

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire

Présenté par Melle AINOUZ Basma

En vue de l'obtention du diplôme de Magistère en Physique

Option : Physique Théorique

Thème

Le transport anormal dans les systèmes hamiltoniens

Soutenu publiquement devant le jury suivant :

Présidente	Mme TAS Saadia	Professeur	U.A.M	Béjaia
Rapporteur	Mme OURRAD MEZIANI Ouerdia	M.C.A	U.A.M	Béjaia
Examineur	Mr AIT AMOKHTAR Hakim	M.C.A	U.A.M	Béjaia
Examineur	Mr ABBAS Karim	M.C.A.	U.A.M	Béjaia

Université A.MIRA de Béjaia, 2012

Table des matières

Introduction générale	1
1 La dynamique chaotique des systèmes Hamiltoniens	6
1.1 Introduction	6
1.2 Les systèmes dynamiques	6
1.3 Les systèmes Hamiltoniens	8
1.3.1 Les équations Hamiltoniennes	8
1.3.2 Système intégrable	10
1.3.3 Variables angle-action (action, angle)	11
1.4 La représentation du mouvement d'un système hamiltonien dans l'espace des phases	12
1.4.1 Espace des phases dynamiques	12
1.4.2 La représentation dans le diagramme de l'énergie potentielle	13
1.4.3 La section de Poincaré	17
1.5 Les points fixes et les stabilités	19
1.6 Les attracteurs	22
1.7 Exemple des systèmes hamiltoniens	24
1.7.1 Exemple d'un système dynamique linéaire : Bille au fond d'une vallée	24
1.7.2 Exemple d'un système dynamique non-linéaire : Bille dans un potentiel à deux puits	25
1.8 La dynamique des perturbations	27
1.8.1 Le théorème de Kalmogrov-Arnold-Moser (KAM)	28
1.9 La dynamique du chaos	30
1.9.1 La théorie du chaos	30
1.9.2 Définitions du chaos	31
1.9.3 Les exposants de Lyapunov	32
1.9.4 La diffusion est un phénomène du transport	33
1.10 Conclusion	34

2	Transport anormal dans les systèmes hamiltoniens	36
2.1	Introduction	36
2.2	Description du système étudié	36
2.3	La couche stochastique du pendule perturbé près d'une séparatrice	44
2.3.1	La séparatrice map	44
2.3.2	La couche stochastique	46
2.4	Les résonances non linéaires et la chaîne des îlots	49
2.5	Les zones singulières	52
2.5.1	Le temps de récurrence (Poincaré récurrence)	53
2.5.2	La distribution de récurrence	54
2.5.3	Domaines collants et échappements	55
2.6	Le transport normal (diffusion normale)	58
2.6.1	L'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) :	58
2.7	Le transport anormal (diffusion anormale)	64
2.7.1	Le modèle étudié par S. S. Abdullaev	65
3	Etude numérique	69
3.1	Introduction	69
3.2	Formulation du problème	69
3.2.1	Equations du mouvement d'un pendule perturbé	69
3.2.2	La résolution des équations du mouvement	70
3.2.3	Réalisation du programme du système étudié	72
3.3	Analyse des résultats et leur discussion	74
3.3.1	Le cas de déphasage	74
3.3.2	La structure du portrait de phase	76
3.3.3	Les distributions des vitesses dans l'espace des phases	79
3.4	Conclusion	84
	Conclusion Générale	85
A	Fonction elliptique de Jacobi	87

Introduction générale

En mécanique céleste, le mouvement des objets (astres, planètes, astéroïdes,...) peut être décrit de manière efficace à l'aide d'équations dites hamiltoniennes. Plus généralement, le formalisme lagrangien, dont découle le formalisme hamiltonien, fournit les équations régissant l'évolution de très nombreux systèmes physiques, dans des domaines très variés tels que la mécanique classique, l'électromagnétisme, la relativité générale ou encore la théorie quantique des champs. Un cas particulier très étudié depuis une quarantaine d'années, autant en physique qu'en mathématiques, est celui des systèmes chaotiques.

Il y a beaucoup d'intérêt en étudiant la théorie des systèmes hamiltoniens dans la perspective des systèmes généraux, afin de souligner les contrastes et similitudes. Le théorème de Liouville fournit un dispositif de distinction remarquable des systèmes hamiltoniens. La conservation du volume dans l'espace de phase empêche l'effondrement asymptotique du mouvement sur des équilibres, des orbites périodiques, ou des attracteurs étranges. Quoique les cascades de dédoublement de période se produisent dans les systèmes hamiltoniens, la perte de stabilité d'une orbite périodique est seulement une récurrence locale, plutôt que l'événement apocalyptique qui peut renverser un système dispersif entier. En revanche le mouvement produit par un système hamiltonien donné peut montrer des orbites chaotiques et régulières diverses entrelacées dans des structures riches.

L'espace des phases des systèmes hamiltoniens non-intégrables n'est ni entièrement régulier, ni entièrement chaotique. Les deux régimes dynamiques sont reliés par un système compliqué où les mouvements réguliers et irréguliers peuvent ou ne peuvent pas se mélanger, en fonction du nombre de degrés de liberté du système. La dynamique ordinaire se compose des orbites quasi-périodiques portées sur des tores et orbites périodiques, tandis que les orbites chaotiques remplissent les autres parties de l'espace [1]. En général, les nouvelles fonctionnalités telles que la dynamique des pièges [2] et la diffusion anormale [3] apparaissent dans les systèmes dynamiques non-intégrables à la suite de la combinaison non triviale de régularité et chaotité, ce qui les amène à présenter des propriétés statistiques inhabituelles pour les trajectoires dans la partie chaotique de l'espace des phases. Les Pièges dynamiques en

orbites chaotiques sont dû à l'adhésivité des trajectoires en certains domaines spécifiques dans l'espace des phases où une trajectoire peut passer d'une manière arbitraire un temps long mais fini. Un tel comportement pour les trajectoires peut être dû au piégeage des îlots hiérarchiques ou les pièges de la couche stochastique [2]. Dans de tels domaines de l'espace des phases, des parties de trajectoires sont presque régulières. L'espace des phases semble totalement chaotique il est possible de trouver un nombre infini de petits îlots où les trajectoires sont régulières [4].

Une importante situation physique, par exemple, non Gaussienne (anormale) de transport dans les fluides où des trajectoires de diffusion anormale dans les systèmes généraux, peuvent être liées à la présence de régions de rigidité dans l'espace de phase [5]. Ces sujets peuvent être utiles dans le calcul de la perte des particules provenant des plasmas et des accélérateurs, des taux de réactions chimiques, les taux de chauffage d'ondes dans les plasmas et dans d'autres domaines de la physique [6]. Par ailleurs, les trajectoires dans la mer chaotique n'entrent jamais dans l'îlot, ni des trajectoires régulières à l'intérieur d'un îlot peuvent atteindre la mer chaotique. Dans une première tentative, nous pouvons appliquer la propriété ergodique simplement pour la partie chaotique de l'espace des phases. Néanmoins, même dans cette situation, la présence de régions de piégeage dans l'espace des phases peut conduire, à des temps arbitrairement grands, pour une trajectoire de quitter une partie particulière de l'espace des phases. Dans ce cas, les propriétés ergodiques de l'espace des phases ont besoin d'un temps très long pour être vérifiée. Dans un article récent [7], il a été montré que la non-uniformité de l'espace des phases et la présence des îlots de mouvement régulier au sein de la mer stochastique a un impact considérable sur les propriétés du transport de certains systèmes.

La recherche sur certaines propriétés subtiles de chaos est liée au phénomène de la diffusion des particules. L'équation de diffusion peut être considérée comme un simple exemple des équations cinétiques, et leur apparition est liée aux noms de **M. Smoluchowski**, **A. Einstein**, **M. Planck**, et **A. Kolmogorov**. L'équation de diffusion d'une distribution de particules apparaît de manière naturelle comme une conséquence de la stochasticité correspondante. L'équation cinétique pour de vrais systèmes dynamiques apparaît comme un compromis entre deux types de descriptions alternatives : dynamiques et statistiques. Les équations cinétiques ne décrivent pas la dynamique complète, et certaines caractéristiques de la dynamique ne peuvent jamais être obtenues auprès de la cinétique. Dans le même temps, la cinétique est toujours composée de contraintes qui peuvent contredire la dynamique et peut exclure l'applicabilité du processus stochastique correspondant pour certains domaines de variables et de paramètres.

Le chaos dynamique apporte un domaine nouveau et immense de la recherche de description cinétique des objets physiques. L'application d'une notion de "hasard" pour les

trajectoires chaotiques des systèmes dynamiques, nous devons admettre que la description cinétique du chaos est au début de son développement. La dynamique chaotique possède un certain nombre de caractéristiques particulières qui nécessitent une nouvelle approche dans la cinétique, en plus des outils connus, des structures de l'espace des phases à fractale compliquée et multi-fractale sont ajusté.

La formulation stochastique des phénomènes de transport en termes d'un processus aléatoire, ainsi que la description par les équations de diffusion déterministes sont les deux concepts fondamentaux dans la théorie des deux diffusions normales et anormales. En effet, l'histoire de cette description dual basant sur le mouvement erratique et sur l'équation différentielle pour la fonction de densité de probabilité est assez intéressant et vaut bien une courte digression. Ainsi, les petits clignoté de particules de poussière de charbon sur la surface de l'alcool a été observée par **Jan Ingenhousz** dès en **1785**. En **1827**, le botaniste écossais **Robert Brown** [8] a observé le mouvement irrégulier de grain de pollen sous le microscope. En **1822**, **Joseph Fourier** est venu avec l'équation de conduction thermique, sur la base de laquelle **A. Fick** a mis en place l'équation de diffusion en **1855** [9]. Par la suite, les expériences détaillées de **Gouy** on approuvé l'explication donnée par la théorie cinétique **C. Wiener** en **1863**. Après des tentatives de trouver une base stochastique comme le modèle de collision par **von Nageli** et **John William Strutt**, Les résultats de **Lord Rayleigh**. C'est **Albert Einstein** qui, en **1905**, unifié les deux approches dans ses traités sur le mouvement brownien, un nom inventé par Einstein, bien qu'il avait pas eu accès à l'Œuvre originale de Brown. Notez qu'une description similaire de diffusion a été présentée par le mathématiciens français **Louis Bachelier** dans sa thèse de **1900** [10], en termes de valeurs au lieu de la physique des quantités [11,12]. Une application importante des résultats d'Einstein a été la mesure indépendante de nombre Avogadro par **Jean Baptiste Perrin**, **A. Westgren** et **Eugen Kappler** [13,14], avec une précision assez élevée. Quelques résultats de **Perrin** font partie du travail qui lui a valu le prix Nobel en **1926**. La marche aléatoire qui peut être observé expérimentalement, représente donc un lien entre la dynamique microscopique des petits atomes bombardant une plus grande particule en suspension, et observables macroscopiquement comme le coefficient de la diffusion, soit le nombre d'Avogadro. Einstein a également préparé le terrain pour le traitement de **Langevin** [15] des mouvement brownien avec l'hypothèse d'une force extérieure irrégulière, et **Fokker-Planck** [16], des théories qui ont culminé dans les traités d'**Ornstein** et **Uhlenbeck**, **Chandrasekhar** et autres, et plus tard dans les œuvres d'**Elliott Montroll**, et collaborateurs [17,18]. Le traitement mathématique du mouvement brownien est principalement dû à **Norbert Wiener** qui a prouvé que la trajectoire d'une particule brownienne qui est (presque) partout continue mais nulle part différentiable [19]. Cette observation est liée à la nature auto-affine de processus de la diffusion dont le résultat spatial de trajectoire est auto-semblable [20, 11, 21-22].

La diffusion anormale est connue depuis le traité de **Richardson** sur la diffusion tur-

bulente en **1926** [23]. La théorie du transport, a été étudié depuis les années **1960**. En particulier, une étude théorique a été initiée par **Scher** et **Montroll** dans leur description de la dispersion dans les semi-conducteurs amorphes, un système où les méthodes traditionnelles se sont révélées inadaptées. Les prédictions de leur approche du temps de marche aléatoire continue étaient très distinctes de leur homologues browniens et ont aussi fourni des explications pour une variété de phénomènes physiques dans de nombreuses réalisations expérimentales [24]. Des contributions importantes sont également dues à **Weiss** [25] et **Shlesinger** [26]. Outre la description de la marche aléatoire, les généralisations de l'équation de la diffusion ont été développées. Aujourd'hui, la liste des systèmes dynamiques de comportement anormal est assez vaste [27, 28, 29]. On cite le transport des porteurs de charge dans les semi-conducteurs amorphes [29,30, 31], les résonances magnétiques nucléaires(RMN), la diffusiométrie de percolation [32], la dynamique de répétition dans les systèmes polymères [33], le transport sur des géométries fractales [34], la diffusion d'un traceur scalaire dans un tableau de rouleaux de convection [35]. La superdiffusion où les Statistiques de Lévy sont observées dans les domaines particuliers du flux de rotation [36], diffusion collective sur des surfaces solides [37], à la diffusion turbulente de Richardson [23, 38], le transport dans les roches hétérogènes [39], dans l'optique quantique [43], le transport turbulent dans le plasma [44], le mouvement des bactéries [40 - 41] et même pour le vol d'un albatros [42].

La diffusion anormale en présence ou en absence d'une vitesse externe où le champ des forces a été modélisé de nombreuses façons, y compris (i) le mouvement brownien fractionnaire (Mandelbrot [45- 22]), (ii) Equations généralisées de diffusion [46], (iii) le temps aléatoire continu [24, 29, 47], (iv) des équations de Langevin [48], (v) équations généralisée de Langevin [49, 50], ou (vi) équations maîtresses généralisées [51]. Pour la diffusion anormale, seules les approches (iii) et (v) qui intègre la mémoire du système et la forme spéciale qui doit être prévu pour le PDF, de manière cohérente. Dans les œuvres originales [53], il s'est rendu compte que le remplacement de la dérivée temporelle locale de l'équation de diffusion par l'opérateur fractionnaire rend compte des effets mémoire qui sont liés à de nombreux systèmes complexes.

Récemment, une décennie après leur introduction, les équations de cinétique fractionnaire ont attiré beaucoup de scientifiques. Elles sont actuellement largement étudiées et reconnues comme des outils importants dans la description des processus de transport anormal en l'absence et présence de la vitesse externe ou du champ d'onde. Surtout dans le dernier cas, leur structure mathématique permet l'application des méthodes connues pour la recherche de la solution. Au cours de ce développement, un certain nombre de travaux a été fait avec des équations fractionnaires de relaxation et les modèles rhéologiques des fractions [53], l'équations de diffusion fractionnaire (FDES) [52], l'équations de diffusions fractionnaires d'advection (FDAEs) [93], et les équations fractionnaires de Fokker Planck (FFPEs) [55].

L'objectif de ce mémoire est de montrer le comportement du phénomène du transport anormal via une étude numérique qui consiste à faire une application sur le modèle de pendule perturbé. Ainsi, de voir l'impact du paramètre de perturbation ϵ sur la structure de portrait de phase de notre modèle, et comment ce paramètre agit sur le transport anormal. Ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Nous présenterons dans le premier chapitre les notions physiques essentielles pour la compréhension des systèmes hamiltoniens chaotiques. Nous définirons les notions et les moyens nécessaires pour comprendre l'aspect théorique du phénomène du chaos dans les systèmes hamiltoniens. En effet, nous donnerons les différents types de systèmes dynamiques après avoir défini un système dynamique. Ainsi, nous parlerons des systèmes hamiltoniens en tant que systèmes dynamiques, nous ferons des représentations de leurs diagrammes des énergies et l'espace des phases, avec un passage sur la stabilité et les différents types de points fixes. A la fin de ce chapitre, nous parlerons du chaos hamiltonien après avoir donné un aperçu historique sur le phénomène du chaos.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons le phénomène du transport anormal dans les systèmes hamiltoniens. Nous allons, d'abord, choisir le modèle d'un système dynamique chaotique qui est le pendule perturbé, nous ferons l'étude de son portrait de phase : la séparatrice qui est la première zone sensible à la force de la perturbation, les couches stochastiques, les îlots de stabilité, et les résonances non-linéaires. Nous verrons de quelle manière la présence des zones singulières participent dans la diffusion normale et anormale (le transport anormal).

Le troisième chapitre est l'essentiel de ce travail. Nous présenterons la résolution numérique des équations de notre problème, Cette résolution numérique nous permettra de voir la structure de portrait de phase de pendule perturbé et de détecter la présence du comportement régulier (îlots de stabilité) et chaotique en fonction du paramètre de perturbation ϵ , et comment cette structure nous permettra de comprendre l'effet du transport anormal avec l'utilisation des histogrammes. Nous ferons des commentaires et discussions sur les figures obtenues pour voir comment se manifeste la mixité du système (mètre chaotique et îlots de stabilité) dans le phénomène du transport anormal.

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale et présenterons quelques perspectives de ce travail.

Chapitre 1

La dynamique chaotique des systèmes Hamiltoniens

1.1 Introduction

Une large classe de phénomènes physiques peut être décrite par des équations hamiltoniennes. Cette catégorie comprend les particules, les champs, les objets classiques et quantiques, et elle constitue une partie importante de nos connaissances sur les bases de la dynamique dans la nature. La dynamique hamiltonienne est très différente, par exemple, de la dynamique dissipative, et son analyse utilise des outils spécifiques qui ne peuvent être appliquées dans d'autres cas. La découverte de la dynamique chaotique est le résultat de la découverte de nouvelles fonctionnalités dans la dynamique hamiltonienne et de nouveaux types de solutions des équations dynamiques.

Dans ce chapitre, nous ferons un rappel sur les systèmes dynamiques en général et les systèmes Hamiltoniens en particulier, en donnant quelques notions de base qui nous aideront à comprendre la suite de ce travail.

1.2 Les systèmes dynamiques

En physique théorique, en mathématiques et en ingénierie, un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

causale, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent ;
déterministe, c'est-à-dire qu'à une " condition initiale " donnée à l'instant " présent " va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état " futur " possible.

Un système dynamique est un système qui consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés. Aucun élément aléatoire n'est admis dans notre définition d'un système dynamique

déterministe. Par exemple, un modèle possible pour déterminer le prix de l'or en fonction du temps serait de dire que le prix du jour est celui de la veille plus ou moins un dollar, avec les deux possibilités équiprobables. Au lieu d'être appelé système dynamique, un tel modèle est souvent appelé un processus aléatoire ou stochastique. Une réalisation typique d'un tel modèle pourrait être de jouer à pile ou face chaque jour pour déterminer le nouveau prix. Ce type de modèle n'est pas déterministe, et est rejeté de notre définition de système dynamique.

On appelle système dynamique tout système qui évolue par l'intermédiaire d'(au moins) un paramètre réel (le temps par exemple), qui utilise des équations différentielles (ordinaires, aux dérivées partielles,...), des équations intégro-différentielles, des itérations ou un ensemble composite de tout cela et de façon générale qui soit décrit par une ou des "relations" entre un état du système et un (ou des) état(s) à une autre étape (ou instant). Donc pratiquement toute description d'un phénomène qui évolue est en soi un système dynamique.

Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération d'équations différentielles de la forme :

$$X_{k+1} = G(X_k; \mu) \quad (1.1)$$

où $k \in N$ représente le temps discrétisé, $X_k \in U \subset R^n$ sont les degrés de liberté du système, R^n est l'espace des phases, et $\mu \in \nu \subset R$ est un ensemble de paramètres.

Dans le cas continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, t; \mu) \\ X(0) &= \bar{X} \end{aligned} \quad (1.2)$$

où X :vecteur de variables, F : vecteur de fonction scalaire des variable X , μ : vecteur de paramètres, t : la variable libre du problème, \bar{X} : le vecteur de conditions initiales. Pour des conditions initiales données et des paramètres choisis le système évolue d'une façon déterministe sous la loi de l'équation différentielle F . D'après (1.2) n'importe quelle trajectoire du système sera dans l'espace des phase $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une courbe intégrale.

Le système autonome et non-autonome

Lorsque la variable t n'apparaît pas explicitement dans l'expression de F , le système est dit autonome. Dans ce cas la trajectoire $X(X_0, t)$ ne depend pas du temps initiale t_0 . Dans le cas contraire le système est non-autonome.

Les systèmes dynamiques se répartissent en deux classes.

Les systèmes Hamiltoniens ou conservatifs :

Les systèmes Hamiltoniens sont des systèmes qui évoluent sans perte d'énergie, les équations du système dérivent d'un Hamiltonien et les variables se regroupent par paires de variables conjuguées. Il existe alors au moins une intégrale première du système qui contraint les trajectoires de phase à rester sur des variétés de dimension inférieure à n . Une conséquence est la conservation du volume d'un élément d'espace des phases.

Les systèmes dissipatifs :

Les systèmes dissipatifs se caractérisent par le fait qu'un élément de volume dans l'espace de phase voit en moyenne son volume diminuer lorsque t augmente. Il se traduit par l'existence d'attracteurs, et par un "oubli" des conditions initiales. Physiquement, cette évolution est liée à la présence d'un terme de dissipation (perte d'énergie) dans les équations différentielles du système dissipatif.

1.3 Les systèmes Hamiltoniens

1.3.1 Les équations Hamiltoniennes

Soit un système physique quelconque. Il est toujours possible (du moins localement) d'écrire ses équations sous forme paramétrique, c'est-à-dire d'introduire un système de n coordonnées généralisées q_i qui permettent de situer exactement la position de chacune des particules. Dans ces coordonnées, il est possible de réécrire l'équation de Newton $F = ma$ sous forme de n équations dites équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i \in N \quad (1.3)$$

Où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. En outre, si les forces dérivent d'un potentiel, ces équations peuvent encore s'écrire

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.4)$$

où la fonction

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T - V \quad (1.5)$$

est appelé le Lagrangien du système. Cette fonction contient implicitement toutes les informations nécessaires à l'étude du mouvement du système.

Les équations Lagrangiennes se présentent comme des équations du second ordre en fonction des coordonnées généralisées. Il est souvent préférable d'écrire ces n équations du

deuxième ordre sous la forme de $2n$ équations du premier ordre. Pour ce faire, on définit les moments généralisés p_i par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i \in N \quad (1.6)$$

Dans le cas intéressant où les forces dérivent d'un potentiel, on peut définir une nouvelle fonction, la fonction Hamiltonienne

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (1.7)$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme très symétrique

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.8)$$

Ces équations sont appelées les équations hamiltoniennes du mouvement, ou les équations canoniques du mouvement.

Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme du croché de Poisson qui est une quantité dynamique importante définie par :

$$[p_i, H] = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.9)$$

en comparant avec les équations d'Hamilton on obtient :

$$\dot{q}_i = [q_i, H] \quad (1.10)$$

et :

$$\dot{p}_i = [p_i, H] \quad (1.11)$$

dans le cas générale , pour n'importe différentiable $A = A(q, p, t)$ nous avons

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H] \quad (1.12)$$

Exemple : L'oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit :

$$U(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Le Lagrangien donné par :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

son Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

et donc les équations canoniques sont :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{cases}$$

1.3.2 Système intégrable

Littéralement, les systèmes hamiltoniens intégrables sont ceux que l'on sait "intégrer", c'est-à-dire qu'ils possèdent "suffisamment" d'intégrales premières pour que l'on puisse déterminer "explicitement" leurs solutions. En mécanique hamiltonienne, un système intégrable au sens de Liouville est un système qui possède un nombre suffisant de constantes du mouvement indépendantes. Lorsque le mouvement est borné, la dynamique est alors périodique ou quasi-périodique. Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit intégrable .

Théorème de Arnold-Liouville :

À n degré de liberté un système est intégrable s'il possède les trois propriétés suivantes :

- il existe n intégrales premières I_i ;
- elles sont indépendantes ;
- elle sont en involution

La première propriété nécessite la recherche au préalable des n intégrales premières d'un système. il faut donc rechercher l'ensemble des propriétés d'invariance liées à l'espace-temps, utiliser les crochets de poisson et surtout se laisser guider par l'intuition physique ou mathématique. Si le système est fermé alors $H = I_1$ est un invariant, alors, I_i est une intégrale première si :

$$\{I_i, I_1\} = 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, n \quad (1.13)$$

on a donc $n-1$ relation vérifiées par I_1 .

La seconde propriété stipule l'indépendance des invariants : l'espace formé par l'intersection des surfaces $I_i = Cte$ doit être de dimension n . Chaque invariant doit apporter une information supplémentaire.

La troisième propriété est assez contraignante. les intégrales premières sont en involution si

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \text{pour } i, j \leq n \quad (1.14)$$

Les systèmes intégrables sont donc des systèmes particulièrement réguliers. De plus l'ensemble des systèmes dont nous savons "résoudre" les équations indépendantes est par définition un système intégrable. Autant dire qu'ils sont très importants pour notre approche des mouvements. Le théorème de Liouville affirme que le volume $d\Omega$ qui est défini par :

$$d\Omega = \prod_{i=1}^N dq_i dp_i \quad (1.15)$$

se conserve sous le flot hamiltonien v_H (donnée par $v_H^p := \dot{p}$, $v_H^q := \dot{q}$) pour n'importe quel hamiltonien $H(p, q)$. La démonstration de ce théorème repose sur le fait que la divergence de la vitesse v_H dans l'espace des phases est nulle :

$$\text{div} v_H = 0$$

La dérivée du volume $d\Omega$ le long du flot hamiltonien v_H est aussi nulle, donc Ω est conservé sous v_H .

