

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA de Bejaia
Faculté de la Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Présenté par *M^{elle}*. GUERDOUH Dhehbiya

En vue de l'obtention du diplôme de Magistère en Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Thème

Construction et utilisation des
éléments infinis tridimensionnels
dans le traitement des problèmes
à domaines ouverts

Soutenu publiquement le 29/12/2012 devant le jury suivant :

Président	Mr AIT SAIDI	Ahmed	Professeur	Univ. de Béjaia
Rapporteur	Mr DAHMANI	Abdelnasser	Professeur	Univ. de Béjaia
Examineur	Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ. de Béjaia
Examineur	Mr CHELOUAH	Nasser	M.C.A	Univ. de Béjaia
Invité	Mr BOUROUBA	Abdelhalim	M.A.A	Univ. de Béjaia

أهدي هذا العمل المتواضع إلي من أتعبتهما سنة الحياة فكانا لها فخرا وبها نصرا
وعليها صبيرا ،

إلي والديّ الكريمين، أمي العزيزة و أبي رحمة الله عليه؛

إلي كلّ قلب رحب تغمره عاطفة الحبّ، حبّ العدالة الاجتماعيّة، حبّ العلم
والتعلم، حبّ الإنسان لأخيه الإنسان؛

إلي كلّ قلب يوءمن بأنّ إتقان العمل هو سرّ نجاح الأمم وتقدّمها....

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier en premier lieu et avant tous le bon Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier monsieur DAHMANI Abdelnasser, qui a dirigé mon mémoire de magistère et qui m'a encouragé toute cette période. Je remercie également Mr. SEGHIR Abdelghani qui m'a donné la chance de travailler avec lui.

Je veux vous dire que le travail avec vous m'a fait un grand honneur.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à Mr. BOUROUBA Abdelhalim qui m'a dirigé dans la bonne direction de recherche et qui m'a fait bénéficier de sa connaissance et de son expérience. Je lui remercie pour sa disponibilité, sa patience, ses conseils et ses appréciations compétentes qui ont été importants pour l'aboutissement de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également, aux membres de jury Mr AIT SAIDI Ahmed , Mr TAHAKOURT Abdelkader et Mr CHELOUAH Nasser pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et d'avoir accepté de le juger.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les enseignants qui ont contribué à ma formation avec beaucoup de compétence et de dévouement.

En fin, mes plus vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidé, encouragé et soutenu, ma famille et mes amis. Pour moi, votre appui était d'immense aide à moi.

Merci encore.

Résumé

Les domaines ouverts ou domaines non bornés apparaissent dans beaucoup de problèmes pratiques d'ingénierie ; le traitement de ces derniers a fait l'objet de plusieurs études récentes notamment la technique de couplage éléments finis - éléments infinis (EF-EI). Dans ce travail, on s'est intéressé à la construction et à l'utilisation des éléments infinis tridimensionnels dans le traitement des milieux infinis et semi - infinis 3D rencontrés en géotechnique. Et pour cela, des programmes de calcul en EF-EI ont été élaborés traitant les problèmes d'élasticité à domaines ouverts. La validation des résultats aux solutions analytiques existantes ainsi que des études comparatives entre les différentes approches ont été effectuées. L'influence de certains paramètres à savoir la position de la limite de troncature et le paramètre de sévérité des éléments infinis a été examiné.

Mots-clés : Problèmes tridimensionnels ; Domaines ouverts ; Éléments finis 3D ; Éléments infinis 3D ; Fonctions décroissantes ; Transformations géométriques ; Couplage.

Notations

N : Fonctions de forme de l'élément fini standard

P : Fonctions de forme de l'élément infini (Approche directe)

M : Fonctions de forme de l'élément infini (Approche inverse)

u : Champ de déplacement

U : Vecteur de déplacement

F : Vecteur de chargement

σ : Tenseur de contrainte

ε : Tenseur de déformation

Ω : Domaine

ρ : La masse volumique

∇ : Opérateur Nabla

Δ : Opérateur Laplacien

∂ : Opérateur des dérivées partielles

ν : Coefficient de Poisson

E : Module de Young

G : Module de cisaillement

Table des matières

Introduction générale	1
1 Problèmes classiques d'élasticité à domaines ouverts	3
1.1 Charge concentrée sur demi-espace élastique (Problème de Boussinesq) . . .	4
1.2 Demi-plan et demi-espace sous charge normale agissant sur une ligne (Problème de Flamant)	5
1.3 Solutions analytiques pour les ouvrages souterrains[19]	6
1.3.1 Solutions pour un tunnel circulaire non revêtu à grande profondeur .	7
1.3.2 Solutions pour un tunnel circulaire non revêtu à faible profondeur . .	9
1.4 Force concentrée dans un solide illimité(Problème de Kelvin)	10
1.5 Conclusion	11
2 Les éléments infinis - Approche directe -	12
2.1 Approche directe	13
2.2 Choix des fonctions de décroissance	15
2.2.1 Décroissance de type exponentiel	15
2.2.2 Décroissance de type puissance	16
2.2.3 Élément infini B8	18
2.2.4 Autres choix des fonctions de décroissance	23
2.3 Intégration des fonctions de forme de l'élément infini	23
2.3.1 Intégration numérique Gauss-Laguerre	24
2.3.2 Intégration numérique Gauss-Legendre	25
2.4 Formulation des matrices de rigidité élémentaires	26
2.5 Conclusion	27

