l'erreur de contact a augmenté de 2.08% à 4.87%. Toutefois, l'analyse de la distribution des forces de frottements (qui peuvent être visualisées en sens, directions et intensités sous forme de vecteurs) sur le maillage de la surface de contact (figures 68 avant remaillage, et 69 après remaillage), permet de conclure sur une meilleure représentation des forces de frottement après adaptation de maillage et ce, malgré l'augmentation de cette erreur de contact. Ainsi, nous pouvons relever encore une fois que notre indicateur semble sous estimer l'erreur de contact dans le cas de maillages grossiers.

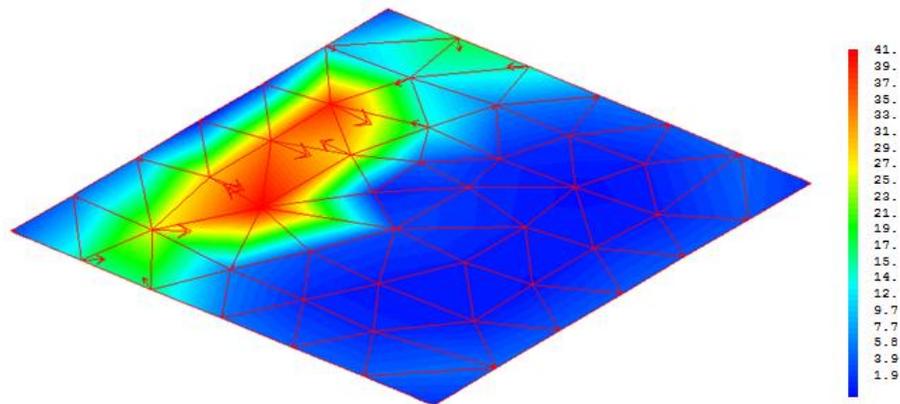


Figure 68: Champs des forces de frottement sur la surface de contact avant remaillage correspondant à une erreur de contact de 2.08 %

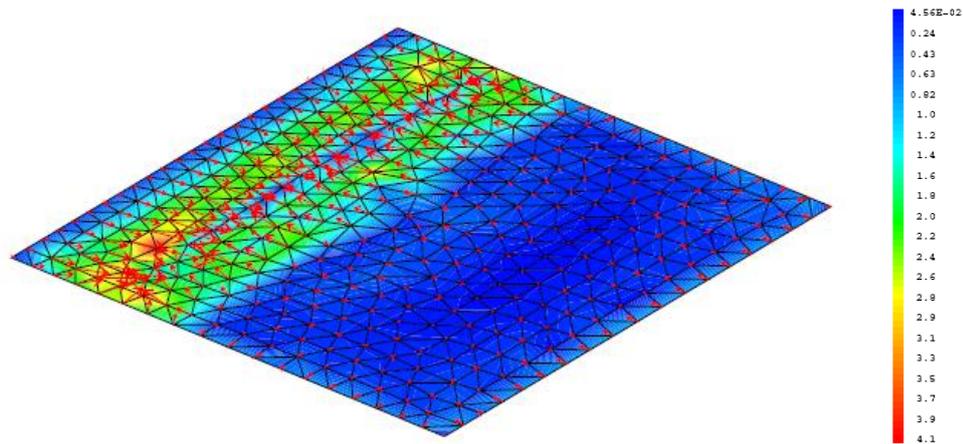


Figure 69: Champs des forces de frottement sur la surface de contact après remaillage correspondant à une erreur de contact de 4.87 %

VI. Discussion et conclusion

Ce chapitre a fait l'objet essentiellement d'une étude de l'influence de deux paramètres essentiels, à savoir :

- la régularité de la solution (champs de contraintes par exemple)
- la valeur du coefficient de frottement.