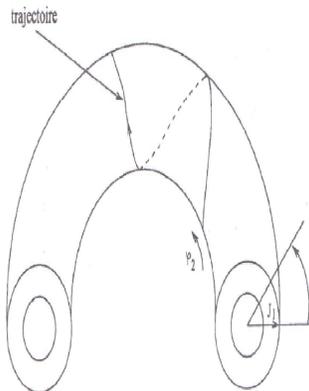


FIGURE 1.1 – Tore du système intégrable à deux degrés de liberté

1.3.3 Variables angle-action (action, angle)

Les variables angle (Θ) - action (I) sont des conjugués canoniques et adéquates pour l'utilisation dans les différents problèmes . il sont défini par la fonction génératrice :

$$S(q, I) - S(q, H(I)) = \int^q p(q, H) dq \quad (1.16)$$

de la façon suivant

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, H) dq = I(H) \\ \Theta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} \end{cases} \quad (1.17)$$

Les variables (I, Θ) satisfont les équations :

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial H(I)}{\partial \Theta} = 0 \\ \dot{\Theta} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \omega(I) \end{cases} \quad (1.18)$$

où ω est la fréquence de l'oscillations non-linéaire lorsque elle dépende de I . Les équations de Hamilton montrent que les actions sont des quantités conservées et que les angles évoluent linéairement en fonction du temps. l'équation (1, 16) peut être simplifié à :

$$\begin{cases} I = cst = I(E) \\ \Theta = \omega(t) + cst \end{cases} \quad (1.19)$$

et l'énergie :

$$E = H(I) = cst \quad (1.20)$$

1.4 La représentation du mouvement d'un système hamiltonien dans l'espace des phases

1.4.1 Espace des phases dynamiques

Pour décrire l'évolution dynamique d'un système physique il est souvent commode d'en faire une représentation graphique. un point $x(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ dans un espace à $2n$ dimension appelé **espace de phase** , ce dernier va nous permettre d'appréhender tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques , et d'en tirer des interprétation géométrique.

En mécanique, quand on a donné la position et l'impulsion initiale d'un objet et qu'on sait quelles sont les forces qui agissent sur lui, on connaît alors la trajectoire ultérieure de l'objet. On parle de déterminisme (en clair, on peut prédire la trajectoire). Cela induit une conséquence importante : imaginons qu'on trace la trajectoire d'un objet dans un plan un peu inhabituel (q, p) . Dans ce plan on a la propriété fondamentale que deux trajectoires ne peuvent pas se croiser. Pourquoi ? Parce que si deux trajectoires se croisent en un point (q_c, p_c) et qu'on prend ce point comme conditions initiales d'un mouvement, on ne sait pas laquelle des deux trajectoires l'objet prendra. Donc on ne saura pas, en donnant sa position et son impulsion initiale, quelle sera la trajectoire future de l'objet (donc pas de déterminisme).

Le plan (q, p) est donc idéal pour tracer les multiples trajectoires possibles d'un objet correspondant à différentes conditions initiales puisque ces trajectoires ne se croisent pas et donnent donc des figures "lisibles". On appelle un tel ensemble de trajectoires (orbites) tracées dans le plan (q, p) **un portrait de phase**. Les portraits de phase ressemblent beaucoup à la représentation des lignes de champs de vitesse . L'ensemble des trajectoires du système dynamique dans l'espace de phase est appelé flot.

Flot hamiltonien :

L'évolution dynamique du système selon les équations canoniques de Hamilton à partir d'une condition initiale $x_0 = (q_{i0}, p_{j0})$ engendre le flot hamiltonien, c'est-à-dire le groupe continu à un paramètre tel que :

$$x(t) = \Phi_t(x_0) \quad (1.21)$$

La succession des positions $x(t)$ dans l'espace des phases se traduit par une courbe continue, appelée orbite.

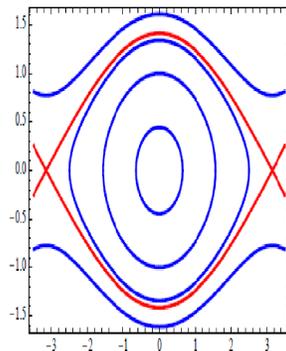


FIGURE 1.2 – Portrait de phase global pour le pendule pesant

1.4.2 La représentation dans le diagramme de l'énergie potentielle

Pour les systèmes physiques à des degrés de liberté plus bas, par exemple 1 degré de liberté, la connaissance des différentes valeurs de l'énergie potentielle en fonction de sa position, nous permet de comprendre le mouvement de ce système, sans avoir recours à résoudre

son équation du mouvement en considérant un système physique indépendant du temps ayant un degré de liberté. La conservation de l'énergie totale nous permet d'écrire :

$$E_T = cst = E_c + E_p \quad (1.22)$$

$$\implies E_c = E_T - E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (1.23)$$

En mécanique classique ; l'énergie cinétique est toujours positif c-à-dire : $E_T - E_p(x) \geq 0$ (il n'existe pas d'énergie cinétique négative). L'étude de mouvement du système dépend de son énergie totale .

1)– lorsque $E_T = E_0 < E_p(x) \implies E_c < 0$ comme on a dit précédemment dans ce domaine le mouvement n'est pas possible. C'est une zone interdite.

2)– pour $E_T = E_m$ ' la valeur de l'énergie minimale ' le système est en équilibre .comme c'est montré dans le graphe .

3)– à l'énergie $E_T = E_1$ le mouvement est limité à l'intervalle $[A, B]$ d'une façon oscillante entre ces deux points , puisque à l'extérieure de cet intervalle c-à-dire lorsque $x \in]0, A[$ et $x \in]B, +\infty[$ l'énergie E_1 et plus petite que $E_p(x)$ et le système n'est pas possible. Au point A et B qui s'appellent points de rebroussement, la vitesse est nulle et le mouvement du système change la direction.

4)– le système ayant l'énergie $E_T = E_2$, il y a deux régions où le mouvement du système oscille , c'est entre l'intervalle : $x \in [C, D]$ et l'intervalle : $x \in [F, G]$. Par contre, dans l'intervalle : $x \in]D, F[$ qu'on appelle une barrière de potentiel la zone est non permise.

5)– Lorsque $E_T = E_3$ le mouvement est entre l'intervalle $x \in [H, I]$ où le système peut-être sinusoidal.

6)– pour l'énergie totale $E_T \geq E_4$ le mouvement est limité de K jusqu'à l'infini et le système n'est pas oscillant .

À partir de l'étude du diagramme de l'énergie potentielle, nous pouvons prévoir le mouvement d'un système à 1 degré de liberté. Lorsque le système a un nombre de degré de liberté supérieure à 1 , il est difficile de visualiser le mouvement à partir du diagramme de l'énergie potentielle(ou les courbes de l'énergie potentielle),mais il existe un espace pour le voir : c'est l'espace des phases.

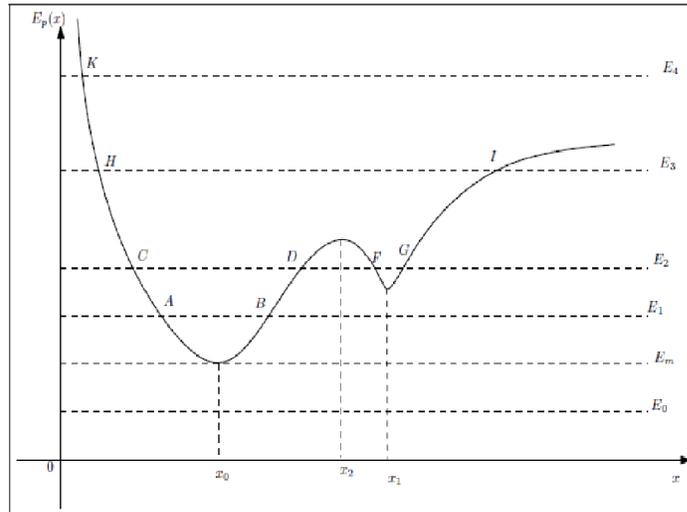


FIGURE 1.3 – Diagramme de l'énergie potentielle

1.4.2.1 L'espace des phases correspondant au diagramme d'énergie représenté :

Les systèmes physiques qu'on a représenté dans le diagramme de l'énergie peut être projeté sur un plan qui s'appelle plan des phases. Dans cette partie nous ferons une petite étude de l'espace des phases associé au diagramme de l'énergie potentielle qu'on a fait précédemment. Après la projection, on déduit que cette espace possède trois points x_0, x_1, x_2 qui portent plus d'information sur notre sujet et des orbites autour de chaque point.

A partir du premier point x_0 qui correspond à la valeur de l'énergie potentielle E_m et qui est entouré par des orbites fermés (des ellipses) le mouvement des systèmes oscille avec une énergie qui varie entre E_m et E_n .

Le deuxième point x_1 est équivalent au premier point mais il correspond à une énergie minimale E_s du système, le mouvement dans ce cas reste oscillatoire aussi mais dans l'intervalle de l'énergie potentielle E_s et E_n .

Le troisième point x_2 correspond à l'énergie potentielle E_n ce point est entouré par les hyperboles qui représentent le caractère non stable du mouvement et le système à partir de ce point aura un mouvement rotatoire.

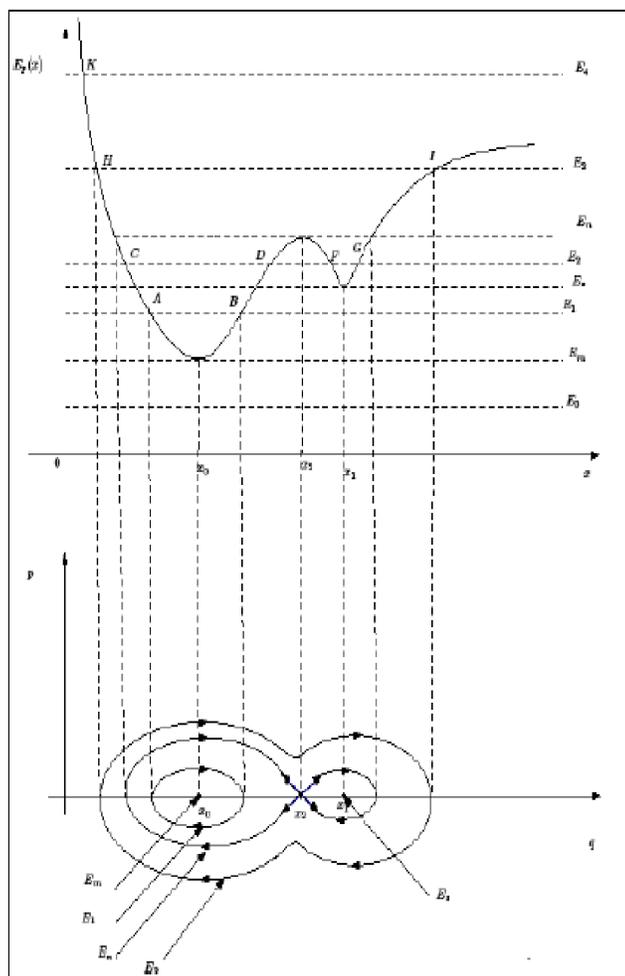


FIGURE 1.4 – L'espace des phases du diagramme de l'énergie potentielle.

1.4.3 La section de Poincaré

Lorsque le nombre de degrés de liberté du système est supérieure à un, l'espace des phases a au moins quatre dimension. La représentation graphique d'une trajectoire dans cet espace multidimensionnel est impossible, et nous aurons recours à une représentation fréquemment utilisée dans l'étude des systèmes dynamiques : la section du Poincaré qui est une coupe de la trajectoire dans l'espace des phase afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec un plan. On passe d'un système à temps continue à un système dynamique à temps discrète. On construit la section de poincaré en choisissant un plan de l'espace des phase et en y représentant par un point chaque intersection de la trajectoire avec ce plan dans un sens donné. La suite des points de la section de poincaré de la trajectoire formera une image qui nous renseignera sur la nature du mouvement. Cette méthode est illustrée sur la figure (1 ,5).

Le mouvement *a*) Étant quasi -périodique , apparaîtra comme une suite de points disséminés sur la surface de Poincaré, tandis que le mouvement périodique *b*) et *c*) apparaissent comme un nombre fini de points. Seuls les points entourés d'un petit cercle, qui corespondent à une intersection de la trajectoire avec x_3 sont représentés.

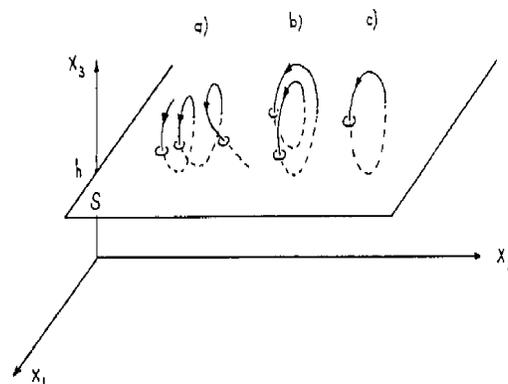


FIGURE 1.5 – Représentation d'une trajectoire d'un espace de phase de dimension 3 à l'aide d'une section de Poincaré : mouvement *a*) quasi-périodique, *b*) et *c*) périodique

1.4. La représentation du mouvement d'un système hamiltonien dans l'espace des phases¹⁸

Les orbites périodiques sont représentés par un ensemble fini de points. Les orbites chaotiques (quasi-périodique) sont représentés par un ensemble infini de points.

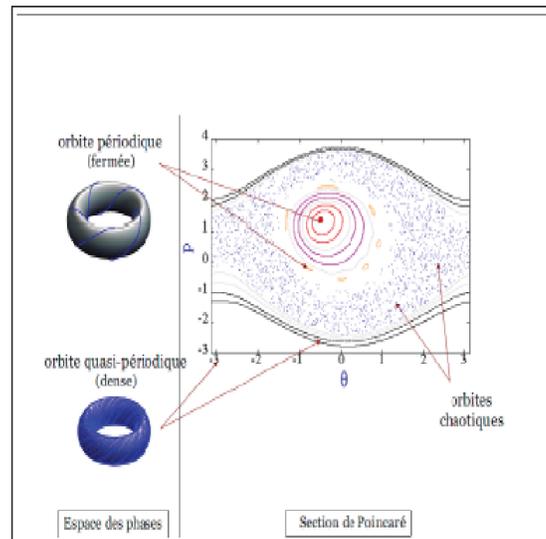


FIGURE 1.6 – L'espace de phases présenté par la section de Poincaré, présentant les différentes structures possibles

1.5 Les points fixes et les stabilités

Plus particulièrement, dans l'étude d'un système dans l'espace des phases, (ou dans la section du Poincaré), on a besoin de comprendre le comportement au voisinage d'un certain points, qui s'appellent points fixes (ou points d'équilibres).

1.5.0.1 Définition d'un point d'équilibre

un point d'équilibre (ou point fixe), noté x^* , est un point qui vérifie, en temps continu :

$$Ax^* = 0 \quad (1.24)$$

en temps discret :

$$Ax^* = x^* \quad (1.25)$$

un point d'équilibre est une singularité (point singulier) de l'espace des phases.

Pour les systèmes linéaires, lorsque A est non singulier ($\det(A) \neq 0$), on a $x^* = 0$; dans le cas contraire ($\det(A) = 0$), il y a une infinité du point d'équilibre.

Dans le cas des systèmes non linéaires, on peut avoir $x^* \neq 0$ et il peut avoir plusieurs point d'équilibre.

1.5.0.2 Nature et stabilité d'un point d'équilibre

Pour $n = 2$, il existe trois types de point d'équilibre *noeud*, *col* et *foyer*, suivant les valeurs propres de λ_1 et λ_2 du système (1.24) ($\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$). Sur les figures, données pour des système à temps continu, les flèches indiquent le sens croissant du temps et O indique le point d'équilibre.

Noeud :

Si les valeurs propres λ_i de A sont réelles et ont le même signe, le point d'équilibre est un noeud. Le noeud est stable : en temps continu, si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, (figure.1.7 (à gauche)), et en temps discret si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, ou $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Le noeud est instable : en temps continu, si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, (figure.1.7 (à droite)), et en temps discret si $1 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$.

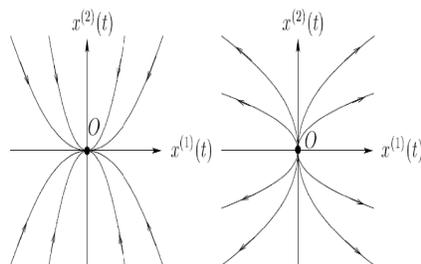


FIGURE 1.7 – point d'équilibre de type noeud

Col

Si les valeurs propres sont réelles et de signes opposés (temps continu) ou si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ (temps discret), le point d'équilibre est un col représenté sur la figure.1.8 :

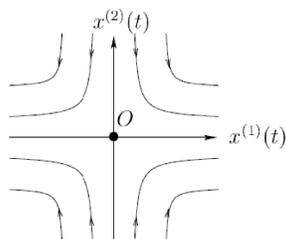


FIGURE 1.8 – point d'équilibre de type col

Foyer

Si les valeurs propres sont complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, le point d'équilibre est un foyer. Si $a < 0$ (temps continu), ou si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$ (temps discret) le foyer est stable (figure.1.9 (a)). Si $a > 0$ (temps continu), ou si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$ (temps discret) le foyer est instable (figure.1.9 (b)). Si $\lambda_{1,2} = \pm ib$ ($a = 0$), le point d'équilibre est un foyer de type centre (figure.1.9 (c)), mais, en pratique, a n'est jamais strictement nul. Le seul régime permanent issu d'une condition initiale, est le point d'équilibre stable.

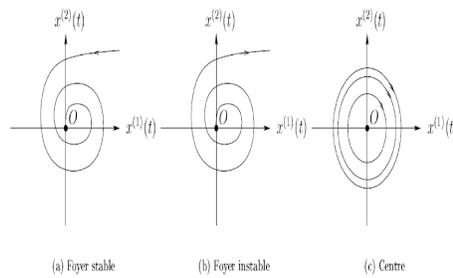


FIGURE 1.9 – point d'équilibre de type foyer

1.5.0.3 Stabilité des systèmes dynamiques

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibres. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Pour un tel champ, la stabilité de point d'équilibre consiste seulement à savoir si un point critique de fonction est un minimum local ou non.

la stabilité aux sens de lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialiser au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche, c'est -à-dire, si tous les points d'un système démarrent autour d'un point x et que tous ces points restent autour de ce point x , alors x est stable au sens de Lyapunov. De plus, si tous ces points convergent vers x alors x est asymptotiquement stable. (voir plus dans la section. 1.9.3)

1.6 Les attracteurs

Définition :

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers laquelle évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : est l'attracteur le plus simple.
- **Un cycle limite** : On appelle cycle limite sur un plan ou une variété bidimensionnelle, toute trajectoire fermée Γ dans l'espace des phases tel que : si a n'appartient pas à Γ , alors Γ est un ensemble α - limite de a .
- **Un tore** : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant n fréquences de base indépendantes.

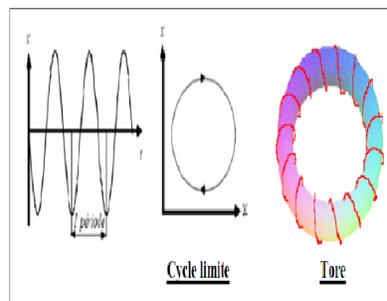


FIGURE 1.10 – Attracteurs réguliers

2. Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique),
2. La dimension d de l'attracteur est fractale avec $2 < d < n$ (ce qui justifie l'adjectif étrange),
3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

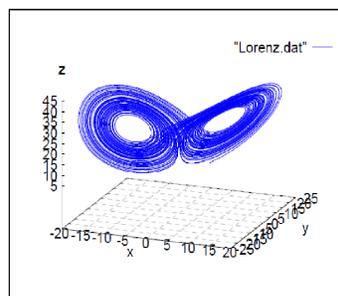


FIGURE 1.11 – Attracteur étrange de Lorenz

1.7 Exemple des systèmes hamiltoniens

1.7.1 Exemple d'un système dynamique linéaire : Bille au fond d'une vallée

Considérons le cas d'une particule matérielle au fond d'une vallée parabolique. Ce système possède deux degrés de liberté associés à la position q et l'impulsion p . Il s'agit de l'oscillateur harmonique, régi par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

où les équations de mouvement

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{p}{m} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -kq \quad (1.27)$$

Le point fixe est l'origine ($q = 0, p = 0$). Sa stabilité est obtenue en cherchant les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$

et avec les vecteurs propres $\vec{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{k/m} \end{pmatrix}$ Une trajectoire correspond à une solution de la forme :

$$\vec{v} = \vec{v}_+ \exp(i\sqrt{k/m}t + \phi) + \vec{v}_- \exp(-i\sqrt{k/m}t + \phi) \quad (1.29)$$

L'espace des phases est représenté sur la figure.1.12. Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement de la bille est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude (le "rayon" de l'ellipse) et donnée par les valeurs propres $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, le point fixe est appelé foyer ou centre.

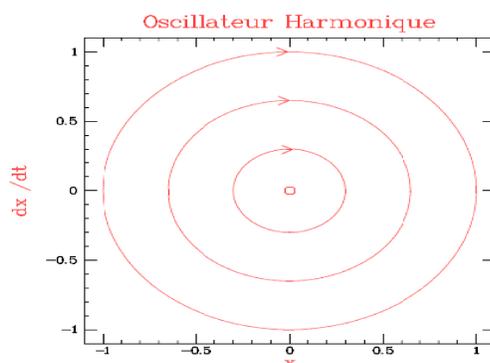


FIGURE 1.12 – Trajectoires dans l’espace des phases d’une bille au fond d’une vallée ou d’un oscillateur harmonique. Ces trajectoires sont décrites dans le sens des aiguilles d’une montre. Le point invariant est un centre.

1.7.2 Exemple d’un système dynamique non-linéaire : Bille dans un potentiel à deux puits

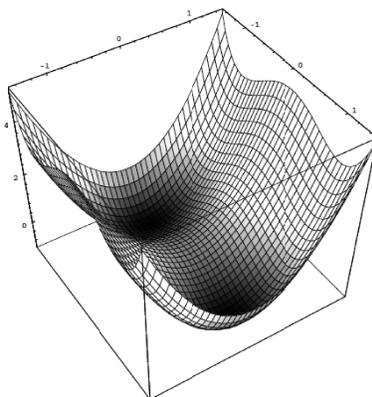


FIGURE 1.13 – Représentation de la surface d’énergie totale en fonction de la position et de la vitesse de la bille dans un potentiel à deux puits

Un système est non-linéaire dès que les équations qui le gouvernent ne sont plus des fonctions linéaires de \vec{X} . C’est le cas, par exemple, si la force qui agit sur une bille est du type : $\partial p/\partial t = q - q^3$. Cette situation correspond à une bille placée dans un potentiel à deux puits, situés en $q = \pm 1$. Le système possède toujours deux degrés de liberté et est décrit par :

$$H = \frac{p^2}{2m} - 2q^2 + q^4$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{p}{m} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = q - q^3 \end{cases} \quad (1.30)$$

Les solutions de l'équation (1.30) sont beaucoup moins faciles à déterminer que celles d'un système linéaire. Nous verrons par la suite qu'il est même parfois impossible de trouver les solutions de certains systèmes non-linéaires. A ce stade, nous ferons une analyse qualitative des trajectoires dans l'espace des phases. Pour ce faire nous commençons par en déterminer les points fixes, qui sont au nombre de trois :

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Autour de chacun d'eux, nous pouvons maintenant linéariser les équations (1.30). Autour de l'origine, nous retrouvons les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{p}{m} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = q \end{cases}$$

et donc prédire que ce point fixe est un point col.

Pour les deux points fixes restants : A_{-1} et A_1 nous constatons que la linéarisation conduit à un système d'équations du type

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{p}{m} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -q \end{cases}$$

Ces points fixes sont donc des centres et les trajectoires voisines sont des ellipses. Pour obtenir les trajectoires du système dans tout l'espace des phases, on est tenté de prolonger à la main le motif formé par le point col entouré de deux centres.

En fait, il existe une façon rigoureuse de procéder. Nous avons vu que les systèmes hamiltoniens conservent l'énergie au cours du temps. Construisons donc un graphique à trois dimensions dont deux sont celles de l'espace des phases et la troisième l'énergie totale du système. Ainsi, nous obtenons une surface S avec un point col à l'origine séparant deux bassins autour des autres points fixes. Puisque l'énergie est invariante, une trajectoire du mouvement correspond à une coupe de la surface S selon une énergie constante. Les trajectoires du système sont équivalentes aux courbes de niveau de la surface S , reproduites sur

la figure.1.14.

La méthode que nous venons de décrire est tout à fait générale. Elle ne dépend pas du potentiel non-linéaire et elle peut s'appliquer à tous les systèmes hamiltoniens ayant deux degrés de liberté. Dans la mesure où la surface S ne présente pas de pathologie particulière, nous obtiendrons soit des trajectoires fermées, soit des trajectoires qui partent à l'infini. Par contre, cette méthode ne nous permet pas de déterminer les dynamiques de parcours de ces trajectoires. S'il est clair que les trajectoires fermées correspondent à des mouvements périodiques, il n'est pas possible d'en déterminer la fréquence avec le seul raisonnement que nous venons de faire. Près des points fixes de type centre, la fréquence sera celle des oscillations harmoniques. Nous nous attendons à un allongement de la période en nous approchons du point col, puisque celle-ci diverge lorsque la trajectoire l'atteint.

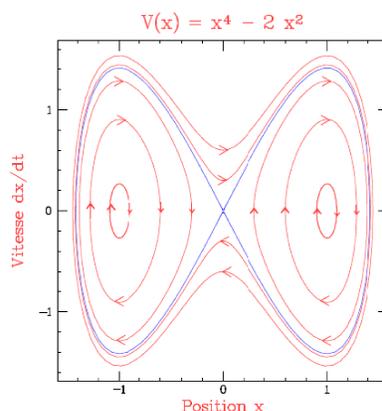


FIGURE 1.14 – Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille dans un potentiel à deux puits. Ces trajectoires correspondent aussi aux lignes de niveau de la surface décrite sur la figure.1.13.