3 Les éléments infinis - Approche inverse -	28
3.1 Transformation de Abdel-Fattah[1]	29
3.1.1 Décroissance de type puissance	31
3.1.2 Décroissance de type exponentiel	31
3.1.3 Décroissance de type logarithmique	31
3.1.4 Position du pôle	32
3.2 Transformation de Zienkiewicz	32
3.2.1 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz	35
3.3 Construction des éléments infinis tridimensionnels	36
3.3.1 Type de Lagrange-une direction infini	37
3.3.2 Type de Lagrange-deux directions infinis	39
3.3.3 Type de Lagrange-trois directions infinis	40
3.3.4 Type de Serendipity-une direction infini	40
3.4 Formulation des matrices de rigidité élémentaires	43
3.5 Conclusion	44
4 Modélisation par Éléments Finis	45
4.1 Mise en équation du domaine sol	48
4.1.1 Forme différentielle d'équilibre	48
4.1.2 Forme différentielle de la cinématique	49
4.1.3 Forme intégrale de l'équilibre	50
4.2 Modélisation du problème	51
4.3 Conclusion	56
5 Applications	57
5.1 Règles générales pour construire des maillages [18]	58
5.2 Application et validation	58
5.2.1 Cas du problème de Boussinesq	58
5.2.2 Cas d'un tunnel profond	68
5.2.3 Une fondation carrée	69
5.3 Conclusion	72
Conclusion générale	73

Bibliographie	75
Annexe A :Intégration numérique	78
5.4 Intégration Gauss-Legendre	78
5.5 Intégration Gauss-Laguerre	80
Annexe A :Fonctions de forme d'un élément fini 3D quadratique	83

Liste des tableaux

3.1	<i>Comparaison entre les fonctions de forme de l'élément fini et infini</i>	35
3.2	<i>Fonctions de transforation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 8 nœuds type Lagrange</i>	39
3.3	<i>Fonctions de transforation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 8 nœuds type Lagrange</i>	39
3.4	<i>Fonctions de transforation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 20 nœuds type Serendipity</i>	42
4.1	<i>Avantages et Inconvénients des deux approches bi et tridimensionnelles . . .</i>	47
4.2	<i>Les fonctions de forme linéaires des éléments tridimensionnels</i>	53
5.1	<i>Tassements sur l'axe de symétrie du problème de Boussinesq</i>	60
5.2	<i>Tassements sur l'axe de symétrie en 3D</i>	63
5.3	<i>Tassements sur l'axe de symétrie en 2D</i>	63
5.4	<i>Les fonctions de forme quadratiques</i>	85

Table des figures

1.1	<i>Charge concentrée</i>	4
1.2	<i>Problème de Flamant</i>	6
1.3	<i>Creusement d'un tunnel dans un massif élastique : solution de Kirsch</i>	8
1.4	<i>Creusement d'un tunnel dans un massif élastique semi-infini</i>	9
1.5	<i>Problème de Kelvin : (a) données; (b) coordonnées cylindriques</i>	10
2.1	<i>Approche directe - élément infini dans une seule direction</i>	13
2.2	<i>Élément de référence infini B8 - Numérotation des nœuds et des fonctions de forme</i>	18
2.3	<i>Exemple de fonctions de décroissance de type (a) exponentiel et (b) puissance</i>	19
2.4	<i>Construction des fonctions de forme décroissantes d'un élément infini 3D linéaire. (c) et (d) Fonctions N_1 et N_5 pour $-1 \leq \zeta \leq +1$ et $\xi = \eta = -1$ avec les fonctions de forme décroissantes P_1, P_5 correspondantes ($L = 2$, $\zeta_0 = -6$ et $n = 5$) pour $-1 \leq \zeta \leq +15$ et $\xi = \eta = -1$</i>	20
2.5	<i>Somme des fonctions de forme à décroissance exponentielle de l'élément considéré</i>	22
2.6	<i>Somme des fonctions de forme à décroissance de type puissance de l'élément considéré</i>	23
3.1	<i>Élément infini unidimensionnel : a-representation globale et b-representation locale</i>	29
3.2	<i>Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel</i>	32
3.3	<i>Élément infini tridimensionnel</i>	37
3.4	<i>Numérotation nodale d'élément infini tridimensionnel</i>	38
3.5	<i>Element cubique à 20 nœuds</i>	40