Concernant la régularité de la solution, quatre types de problèmes ont été étudiés. Ces problèmes se différencient par les intensités des gradients des champs de contraintes au niveau des surfaces de contact. Les résultats trouvés ont clairement montré la forte influence de ces gradients aussi bien sur les erreurs de contact que sur les erreurs de maillage et donc sur l'erreur globale. En effet, en présence de zones de contact à forts gradients, on constate, lors du raffinement du maillage, que les deux erreurs de contact et de maillage tendent vers des valeurs assez élevées. Ce qui donne lieu à une erreur globale également élevée. Par contre, en l'absence de zones à forts gradients, l'erreur de contact devient négligeable. Par conséquent, l'erreur globale devient quasiment identique à celle du maillage. Ce qui confirme les résultats théoriques (Renard, 2006) concernant l'unicité de la solution sous certaines conditions de régularité.

Pour l'influence du coefficient de frottement, il a été démontré une forte influence du coefficient de frottement l'erreur globale. Toutefois, cette influence reste conditionnée par la présence de zones à forts gradients. En effet, en cas de surfaces de contact sans zones à forts gradients, les courbes d'erreurs globales et de maillages demeurent confondues en raison des valeurs très faibles des erreurs de contact. Enfin, il y a lieu de signaler également l'influence du coefficient de frottement sur l'erreur de maillage uniquement en cas de forts gradients. Ceci peut être expliqué par l'augmentation des gradients des champs de contraintes causés par les frottements.

Enfin, en tenant compte des résultats précédents, quelques exemples tests d'adaptation de maillages ont été effectués.

Conclusion générale

A l'issue de ces travaux, nous pouvons conclure que l'approche adoptée pour la résolution des problèmes de contact tridimensionnels, a été utilisée avec un indicateur d'erreur basé sur l'association de deux méthodes d'estimation connues. La première concerne l'erreur obtenue par les techniques de projections dont les propriétés de super convergence sont utilisées pour le lissage des champs de contraintes dans les solides. La seconde concerne l'erreur portée par les relations constitutives établies au niveau des zones de contact.

Contrairement aux autres estimateurs qui, soit présentent de grandes difficultés de construction, soit des problèmes de choix arbitraires de coefficients, l'indicateur adopté, s'est avéré relativement moins difficile à mettre en œuvre et à implanter dans un code de calcul par éléments finis mais surtout, capable de dissocier entre l'erreur de discrétisation du maillage seul et l'erreur de contact. En effet, malgré sa haute performance et son indice d'efficacité élevé, la difficulté de construction des champs admissibles « a défavorisé » l'estimateur d'erreur en relation de comportement. En ce qui concerne l'estimateur basé sur les résidus d'équilibre, son principal inconvénient réside dans le choix arbitraire des coefficients à affecter aux différents termes de l'erreur.

Par ailleurs, en dépit de la forte non linéarité du contact avec frottements, cet indicateur a souvent été appliqué avec succès, au cas de la loi de Coulomb dont le problème de l'unicité de la solution demeure du point de vue mathématique non résolu à ce jour..

En ce qui concerne, le contrôle de l'erreur ou l'adaptation des maillages, il a été retenu que parmi les deux principales méthodes $-h$ et $-p$, la méthode $-h$ avec remaillage global semble être la moins difficile et donc la plus utilisée. Cela étant dit, pour les problèmes de contact, l'adaptation doit tenir compte des zones à forts gradients (ou de concentrations et contraintes).

L'objectif fixé par ce mémoire a porté sur l'étude de l'influence de certains paramètres jugés essentiels sur la convergence de l'erreur. En effet, il s'agit des paramètres suivants : le coefficient de frottement ainsi que la régularité ou non de la solution ainsi que l'intensité des gradients de ces solutions au niveau des zones de contact.