1.8 La dynamique des perturbations

1. On s'intéresse désormais aux systèmes hamiltoniens presque-intégrables, c'est à dire aux perturbations des systèmes hamiltoniens intégrables. Ils sont définis par des hamiltoniens de la forme

$$\begin{cases} H(\theta, I) = h(I) + f(\theta, I) \\ |f|_D < \epsilon \ll 1 \end{cases} \quad (1.31)$$

où $|\cdot|_D$ désigne une norme dans un espace de fonctions définies sur le domaine D .

2. Comme on l'a vu précédemment, la dynamique du système non perturbé (intégrable)

est triviale, le problème fondamental (de la dynamique, selon Poincaré) est donc le suivant.

Problème 1. *Comparer les solutions du système perturbé (1.31) à celles du système intégrable.*

On peut poser des questions plus précises. D'une part, les solutions des systèmes intégrables sont toutes quasi-périodiques.

Problème 2. *Étudier l'existence de solutions quasi-périodiques dans le système perturbé (1.31).*

D'un autre point de vue, les variables d'action $I(t)$ des systèmes intégrables sont constantes pour tout temps.

Problème 3. *Étudier l'évolution des variables d'action $I(t)$ solutions du système (1.31).* Ce dernier problème est motivé par des questions de mécanique céleste, en particulier par le problème planétaire. Ici on considère un problème à $1 + N$ corps, typiquement le Soleil et des planètes du système solaire, de positions q_0, q_1, \dots, q_N et de masses m_0, m_1, \dots, m_N . On suppose que la masse du premier corps est beaucoup plus grande que la masse des autres corps, et on note :

$$\epsilon = \max_{1 < i < N} \left\{ \frac{m_i}{m_0} \right\}$$

Dans le cas du système solaire, ϵ est de l'ordre de 10^{-3} . En première approximation, on peut donc négliger l'interaction des planètes entre elles pour ne considérer que l'attraction du corps massif. Cela revient à prendre $\epsilon = 0$ et le système se découple alors en un produit de N problèmes de Kepler que l'on sait intégrer. En particulier, les orbites planétaires sont des ellipses, et le hamiltonien écrit en coordonnées action-angle ne dépend que des demi-grands axes. Lorsqu'on restaure l'interaction des planètes, le système planétaire devient une perturbation, de taille environ 10^{-3} , d'un système intégrable et étudier la stabilité des variables d'action revient à étudier la "déformation" éventuelle des trajectoires elliptiques.

Dans la section suivante on exposera le théorème fondamentale qui donne des éléments de réponses aux questions précédentes, c'est le théorème des tores invariants (théorème KAM).

1.8.1 Le théorème de Kalmogrov-Arnold-Moser (KAM)

Le théorème KAM "Ce nom est dû aux inventeurs de cette théorie : Kolmogorov, Arnold et Moser (d'où l'acronyme KAM)" classique traite de l'existence et de la stabilité des déplacements, des mouvements, dans des systèmes Hamiltoniens dits quasi intégrables (faibles perturbations des systèmes intégrables). Cette théorie est plus qu'une collection de théorèmes spécifiques. Elle est plutôt un ensemble d'idées pour approcher divers problèmes de la théorie des perturbations. On considère les systèmes hamiltoniens presque intégrables à n degrés de liberté dont le Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H_\epsilon(I, \Theta) = h(I) + \epsilon f(I, \Theta) \tag{1.32}$$

où $0 < \epsilon \ll 1$.

Lorsque $\epsilon = 0$, les variétés d'énergie constante de h sont feuilletées en tores invariants de dimension n . Par conséquent, les variables d'action sont constantes sur un temps infini.

Lorsque $\epsilon \neq 0$, sous une hypothèse de non dégénérescence d'hamiltonien non perturbé h , le théorème **K.A.M** assure que les tores diophantiens de dimension n invariants pour le système non perturbé persistent en subissant une légère déformation. Par conséquent, les variables d'actions restent proches de leurs conditions initiales sur un temps infini.

Dans le complémentaire des tores de **K.A.M**, deux situations sont envisageables. Si $n \leq 2$, le complémentaire des tores de **K.A.M** est non connexe donc les variables d'action restent confinées entre deux tores de **K.A.M** successifs. Si $n > 2$, le réseau résonnant est dense et connexe dans une variété d'énergie donnée. On en déduit qu'une dérivée des variables d'action à travers l'espace des phases est possible .

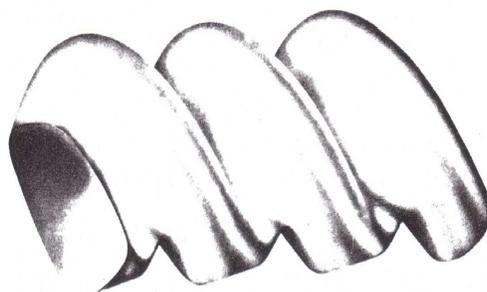


FIGURE 1.15 – Déformation du tore

1.9 La dynamique du chaos

On présente succinctement ce qu'est un problème chaotique et ce qu'on pourrait vouloir obtenir comme résultats. Cette partie du chapitre n'a pour but que d'introduire la théorie du chaos, ou théorie de la complexité. Les systèmes dynamiques sont classés en quatre catégories : les systèmes linéaires, non linéaires, chaotiques et bruités. Cette classification permet donc de différencier les systèmes non aléatoires, que l'on classera dans l'une des trois premières catégories, des autres systèmes, dont on ne sait pas pour l'instant dire s'ils sont aléatoires ou non. La dernière catégorie apparaît alors comme une étape transitoire, où les systèmes " attendent " que l'on dispose d'un outil permettant de les classer dans une des trois premières catégories. En effet, lorsque l'étude d'un système n'arrive pas à mettre en évidence sa structure interne, cela ne veut pas forcément dire que ce système est aléatoire. Il se peut en fait que les outils utilisés pour l'étudier n'aient pas été adaptés, et que quelques années plus tard, des outils plus puissants permettent par exemple de le classer dans la catégorie des systèmes chaotiques.

La notion de chaos recouvre les idées d'imprédictibilité, de forte divergence suite à des erreurs de mesure, de multiplicité des comportements observés. Le mot chaos a été introduit dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques discrets par Li et Yorke en 1975 et est souvent utilisé pour les systèmes dynamiques, mais il n'existe pas de définition précise unique.

1.9.1 La théorie du chaos

En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés **systèmes chaotiques**. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Cependant, les travaux de certains scientifiques menés bien avant cette découverte vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique. En effet, vers la fin du XIXe siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. On trouve dans le calcul des Probabilités de Henri Poincaré l'affirmation suivante : «Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons

que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit».

Cette citation définit parfaitement le chaos en tant que sensibilité aux conditions initiales mais aussi le déterminisme qui réside dans le fait que si une condition initiale est parfaitement déterminée alors l'évolution du système l'est aussi. Le déterminisme traduit l'unicité de la solution pour l'équation différentielle d'un système donné, c'est le théorème de Cauchy.

Toujours au XIXe siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos. Les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est l'ordinateur. En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

1.9.2 Définitions du chaos

Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y a aucune définition standard du chaos. Néanmoins, les dispositifs typiques du chaos incluent :

- **-La non-linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- **- Le déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- **-La sensibilité aux conditions initiales** : De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- **-L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **-L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques "ordre dans le désordre" plus simplement.

Dans la section suivante nous prendrons un cas d'un système dynamique chaotique qui est sensible aux conditions initiales qui sont **les exposants de Lyapunov**.

1.9.3 Les exposants de Lyapunov

Un système chaotique est caractérisé par une sensibilité aux conditions initiales. Cela revient à dire que si l'on prend deux points, aussi proches que possible, séparés par un ϵ non nul, leurs trajectoires s'écartent exponentiellement et cela pour un nombre de points et d'itérations finis. Autrement dit, dans un tel système tout espoir de prévisions est vain sauf si l'on veut faire des prévisions à très court terme. L'un des outils les plus efficaces pour déterminer si l'on se trouve en présence de chroniques chaotiques est l'exposant caractéristique de Lyapunov. L'exposant caractéristique de Lyapunov mesure la vitesse de divergence d'un système. Après une période de durée n , l'écart initial entre deux points séparés d'un ϵ devient $\epsilon e^{n\lambda}$, où λ est l'exposant caractéristique de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov mesure le taux de séparation des trajectoires dans le temps dans un espace représentant les points et leurs déplacements. La figure 1 permet d'illustrer cette définition au moyen d'une dynamique imagée. On peut par ailleurs reprendre la métaphore du pétrissage d'une pâte à pizza de Cottrell (1993) qui définit ainsi intuitivement ce qu'est l'exposant de Lyapunov : « Prenez deux fèves d'origan (ou d'une autre épice que vous aimez) et placez les côte à côte sur une pâte crue aplatie. Puis, pétrissez et pliez la pâte pour réaliser une pizza. Si le mélange est chaotique, alors les deux points [fèves] s'éloignent exponentiellement ».

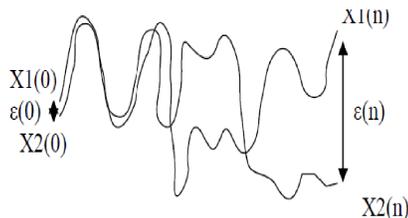


FIGURE 1.16 – Exemple sans modèle

A présent, il convient de présenter le calcul de l'exposant de Lyapunov $\lambda(X_0)$ qui mesure les écarts de trajectoires. Si l'on considère deux points voisins X_0 et $X_0 + \epsilon$, après qu'une période se soit passée l'écart devient :

$$D1 = |f(X_0) - f(X_0 + \epsilon)| \quad (1.33)$$

et le rapport de cette distance à la distance initiale est $D1/\epsilon$. Après deux périodes, nous avons un nouvel écart :

$$D2 = |f[f(X_0)] - f[f(X_0 + \epsilon)]| \quad (1.34)$$

et donc le rapport de cette distance à la distance initiale devient alors $D2/\epsilon = D2/D1.D1/\epsilon$. Après n périodes, nous avons donc une nouvelle distance :

$$Dn = |f^n(X_0) - f^n(X_0 + \epsilon)| \quad (1.35)$$

et un nouveau rapport à cette distance initiale :

$$Dn/\epsilon = Dn/Dn - 1.Dn - 1/Dn - 2.....D2/D1.D1/\epsilon \quad (1.36)$$

Le dernier rapport permet d'exprimer le facteur (λ) avec lequel s'est amplifié l'écart initial ϵ . Il suffit donc de calculer ce produit (*) donnant le comportement d'un écart initial. Comme le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes nous avons :

$$e^{n\lambda} = |Dn/\epsilon| \iff n.\lambda = \ln|Dn/\epsilon| \iff \lambda = 1/n.\Sigma \ln|Di/Di - 1| \quad (1.37)$$

On interprétera alors l'exposant de Lyapunov de la façon suivante :

-Lorsque $\lambda < 0$, le système attire vers un point fixe stable, ou vers une orbite, un attracteur périodique stable. Une valeur négative de l'exposant signifie que l'on se trouve en présence d'un système dit dissipatif ou non-conservatif. Plus l'exposant est négatif, plus le système est dit à grande stabilité. Un processus stochastique évolue autour de sa moyenne, il sera donc stable puisque les trajectoires évoluent toujours à proximité l'une de l'autre autour de la moyenne du processus stochastique. Dans ce cadre, des prévisions probabilistes sont possibles.

-Lorsque $\lambda = 0$, un système avec un tel exposant est conservatif. On dit que le système montre une « stabilité au sens de Lyapunov ».

-Lorsque $\lambda > 0$, dans ce cas l'orbite est instable et chaotique. Des points, au départ très proches, divergent lors de l'évolution dans le temps du modèle, vers des valeurs « arbitraires ». La représentation graphique d'un tel cas de figure est semblable à un nuage de points sans aucune trajectoire distincte (Vialar, 2005). Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif alors toute volonté de prévision au-delà du très court terme semble illusoire puisqu'il y a une sensibilité aux conditions initiales. Les évolutions futures sont incertaines à long terme et non estimables par un calcul probabiliste. Il semblerait alors que l'exposant de Lyapunov pourrait nous fournir, dans ce cadre précis, une délimitation entre le risque et l'incertitude.

Avant de voir dans le deuxième chapitre le transport anormal (ou la diffusion anormale) il faut de comprendre, **c'est quoi la diffusion ?**

1.9.4 La diffusion est un phénomène du transport

Le phénomène de diffusion est un phénomène très général dans la nature, qui correspond à la tendance à l'étalement d'espèces, particules, atomes ou molécules grâce à une excitation

énergétique apportée par la chaleur. Suivant le milieu dans lequel se déplacent ces espèces, l'étalement sera plus ou moins grand. A température ambiante le phénomène de diffusion sera très important dans un milieu gazeux, plus faible dans un milieu liquide et pratiquement nul dans un milieu solide. Pour obtenir un phénomène de diffusion dans un solide ou un cristal, il faudra chauffer le matériau à des températures voisines de 1000°C.

Exemple de diffusion dans un milieu gazeu

Quand on débouche un flacon de parfum dans une pièce, on dit que l'odeur se répand dans la pièce. Que se passe-t-il en réalité? Le phénomène est essentiellement de nature microscopique :

Les molécules gazeuses "responsables de l'odeur", c'est à dire perçues par nos récepteurs chimiques olfactifs, sont "émises" au niveau de l'embouchure du flacon et, au hasard des chocs intermoléculaires avec celles de l'air, sont transportées de proche en proche dans toute la pièce.

Au niveau macroscopique, le phénomène de diffusion comporte donc nécessairement la notion d'un transport d'une grandeur extensive, ici les molécules "odorantes" au sein d'un milieu diffusant, ici l'air de la pièce. De même on assiste à des transferts thermiques des endroits "chauds" vers des endroits "froids". La encore, il s'agit d'un phénomène microscopique avec transport d'énergie d'agitation thermique au hasard de chocs.

En résumé, dans un phénomène de diffusion, on assiste, au sein d'un milieu diffusant, au transport d'une grandeur extensive : particules N pour la diffusion du même nom, transferts thermiques Q pour la diffusion thermique.

Exemple de diffusion dans un milieu liquide

Une goutte de colorant agitée dans un verre d'eau illustre la diffusion chaotique des particules dans tout le volume disponible. Ce phénomène est aussi observé dans les accélérateurs de particules ou dans les plasmas de tokamak. Cependant il est possible de contrôler ce chaos en construisant des barrières de transport qui agissent comme des murs immatériels empêchant ou canalisant la diffusion des particules. Ce contrôle est réalisé par une action extérieure associée à un faible coût énergétique.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons essayer de comprendre la dynamique des systèmes hamiltoniens chaotiques.

Premièrement : nous avons défini le système dynamique puis les différents types.

Deuxièmement : nous avons pris un type de système dynamique qui est le système hamiltonien nous avons donné sa définition et ses propriétés. Pour bien comprendre les systèmes dynamiques hamiltoniens, nous avons représenté son mouvement dans le diagramme de l'énergie potentielle, dans l'espace des phases, et nous avons exposé la section de Poincaré, et les points fixes.

Troisièmement : nous avons réalisé une petite perturbation du système hamiltonien et nous avons remarqué comment les tores du système se déforment par la théorie K.A.M.

Ensuite, nous avons fait une petite histoire et définition sur le chaos. Ainsi nous avons parlé des exposants de Lyapunov qui donne la structure du système dans l'espace des phases. À la fin, nous avons fait un petit passage sur le phénomène de la diffusion.

Chapitre 2

Transport anormal dans les systèmes hamiltoniens

2.1 Introduction

Nous étudierons ici le phénomène du transport anormal dans les systèmes hamiltoniens. Avant d'entamer l'étude, nous choisirons un modèle d'un système dynamique chaotique qui est le pendule perturbé, nous ferons une petite étude sur la structure de son portrait de phase et nous verrons comment induit la présence des zones singulières de la structure de portrait de phase dans la diffusion anormale (le transport anormal).

2.2 Description du système étudié

Le pendule perturbé (perturbed Pendulum) :

Le pendule perturbé est un modèle typique de l'équation de mouvement continu où l'on peut toujours introduire une map, qui décrit également l'évolution d'une particule chargée évoluant dans le potentiel créé par deux ondes " électrostatiques " dans le référentiel lié à l'une d'elle [57 -58]. L'hamiltonien du modèle s'écrit [59]

$$H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x + \epsilon\omega_0^2 \cos(kx - \nu t) \quad (2.1)$$

où ω_0 est la fréquence des petites oscillations du pendule non perturbé avec l'hamiltonien

$$H_0 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x \quad (2.2)$$

ϵ est le petit paramètre de perturbation adimensionnel et ν la fréquence de la perturbation.

Les équations du mouvement de pendule perturbé sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega_0^2 \sin x + \epsilon \omega_0^2 k \sin(kx - \nu t) \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \end{cases} \quad (2.3)$$

La section de Poincaré peut être considérée comme un ensemble de points de la trajectoire (x, p)



FIGURE 2.1 – deux différents Section de Poincaré du l’hamiltonien (2.1) pour les paramètres suivants $\omega_0 = k = 1$, (à gauche) : $\epsilon = 0.9, \nu = 5.4$ et (à droite) : $\epsilon = 1, \nu = 2.07$

Le domaine du chaos, appelé *la couche stochastique* , et un nombre d’îles infini. Toute la visualisation de trajectoire pour le modèle (2.1) peut être obtenue en traçant la map correspondante de Poincaré, c.-à-d, les points de trajectoires tracé chaque instant $t_n = nT = \frac{2\pi n}{\nu}$ (n est un entier).

Dans l’équations (2.3), il y a deux paramètres sans dimensions qui commandent la topologie de l’espace de phases (ϵ, ν) . Deux exemples dans la figue 2.1 montrent des structures très différentes des prétendues couches stochastiques, ovales le long des zones de x de la dynamique chaotique. Le transport des particules le long de x est différent et dépend de la topologie, c.-à-d, le transport est sensible aux paramètres (ϵ, ν) . En particulier, quelques régions foncées indiquent des zones où une trajectoire peut passer un temps plus long que dans d’autres zones.

La coexistence des régions de la dynamique stable et des régions du chaos dans l’espace de phases, appartient aux découvertes les plus merveilleuses et les plus saisissantes. Il nous permet d’analyser le début du chaos et l’aspect du région minimale de chaos. Bien que beaucoup de questions dans ce domaine reste toujours posées, néanmoins, il est évident que l’apparition du chaos soit une stochastique qui se forme à proximité des séparatrices détruits. La couche stochastique a été la première fois décrite dans une étude sur la stabilité et la séparation

des surfaces magnétiques, diverses évaluations de sa largeur étant obtenue plus tard dans [2].

Cas du pendule non perturbé

Comme nous avons vu précédemment l'hamiltonien du pendule non perturbé est

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q \quad (2.4)$$

avec l'équation du mouvement

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0 \quad (2.5)$$

Le système(2.4) décrit le mouvement d'une particule de masse unité dans le potentiel

$$U(q) = -\omega_0^2 \cos q$$

comme indiqué dans la Fig.2.2 a.

Les points fixes de système dans l'espace des phases (q, p) défini comme

$$\dot{q} = p = 0$$

$$\dot{p} = \omega_0^2 \sin q = 0$$

sont $p = 0, q = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

En particulier, les points $(p_e = 0, q_e = 2k\pi)$, où le potentiel $U(q)$ a minima locaux $U_{\min} = -\omega_0^2$ sont appelés des points fixes elliptiques, depuis les orbites près d'eux sont décrits par les courbes elliptiques fermées

$$p^2 + \omega_0^2(q - q_e)^2 = cst$$

D'autre part, les points $(p_h = 0, q_h = (2k + 1)\pi)$, où $U(q)$ a maxima locaux $U_{\max} = +\omega_0^2$ sont appelés points fixes hyperboliques. Les orbites sont à proximité de ces points décrit par des courbes hyperboliques

$$p^2 - \omega_0^2(q - q_h)^2 = cst$$

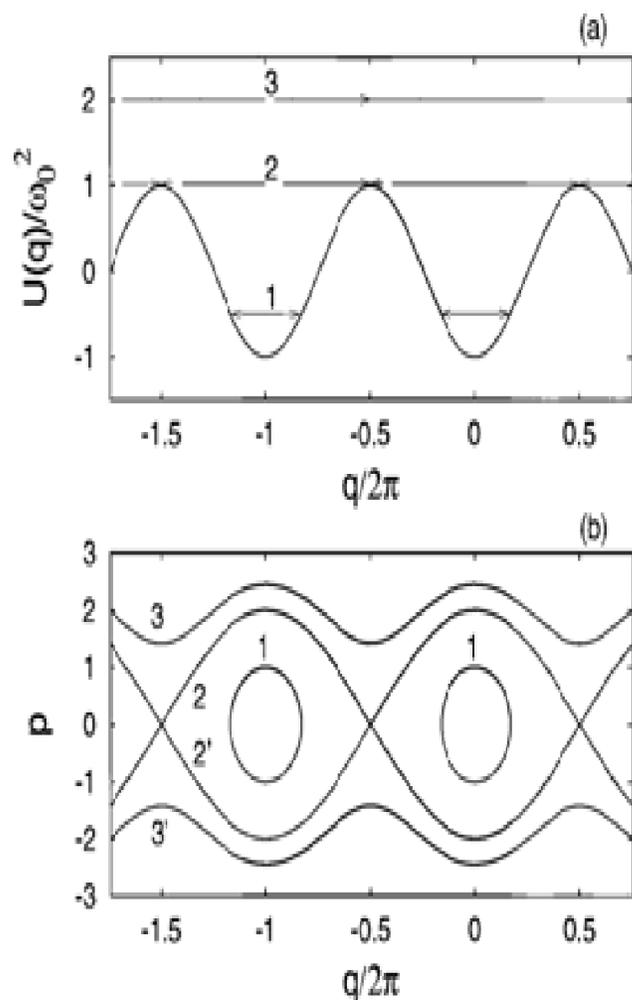


FIGURE 2.2 – (a) le profil du potentiel $U_q/\omega_0^2 = -\cos q$. (b) l'espace des phases des orbites de pendule : les courbes 1 correspondent aux mouvements oscillatoires $-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$. Les courbes 2 et 2' sont les séparatrices où $H = \omega_0^2$. Les courbes 3 et 3' correspondent au mouvement de rotation $H > \omega_0^2$

Trois orbites possibles du système dans le plan de phases (q, p) sont représentées dans la Fig.2.2 b.

Pour les valeurs $-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$, le mouvement du pendule est oscillatoire, et est décrit par une courbe fermée qui correspond aux orbites 1.

Pour $H > \omega_0^2$, le mouvement est décrit par les courbes sans limites 3 et 3'. Ils correspondent aux mouvements de rotation du pendule.

Les courbes 2 et 2' séparent les deux types de mouvement, de rotation et d'oscillation, dans le plan de phase (q, p) . Ces courbes reliant les points fixes hyperboliques sont connus comme séparatrices. Sur la séparatrice, nous avons $H = \omega_0^2$.

Pour $-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$

Considérons d'abord le mouvement oscillatoire du pendule, quand $-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$. La variable d'action I pour ce mouvement est déterminée par l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_c p(q, H) dq = \frac{2}{\pi} \int_0^{q_m} \sqrt{2(H + \omega_0^2 \cos q)} dq \quad (2.6)$$

où q_m est un point de retour du mouvement déterminé par la condition $p(q_m, H) = 0$. L'intégration dans (2.6) donne la relation entre I et H :

$$I(H) = \frac{8}{\pi} [E(k) - (1 - k^2)K(k)] \quad (2.7)$$

où $K(k)$ et $E(k)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième type, respectivement, avec un module de

$$k = \sqrt{(H + \omega_0^2)/(2\omega_0^2)}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.8)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2.9)$$

La fréquence du mouvement $\omega(H)$ est donnée par

$$\omega(H) = \frac{dH(I)}{dI} = \frac{\pi\omega_0}{2K(k)} \quad (2.10)$$

Sa dépendance à H dans l'intervalle $-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$ est montrée dans la Fig. 2.3. Les oscillations de faible amplitude à proximité du point $q = 0$, c'est à dire, pour $|H + \omega_0^2| \ll \omega_0^2$ (ou $k \rightarrow 0$), il tend à la fréquence des oscillations ω_0 , près des points fixes elliptiques.

$$\omega(H) = \omega_0 \left(1 - \frac{k^2}{4} + O(k^4)\right) \quad (2.11)$$

Le comportement asymptotique de $\omega(H)$ près de la séparatrice lorsque $H \rightarrow \omega_0^2$ ($k \rightarrow 1$) a la forme suivante :

$$\omega(H) = \frac{\pi\omega_0}{\ln(32/|h|)} + O(|h|), \quad h \rightarrow -0 \quad (2.12)$$

où $h = (H - \omega_0^2)/\omega_0^2$ est l'énergie normalisée par rapport à $H_s = \omega_0^2$ sur la séparatrice.

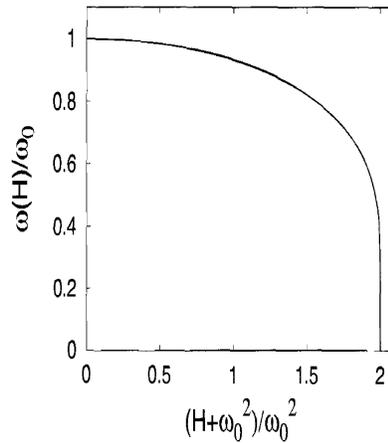


FIGURE 2.3 – la fréquence d’oscillation $\omega(H)$ par rapport à l’énergie H ($-\omega_0^2 \leq H \leq \omega_0^2$)

La trajectoire est déterminée par la relation entre l’ancien coordonnée (q, p) et la variable d’angle ϑ

$$\begin{cases} \sin(q/2) = k \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0 \vartheta}{\omega(H)}; k\right) \\ p = 2k\omega_0 \operatorname{cn}\left(\frac{\omega_0 \vartheta}{\omega(H)}; k\right) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\operatorname{sn}(x; k)$ et $\operatorname{cn}(x; k)$ sont les fonctions elliptiques de Jacobi avec le module k .

Les coordonnées q et p sont 2π – fonction périodique de la variable angle ϑ , et les relations (2.13) peuvent être présentées comme la série de Fourier :

$$\begin{cases} \sin(q/2) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin(2m - 1)\vartheta \\ p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \cos(2m - 1)\vartheta \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\begin{cases} q_m = \frac{2\pi}{K(k)} \frac{q^{m-1/2}}{1-q^{2m-1}} \\ p_m = \frac{4\pi\omega_0}{K(k)} \frac{q^{m-1/2}}{1+q^{2m-1}} \end{cases} \quad (2.15)$$

et

$$q = \exp(-\pi K(\sqrt{1-k^2})/K(k))$$

Pour l’oscillation de faible amplitude, $H \rightarrow -\omega_0^2$, ($k \rightarrow 0$) lorsque les harmoniques $m = 1$ donne la contribution principale en (2.14) et la trajectoire est semblable à celle des oscillations.

Quand une particule se rapproche de la séparatrice, c’est à dire, $h \rightarrow 0$, la q_m, p_m du

spectre, de la série de Fourier (2.14) devient plus large et se comportent comme

$$\begin{cases} q_m = m^{-1}(1 - \pi^2/\ln(32/|h|))^{m-1/2} \\ p_m = (1 - \pi^2/\ln(32/|h|))^{m-1/2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Cela signifie que dans la limite de $|h| \rightarrow 0$, les variables $q(\vartheta)$ et $p(\vartheta)$ deviennent des fonctions discontinues de la variable angle ϑ .

Lorsque $H > \omega_0^2$

Cela correspond au régime de rotation du pendule (voir les courbes 3 et 3' dans la Fig. 2.2. Le mouvement n'est pas confiné le long de la coordonnée q . Les variables action-angle (I, ϑ) peuvent être introduites en utilisant les conditions aux limites périodiques aux valeurs q et $q + 2\pi$.

$$\begin{cases} \vartheta = \frac{\partial}{\partial I} \int^q p(q', H) dq' = \frac{\omega(H)}{\omega_0 k} F\left(\frac{q}{2}, \frac{1}{k}\right) \\ I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(q, H) dq = \frac{4\omega_0 k}{\pi} E\left(\frac{1}{k}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\omega(H) = dH(I)/dI$ est la fréquence du mouvement.

$$\omega(H) = \frac{\pi\omega_0 k}{K(1/k)}$$

La trajectoire est décrite par

$$\begin{cases} \sin(q/2) = sn\left(\frac{\omega_0 k}{\omega(H)} \vartheta\right) \\ p = \frac{2}{K} \sqrt{1 - \frac{1}{K^2} sn^2\left(\frac{\omega_0 k}{\omega(H)} \vartheta\right)}. \end{cases} \quad (2.18)$$

L'asymptotique des fréquences $\omega(H)$ quand une orbite approche de la séparatrice, $H \rightarrow \omega_0^2 + 0$, est déterminée par

$$\omega(H) = \frac{2\pi\omega_0}{\ln(32/h)} + O(|h|), \quad h \rightarrow +0 \quad (2.19)$$

qui est deux fois plus grande que l'asymptotique (2.12).

La dépendance temporelle de l'impulsion $p(t)$ pour trois types d'orbites est tracées sur la Fig 2.4. La courbe 1 correspond à des oscillations de faible amplitude, la courbe 2 pour le régime oscillatoire à proximité de la séparatrice, et la courbe 3 décrit un régime de rotation du pendule.

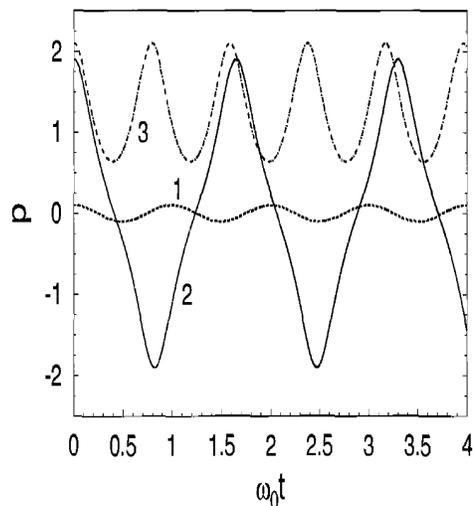


FIGURE 2.4 – La dépendance temporelle d'impulsion $p(t)$ pour trois types de mouvement : la courbe 1 correspond à des oscillations de faible amplitude ($|H + \omega_0^2| \ll \omega_0^2$); courbe 2 des oscillations près de la séparatrice ($|H - \omega_0^2| \ll \omega_0^2$); courbe 3 régime de rotation ($H > \omega_0^2$)

Pour $H = \omega_0^2 = H_s$

Enfin considérons les orbites de la séparatrice lorsque $H = H_s = \omega_0^2$. La séparatrice a été montré dans la Fig.2.2.b par les courbes de l'espace des phases 2 et 2'.

En utilisant l'équation :

$$\frac{dq}{dt} = p(q, H_s) = \omega_0 \cos q/2$$

on obtient

$$q = 4 \arctan \frac{\exp(\pm \omega_0 \tau) + 1}{\exp(\pm \omega_0(t - t_0)) - 1} \quad (2.20)$$

$$p = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0(t - t_0))} \quad (2.21)$$

où le signe supérieur (+) correspond au mouvement le long de la branche supérieure de la séparatrice (courbe 2), et (-) décrit le mouvement le long de la partie inférieure (courbe 2'), t_0 est le temps où l'orbite croise la coordonnée $q = 0$. Le point de l'espace des phases s'approche asymptotiquement du point selle :

$$q \longrightarrow \pm\pi, \quad p \longrightarrow -0, \quad \text{pour } t \longrightarrow -\infty$$

$$q \longrightarrow \pm\pi, \quad p \longrightarrow +0, \quad \text{pour } t \longrightarrow +\infty$$

La formation d'une couche stochastique dans le cas d'un pendule perturbé est typique. Par conséquent, La section actuel est consacré à l'analyse systématique de la séparatrice et la couche stochastique du pendule perturbé.

2.3 La couche stochastique du pendule perturbé près d'une séparatrice

2.3.1 La séparatrice map

Dans le cas des systèmes hamiltoniens adimensionnelles, la région proche d'une séparatrice est le domaine le plus important pour étudier l'origine du chaos, depuis la dynamique proche d'un point selle est sensible à des petites perturbations. Le problème du changement de la dynamique proche d'une séparatrice sous une perturbation périodique peut être étudiée d'une manière assez générale. La destruction des séparatrices sous l'effet des perturbations mène au chaos, et c'est pourquoi ce problème est l'un des plus importants dans l'analyse de la dynamique.

Pour être plus spécifique, l'hamiltonien du pendule perturbée est

$$\begin{aligned} H &= H_0(p, x) + \epsilon V(x, t) \\ H_0 &= \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos x \\ V &= V_0 \cos(kx - \nu t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où nous avons mis l'amplitude de perturbation comme V_0 au lieu de ω_0^2 et la masse est égale à l'unité

supposons que la dynamique non-perturbé a une separatrice à une certaine valeur

$$E_s = H_0(p_s, x_s) \quad (2.23)$$

de l'énergie non-perturbé

$$E = H_0(p, x) \quad (2.24)$$

la forme générale

$$\dot{E} = \dot{H}_0(p, x) = [H_0, H] = \epsilon [H_0, V] = -\epsilon \frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial x} = -\epsilon p \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.25)$$

on utilise les crochets de poisson (voir les relations (1.9) et (1.12) vues au chapitre précédent)

l'équation (2. 25) est exacte pour l'hamiltonien (2.22). Le changement du système d'énergie non-perturbé dû à la perturbation est

$$\Delta E(t', t'') = -\epsilon \int_{t'}^{t''} dt p \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.26)$$

En particulier, pour le pendule perturbé (2.22) qu'on a

$$\Delta E(t', t'') = \epsilon k \omega_0^2 \int_{t'}^{t''} dt x \sin(kx - \nu t) \quad (2.27)$$

Dans le suite nous commençons à partir du modèle de pendule perturbé (2.22) et employons l'énergie E ou la variable d'action I . Le raccordement est donné dans la section précédent

$$E = H_0(I), \quad E_s = \omega_0^2 = H_s \quad (2.28a)$$

$$I_s = \frac{1}{\pi} 8\omega_0 E \left(\frac{\pi}{2}; 1 \right) = \frac{8}{\pi} \omega_0 \quad (2.28b)$$

Nous sommes intéressés par la dynamique non-perturbée près de la separatrice, c.-à-d.

$$|E - E_s| \ll E_s \quad (2.29a)$$

$$|I - I_s| \ll I_s \quad (2.29b)$$

L'idée principale pour obtenir la map de separatrice est basée sur un comportement spécifique de la vitesse non-perturbé $\dot{x} = v$ près de la separatrice, montré dans la figure 2.4. Il découle des résultats du pendule simple (cas du pendule non-perturbé) que la largeur d'une impulsion dans la fig.2.4. est la largeur des solitons, c.-à-d $\approx T_0 = 2\pi/\omega_0$, et l'intervalle entre les impulsions voisines est de l'ordre de

$$T(h) = \frac{2}{\omega_0} \ln \frac{32}{h(E)}, \quad \omega(h) = \frac{\pi\omega_0}{\ln(32/h(E))} \quad (2.30)$$

où

$$h(E) = \left| 1 - \frac{E}{E_s} \right| \ll 1. \quad (2.31)$$

Ceci signifie que $T \gg T_0$ pour $h(E) \rightarrow 0$ et la forme des restes d'impulsions inchangeable avec l'exactitude exponentielle.

L'analyse effectuée nous permet de présenter les map suivants \hat{T}_s :

$$(E_{n+1}, v_{n+1}) = \hat{T}_s(E_n, v_n) \quad (2.32)$$

où les temps $\{\tau_j\}$ de map est pris à des intervalles $T(E) = T(h)$:

$$\{\tau_j\} = \{\tau_0, \tau_1 = \tau_0 + T(h_1), \tau_2 = \tau_0 + T(h_2), \dots\} \quad (2.33)$$

Le point τ_0 peut être pris au milieu de deux impulsions. Le prélèvement correspondant au points τ_n et les valeurs de l'énergie E_n (ou $h_n = h(E_n)$) sont montrés dans la fig 2.5

Alors la map (2.32) est s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n + \Delta h_n \\ \tau_{n+1} = \tau_n + \frac{2\pi}{\omega(h_{n+1})} \end{cases} \quad (2.34)$$

où

$$\begin{cases} \Delta h_n = -\frac{\epsilon}{E_s} \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} dt \dot{x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \tau_n^\pm = \tau_n \pm \frac{T(h_n)}{\delta_n} \end{cases} \quad (2.35)$$

où $\delta_n = 2$ ou 4 dépend de caisses (a) ou (b) dans la fig.2.5. L'expression (2.35) peut être simplifié puisqu'elle devrait être succédé une impulsion avec le centre $t = \tau_n$. L'inégalité $T \gg T_0$ nous permet d'écrire (2.35) sous la forme suivante

$$\Delta h_n = -\frac{\epsilon}{E_s} \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} dt \dot{x}_s \frac{\partial V}{\partial x} = \Delta h(\tau_n) \quad (2.36)$$

La map (2.34) ainsi que (2.36) est appelé la map de separatrice. On lui écrit pour des variables d'énergie-temps. Il est intéressant de mentionner que des valeurs (h_n, τ_n) sont prises dans des différents instants de temps (voir la fig.2.5).

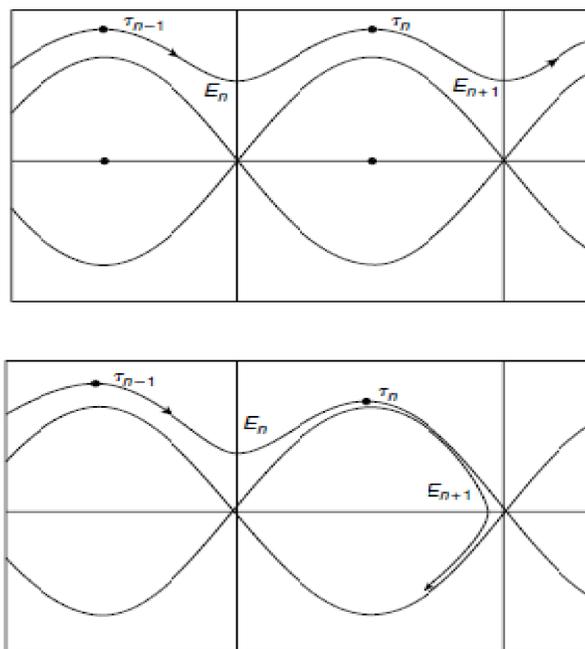


FIGURE 2.5 – Points de l'échantillonnage pour la map des separatrices pour deux cas différents

2.3.2 La couche stochastique

La couche stochastique est un domaine de la dynamique chaotique qui remplace la perturbation et la separatrice détruite. Il y a d'autres notions comme :la couche chaotique. D'près (2.34) et (2.36) nous pouvons écrire la matrice Jacobienne comme :

$$\hat{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d\Delta h_n}{d\tau_n} \\ \frac{-\pi}{\omega^2(h_n)} \frac{d\omega(h_n)}{dh_n} & 1 - \frac{\pi}{\omega^2(h_n)} \frac{d\omega(h_n)}{dh_n} \frac{d\Delta h_n}{d\tau_n} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

la condition qui défini le domaine chaotique donnée par :

$$k_c = \max \frac{\pi}{\omega^2(h)} \left| \frac{d\omega(h)}{dh} \frac{d\Delta h}{d\tau} \right| > 1 \quad (2.38)$$

et la frontière d'une couche stochastique h_{sl} apparaît d'après l'équation :

$$k_c = \max \frac{\pi}{\omega^2(h_{sl})} \left| \frac{d\omega(h_{sl})}{dh_{sl}} \right| \left| \frac{d\Delta h(\tau)}{d\tau} \right| = 1 \quad (2.39)$$

Calculons (2.39) pour le modèle de pendule perturbé (2.1). Nous avons

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \frac{\pm 2\omega_0}{\cosh[\omega_0(t-t_n)]} \\ x_s = 4 \arctan \exp[\pm \omega_0(t-t_n)] - \pi \end{cases} \quad (2.40)$$

sur la séparatrice, où l'instant de temps t_n est introduit comme une condition initiale. Près de la séparatrice nous avons aussi (2.28) et (2.30). Cette information est suffisante pour calculer l'intégrale de Melnikov, Δh , dans (2.36) et dans la map (2.34). Après le remplacement de $V = \cos(x_s - \nu(t - \tau_n))$ dans (2.36) et avoir omis des calculs assez simple, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta h_n &= \epsilon M_n \sin \phi_n \\ M_n &= \frac{4\pi \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2 \exp\left(\sigma_n \frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right)}{\sinh \frac{\pi\nu}{\omega_0}} \\ \phi_n &\equiv \nu\tau_n \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec la signe de la fonction $\sigma_n = \pm 1$ et

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n \cdot \text{signe } h_n. \quad (2.42)$$

En utilisant (2.41), la séparatrice map pour le pendule perturbé peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n + \epsilon M_n \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\nu}{\omega_0} \ln \frac{32}{|h_{n+1}|}, \quad (\text{mod } 2\pi). \end{cases} \quad (2.43)$$

L'expression de M_n peut être simplifiée dans le cas de $\nu \gg \omega_0$:

$$\begin{cases} M_n = 8\pi \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2 \exp\left(\frac{-\pi\nu}{2\omega_0}\right), & \sigma_n > 0 \\ M_n = 8\pi \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2 \exp\left(\frac{-3\pi\nu}{2\omega_0}\right), & \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Quand $\sigma_n < 0$, la valeur M_n est beaucoup plus petite que pour $\sigma_n > 0$ et nous pouvons l'ignorer. Finalement, la map (2.43), ainsi que les définitions (3.41) et (2.42), forment une map de séparatrice quand $\nu \gg \omega_0$.

Combinant les expressions (2.44), (2.39), (2.30), et (2.41), nous obtenons une semi-largeur de la couche stochastique :

$$h_{sl} = 4\pi\epsilon \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\omega_0}\right) \quad (2.45)$$

Le résultat prouve que la largeur est exponentiellement petite en ce qui concerne le grand paramètre ν/ω_0 . L'expression générale (2.41) pour l'intégrale de Melnikov M_n peut être employée pour une estimation quand $\nu \sim \omega_0$. Dans ce cas :

$$h_{sl} \sim \epsilon \quad (2.46)$$

ce qui ressemble à la plus grande largeur de la couche stochastique .

Pour conclure cette section, deux commentaires doivent être faits :

(i) considérer le paramètre

$$\delta_h = \frac{h_{sl}}{\max \Delta h} = \frac{h_{sl}}{\epsilon M} = \frac{\nu}{\omega_0} \quad (2.47)$$

qui est proportionnel à la largeur de la couche stochastique la valeur de l'intégrale de Melnikov. Pour la perturbation de la haute fréquence $\delta_h \gg 1$ et l'estimation du domaine de chaos est fortement déviée de la valeur de l'intégrale de Melnikov.

(ii) Un vrai paramètre d'expansion, en obtenant la valeur de h_{sl} , est le paramètre de la perturbation ϵ si $\nu \sim \omega_0$. Quand $\nu \gg \omega_0$ la valeur de h_{sl} est exponentiellement petit (voir (2.45)) et le vrai petit paramètre est

$$\bar{\epsilon} = \epsilon \left(\frac{\omega_0}{\nu} \right)^2 \ll 1 \quad (2.48)$$

ce qui est due à la perturbation de la haute fréquence. La fig. 2.6 illustre a de petite largeur des couches stochastiques pour le grand ϵ avec le petit $\bar{\epsilon}$.

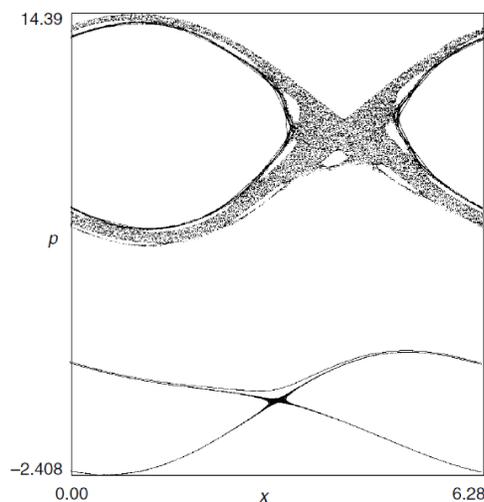


FIGURE 2.6 – Deux couches stochastiques pour le modèle de pendule perturbé avec $\epsilon = 5.1$ grand , $\nu = 10.4$ et $\bar{\epsilon}$ petit

2.4 Les résonances non linéaires et la chaîne des îlots

Cette section vise à fournir une compréhension qualitative de la dynamique du chaos résultant de la complexité des mouvements qui se produisent en raison de l'interaction de résonances. Nous décrivons ici la structure des résonances dans le modèle de pendule perturbé.

La résonance est un phénomène selon lequel certains systèmes physiques (électriques, mécaniques...) sont sensibles à certaines fréquences. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite "fréquence de résonance" ou "fréquence naturelle" ou fréquence propre. Soumis à une telle excitation, le système va être le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à une rupture d'un composant du système.

Le mouvement perturbé d'un système Hamiltonien à un degré de liberté en variables action-angle est

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t) \quad (2.49)$$

où $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre de perturbation adimensionnel et V est périodique dans le temps avec la période $T = 2\pi/\nu$. Par conséquent, on peut développer V en une double série de Fourier en θ et t

$$V(I, \theta, t) = \frac{1}{2} i \epsilon \sum_{k,l} V_{k,l}(I) \exp i(k\theta - l\nu t) + c.c \quad (2.50)$$

$$V_{k,l}^* = V_{-k,-l}$$

où C.C. désigne les termes complexes conjugués.

En utilisant l'expressions (2.49) et (2.50), les équations du mouvement canoniques sont transformés en

$$\dot{I} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} k V_{k,l}(I) \exp i(k\theta - l\nu t) + c.c \quad (2.51)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \epsilon \frac{\partial V(I, \theta, t)}{\partial I} = \omega(I) + \frac{1}{2} \epsilon \sum_{k,l} \frac{\partial V_{k,l}(I)}{\partial I} \exp i(k\theta - l\nu t) + c.c \quad (2.52)$$

où nous introduisons la fréquence des oscillations pour un mouvement imperturbable :

$$\omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I} \quad (2.53)$$

La condition de résonance implique que l'équation suivante doit être satisfaite :

$$k\omega(I) - l\nu = 0 \quad (2.54)$$

où k et l sont des entiers. Cela signifie que nous devons spécifier une paire d'entiers, (k_0, l_0) , et la valeur correspondante, I_0 , tel que (2.54) convertit en l'identité suivante :

$$k_0\omega(I_0) = l_0\nu \quad (2.55)$$

La façon de traiter avec les équations (2.51) et (2.52) est d'analyser certaines situations simples. Premièrement, nous examinons une résonance isolée (2.55) et d'ignorer toutes les autres résonances possibles. Cela signifie que dans les équations du mouvement (2.51, 2.52), seuls les termes avec $k = \pm k_0$, $l = \pm l_0$, qui doivent être conservés et la condition satisfaite à la résonance $I = I_0$:

$$\begin{cases} \dot{I} = \epsilon k_0 V_0 \sin(k_0 \theta - l_0 \nu t + \phi) \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(k_0 \theta - l_0 \nu t + \phi) \end{cases} \quad (2.56)$$

où nous installons

$$V_{k_0, l_0} = |V_{k_0, l_0}| e^{i\phi} = V_0 e^{i\phi} \quad (2.57)$$

Il est également supposé que la valeur

$$\Delta I = I - I_0 \quad (2.58)$$

est petit, c'est-à-dire, l'équation (2.55) est examinée dans le voisinage de la résonance de l'action I_0 .

Une liste des approximations typique est la suivante :

- (i) Mettre $V_0 = V_0(I_0)$ sur le côté droit de l'équation (2.56) ;
- (ii) Développer la fréquence $\omega(I)$ en utilisant (2.58) :

$$\omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I \quad (2.59)$$

où

$$\omega_0 = \omega(I_0), \omega' = d\omega(I_0)/dI \quad (2.60)$$

(iii) la négligence du terme de second ordre dans la deuxième équation de (2.56) pour la fréquence.

Enfin, nous réduisons le système (2.56) à une version simple :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Delta I) = -\epsilon k_0 V_0 \sin \psi \\ \frac{d}{dt} \psi = k_0 \omega' \Delta I \end{cases} \quad (2.61)$$

où une nouvelle phase est introduite par

$$\psi = k_0 \theta - l_0 \nu t + \phi - \pi \quad (2.62)$$

L'ensemble des équations (2.61) est présentée sous une forme hamiltonienne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Delta I) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi}; \\ \frac{d}{dt} \psi = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial(\Delta I)} \end{cases} \quad (2.63)$$

où

$$\bar{H} = \frac{1}{2}K_0\omega'(\Delta I)^2 - \epsilon K_0V_0 \cos \psi \quad (2.64)$$

L'expression (2.64) décrit effectivement la dynamique Hamiltonien du système au voisinage de résonance. les variables $(\Delta I, \psi)$ forment une paire canoniquement conjuguées. Une comparaison des expressions (2.64) et (2.2) montre que l' Hamiltonien \bar{H} décrit les oscillations d'un pendule non linéaire. Il résulte de (2.61) que :

$$\ddot{\psi} + \Omega_0^2 \sin \psi = 0 \quad (2.65)$$

Où la fréquence d'oscillation de petite amplitude est

$$\Omega_0 = (\epsilon K_0^2 V_0 |\omega'|)^{1/2} \quad (2.66)$$

La valeur Ω_0 est également la fréquence des oscillations de phase. La formule obtenue à la section 2.1 pour le pendule peut automatiquement être appliquée à l'hamiltonien (2.64).

Dans le plan de phase (p, x) , une phase de la courbe défini par l'action I_0 (voir Fig. 2.7 (à droite)) correspond à une résonance exacte. La transformation de (2.62), à partir de l'angle polaire θ à la phase ψ , correspond à la transformation de coordonnées tournant du système à la fréquence $l_0\nu$. Deux exemples de portrait de phase de résonance non linéaire sont présentés dans la fig. 2.7.

Il s'ensuit que pour la résonance avec un ordre k_0 , il y a une chaîne d'îlots avec des cellules de k_0 celle de séparatrice, k_0 des points singuliers hyperboliques et k_0 des cellules elliptiques. Ainsi, la topologie de l'espace des phases est modifié dans le voisinage de la valeur de résonance I_0 .

Nous tournons maintenant notre attention afin de déterminer les conditions dans lesquelles le système est "piégé" par une résonance non linéaire. La dimension de paramètre adimensionnel α caractérise le degré de la non-linéarité des oscillations :

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \equiv \frac{I_0}{\omega_0} |\omega'| \quad (2.67)$$

Les trois approximations mentionnées ci-dessus sont valables si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\epsilon \ll \alpha \ll 1/\epsilon \quad (2.68)$$

La première inégalité signifie que la non-linéarité doit être assez forte tandis que la deuxième inégalité limite le temps d'approximation.