Concernant l'étude de l'influence du coefficient de frottement sur la qualité de la solution obtenue (ou bien sur la convergence), les résultats obtenus ont montré que pour de faibles valeurs de ce coefficient, les courbes de convergence obtenues présentaient des allures régulières et une convergence vers des erreurs dont les valeurs sont assez faibles, d'où une grande facilité d'obtenir des adaptations de maillages pour des erreurs prescrites assez faibles. Par contre, pour des valeurs de coefficients de frottement assez élevées, les courbes de convergences présentaient des allures certes régulières mais avec des convergences vers des valeurs d'erreurs assez élevées. Toutefois, cette influence reste conditionnée par la présence de zones à forts gradients. En effet, en cas de surfaces de contact sans zones à forts gradients, les courbes d'erreurs globales et de maillages demeurent confondues en raison des valeurs très faibles des erreurs de contact. Enfin, il y a lieu de signaler également l'influence du

coefficient de frottement sur l'erreur de maillage uniquement en cas de forts gradients. Ceci peut être expliqué par l'augmentation des gradients des champs de contraintes causés par les frottements

Le second paramètre traité, concernait l'effet des gradients de solution présents dans les zones de contact sur l'évolution de l'erreur de contact. A cet effet, les investigations ont porté sur quatre types de problèmes où les dimensions des corps en contact variaient de manière soit à faire augmenter, soit à faire diminuer ces gradients. Plus précisément, les applications adoptées allaient du cas extrême de solide de très faibles dimensions "poinçonnant" un autre solide de dimensions plus grandes, à l'autre cas extrême de solide appuyé sur un corps de mêmes dimensions. Cela étant dit, l'étude numérique de l'influence de ce paramètre, a donné des résultats qui ont clairement montré la forte influence de ces gradients aussi bien sur les erreurs de contact que sur les erreurs de maillage et donc sur l'erreur globale. Ce qui confirme les résultats théoriques (Renard, 2006) concernant l'unicité de la solution sous certaines conditions de régularité.

Par ailleurs, en vue de valider certains résultats obtenus lors de ces études de convergence, certaines applications du génie civil (traitant des problèmes de contact 3D avec frottements) avec estimation d'erreur et adaptation de maillages, ont été effectuées.

Enfin, les travaux en perspective consisteront en l'étude de l'influence du seuil d'adhérence (ou de glissement) qui est généralement choisi arbitrairement (entre 10^{-4} et 10^{-6} cm) utilisé pour statuer sur l'état des nœuds en contact (adhérents ou glissants). Ce qui constitue un inconvénient.. D'autres travaux concernant l'influence des techniques de résolution par éléments finis telle la méthode du Lagrangien augmenté pourront être d'un apport significatif vis-à-vis de l'amélioration de la qualité de la solution. Nous citerons également l'éventualité d'utiliser la méthode mixte de remaillage h-p qui utilise à la fois la modification des tailles des éléments ainsi que des degrés supérieurs des fonctions de forme ou d'interpolations au niveau des zones à forts gradients.

References bibliographies

AINSWORTH, ZHU, CRAIG & ZIENKIEWICZ, 1989, Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 28, 2161-2174.

AUBRY & TIE, (1991), A posteriori error analysis and h-adaptive refinement for the F.E.M. in non linear structural computations, *Proc. of the European conference on new advances in computational structural mechanics*, Ladevèze and Zienkiewicz Editors, Giens, France, 1-8.

BABUSKA I. & RHEINBOLDT, (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.12, pp. 1579-1615.

BABUSKA I. et SZABO B. (1982). On the rates of convergence of the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, pp. 323-341.

BABUSKA, (1986), Feedback, adaptivity and a-posteriori estimates in finite elements: aims, theory and experience, in *Accuracy estimates and adaptivity for finite element*, Babuska, Zienkiewicz, Gago and Oliveira Editors, J. Wiley, ch. 1, 3-23.

BECHEUR A, TAHAKOURT A, COOREVITS P, (2008). An a posterior error indicator for Coulomb's frictional contact. *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, Issue 8, pages 562-575.

BECKERS & ZHONG, 1991, Influence of element distortion on the reliability of some a-posteriori error estimators, *Proc. of the European conference on new advances in computational structural mechanics*, Ladevèze-Zienkiewicz Editors, Giens, France, 9-16.