Pour déterminer la validité de l'hamiltonien (2.64), nous avons besoin d'estimer l'amplitude des oscillations de phase :

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\epsilon \frac{V_0}{|\omega'|} \right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left(\frac{\epsilon}{\alpha} \right)^{1/2} \quad (2.69)$$

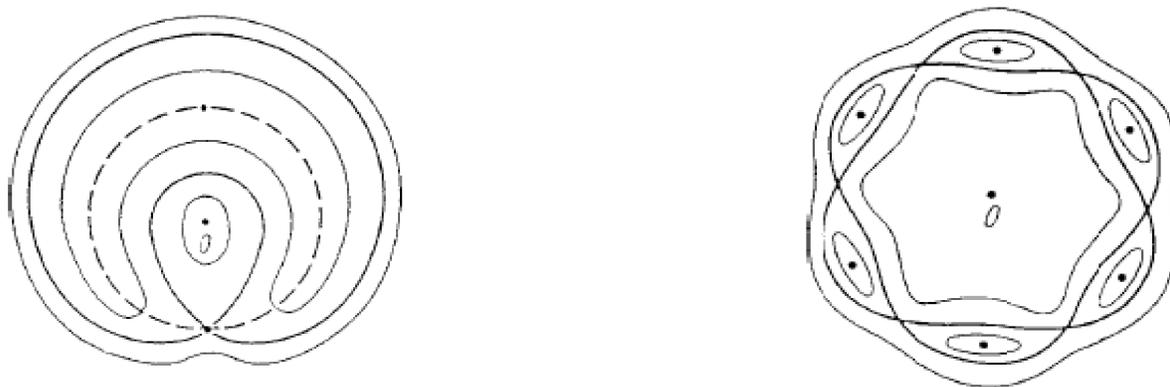


FIGURE 2.7 – La résonance non linéaire sur le plan de phase (q, p) . La ligne en pointillé est la trajectoire imperturbable avec $I = I_0$. La ligne épaisse est une nouvelle séparatrice des oscillations de phase (à droite) : $k_0 = l_0 = 1$, (à gauche) : $k_0 = 6, l_0 = 1$

où nous avons mis $V_0 \sim H_0 \sim \omega_0 I_0$. De la même manière, nous tirons la largeur de la fréquence de la résonance à partir de la définition (2.66) :

$$\frac{\max \Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = (\epsilon\alpha)^{1/2} \quad (2.70)$$

L'expression (2.69) fournit la signification pour la première inégalité dans (2.68) et l'expression (2.70) donne la signification pour la seconde inégalité, c'est-à-dire, les changements relatifs à l'action et la fréquence attribuée à la résonance non-linéaire doivent être de petite taille.

Nous pouvons maintenant décrire facilement une partie de la trajectoire présentée dans la Fig. 2.2. En fait, le schéma est plus compliqué, non seulement parce que les chaînes d'îlots sont séparées par des courbes invariants, mais chaque îlot est borné par une couche mince stochastique. A l'intérieur de la couche stochastique, les îlots restants sont intégrés dans le domaine des mouvements chaotiques et le même schéma se répète à l'intérieur de chaque îlot.

2.5 Les zones singulières

Les études de la dynamique chaotique par des mathématiciens et des physiciens étaient différentes dès le début. Tandis que des mathématiciens étaient attirés par des problèmes qui permettent une considération rigoureuse (systèmes d'Anosov), les physiciens considèrent principalement les problèmes d'une importante signification physique tels que la stabilité des particules dans les accélérateurs ou de la destruction des surfaces magnétiques dans le plasma à confinement toroïdal. Afin de continuer leurs observations et de traiter certaines conjectures basées physiquement qui sont directement reliées et importantes pour les problèmes physiques mais n'ont pas toujours une base rigoureuse. Car une partie de cette discussion est à

l'origine de la cinétique partielle qui s'avère due à l'irrégularité de l'espace de phase. Il y a des raisons différentes de l'irrégularité de l'espace de phase. La raison principale peut être connexe à l'existence des îlots de tout genre de domaine de dynamique chaotique avec un hamiltonien lisse. Les îlots peuvent être d'origine différent (résonances, bifurcations, etc.), et des propriétés de l'espace de phase près des frontières des îlots ne sont pas bien connues (Meiss, 1986, 1992 ; Meiss et Ott, 1985, 1986 ; Rom-Kedar-Kedar, 1994 ; Melnikov, 1996 ; Zaslavsky et autres, 1997 ; Rom-Kedar-Kedar et Zaslavsky, 1999).

Ici nous présentons un exemple. Il est lié à la situation standard Fig.2.9. Un tel phénomène s'appelle la viscosité est montré dans la figue.2.9 où une hiérarchie des îlots apparaît pour une valeur spéciale de K (Zaslavsky et autres, 1997).

Un dispositif général des systèmes hamiltoniens est que leur espace des phases est plein des domaines collants qui nous appelons des zones singulières. Elles peuvent être petites et invisibles dans les maps de Poincaré, elles dépendent des paramètres, et ils peuvent être modifiés de beaucoup de manières , mais leur considération est inévitable pour une théorie générale et elles influencent la cinétique et le transport.

2.5.1 Le temps de récurrence (Poincaré récurrence)

Les récurrences de Poincaré, ou simplement les récurranes, est l'une des notions les plus importantes pour la cinétique. Pendant longtemps depuis la discussion célèbre entre Boltzmann et Zermelo, les récurrences de Poincaré n'ont pas joué un rôle constructif sérieux dans la cinétique, bien que beaucoup de dérivations des équations de transport impliquent les propriétés des orbites périodiques et de leurs distributions (voir par exemple dedans Bowen, 1972 ; Ott, 1993 ; Dorfman, 1999).

Considérer un domaine A dans l'espace de phase et un ensemble typique des points $\{q, p \in A\}$. Le théorème des récurrences de Poincaré déclare cela pour n'importe quel état initial de l'ensemble typique, la trajectoire reviendra à plusieurs reprises à A si la dynamique est préservée de région et confiné. Soit $\{\tau_j^-\}$ un ensemble d'instant de temps quand une trajectoire laisse A , et $\{\tau_j^+\}$ est l'ensemble d'instant de temps quand une trajectoire retourne à A fig.2.8. L'ensemble

$$\{\tau_j^{(rec)}\}_A = \{\tau_j^- - \tau_{j-1}^-\}_A \quad (2.71)$$

est l'ensemble de récurrences. Nous appelons $\{\tau_j^{(rec)}\}$ le temps de récurrence à l'étape j , ou le j cycle. Il y a quelques autres caractéristiques liées aux temps de récurrence. Des temps de sortie (escape) peuvent être présentés comme intervalle de temps entre les entrées adjacentes à A et les sorties de A :

$$\{\tau_j^{(esc)}\}_A = \{\tau_j^- - \tau_j^+\}_A \quad (2.72)$$

De même, on peut présenter des intervalles de temps $\{\tau_j^{(ext)}\}$ pendant lesquels une trajectoire dépense un cycle extérieur de A :

$$\{\tau_j^{(ext)}\}_A = \{\tau_j^+ - \tau_{j-1}^-\}_A \quad (2.73)$$

Il y a un raccordement évident :

$$\tau_j^{(rec)} = \tau_{esc} + \tau_{ext} \quad (2.74)$$

L'ensemble de temps de récurrence $\{\tau_j^{(rec)}\}$ forme des maps de trajectoire spécifique. L'ordre de $\{\tau_j^{(rec)}\}$ peut avoir les dispositifs fractal ou multifractal . Il peut également être caractérisé par la fonction de distribution de probabilité $P_{rec}(\tau; A)$. Ces propriétés des récurrence seront considérées dans ce qui suit.



FIGURE 2.8 – Recurrences de Poincaré dans le domaine A et B . Optimisation pour la standard map :(à gauche) endroit du domaine commençant A_{st} et du domaine d'optimisation A_{tg} (tous les deux en tant que les places noirs);(à droit) distribution du $P_{rec}(t)$.

2.5.2 La distribution de récurrence

Boltzmann était le premier qui a estimé le moment moyen de récurrence pour un modèle de gaz des particules et a montré qu'il est très élevé. Boltzmann est également montré que le théorème des récurrences de Poincaré ne concerne pas toutes les durées de temps des cycles. Le résultat important sur cette question a été obtenu par Kac (1958). Soit $P(\tau; A)$ la densité de probabilité à retourner à A au temps $\tau \in (\tau, \tau + d\tau)$. pour des petits $\Gamma(A)$, $P(\tau; A)$ doit être proportionnel à $\Gamma(A)$ si la dynamique du système est la zone de préservation bornée. Plus exactement, on peut introduire une densité de probabilité

$$P_{rec}(\tau) = \lim_{\Gamma(A) \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(A)} P(\tau; A) \quad (2.75)$$

ce qui existe et est normalisé

$$\int_0^{\infty} P_{rec}(\tau) d\tau = 1 \quad (2.76)$$

Le temps moyen de récurrence est

$$\tau_{rec} = \langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau P_{rec}(\tau) d\tau \quad (2.77)$$

En raison du lemme de Kac

$$\tau_{rec} < \infty \quad (2.78)$$

Les travaux de Kac sur des répétitions étaient les seuls avec un nouveau résultat significatif. Le manque d'intérêt pour ce sujet a pu être expliqué près de la valeur énorme τ_{rec} pour les modèles statistiques considérés, de sorte qu'il n'y ait eu aucune possibilité réaliste de mesurer τ_{rec} ou tout effet lié au caractère fini de τ_{rec} . La situation a été changée après la découverte du chaos et de ses réalisations pratiques.

Le chaos se produit dans les systèmes avec quelques degrés de liberté, à partir des degrés de un et 1/2, et la période des cycles de Poincaré devient comparable à un temps caractéristique du système. Il est montré par Margulis (1969, 1970) cela pour des systèmes avec une propriété de mélange uniforme (systèmes de type Anosov) :

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_{rec}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{rec}}\right) \quad (2.79)$$

avec

$$\tau_{rec} = 1/h \quad (2.80)$$

où h est l'entropie de Kolmogorov-Sinai, ou un taux caractéristique de la divergence de la trajectoire proches :

$$\delta r(t) = \delta r(0) \exp(ht) \quad (2.81)$$

avec $\delta r(0) \rightarrow 0$ quand une distance initiale entre les deux trajectoires, et $\delta r(t)$ en tant que leur distance au temps t .

La distribution exponentielle des récurrences (2.79) n'est pas la seule possible, et quelques simulations ont montré la possibilité d'une distribution asymptotique (Chirikov et Shepelyansky, 1984 ; Karney, 1983) :

$$P_{rec}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\gamma}, \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (2.82)$$

Nous appelons γ l'exposant de récurrence. Il résulte de ce lemme de Kac (2.78) que

$$\gamma > 2$$

(voir également en Meiss, 1997 ; Zaslavsky et Tippet, 1991).

2.5.3 Domaines collants et échappements

Le genre de viscosité impose le type de transport anormal. Il peut être que le domaine collant ne se déplace pas avec le temps ou il ne bouge pas dans l'espace de phase. Une trajectoire qui pénètre dans la zone collante s'en échappe après un temps très long et cette partie de la trajectoire représente une "balistique" qui peut être caractérisée par une dynamique presque régulière avec une accélération quasi constante, ou vitesse presque constante.

L'origine de la viscosité n'a pas un scénario universel. Un passage par le contour était décrit par Meiss et autres (1983), Hanson et autres (1985), et Meiss et Ott (1985). Des couches stochastiques presque isolées ont été considérées par Petrovichev et autres (1990), Rakhlin (2000), et Zaslavsky (2002); des scénarios d'île-autour-îles ont été considérées par Meiss (1986, 1992), Zaslavsky et autres (1997), et Rom-Kedar-Kedar et Zaslavsky (1999); même un seul point fixé marginal peut produire une viscosité et de transport anormal (Artuso et Prampolini, 1998). On peut présenter une description probabiliste de la viscosité en utilisant le décollement de probabilité de taux d'évasion (escape) $P_{esc}(t)dt$ qui montre la probabilité pour une particule à l'évasion d'un domaine dans l'intervalle $(t, t + dt)$, normalisé

$$\int_0^\infty dt P_{esc}(t) = 1 \quad (2.83)$$

Si asymptotiquement

$$P_{esc}(t) \sim cnst./t^{\gamma_{esc}}, \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.84)$$

et il y a un seul domaine collant exposé d'évasion γ_{esc} , alors on peut s'attendre à la relation suivante :

$$\gamma = \gamma_{esc} \quad (2.85)$$

où $\gamma = \gamma_{esc}$ (voir (2.82)) est l'exposant de la distribution des récurrences, et en conséquence

$$P_{rec}(t) \sim P_{esc}(t), \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.86)$$

S'il y a plus d'une zone singulière avec des valeurs différents de γ_{esc} , alors au lieu de (2.85), nous avons

$$\gamma_{rec} = \min \gamma_{esc}, \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.87)$$

depuis la valeur minimum de γ_{esc} qui définit la plus grande asymptotique de temps. Un exemple numérique pour la standard map est de l'équivalence de l'asymptotique (2.86), figue.2.8. Après avoir fait la moyenne au-dessus du nombre de la trajectoire, la différence entre P_{rec} pour que la densité de probabilité retourne à A , et P_{targ} de la densité de probabilité au congé A et d'accéder au premier temps B , ne peut être distingué. Les deux domaines A et B sont stochastiques et la majorité de la trajectoire arrive la première fois à B ou retourne la première fois à A après un temps assez petit correspondant à la loi (2.79). Après $t \gg \tau_{rec}$ il y a assez peu des trajectoires. Ce groupe se compose des trajectoires qui visitent une zone singulière sur leur chemins de nouveau à A (ou B). Juste ces trajectoires retardées sont responsables pour le comportement asymptotique de P_{rec} et de P_{esc} . Ce simple commentaire implique un raccordement entre les zones singulières et le transport.

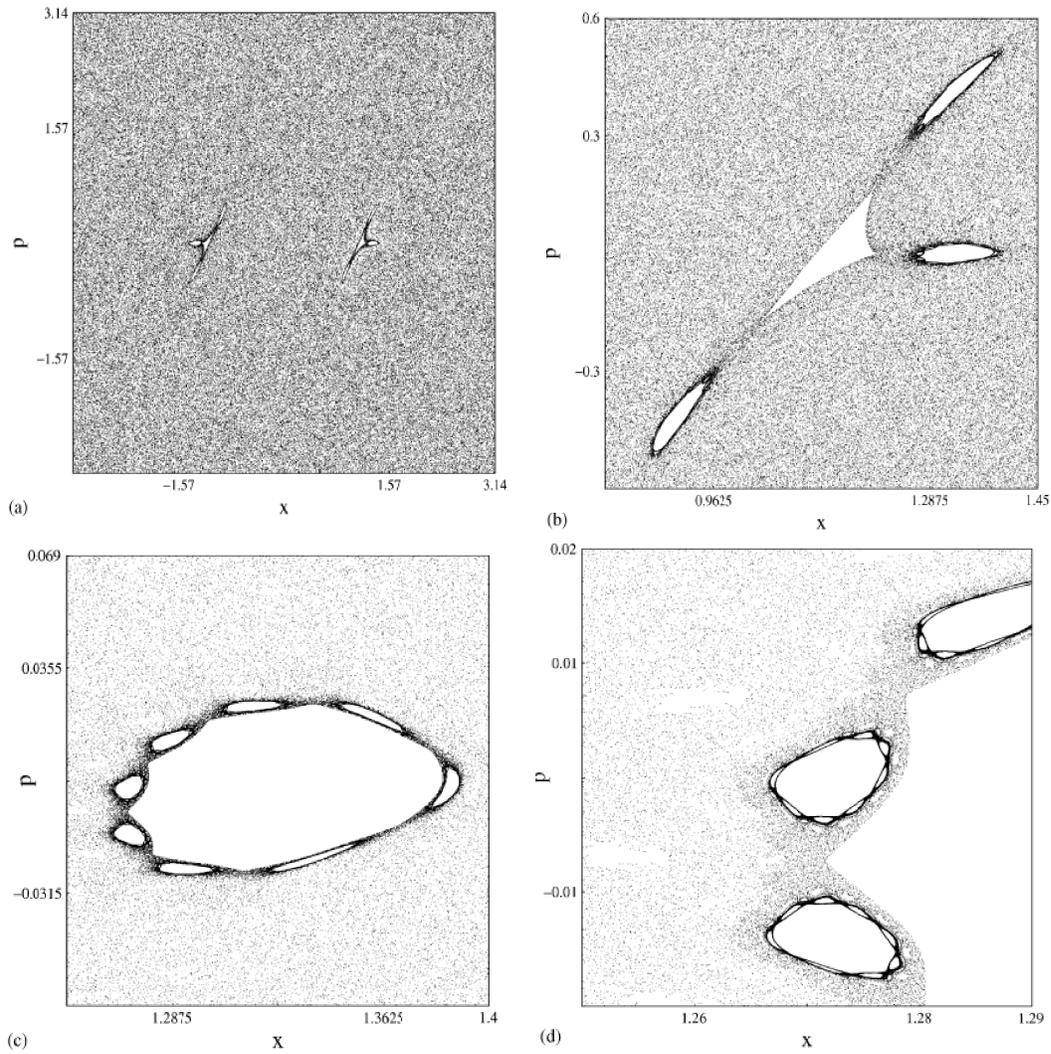


FIGURE 2.9 – Hiérarchie des îles 2–3–8–8–8–... pour la standard map pour $K = 6,908745$

2.6 Le transport normal (diffusion normale)

2.6.1 L'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) :

L'équation FPK a été obtenu par Fokker (1914), Smolukhowski (1915), Einstein (1905), et Planck (1917). L'idée d'utiliser une équation dite cinétique est basée sur une simple description de la dynamique à la charge de la perte d'informations sur les trajectoires. Landau (1937) et Kolmogorov (1938) ont obtenu l'équation cinétique à l'aide d'un régime spécial et les conditions qui sont importantes pour la compréhension de certains principes de base de la cinétique. Soit $W(x, t; x', t')$ une densité de probabilité d'avoir une particule à la position x à t si la particule était à la position x' au temps $t' \leq t$. l'équation de Kolmogorov est

$$W(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2 W(x_3, t_3|x_2, t_2).W(x_2, t_2|x_1, t_1) \quad (2.88)$$

qui a une signification simple que la transition $(x_1, t_1) \rightarrow (x_3, t_3)$ peut passer par tous les états possibles (x_2, t_2) .

Une hypothèse typique pour W est son uniformité dans le temps, à savoir :

$$W(x, t|x', t') = W(x, x'; t - t') \quad (2.89)$$

Examiner l'évolution de $W(x, x'; t - t')$ pendant un temps infiniment petit $\Delta t = t - t'$ et l'utilisation du développement :

$$W(x, x_0; t + \Delta t) = W(x, x_0; t) + \Delta t \frac{\partial W(x, x_0; t)}{\partial t} \quad (2.90)$$

où les termes d'ordre supérieur sont négligés. L'équation (2.90) fournit l'existence de la limite :

$$\begin{aligned} W(x, x_0; t + \Delta t) - W(x, x_0; t) &= \Delta t \frac{\partial W(x, x_0; t)}{\partial t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{W(x, x_0; t + \Delta t) - W(x, x_0; t)\} &= \frac{\partial W(x, x_0; t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Nous présentons maintenant une nouvelle notation :

$$P(x, t) \equiv W(x, x_0; t) \quad (2.92)$$

où la coordonnée initiale x_0 est négligée.

L'équation (2.88) se compose d'une seule fonction, W , avec différent arguments. L'idée principale de la dérivation de l'équation cinétique est de distinguer ces fonctions W qui correspondent aux différentes échelles de temps.

$$t_3 = t + \Delta t, \quad t_1 = t, \quad t_2 = t_3 - t_1 = \Delta t$$

Avec l'équation (2.92), nous pouvons transformer l'équation (2.91) en :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{W(x, x_0; t + \Delta t) - P(x, t)\} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \quad (2.93)$$

d'après l'équation (2.88), on a

$$W(x, x_0; t + \Delta t) = W(x, x_0; t - (-\Delta t)) = \int dy W(x, y; t - t_y) \cdot W(y, x_0; t_y - t_0)$$

avec

$$t = t, \quad t_0 = (-\Delta t), \quad t_y = \Delta t$$

donc

$$W(x, x_0; t + \Delta t) = \int dy W(x, y; t - \Delta t) \cdot W(y, x_0; \Delta t + \Delta t)$$

nous faisons un changement de variable de $t' = 2\Delta t$

$$W(x, x_0; t + \Delta t) = \int dy W(x, y; \Delta t) \cdot W(y, x_0; t)$$

avec la propriété de la fonction δ de Dirac

$$p(x, t) = \int dy p(y, t) \delta(x - y)$$

l'équation (2.93) devient

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dy \{W(x, y; \Delta t) - \delta(x - y)\} P(y, t) \quad (2.94)$$

La première caractéristique importante dans la dérivation de l'équation cinétique est l'introduction de deux fonctions de distribution $P(x, t)$ et $W(x, y; t)$ au lieu de $W(x, t; x', t')$. La fonction $P(x, t)$ sera utilisée pour $t \rightarrow \infty$ ou, plus exactement, pour t qui satisfait la condition

$$t \gg \tau_{coll}$$

où τ_{coll} n'est pas encore défini. Dans cette situation, $W(x, x_0; t)$ ne dépend pas de la condition initiale x_0 , ce qui explique la notation (2.92).

Contrairement à $P(x, t)$, $W(x, y; \Delta t)$ définit la transition au cours d'un temps très petit $\Delta t \rightarrow 0$.

Pour $t = 0$, il ne devrait pas être de transition du tout si la vitesse est limitée, à savoir

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W(x, y; \Delta t) = \delta(x - y) \quad (2.95)$$

Suite à cette limitation , nous pouvons utiliser le développement de la fonction δ et de ses dérivés, à savoir :

$$W(x, y; \Delta t) = \delta(x - y) + A(y; \Delta t) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} B(y; \Delta t) \delta''(x - y) \quad (2.96)$$

La fonction de distribution $W(x, y; \Delta t)$ est appelée *probabilité de transfert* et elle répond à deux conditions de normalisation

$$\int dx W(x, y; \Delta t) = 1 \quad (2.97)$$

$$\int dy W(x, y; \Delta t) = 1 \quad (2.98)$$

Les coefficients $A(x; \Delta t)$ et $B(x; \Delta t)$ ont un sens assez simples. Ils peuvent être exprimée par des moments de $W(x, y, \Delta t)$

$$\begin{aligned} A(y; \Delta t) &= \langle\langle \Delta y \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dz (y_2 - y_1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - y) (y_2 - y_1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - y) (y_2 - y_1) \\ A(y; \Delta t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - y) W(x, y; \Delta t) = \langle\langle \Delta y \rangle\rangle \end{aligned} \quad (2.99)$$

de la même façon on trouve le deuxième coefficient qu'est égale à

$$B(y; \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - y)^2 W(x, y; \Delta t) = \langle\langle (\Delta y)^2 \rangle\rangle \quad (2.100)$$

Les coefficients des ordres supérieurs de l'expansion de $W(x, y; \Delta t)$ peuvent être exprimé en fonction des moments les plus élevés de W .

L'intégration de (2.96) sur X ne fournit aucune information supplémentaire dû à (2.97) car les coefficients $A(y; \Delta t)$ et $B(y; \Delta t)$ ne dépendent pas de la variable x , donc nous concéderons les coefficient comme des constantes par rapport à x , mais en intégrant sur y

$$\int W(x, y; \Delta t) dy = \int \delta(x - y) dy + \int A(y; \Delta t) \delta'(x - y) dy + \int \frac{1}{2} B(y; \Delta t) \delta''(x - y) dy$$

on utilisons l'équation (2.98)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \int A(y; \Delta t) \partial \delta(x - y) + \frac{1}{2} \int \frac{\partial B(y; \Delta t)}{\partial y} \partial \delta(x - y) \\ A(y; \Delta t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial B(y; \Delta t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.101)$$

ou d'après l'équation (2.99) et (2.100)

$$\langle\langle \Delta y \rangle\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle\langle (\Delta y)^2 \rangle\rangle}{\partial y} \quad (2.102)$$

La dernière étape est une hypothèse nommée les limites des conditions de Kolmogorov

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ll \Delta x \gg \equiv A(x) \quad (2.103)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ll \Delta x^2 \gg \equiv B(x) \quad (2.104)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ll \Delta x^m \gg \equiv 0 \quad (m > 2) \quad (2.105)$$

En substituant (2.96), (2.99), (2.100) et (2.102) en (2.94) qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int dy W(x, y; \Delta t) - \delta(x - y) \right] P(y, t) \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int dy (\delta(x - y) + A(y; \Delta t) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} B(y; \Delta t) \delta''(x - y)) - \delta(x - y) \right] P(y, t) \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \left[\int dy \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} A(y; \Delta t) \delta'(x - y) \right) + \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} B(y; \Delta t) \delta''(x - y) \right) \right] P(y, t) \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \int dy \left[A(y) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} B(y) \delta''(x - y) \right] P(y, t) \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \int dy \frac{\partial (\delta(x - y) A(y) P(y, t))}{\partial x} + \int dy \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\delta(x - y) B(y) P(y, t))}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (A(x) P(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (B(x) P(x, t)) \end{aligned} \quad (2.106)$$

qui est l'équation établie par Kolmogorov et qu'est appelé l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK).

Après avoir utilisé les relations (2.101) et (2.106), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial (A(x) P(x, t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B(x) P(x, t))}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B(x)}{\partial x} P(x, t) \right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B(x) P(x, t))}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B(x)}{\partial^2 x} \right) P(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (B(x) P(x, t)) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (B(x) P(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (B(x) P(x, t)) \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (B(x) P(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial B(x)}{\partial x} P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} B(x) \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (B(x) P(x, t)) &= \frac{\partial^2 B(x)}{\partial^2 x} P(x, t) + 2 \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial^2 x} B(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B(x)}{\partial^2 x}\right)P(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(x)}{\partial^2 x}P(x,t) + \frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial P(x,t)}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial^2 x}B(x) \\ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial B(x)}{\partial x}\frac{\partial P(x,t)}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial^2 x}B(x) \\ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

qui est l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right) \quad (2.107)$$

avec le coefficient de la diffusion

$$D = B \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ll \Delta x^2 \gg \quad (2.108)$$

L'équation (2.107) a une forme divergente qui correspond à la loi de conservation du nombre des particules

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x} \quad (2.109)$$

avec le flux des particules

$$J = \frac{1}{2}D\frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.110)$$

Une condition supplémentaire résulte de (2.102) et les notations (2.103),(2.104)et(2.108)

$$A(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial B(x)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x} \quad (2.111)$$

ce qui donne une signification physique de $A(x)$ comme une partie convective du flux de particule . Cette partie du flux est nuls si $D = const$

2.6.1.1 Les Solutions et le transport normal

Il existe de nombreuses sources liées aux solutions de l'équation FPK (2.107) pour différentes conditions initiales et limites . Notre objectif ici est juste de mentionner quelques propriétés simples de l'équation FPK qui sont importantes pour l'avenir. Laissez-nous simplifier le cas compte tenu de $D = const$, $x \in (-\infty, +\infty)$, et le premier état d'une particule d'être à $x = 0$. La solution de l'équation de FPK

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right)$$

est alors :

$$P(x,t) = (2\pi Dt)^{-\frac{1}{2}}exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right) \quad (2.112)$$

qui est connue sous le nom d'une distribution gaussienne. Ses moments impairs sont nuls, la deuxième moment est :

$$\langle x^2 \rangle = Dt \quad (2.113)$$

et les moments les plus élevés sont

$$\langle x^{2m} \rangle = D_m t^m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.114)$$

$D_{m=1} = D$ et $D_{m>1}$ peut être aisément exprimée à D , mais ils ne dépendent de t .

Il y a deux propriétés :

- tous les moments de $P(x, t)$ sont finis, à la suite de la décroissance exponentielle de P pour $x \rightarrow \infty$,

-la distribution $P(x, t)$ est un invariant en vertu de la renormalisation

$$\widehat{R}(a) : \quad x' = ax, \quad t' = a^2 t$$

avec un arbitraire, le groupe de renormalisation $\widehat{R}(a)$ est continue.

L'évolution des moments $\langle x^{2m} \rangle$ avec le temps sera appelé *le transport*. la dépendance de (2.112) et (2.113) sera appelé **le transport normal**.

Un autre type de fonction de distribution est *le paquet du mouvement gaussien*

$$P(x, t) = (2\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x - ct)^2}{2Dt}\right) \quad (2.115)$$

avec c qui est une vitesse. La distribution (2.115) satisfait l'équation

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.116)$$

pour lesquels la condition (2.102) ou (2.111) échoue. Ils peuvent être restaurées si nous examinons les moments $\langle (x - ct)^m \rangle$ Il résulte de (2.115) que

$$\langle x \rangle = ct \quad (2.117)$$

et

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = Dt \quad (2.118)$$

qui est similaire à (2.113).

2.6.1.2 Les conditions de Kolmogorov et les conflits avec la dynamique

Un régime mathématique parfait a souvent des contraintes qui limitent son application à des phénomènes réels. Les contraintes liées aux conditions de Kolmogorov (2.103), (2.104) et (2.105) sont très importantes pour tous les problèmes liés au transport anormal. considérer la limite $\delta t \rightarrow 0$ et un déplacement infinitésimal δx le long d'une trajectoire de la particule

qui correspond à cette limite. Puis $\frac{\delta x}{\delta t} \rightarrow v$ où v est la vitesse des particules, et les conditions (2.103, 2.104 et 2.105) avec la notation (2.108) donne

$$\frac{(\delta x)^2}{(\delta t)^2} = v^2$$

$$\frac{(\delta x)^2}{(\delta t)} = v^2 \delta t = D = cst \quad (2.119)$$

Cela signifie que v doit être infinie dans la limite $\delta t \rightarrow 0$ ce qui n'a pas de sens physique. Une autre manifestation du conflit peut être obtenu directement à partir de la solution (2.112) de l'équation FPK. Cette solution satisfait la condition initiale :

$$p(x, 0) = \delta(x) \quad (2.120)$$

qui est une particule à l'origine à l'instant $t = 0$. Pour tous les temps finis t la solution (2.112) ou (2.115) a probabilité non nulle de la particule d'être à toute distance arbitraire de point x , ce qui signifie la même chose : l'existence de vitesses infinies qui se propage à partir de $x = 0$ à $x \rightarrow \infty$ au cours d'un petit intervalle de temps arbitraire t . Une acceptation formelle de ce recours suite à l'entrée exponentiellement petite de la propagation avec des vitesses infinies. Une approche physique de l'obstacle à l'utilisation du FPK équation est d'abandonner la limite $\Delta t \rightarrow 0$ dans (2.103, 2.104 et 2.105), à introduire $\min \Delta t$, et à envisager une limite

$$\frac{t}{\min \Delta t} \rightarrow \infty \quad (2.121)$$

2.7 Le transport anormal (diffusion anormale)

La zone de mouvement chaotique dans les systèmes hamiltoniens n'est pas uniforme, en particulier la couche stochastique près du séparatrice. Il se compose d'îlots de stabilité de type KAM embarqués dans une mer dite stochastique. La structure de la couche stochastique est déterminée par les positions mutuelles et les tailles des îles-KAM. L'existence de ces îles conduit à l'écart du mouvement chaotique d'un processus de diffusion normale décrite par la marche aléatoire gaussienne. En général, un tel mouvement chaotique n'est pas décrit par le processus de transport normal aléatoire avec l'équation de Fokker-Planck. Elle est l'une des caractéristiques importantes des systèmes chaotiques déterministes. Le départ de la statistique du mouvement chaotique à partir de la gaussienne est appelé *diffusion anormale*. Il a été l'objet d'études approfondies depuis plus de deux décennies (Karney 1983) ; (Chirikov et Shepelyansky 1984).

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)^2 \rangle = 2Dt^\gamma, (\gamma \neq 1) \quad (2.122)$$

D détermine un coefficient de diffusion. Pour le processus de diffusion normale l'exposant $\gamma = 1$. Le cas $\gamma > 1$ décrit une superdiffusion, alors que $\gamma < 1$ décrit une Subdiffusion.

À l'heure actuelle, il est bien établi que le transport anormal se produit dans des zones partiellement chaotiques, où les régions de l'espace de phase du systèmes hamiltoniens avec un mouvement régulier sont intégrées dans une zone stochastique. En raison de la viscosité des orbites à la recherche de stabilité des îles KAM chaotiques alterne avec un comportement régulier. Ensuite, le type et le Taux du transport anormal dépendent de la structure de la couche stochastique qui est déterminé par les positions mutuelles des îles KAM et leur taille. Actuellement plusieurs approches théoriques ont été développées pour décrire la diffusion anormale dans les systèmes hamiltoniens chaotiques. Parmi eux il faut mentionner la méthode du temps continu de la marche aléatoire (CTRW) (voir, par exemple, Metzler et Klafter 2000)), les équations cinétiques fractionnaires (voir ZaSlavsky 2002)

2.7.1 Le modèle étudié par S. S. Abdullaev

Considérons le pendule perturbé donné par l'Hamiltonien

$$H(x, p, t) = H_0(x, p) + \epsilon H_1(x, p, t) \quad (2.123)$$

$$H_0(x, p) = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos x \quad (2.124)$$

$$\epsilon H_1(x, p, t) = \epsilon \omega_0^2 (A \cos(x - \Omega t - \chi) + B \cos(x + \Omega t + \chi)) \quad (2.125)$$

Les quantités A et B décrivent les amplitudes des ondes qui se propagent dans les sens positif et négatif de l'axe x .

Nous allons étudier les propriétés statistiques des transports le long de l'axe x , en particulier, une advection et de diffusion en calculant le premier $\langle x \rangle$, et le second moments du déplacement spatial $\sigma^2(t)$ (2.122), respectivement, ainsi que les fonction de densité de probabilité (PDF) $P(x, t)$ pour une particule avec la position x à l'instant t en fonction de l'amplitude de perturbation ϵ .

Les Calculs des moments statistiques ont été effectuées en utilisant la separatrice map (2.34) ainsi que les intégrations numériques directes des équations de mouvement pour les hamiltoniens (2.123)-(2.125) en utilisant les intégrateurs symplectiques. Le paramètre adimensionnel est choisi égal à $\lambda = 4$, qui correspond la fréquence des perturbations $\Omega = 4.53236\omega_0$. Un ensemble de données initiales à $t = 0$ composé de $N = 5 * 10^3$ trajectoires ont été prises dans une région carrée centrée sur le point fixe hyperbolique ($x = \pi, p = 0$).

2.7.1.1 Diffusion anormale

Pour étudier une diffusion anormale, nous avons calculé les secondes moments $\sigma^2(t)$ (2.122) pour $A = B = 1$. Dans ce cas, la perturbation dans l'hamiltonien (2.123)-(2.125) agit de façon symétrique sur les particules voyageant dans la directions positive et négative le long de l'axe x , sans advection, c'est à dire la valeur moyenne $\langle x \rangle = 0$.

La figure. 2.11, montre la dépendance de $\sigma^2(t)$ sur l'amplitude des perturbations ϵ à deux instants différents : la courbe 1 correspond à $t = (2\pi/\Omega)*10^4$ et la courbe 2 à $t = (4\pi/\Omega)*10^4$.

Les courbes épaisses correspondent à l'intégration numérique des équations du mouvement, tandis que les courbes fines correspondent aux calculs de la séparatrice map [avec une moyenne sur $N = 10^4$ orbites]. On peut voir que la séparatrice map reproduit correctement les résultats des intégrations numériques directs avec une bonne précision relativement à la grande valeur de $\epsilon = 0.1$.

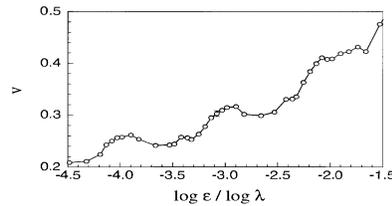


FIGURE 2.10 – Vitesse d'advection v en fonction des amplitudes des perturbations ϵ obtenu par l'intégration numérique directe. Redimensionnement des paramètres $\lambda = \exp(2\pi\omega_0/v) = 4$

La Fig.2.11 montre clairement la forte dépendance quasi-périodique du deuxième moment $\sigma^2(t)$ du paramètre de perturbation ϵ . Il s'agit des maxima locaux de $\sigma^2(t)$ à la valeurs $\epsilon_{max}^{(j)} = \lambda^{-j}\epsilon_{max}$, $\epsilon_{max} \approx 0.192$, et de minima locaux à $\epsilon_{min}^{(j)} = \lambda^{-j}\epsilon_{min}$, $\epsilon_{min} \approx 0.08$, $j = (1, 2, \dots)$. Pour les grandes perturbations de l'amplitude, $\epsilon > 0.1$, le comportement quasi-périodique de $\sigma^2(t)$ est moins prononcée. Lorsque le temps augmente, la dépendance périodique de $\sigma^2(t)$ sur ϵ devient encore plus prononcée.

Une dépendance quasi-périodique de $\sigma^2(t)$ sur ϵ est une conséquence de changement périodique de la structure de la couche stochastique à proximité des points selles. Le minima de $\sigma^2(t)$ correspondent aux situations où une majorité des particules sont collés.

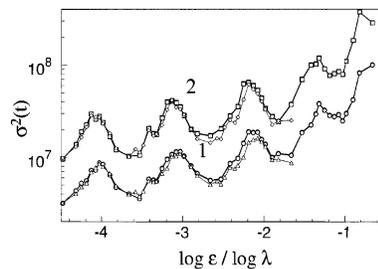


FIGURE 2.11 – Deuxième moment $\sigma^2(t)$ en fonction des amplitudes de perturbation ϵ obtenu par l'intégration numérique directe. lignes épaisses : la courbe 1 correspond à $t = (2\pi/\Omega) * 10^4$ et la courbe 2 à $t = (2\pi/\Omega) * 10^5$.

Pour des temps grands t , nous avons l'asymptotique de $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$. L'exposant γ est également une fonction quasi-périodique de $\lg \epsilon$ avec la période $\lg \lambda$. La dépendance de γ sur ϵ obtenue en utilisant la séparatrice map est montré dans la Fig.2.12. Le transport chaotique le long de la axe des x est superdiffusif ($\gamma > 1$) pour toutes les amplitudes de perturbation. L'exposant γ prend les valeurs maximales et Les valeurs minimales de ϵ de même que $\sigma^2(t)$. Les régions avec ($\gamma > 2$) correspondent aux régimes d'accélération.

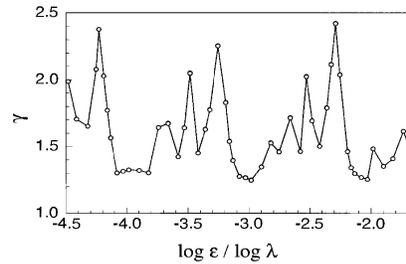


FIGURE 2.12 – Exposant γ pour des perturbations d'amplitude ϵ . Il est obtenu en ajustant $\sigma^2(t)$ avec $2Dt^\gamma$ dans l'intervalle de temps de $10^4 T_0 < t < 10^5 T_0$

2.7.1.2 La fonction de densité de probabilité (PDF)

La séparatrice map est également appliqué pour calculer la PDF $P(x, t)$. Elle a été calculé à l'instant $t = (2\pi/\Omega) * 10^4$ pour le paramètre de perturbation ϵ dans l'intervalle $[0.002, 0.1]$. Les statistiques sont prises en moyenne sur $N = 10^5$ orbites. La PDF est presque symétriquement localisée près de $x = 0$. La largeur $2\Delta\sigma$ de $P(x, t)$ est définie comme une zone $-\Delta\sigma < x < \Delta\sigma$, où une moitié des orbites est localisée, à savoir,

$$\int_{-\Delta\sigma}^{\Delta\sigma} p(x, t) dx = 0.5 \quad (2.126)$$

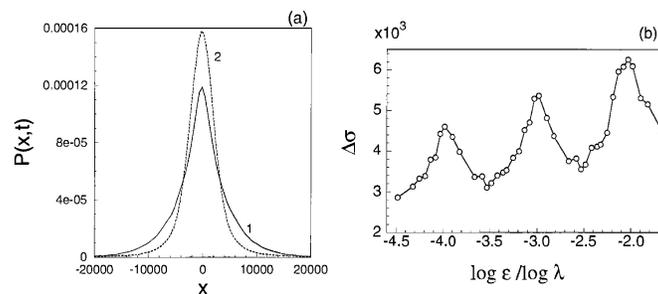


FIGURE 2.13 – (a) PDF $P(x, t)$ pour les deux valeurs de ϵ : la courbe 1 ; $\epsilon = 0.016$, la courbe 2 ; $\epsilon = 0.03$, (b) La largeur de la PDF $\Delta\sigma$ par rapport à l'amplitude des perturbations ϵ

La PDF $p(x, t)$ pour deux valeurs de ϵ et de la dépendance de la largeur $\Delta\sigma$ sur le paramètre de perturbation ϵ sont représentées dans la Fig.2.13 a, b, respectivement. la courbe 1 dans la Fig.2.13 a correspond à $\epsilon = 0.016$, et la courbe 2 à $\epsilon = 0.03$. Ces valeurs de ϵ correspondent aux maxima et minima locaux de $\Delta\sigma$. Semblable au deuxième moment $\sigma^2(t)$ il a aussi une forte dépendance périodique sur $\log \epsilon$ avec la période $\log \lambda$.

Il faut noter que la racine carrée du deuxième moment $\sigma(t)$ et la largeur de $\Delta\sigma$ décrivent la largeur des fonctions de densité de probabilité. Toutefois, dans le cas de transport anormal (non gaussienne), ils décrivent les différentes situations physiques du processus de transport. La largeur de $\Delta\sigma$ décrit la PDF proximité de sa partie centrale où la moitié des particules sont situés. La principale contribution à $\Delta\sigma$ provient des particules aléatoires et des particules piégées par les îles en raison d'adhésivité. D'autre part, les contributions à $\sigma(t)$ proviennent principalement des particules avec des mouvements de longue distance. Par conséquent, $\sigma(t)$ dépasse toujours la largeur $\Delta\sigma$: $\sigma(t) > \Delta\sigma$. Dans le cas de transport normal à la fois $\sigma(t)$ et $\Delta\sigma$ auraient la même nature physique.

La principale caractéristique de $P(x, t)$ est sa longue queue asymptotique pour $|x| \gg \Delta\sigma$. Cette dernière dépend de manière significative du paramètre de perturbation ϵ . La comparaison, par exemple, du deux PDF à $\epsilon = 0.048$ et $\epsilon = 0.08$ pour laquelle les moments seconds $\sigma^2(t)$ ont des valeurs maximum et minimum, respectivement, montre que tandis que la PDF pour $\epsilon = 0.048$ a une queue se décompose lentement, la PDF pour $\epsilon = 0.08$ se désintègre plus vite. Nous avons approché $P(x, t)$ asymptotiquement par la loi de puissance exponentielle, ces paramètres en fonction de $\log \epsilon$ apparaissent avec la période $\log \lambda$ similaire à celle de l'exposant γ dans l'asymptotique en fonction du temps de $\sigma^2(t)$.

$$p(x, t) \sim |x|^{-\alpha} e^{-\beta|x|} \quad (2.127)$$



FIGURE 2.14 – Les paramètres d'adaptation α et β pour une loi de puissance-exponentielle $p(x, t) \sim |x|^{-\alpha} e^{-\beta|x|}$ (a) : α par rapport à ϵ , (b) : β par rapport à ϵ à l'instant $t = (2\pi/\Omega) * 10^4$

globalement, les résultats montrent que le comportement asymptotique de la PDF $P(x, t)$ pour $|x| \gg \Delta\sigma$ dépend de manière significative de la structure de la couche stochastique, et il est principalement déterminée par les régions des îles extérieure de stabilité-KAM à la frontière du chaos.

Chapitre 3

Etude numérique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire la résolution numérique des équations de notre problème choisi qui est le pendule perturbé, discuté dans le chapitre précédent, cette résolution numérique nous permettra de voir la structure de portrait de phase de pendule perturbé et de détecter la présence du comportement régulière (îlots de stabilité) et chaotique en fonction du paramètre de perturbation ϵ , et comment cette structure nous permettra de comprendre l'effet du transport anormal avec l'utilisation des histogrammes.

3.2 Formulation du problème

Le pendule perturbé est un modèle mécanique qui manifeste le phénomène du transport anormal (diffusion anormale) dans les systèmes hamiltoniens chaotiques. La problématique consiste à étudier, premièrement la structure (la section de Poincaré) du pendule perturbé en fonction de la valeur de déphasage ϕ et le paramètre de perturbation ϵ , deuxièmement l'évolution de la distribution des vitesses moyennes, pour mieux comprendre l'effet du transport anormal. Avant de procéder à tout ça, nous devons d'abord déterminer les équations du mouvement du pendule perturbé et la méthode utilisée pour les résoudre pour qu'elles soient prêtes aux manipulations numériques.

3.2.1 Equations du mouvement d'un pendule perturbé

L'hamiltonien du pendule perturbé est donné par :

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - \omega_0^2 \cos x + \epsilon\omega_0^2 \cos(kx - \nu t + \phi) \quad (3.1)$$

Où ω_0 est la fréquence des petites oscillations du pendule non perturbé dont l'hamiltonien est

$$H_0 = \frac{1}{2m} \dot{p}^2 - \omega_0^2 \cos x \quad (3.2)$$

ϵ est le petit paramètre de perturbation adimensionnel, ν est la fréquence de la perturbation et ϕ est le déphasage .

Puisque, x et p sont deux variables conjuguées, on peut dériver les équations du mouvement de ce pendule à partir de l'hamiltonien (3.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous posons $m = 1$, nous aurons alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\omega_0^2 \sin x + \epsilon \omega_0^2 k \sin(kx - \nu t + \phi) \\ \frac{\partial x}{\partial t} = p \end{cases} \quad (3.4)$$

La distribution des vitesses moyennes de portrait de phase au bout de n période est donné par :

$$\bar{v}(n) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{p}^2} dt$$

3.2.2 La résolution des équations du mouvement

Les équations de Hamilton sont des équations continues, elles sont très difficiles à résoudre analytiquement pour des systèmes un petit peu compliqués. C'est pour cela qu'interviennent les méthodes numériques comme étant des méthodes approximatives permettant la résolution de cette complexité. Ceci se fait par la méthode d'intégrateur de Rung Kutta 4 (RK4) symplectique à pas fixe.

Les équations du mouvement (3.4) peuvent être intégrées numériquement en utilisant des méthodes standard bien connue, comme les méthodes de Runge-Kutta, appliquée au système des équations différentielles du premier ordre.

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (3.5)$$

Où $X = (x_1, \dots, x_{2N})$ sont les M variables, et $F = (f_1, \dots, f_{2N})$ sont $2N$ fonctions donnés. Cependant, ces méthodes ne sont pas du tout bien adaptées pour l'intégration des systèmes hamiltoniens, car ils ne préservent pas les intégrales discutées dans la section. 1.3.2. En particulier, si $X(t+h) = \hat{S}(h)X(t)$ est la solution numérique à l'étape h de temps alors le jacobien de la transformation à partir des coordonnées $X(t)$ au temps t à celles de $X(t+h)$ à $t = t+h$, en général, n'est pas exactement l'unité qu'il faut. Cela signifie que ce

type d'intégration numérique ne préserve pas l'espace des phases, et le système hamiltonien intégré numériquement devient un système dissipatif. Puisque ce dernier a des attracteurs, l'intégration numérique peut mener à un comportement entièrement incorrect le long du temps de la solution.

Pour résoudre ce problème, on fait appel à des méthodes symplectiques d'intégration des systèmes hamiltoniens (voir Sanz-Serna (1992) ; Sanz-Serna et Calvo (1993, 1994) ; Feng (1994)). L'idée de l'intégration numérique symplectique est que chaque étape de l'intégration est prévu pour être une transformation canonique (ou symplectique).

Dans les deux décennies dernières , des différentes méthodes d'intégration symplectique des systèmes hamiltoniens ont été développés. Les méthodes symplectiques peuvent être grossièrement divisées en deux groupes. Le premier d'entre eux comporte des méthodes qui sont basées sur le formalisme hamiltonien. Le deuxième groupe des méthodes utilise des méthodes bien connues, par exemple, les formules modifiées de Runge-Kutta (intégrateur RK4 symplectique à pas fixe), telles que leurs coefficients satisfont à certaines conditions. En général, les deux groupes des méthodes sont implicites, c'est à dire, la variable X_{k+1} , après une étape de l'intégration n'est pas explicitement exprimé à travers ses valeur précédente X_k . Par exemple, dans l'approximation simple, il est déterminé par une équation la méthode numérique symplectique de Runge-Kutta explicite ont été proposées pour les particuliers des systèmes hamiltoniens à variables séparables : $H(p, q) = T(p) + U(q)$. Ci-dessous nous donnons des formules explicites pour l'intégrateur symplectique

$$(q(t+h), p(t+h)) = \hat{S}(q(t), p(t)) \quad (3.6)$$

Développée par[61]. Il est donné par le texte suivant la séquence des valeurs intermédiaires $(Q_j, P_j), j = 1, \dots, s$:

$$P_i = p(t) + h \sum_j^i b_j F(Q_{j-1}) \quad (3.7)$$

$$Q_i = q(t) + h \sum_j^i a_j g(P_{j-1}) \quad (3.8)$$

Avec $(Q_0, P_0) = (q(t), p(t))$ et $(q(t+h), p(t+h)) = (Q_s, P_s)$.

Dans les équations (3.7 et 3.8)

$$g(p) = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$F(q) = -\frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

sont les gradients.

L'intégrateur symplectique contient les coefficients $a_i, b_j (i = 1, \dots, s)$. Ils sont énumérés dans [61].

La précision des intégrateurs symplectiques peut être mesurée par le degré de conservation de l'énergie. Supposons que l'équation symplectique (3.6) avec le pas de temps h sont exactes

pour un hamiltonien dépendant du temps $K(p, q, t)$ qui se rapproche de l'hamiltonien original $H(p, q)$. La déviation de H à K peut servir comme une bonne mesure de la précision de la méthode.

Dans notre programme, nous utilisons l'intégrateur symplectique du cinquième ordre ($s=6$) pour l'intégration numérique des systèmes hamiltoniens avec un pas fixe égale à $1/20$.

3.2.3 Réalisation du programme du système étudié

Pour passer à la résolution numérique, nous avons utilisé le logiciel Fortran et le logiciel Matlab. Un programme Fortran pour calculer les positions, les impulsions, et les vitesses dans l'espace des phases. Ce programme contient deux parties, la partie des déclarations et la partie des instructions.

Dans la partie des déclarations, on définit les objets qui sont manipulés par le programme, on déclare toutes les variables de notre programme par l'utilisation des modules. Nous avons utilisé le module des données initiales qui permet de déclarer les données initiales, d'après la méthode utilisée qui est l'intégrateur de Rung Kutta 4 (RK4) symplectique à pas fixe, nous avons fixé le pas à 0.05 , nous avons aussi déclaré le nombre des périodes égale à 320 , le nombre des particules égale à 256 , la valeur de la fréquence ω_0^2 égale à 0.7000 , de plus le déphasage et le paramètre de perturbation.

Tandis que, la partie d'instruction est la partie qui consiste à dérouler toutes les instructions de la partie exécutable de programme principale. Dans cette partie nous avons utilisé aussi le module d'intégrateur pour faire des itérations sur les équations trouvées par la méthode utilisée, avec l'utilisation d'un autre module qui permet d'initialiser les valeurs $de a_i$ et $b_i (i = 1, \dots, s)$. Nous utilisons aussi un autre module qui contient le fichier ".DAT" pour enregistrer les résultats de la manipulation. Nous utilisons tout ça dans le programme principale dans une boucle qui permet de donner les valeurs des positions, impulsions et vitesses.

Après la réalisation du programme numérique en Fortran, nous avons fait des manipulations sous Matlab pour voir l'évolution et le changement de la structure de l'espace des phases de notre système Hamiltonien. En jouant sur le paramètre de perturbation ϵ et le paramètre de déphasage ϕ .