BECKERS P. & DUFEU E. (1998). 3D error estimation and mesh adaptation using improved R.E.P. method. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, edited by P. Ladevèze & J.T. Oden.

BAUDRON & TROMPETTE, 1986, Un critère de jugement simple pour un maillage éléments finis, *J. de Mécanique théorique et appliquée*, vol. 5, n°5, 731-746.

CHAMORET D, 2002, Modélisation du contact : Nouvelles approches numériques. Thèse de doctorat. Ecole centrale de Lyon France

CIARLET, (1978) , *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland.

COOREVITS, LADEVEZE & PELLE, 1994, Mesh optimization for problems with steep gradient areas, *Engineering computations*, vol. 11, p 129-144.

COOREVITS, LADEVEZE & PELLE, 1995, An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 121, 91-120.

COOREVITS P., DUMEAU J.P. & PELLE J.P. (1996). Analyses éléments finis adaptatives pour les structures tridimensionnelles en élasticité. *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 5 - n°

Bibliographie

3/1996, pp. 341-373.

COOREVITS P, HILD P, ET J.P. PELLE; (1999) Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral.

Revue Européenne des éléments finis, vol 8: pp 7–29,.

COOREVITS P., HILD P., ET. PELLE J.P; (2000) A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non matching meshes. *Comp. Meth. in Appl. Mech. And Engrg.*, 186:65–83.

COOREVITS P., HILD P., HJIAJ M. (2001) A posteriori error control for finite element approximations of Coulomb frictional contact *SIAM J. Sci. Comput.* , Vol. 23, n°3, pp. 976-999

DESROCHES, X. (1994), Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D, Rapport interne EDF R4.10.01

DUMEAU, 1995, Contrôle et adaptation des maillages 3D : application à l'automatisation des calculs, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

DUFEU E. (1997). Calcul d'erreur et adaptation de maillages en 3 dimensions. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 166 pages.

DUVAUT G., LIONS J.-L., (1972) Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod.

EKELAND, I., TEMAM, R., 1976. *Convex Anal Variational Problems*; Amsterdam, North-Holland.

BABUSKA, I., RHEINBOLDT, W.C., 1978. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.* vol. 15, n°4, 736-754.

DE SAXCE, G., 1992. Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives, *Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris.*, vol 314 (série II) pp 125-129.

HASLINGER. J, JANOVSKY´ V., LIGURSKY T., 2010, Qualitative analysis of solutions to discrete static contact problems with Coulomb friction, *Comput.Methods Appl. Mech. Engrg.*, doi:10.1016/j.cma.2010.09.010

HILD, P. 2004. Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity, *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, 57, 225–235.

HINTON, E., CAMPBELL, J.S. 1974. Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 8, pp. 461-480.

JARUSEK, J., 1983. Contact Problems with Bounded Friction. *Czechoslovak. Math. J.* 33, 237–261.

Bibliographie

LADEVEZE, P., 1975. Comparaison de modèles de milieux continus, Ph.D. thesis, Paris VI, university.

LADEVEZE, P., COFFIGNAL, G., PELLE, J.P., 1986. Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis, in Accuracy estimates and adaptative refinements in Finite Element computations. Chapter 11, 181-203, Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz Editors, J. Wiley.

LOUF, F., COMBE, J.P., PELLE, J.P., 2003. Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction. Computers and Structures J. 81 , 1759-1772.

NECAS, J., JARUSEK, J., HASLINGER, J., 1980. On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, Boll. Un. Mat. Ital. B (5), 17,. 796–811.

RENARD, Y., .2006. A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction, SIAM J.Math. Anal., 38, 452–467.

RIEGER, A., WRIGGERS, P., 2001, Adaptive methods for frictionless contact problems. Comp and Struct. Vol 79, pp 2197-2208.

ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z., 1992. The Superconvergent Patch Recovery and adaptive finite element refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 101, Iss 1-3, 207-224.

ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. for Num. Meth. in Engng. 24, 337-357.