Nous avons réalisé des histogrammes sous Matlab pour voir l'évolution de la distribution des vitesses moyennes avec l'utilisation des résultats obtenus dans le programme Fortran.

Il est à noter que la validité du travail est faite en comparant nos résultats à ceux qu'on a pu trouver dans la littérature. On remarque bien que les deux figures (3.1 et 3.2) se ressemblent en matière de structures contenues dans chacune des deux figures. Il y a une légère différence qui est dû : premièrement, à la nature intrinsèque du phénomène du chaos et deuxièmement aux calculateurs utilisés pour faire les manipulations numériques et aussi au logiciels traduisant les résultats sous forme de figure (MATLAB).

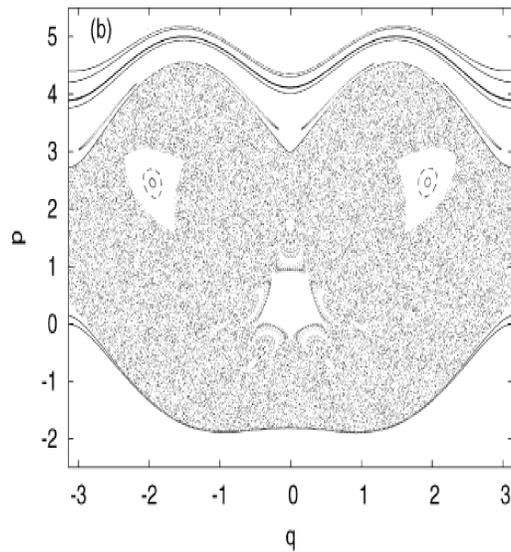


FIGURE 3.1 – Section de Poincaré du hamiltonien (3.1) pour les paramètres suivants : $\nu = 5, k = 2, \omega_0^2 = 1, \epsilon = 1$ (figure tirée de [56])

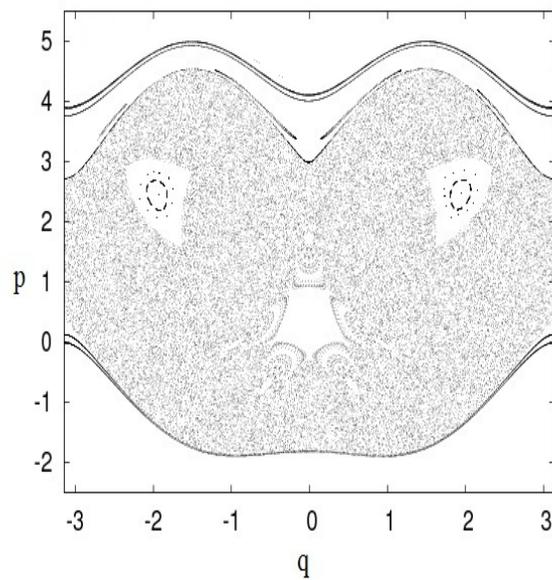


FIGURE 3.2 – Section de Poincaré du hamiltonien (3.1) pour les paramètres suivants : $\nu = 5, k = 2, \omega_0^2 = 1, \epsilon = 1$ d'après notre programme

3.3 Analyse des résultats et leur discussion

Dans nos calculs numériques, nous avons fixé le nombre des particules à $N = 256$, la valeur de l'amplitude à 0.700, le paramètre $k = 2$, la fréquence $\nu = 5$, le pas du temps $\Delta t = 0.05$, le nombre de diagnostique à 112000, le nombre des périodes à 320 et nous jouons sur le paramètre de déphasage et le paramètre de perturbation ϵ .

3.3.1 Le cas de déphasage

La figure. 3.3 présente les résultats de la manipulation pour le paramètre de perturbation $\epsilon = 1$ et pour des différentes valeurs de déphasage.

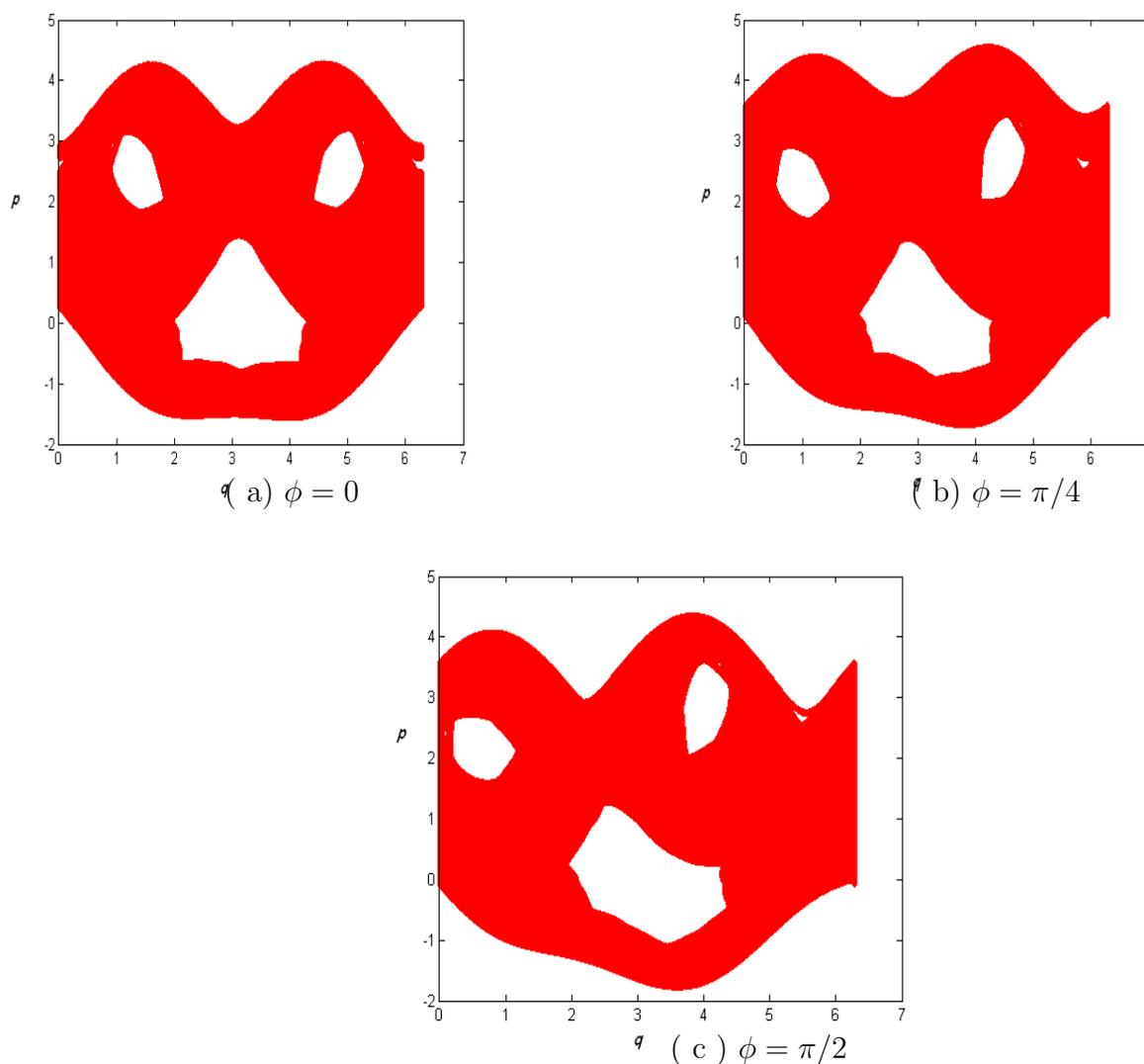


FIGURE 3.3 – portrait de phase pour des différents valeurs de déphasage et pour $\epsilon = 1$

La structure de l'espace des phases, la section de Poincaré, est obtenu par la visualisation des intersections des trajectoires dans le plan (q, p) .

L'espace de phase du système se compose de zone chaotique (la mer chaotique, représentée dans les trois figures par la couleur rouge), peupler par d'îlots au sein desquels des trajectoires régulières sont présentes.

Lorsque le déphasage ($\phi = 0$) nous avons une symétrie au centre du figure par rapport à l'axe des positions (q). Cette symétrie disparaît lorsqu'on augmente la valeur de déphasage. Donc lorsque ($\phi = \frac{\pi}{4}$) nous avons une déformation dans la structure du système, dans la zone chaotique (et plus précis dans la couche stochastique). Cette déformation augmente lorsque le paramètre de déphasage augmente, lorsque ($\phi = \frac{\pi}{2}$) nous avons une petite déformation par rapport à la première ($\phi = \frac{\pi}{4}$) et elle est plus grande par rapport à ($\phi = 0$). Mais cette déformation c'est juste une translation vers le coté droite qui est dû à l'écarte entre les ondes et les particules.

3.3.2 La structure du portrait de phase

La figure. 3.4 nous montre le comportement des trajectoires dans l'espace des phases pour une valeur de déphasage $\phi = 0$ et pour des différents valeurs du paramètre de perturbation.

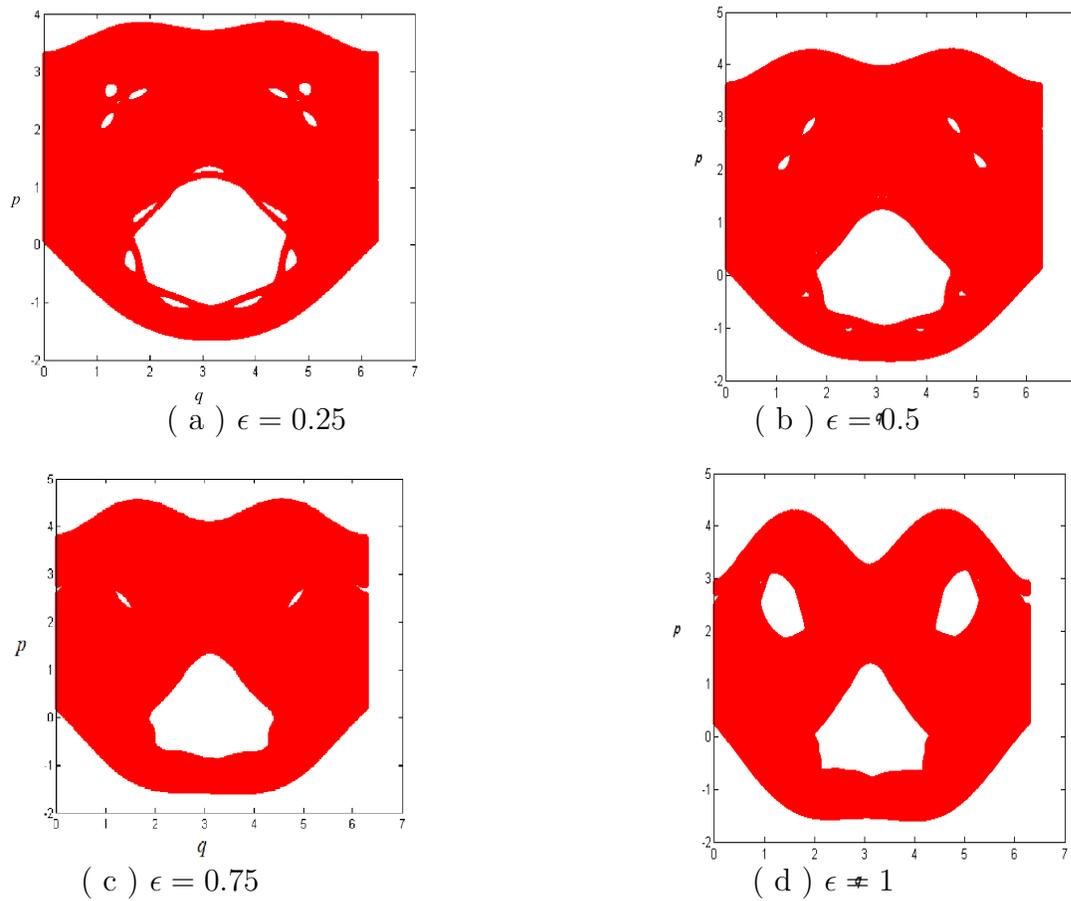


FIGURE 3.4 – Le portrait de phase pour des faibles perturbations

La figure 3.4 correspond à l'espace des phases pour des différentes valeurs du paramètre de perturbation $\epsilon = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ respectivement. Pour $\epsilon = 0.25$ nous avons une mère chaotique (la couleur rouge) plein d'îlots de stabilité (les trous dans les milieux des figures, correspondants à des trajectoires régulières). Lorsque l'on augmente le paramètre de perturbation, ces îlots sont déformés et diminuent lorsque $\epsilon = 0.5$. Ces îlots augmentent lorsque $\epsilon = 0.75$ et il y a des îlots qui disparaissent et l'espace des phases devient chaotique.

Ce mouvement chaotique commence toujours dans les environs de la séparatrice, qui est la frontière entre la résonance non linéaire et les tores KAM qui se trouvent juste à l'extérieur. La région du mouvement chaotique parfois appelée "la couche stochastique". Les trajectoires qui commencent n'importe où dans la région chaotique peuvent diffuser dans toute cette région. Pour des grandes valeurs de ϵ , tous les tores KAM seront détruits et l'espace des phases régulier devient chaotique.

Lorsque $\epsilon = 1$ nous avons une propagation dans les îlots. Pour comprendre ce qui se passe à la frontière d'un îlot dans la structure de portrait de phase, nous avons fait un zoom pour $\epsilon = 1$.

Remarque :

La concentration dans la mère chaotique correspond à notre programme qui nous avons fait pour des temps très long ($t = 10^4$) afin de voir le mouvement des trajectoires (le transport des particules) dans les zones complexes (la frontière entre la mère chaotique et les îlots de stabilité).

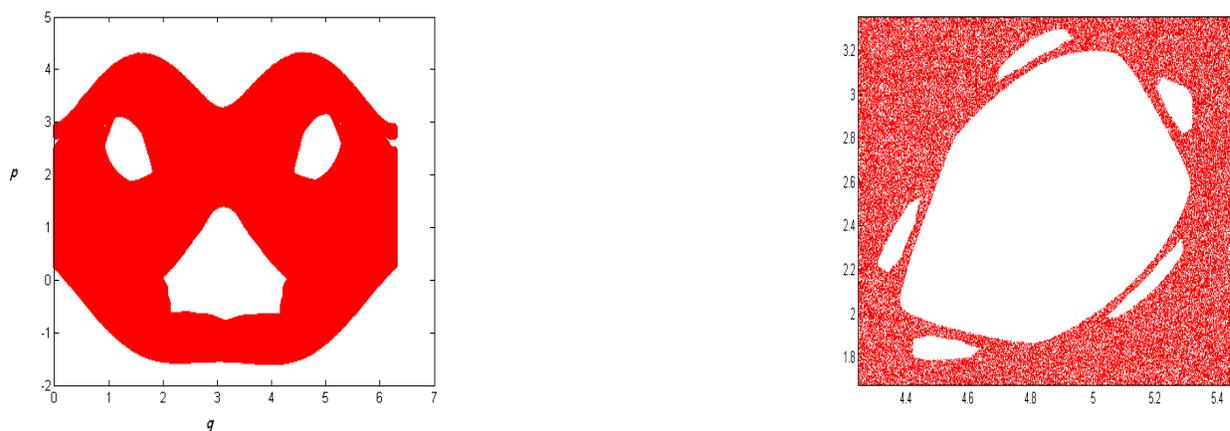


FIGURE 3.5 – La figure à droite est un zoom d'un îlot à gauche illustrant des îlots autour d'îlot. L'agrandissement montre la structure d'auto-similarité.

La figure. 3.5 nous permet de voir que chaque île, résonance de mouvement régulier, est généralement entourés par des résonances filles plus petites, qui sont à leur tour, entourées par des résonances plus petits, et ainsi de suite. Cette structure fractale montre que les résonances non linéaires se produisent sur toutes les échelles dans un système hamiltonien chaotique.

L'espace des phases se compose des structures fractales composées des régions régulières ainsi que des régions stochastiques ou chaotiques. La séparation de l'espace des phases en régions régulières et régions stochastiques est difficile en raison de la nature complexe des frontières.

Les différences dans l'espace des phases (topologie "régions régulières et autre chaotiques") sont également importantes pour comprendre le problème de la cinétique (le mouvement) et le transport des particules entre elles. Pour cela nous avons fait une autre étude pour mieux comprendre le mouvement des particules entre les zones chaotique et régulière qui est la distribution des vitesses moyennes des particules.

3.3.3 Les distributions des vitesses dans l'espace des phases

3.3.3.1 la distribution pour $\epsilon = 0.25$

Les histogrammes des distributions des vitesses sont représentés dans la figure. 3.6 pour $\epsilon = 0.25$.

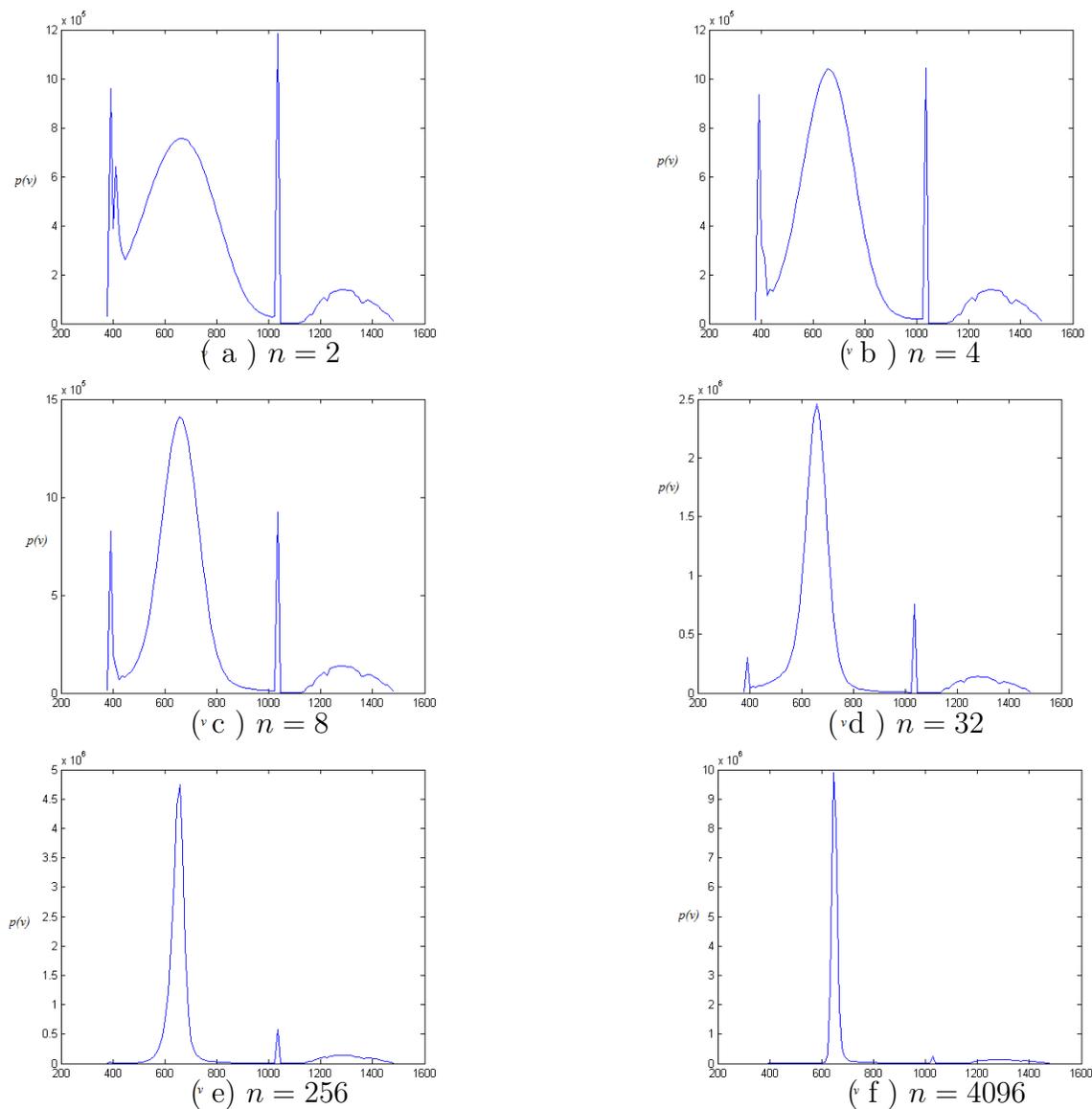


FIGURE 3.6 – Distribution des vitesses moyennes dans l'espace des phases pour $\epsilon = 0.25$

3.3.3.2 la distribution pour $\epsilon = 0.5$

La figure.3.7 représente les résultats pour $\epsilon = 0.5$.

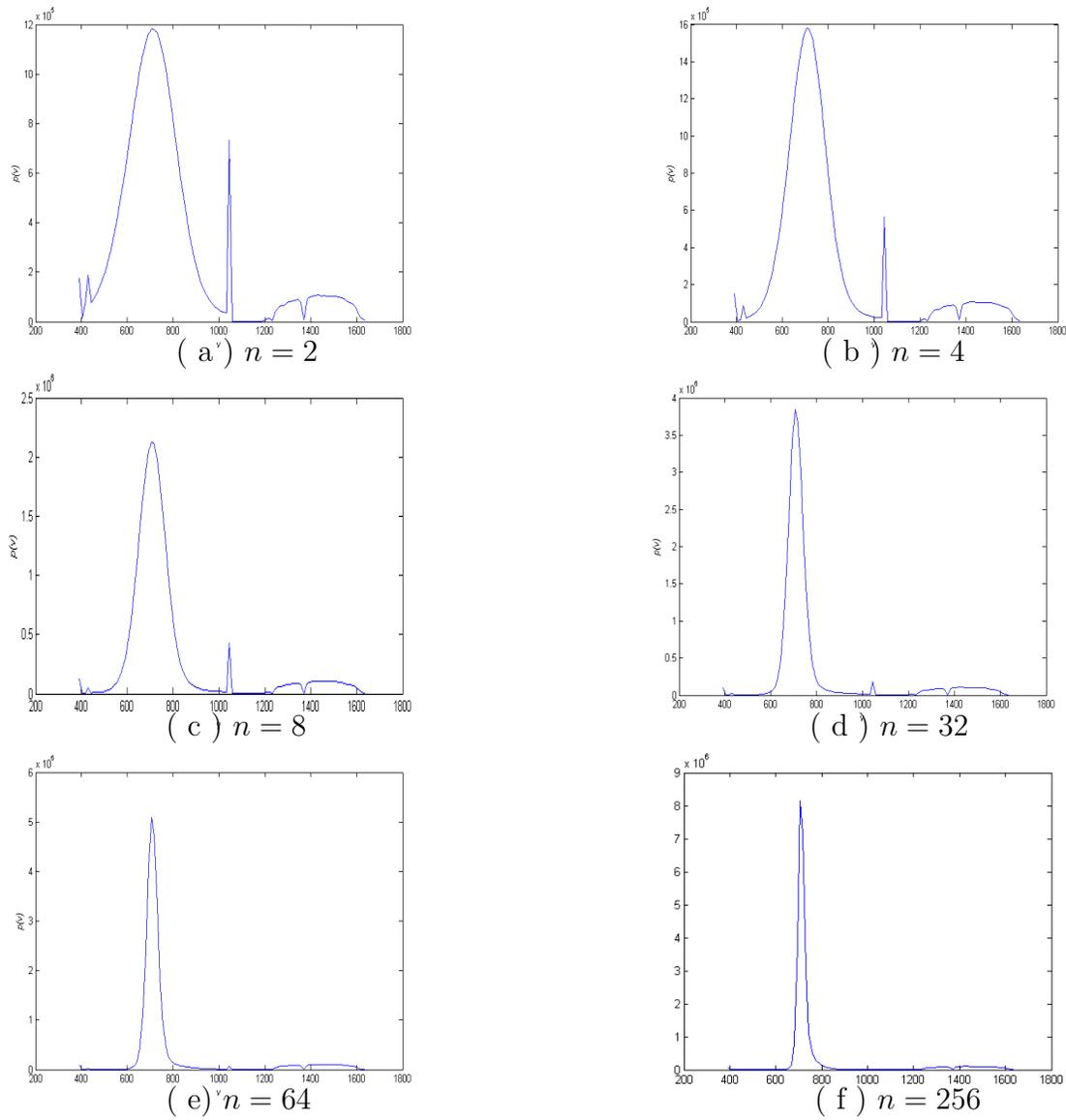
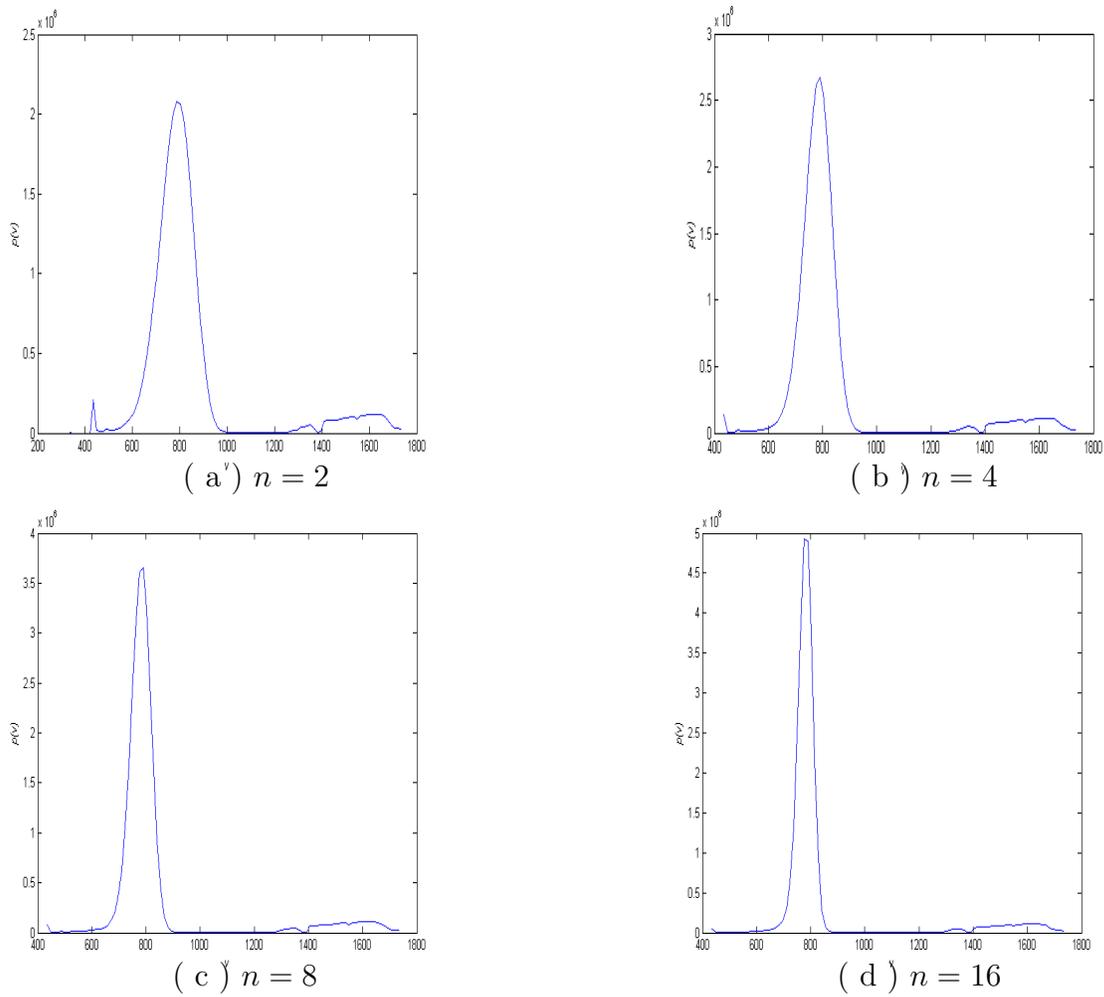
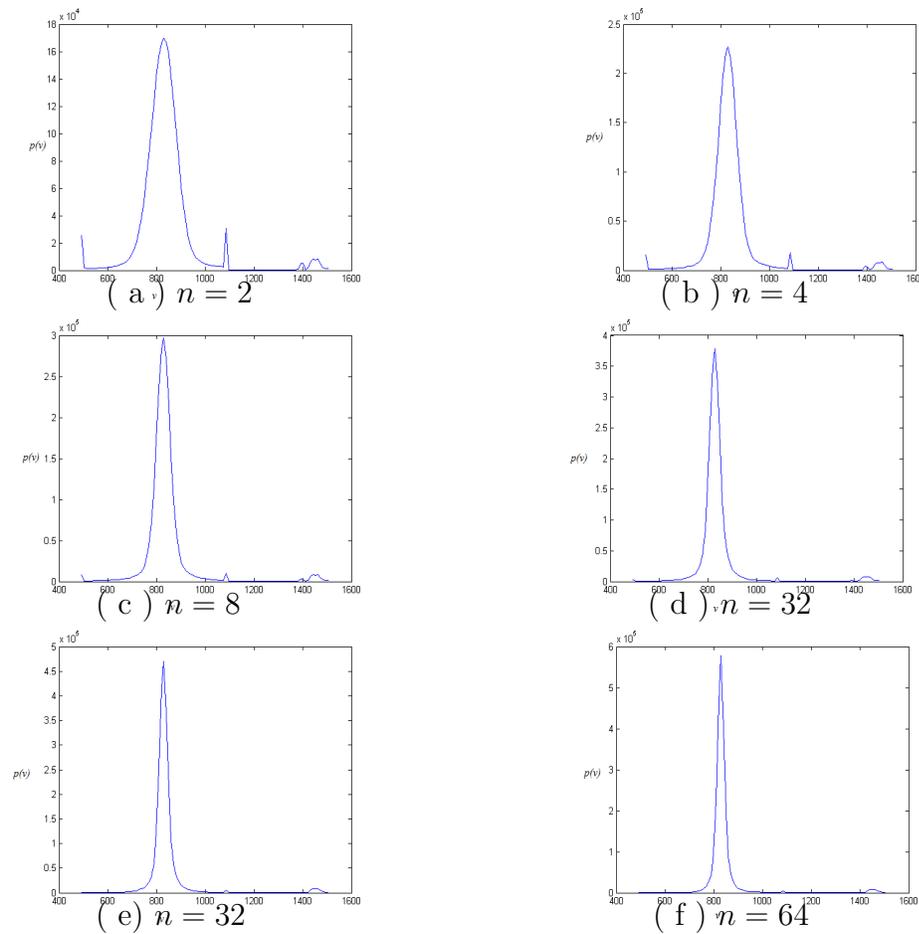


FIGURE 3.7 – Distribution des vitesses moyennes dans l'espace des phases pour $\epsilon = 0.5$

3.3.3.3 la distribution pour $\epsilon = 0.75$ FIGURE 3.8 – Distribution des vitesses moyennes dans l'espace des phases pour $\epsilon = 0.75$

3.3.3.4 la distribution pour $\epsilon = 1$ FIGURE 3.9 – Distribution des vitesses moyennes dans l'espace des phases pour $\epsilon = 1$

La figure. 3.6, nous montre pour $\epsilon = 0.25$ que lorsque le temps augmente, les pics secondaires diminuent et tendent vers la distribution principale lorsque le nombre de période égale à $n = 4096$.

La figure. 3.7, nous permet de voir pour $\epsilon = 0.5$ que les pics secondaires de la distribution diminuent, ces pics disparaissent et tend vers le pic principale lorsque $n = 256$.

Mais dans la figure. 3.8, il y a un petit pic secondaire qui diminue et tend vers le pic principale dans un nombre de période assez petit que les deux premiers cas à $n = 16$ lorsque le paramètre de perturbation est égale à $\epsilon = 0.75$.

La figure. 3.9, va nous permet de voir que pour $\epsilon = 1$ il y a deux petits pics secondaires qui diminuent lorsque on a une évolution dans le temps et ils disparaissent lorsque $n = 32$.

Les figures. 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, nous montre que lorsque on augmente le paramètre de perturbation la hauteur des pics secondaire diminue.

Nous pouvons maintenant décrire facilement une partie des trajectoires présentée dans la Figure. 3.4. En fait le schéma est plus compliqué à la frontière entre les zones chaotiques et les îlots de stabilité mais d'après les figures 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, les particules sont piégée autour des îlots qui représentent par les pics. lorsque on augmente dans le temps il y a des particules piégés autour des petites îlots qui tend vers l'îlots principale et ca revient à la diminution de la hauteur des pics secondaires et avec l'augmentation des particules autour du pic principale, mais il y a des particules piégées qui restent coller autour des petites îlots pendent des temps longs, jusqu' au nombre des périodes $n = 4096$ pour $\epsilon = 0.25$, $n = 256$ pour $\epsilon = 0.5$

ces résultats confirment qu'il y a collage et piégeage des particules autour des îlots de stabilité. D'après la figure de portait de phase pour $\epsilon = 0.25$, nous avons un nombre assez grande d'îlots de stabilité par rapport aux autres structures, même d'après les figures de distribution, nous savons que le collage des trajectoires des particules qui est représenté par la hauteur des pics secondaire lorsque $\epsilon = 0.25$ est un peut grand par rapport aux autres distributions pour des différents paramètres de perturbations, et ainsi de suite, lorsque les îlots de stabilité diminuent le collage et le piégeage des particules diminuent aussi. Donc le mouvement des particules devient alors non diffusif et est appelé anormal.

3.4 Conclusion

D'après les résultats que nous avons trouvé, nous avons tiré les conclusions suivantes :

Premièrement, concernant le paramètre de déphasage sur la déformation de la structure de portrait de phase. Donc y a pas d'influence du paramètre de déphasage sur la structure de portrait de phase.

Deuxièmement, concernant l'influence du paramètre de perturbation sur la structure de l'espace des phases. Nous avons constaté que plus la constante de perturbation augmente, la structure de l'espace des phases change, c'est à dire, il suffit que le paramètre de perturbation augmente, les îlots de stabilité diminuent et le système devient chaotique.

Troisièmement, concernant l'influence du paramètre de perturbation sur les pics des distributions, lorsque le paramètre de perturbation augmente, les pics secondaires diminuent, c'est à dire, plus le système devient chaotique plus les pics secondaires se réduisent et la distribution devient une distribution gaussienne. Cela se fait à cause du piégeage et collage des particules à la frontière entre la mère chaotique et les îlots de stabilité où il y a un transport anormal dans les trajectoires des particules.

Conclusion Générale

L'objectif de ce mémoire est de montrer et étudier numériquement le comportement du phénomène du transport anormal qui consiste à faire une application sur le modèle de pendule perturbé. Ainsi, de voir l'impact du paramètre de perturbation ϵ sur la structure de portrait de phase de notre modèle, et comment ce paramètre influe sur le transport anormal. Ce travail est reparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous avons exposé la dynamique des systèmes hamiltoniens chaotiques. Nous avons défini le système dynamique puis donné les différents types. Nous avons, ensuite, pris un type du système dynamique qui est le système hamiltonien et nous avons donné sa définition et ses propriétés. Pour bien comprendre les systèmes dynamiques hamiltoniens, nous avons fait la représentation de son mouvement dans le diagramme de l'énergie potentielle et nous avons introduit l'espace des phases, la section de Poincaré, et les points fixes. Nous avons faiblement perturbé le système hamiltonien et nous avons remarqué comment les tors du système se déforment par la théorie K.A.M. A la fin, nous avons fait un petit historique sur le chaos. Ainsi nous avons parlé des exposants de Lyapunov qui donnent la structure du système dans l'espace des phases.

dans le deuxième chapitre nous avons choisi le modèle d'un système dynamique chaotique qui est le pendule perturbé, et nous avons fait une étude sur la structure de son portrait de phase. Dans une forme simplifiée, la dynamique chaotique peut être décrite par une équation cinétique du type FPK (équation de la diffusion normale). Une analyse plus appliquée mène au procédé de la diffusion anormale (le transport anormal) pour lequel :

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)^2 \rangle = 2Dt^\gamma, (\gamma \neq 1) \quad (3.9)$$

lorsque l'exposant $\gamma = 1$ nous avons une diffusion normale

lorsque l'exposant $\gamma > 1$ nous avons une super-diffusion

lorsque l'exposant $\gamma < 1$ nous avons une sub-diffusion

La diffusion anormale dans l'espace de phase peut être induite par la présence des zones

singulières avec une structure hiérarchique des îles.

Dans le troisième chapitre, nous avons fait la résolution numérique des équations de notre problème choisi qui est le pendule perturbé, cette résolution numérique nous a permis de voir la structure de portrait de phase de pendule perturbé et de détecter la présence du comportement régulière (îlots de stabilité) et chaotique en fonction du paramètre de perturbation ϵ , et comment cette structure nous permet de comprendre l'effet du transport anormal avec l'utilisation des histogrammes. Nous avons discuté les figures obtenues pour voir comment se manifeste la mixité du système (mère chaotique et îlots de stabilité) dans le phénomène du transport anormal.

ce travail rentre dans un projet d'étude des phénomènes dits cinétiques étranges ou transport anormal, ils s'agit d'utiliser tous ces calculs pour étudier en détail le problème de l'auto-similarité (structure fractal) et la complexité des systèmes hamiltoniens, en d'autres termes le rapprochement et l'éloignement des orbites les une des autres.

Annexe A

Fonction elliptique de Jacobi

Introduction

En mathématiques, les fonctions elliptiques de Jacobi sont des fonctions elliptiques, d'une grande importance historique.

Introduites par Carl Gustav Jakob Jacobi vers 1830, elles ont des applications directes, par exemple dans l'équation du pendule. Elles présentent aussi des analogies avec les fonctions trigonométriques, qui sont mises en valeur par le choix des notations sn , cn et dn , qui rappellent \cos et \sin . Les problèmes pratiques (physiques) font plus appel aux fonctions de Jacobi.

Rappelons qu'une fonction elliptique est une fonction définie sur le plan complexe, uniforme, non-constante et doublement périodique (une période est réelle, l'autre imaginaire). Il existe 12 fonctions elliptiques de Jacobi. Chacune correspond à une flèche reliant un sommet du rectangle à un autre. Ces sommets sont, par convention, notés s , c , d et n . Le rectangle peut être considéré dans le plan complexe, en plaçant s à l'origine, c à un point K sur l'axe des réels, d à un point $K + iK'$ et n à un point iK' sur l'axe imaginaire. Les nombres K et K' sont appelés "quarts de période".

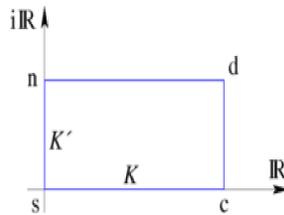


FIGURE A.1 – le rectangle de Jacobi

Les 12 fonctions elliptiques de Jacobi sont alors sc , sd , sn , cs , cd , cn , ds , dc , dn , ns , nc et nd .

Intégrale elliptique du premier type

L'intégrale elliptique du premier type dépend de deux paramètres : l'amplitude ϕ et un angle α .

$$F(\phi, \alpha) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \quad (\text{A.1})$$

Lorsque $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on peut effectuer le changement de variable simple suivant :

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta \\ dt &\longleftrightarrow \cos d\theta \\ dt &\longleftrightarrow \sqrt{1 - t^2} d\theta \\ E(\phi, \alpha) &= \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha t^2)(1 - t^2)}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

On utilise alors le paramètre $m = \sin^2 \alpha$, ($0 \leq m \leq 1$), en notant :

$$E(\phi, \alpha) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - mt^2)(1 - t^2)}} \quad (\text{A.3})$$

Intégrale elliptique du deuxième type

L'intégrale elliptique du deuxième type est définie avec les deux mêmes paramètres : l'amplitude ϕ et un angle α .

$$E(\phi, \alpha) = \int_0^\phi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.4})$$

On peut effectuer le même changement de variable simple lorsque $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta \\ dt &\longleftrightarrow \cos d\theta \\ dt &\longleftrightarrow \sqrt{1 - t^2} d\theta \end{aligned}$$

on utilise encore le paramètre $m = \sin^2 \alpha$, ($0 \leq m \leq 1$). Ce qui donne :

$$E(\phi, m) = \int_0^{\sin \phi} \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}} dt \quad (\text{A.5})$$

Intégrales elliptiques complètes

Lorsque l'amplitude vaut $\frac{\pi}{2}$, on note les intégrales complètes :

$$K(\alpha) = F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \quad (\text{A.6})$$

et

$$E(\alpha) = E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.7})$$

On utilisera aussi le paramètre $k = \sin \alpha$. On notera dans ce cas pour $0 < k < 1$ qui s'appelle module :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.8})$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{A.9})$$

pour les petites valeurs de k

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 + k^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 (1 + \dots))\right)$$

Les fonctions de base de Jacobi (1827)

La fonction *sinus* de Jacobi : $sn(F, k) = \sin \phi(F, k)$.

La fonction *cosinus* de Jacobi : $cn(F, k) = \cos \phi(F, k)$.

Bibliographie

- [1] A. Lichtenberg, A. Leiberman, Regular and Chaotic Dynamics, Springer, Berlin, 1992.
- [2] G.M. Zaslavsky, Physica D 168-169 (2002) 292.
- [3] V. Latora, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 2104.
- [4] M.F. Shlesinger, G. Zaslavsky, J. Klafter, Nature 363 (1993) 31.
- [5] R.S. Mackay, J.D. Meiss, I.C. Percival, Physica D 13 (1984) 55.
- [6] A. Iomin, D. Gangardt, S. Fishman, Phys. Rev. E 57 (1998) 4054.
- [7] X. Leoncini, G.M. Zaslavsky, Phys. Rev. E 65 (2002) 046216.
- [8] R. Brown, Phil. Mag. 4 (1828) 161 ; Ann. Phys. Chem. 14 (1828) 294.
- [9] A. Fick, Ann. Phys. (Leipzig) 170 (1855) 50.
- [10] L. Bachelier, Ann. scientif. de l'ED cole norm. 17 (1900) 21.
- [11] B.D. Hughes, Random Walks and Random Environments, Vol. 1 : Random Walks, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [12] P.H. Cootner (Ed.), The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1964.
- [13] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, Princeton, 1967.
- [14] R. Becker, Theorie der WaKrme, Heidelberger TaschenbuK cher, Vol. 10, Springer, Berlin, 1966 ; Theory of Heat, Springer, Berlin, 1967.
- [15] W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron, The Langevin Equation, World Scientific, Singapore, 1996.
- [16] A.D. Fokker, Ann. Phys. (Leipzig) 43 (1914) 810.
- [17] N. Wax (Ed.), Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, New York, 1954.
- [18] M.F. Shlesinger (Ed.), The wonderful world of stochastics : a tribute to E.W. Montroll. Studies in statistical mechanics 12, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [19] N. Wiener, J. Math. and Phys. (MIT) 2 (1923) 131 ; Bull. Soc. math. (France) 52 (1924) 569 ; Acta Math. 55 (1930) 117 ; Amer. J. Math. 60 (1938) 897.

- [20] P. LeHvy, *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [21] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, Wiley, New York, 1971.
- [22] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, UK, 1990.
- [23] L.F. Richardson, *Proc. Roy. Soc.* 110 (1926) 709.
- [24] P.W.M. Blom, M.C.J.M. Vissenberg, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 3819.
- [25] G.H. Weiss, R.J. Rubin, *Adv. Chem. Phys.* 52 (1983) 363.
- [26] M.F. Shlesinger, *J. Stat. Phys.* 10 (1974) 421.
- [27] A. Blumen, J. Klafter, G. Zumofen, in : I. Zschokke (Ed.), *Optical Spectroscopy of Glasses*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [28] G.M. Zaslavsky, S. Benkadda, *Chaos, Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas*, Springer, Berlin, 1998.
- [29] H. Scher, M.F. Shlesinger, J.T. Bendler, *Phys. Today* 44 (1991) 26.
- [30] Q. Gu, E.A. Schiff, S. Grebner, R. Schwartz, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 3196.
- [31] B. Rinn, W. Dieterich, P. Maass, *Phil. Mag. B* 77 (1998) 1283.
- [32] A. Klemm, H.-P. MuK ller, R. Kimmich, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 4413.
- [33] M. Doi, S.F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [34] M. Porto, A. Bunde, S. Havlin, H.E. Roman, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 1667.
- [35] W. Young, A. Pumir, Y. Pomeau, *Phys. Fluids A* 1 (1989) 462.
- [36] E.R. Weeks, H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* 57 (1998) 4915.
- [37] W.D. Luedtke, U. Landmann, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 3835.
- [38] I. Sokolov, A. Blumen, J. Klafter, *Europhys. Lett.* 47 (1999) 152.
- [39] J. Klafter, A. Blumen, G. Zumofen, M.F. Shlesinger, *Physica* 168A (1990) 637.
- [40] J. Klafter, B.S. White, M. Levandowsky, in : W. Alt, G. Hoffmann (Eds.), *Biological Motion, Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 89, Springer, Berlin, 1990.
- [41] C.K. Matthews, K.E. van Holde, *Biochemistry*, 2nd Edition, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1996.
- [42] G.M. Viswanathan, V. Afanasyev, S.V. Buldyrev, E.J. Murphy, P.A. Prince, H.E. Stanley, *Nature* 381 (1996) 413.
- [43] S. Schaufler, W.P. Schleich, V.P. Yakovlev, *Europhys. Lett.* 39 (1997) 383.
- [44] R. Balescu, *Phys. Rev. E* 51 (1995) 4807.
- [45] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1983.

- [46] B. O'Shaughnessy, I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 455.
- [47] J. Bernasconi, W.R. Schneider, W. Wyss, *Z. Phys. B* 37 (1980) 175.
- [48] V. Seshadri, B.J. West, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 79 (1982) 4501.
- [49] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II, Solid State Sciences, Vol. 31*, Springer, Berlin, 1985.
- [50] R. Muralidhar, D. Ramkrishna, H. Nakanishi, D. Jacobs, *Physica A* 167 (1990) 539. R. Metzler, J. Klafter / *Physics Reports* 339 (2000) 177-73
- [51] I. Oppenheim, K.E. Shuler, G.H. Weiss (Eds.), *Stochastic Processes in Chemical Physics : The Master Equation*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1977.
- [52] W.R. Schneider, W. Wyss, *J. Math. Phys.* 30 (1989) 134.
- [53] R.L. Bagley, P.J. Torvik, *J. Rheol.* 27 (1983) 201, *J. Rheol.* 30 (1986) 133.
- [54] P.L. Anderson, M.M. Meerschaert, *Water Resour. Res.* 34 (1998) 2271.
- [55] R. Metzler, E. Barkai, J. Klafter, *Physica A* 266 (1999) 343.
- [56] X. Leoncini, C. Chandre, O. Ourrad, *Ergodicité, collage et transport anomal*, Science-Direct C. R. *Mecanique* 336 (2008) 530–535
- [57] G.M. Zaslavsky, N.N. Filonenko, *Stochastic instability of trapped particles and conditions of applicability of the quasi-linear approximation*, *Soviet Phys. JETP* 25 (1968) 851.
- [58] C. Chandre, H.R. Jauslin, *Renormalization-group analysis for the transition to chaos in hamiltonian systems*, *Phys. Rep.* 365 (2002) 1–64.
- [59] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian chaos and Fractal Dynamics*, Oxford University Press.
- [60] S. S. Abdullaev, *Construction of mappings for Hamiltonian systems and their applications*, *Lectures notes in physics*, springer 2006.
- [61] R.I. McLachlan, P. Atela, *The accuracy of symplectic integrators*, *Nonlinearity* 5 (1992) 541.

Résumé

L'importance des systèmes dynamiques hamiltoniens est en même temps pratique et fondamentale. En effet les systèmes constitués d'un grand nombre de particules qui interagissent entre elles étudiés en physique statistique sont des exemples de systèmes hamiltoniens multidimensionnels. Les mécanismes conduisant au transport anormal des systèmes hamiltoniens font l'objet de plusieurs études très récentes. En effet plusieurs chercheurs sont inspirés des travaux de Poincaré sur la représentation des états des systèmes dans l'espace des phases. Pour cette représentation du système dans les sections de Poincaré révèle des mouvements de particules qui passent d'états réguliers à des états extrêmement chaotiques. L'étude statistique des vitesses des particules nous montre que le transport est anormal. Nous menons un travail statistique sur les vitesses des particules en utilisant le modèle du pendule perturbé. Les premiers résultats confirment la nature anormale du transport. Dans notre travail, nous avons essayé de comprendre ce concept de transport anormal dans les systèmes dynamiques hamiltoniens. Dans un premier temps nous avons fait une étude bibliographique sur les systèmes dynamiques hamiltoniens et sur le transport dans ces systèmes ensuite élaboré une étude théorique pour expliquer le transport anormal et enfin une simulation numérique pour un système à un degré et demi de liberté est faite pour une bonne illustration de la diffusion anormale dans l'espace des phases.

Mots-clés : Systèmes Dynamiques, Chaos hamiltonien, Diffusion aléatoire

Abstract

The importance of Hamiltonian dynamical systems is both practical and fundamental. Indeed systems involving a wide number of particles interacting with each other studied in statistical physics are examples of multi-dimensional Hamiltonian systems. The mechanisms leading to anomalous transport in Hamiltonian systems are the subject of several very recent studies. In fact several researchers are inspired by the work of Poincaré on the representation of systems states in phase space. Representation of this system in the Poincaré sections shows than particles pass from regular states to extremely chaotic states. The statistical study of particle velocities shows anomalous transport phenomena. We carry a statistical work about the particle velocities using the model of the perturbed pendulum. First results confirm the anomalous nature of the transport. In our study, we attempted to understand the anomalous transport concept in Hamiltonian dynamical systems. Firstly we did a bibliographical study on Hamiltonian dynamical systems and on transport in these systems. We have developed a theoretical study to explain the anomalous transport and a numerical simulation for a system with one and half degree of freedom is made to illustrate the anomalous diffusion in phase space.

Keywords: Dynamical Systems, Hamiltonian Chaos, Random diffusion

ملخص

إن أهمية الجمل الديناميكية الهاميلتونية هي في نفس الوقت من الناحيتين التطبيقية والأساسية. في الواقع الجمل التي تحتوي على عدد كبير من الجسيمات التي تتفاعل مع بعضها البعض و المدروسة في الفيزياء الإحصائية هي أمثلة للجمل الهاميلتونية المتعددة الأبعاد. إن الآليات التي تؤدي إلى التنقل الشاذ في الجمل الهاميلتونية هي موضوع العديد من الدراسات الحديثة. في الواقع هي مستوحاة من قبل العديد من الباحثين على عمل بوانكاريه في تمثيل حالات الجمل في فضاء الطور. إن التمثيل لهذه الجمل في مقاطع بوانكاريه يظهر حركة الجسيمات التي تمر من الحالات المنتظمة إلى الحالات الفوضوية للغاية. الدراسة الإحصائية لسرعات الجسيمات تظهر لنا بأن التنقل هو تنقل شاذ. قمنا بعمل إحصاء لسرعات الجسيمات باستخدام نموذج النواس المضطرب. النتائج الأولية تؤكد الطبيعة الشاذة للتنقل. في دراستنا، حاولنا أن نفهم هذا التنقل الشاذ في الجمل الديناميكية الهاميلتونية. أولاً قمنا بدراسة مكتنية للجمل الديناميكية الهاميلتونية و وسائل التنقل في هذه الجمل ثم وضعنا دراسة نظرية لتفسير التنقل الشاذ و في الأخير قمنا بمحاكاة عددية لجملة ذات درجة ونصف من الحرية لتوضيح الإنتشار الشاذ في فضاء الطور.

كلمات البحث: الجمل الديناميكية، الفوضى الهاميلتونية، الإنتشار العشوائي.