4.1	<i>solide Ω</i>	48
4.2	<i>Quelques type d'éléments tridimensionnels</i>	52
5.1	<i>Géométrie et chargement (problème de Boussinesq)</i>	59
5.2	<i>Configuration globale et régions infinies</i>	61
5.3	<i>Tassement le long de l'axe de symétrie (z)</i>	62
5.4	<i>Tassement le long de l'axe (x)</i>	62
5.5	<i>Tassement sur l'axe de symétrie en fonction de B.</i>	65
5.6	<i>Tassement à la surface libre en fonction de B.</i>	65
5.7	<i>Point D</i>	66
5.8	<i>a-Tassements au point D. b-Variation de l'erreur en fonction de B</i>	66
5.9	<i>Tassements sur l'axe de symétrie pour les différentes valeurs de L</i>	67
5.10	<i>(a) : Maillage typique pour l'analyse. (b) : chargement considéré.</i>	68
5.11	<i>Déplacement le long de l'axe x</i>	69
5.12	<i>(a) :Fondation carrée. (b) :La déformé</i>	70
5.13	<i>(a),(c),(e) :Tassement repéré sur l'axe de symétrie. (b),(d),(f) :Tassement repéré à la surface du sol</i>	71
5.14	<i>Tassements au point D</i>	71

Introduction générale

Une grande variété de problèmes pratiques de l'ingénierie impliquent des domaines illimités (non bornés) et des exemples spécifiques peuvent être trouvés dans plusieurs disciplines telles que le transfert de chaleur et de masse, le fluide et la mécanique des solides, l'acoustiques et l'électro- magnétique,... etc. Dans la discipline de génie civil, les domaines ouverts ou non bornés sont souvent rencontrés en géotechnique et notamment en interaction sol-structure où le sol (roche) support des ouvrages se prolonge à l'infini.

La modélisation efficace de ces milieux est importante pour aboutir à des solutions précises, en effet, le traitement des conditions aux limites de troncature doit tenir compte des effets de dissipation d'énergie et d'éviter toutes réflexions parasites pouvant perturber la précision des résultats recherchés[2, 4, 8, 9, 10, 31, 37]. A cet effet, La méthode classique utilisée pour représenter l'infini consiste à tronquer le domaine d'analyse à des distances assez loin [10, 37]. Cependant, une telle analyse conduit à des résultats incorrects et ses inconvénients majeurs sont les suivants :

- La simulation d'un assez grand domaine mène à une augmentation significative des ressources de calcul ;
- Les conditions aux limites d'un problème à l'infini ne peuvent pas être rigoureusement satisfaisantes ;
- Aussi, en étirant un nombre fixe d'éléments finis pour modéliser un vaste domaine, on peut avoir comme conséquence une perte grave d'exactitude de la solution.

A cet effet, plusieurs techniques et approches ont été développées et proposées dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant ce genre de problèmes. Parmi ces approches

on distingue : la technique de couplage éléments finis-éléments infinis [1, 4, 6, 8, 9, 10, 16], la technique de couplage éléments finis-éléments de frontière [4, 6, 15] et la technique des frontières absorbantes [5, 6, 14, 20]...etc.

Le succès des éléments finis dans la résolution des problèmes concernant les domaines bornés et la nécessité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis, ont conduit au développement des éléments infinis qui sont basés sur deux formulations essentielles :

- L'utilisation des fonctions de décroissance (type exponentiel, puissance. . .) en conjonction avec les fonctions de forme des éléments finis ordinaire afin d'obtenir le comportement désiré à l'infini (approche directe) ;
- L'utilisation des fonctions de transformation géométrique (approche inverse).

Dans ce travail, on s'est intéressé à la construction et à l'utilisation des éléments infinis tridimensionnels dans le traitement des milieux infinis et semi - infinis 3D rencontrés en géotechnique. Et pour cela, des programmes de calcul par la technique de couplage éléments finis-éléments infinis (EF-EI) ont été élaborés traitants les problèmes d'élasticité bi et tridimensionnels à domaines ouverts.

A cet effet, le manuscrit est organisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, on trouve un exposé concernant les problèmes classiques d'élasticité à domaines ouverts existants dans la littérature. Le deuxième et le troisième chapitre consacrés aux différentes approches et techniques de construction des éléments infinis tridimensionnels. Dans le quatrième chapitre, on a mis en equations le problème d'élastostatique 3D ainsi que la discrétisation par éléments finis du domaine concerné. Le dernier chapitre comportant la partie pratique de notre travail dans lequel les résultats obtenus sont présentés, commentés et comparés aux solutions analytiques existantes, ainsi que l'influence de certains paramètres à été examinée. Enfin, une conclusion générale cloture le manuscrit.

Chapitre 1

Problèmes classiques d'élasticité à domaines ouverts

Un certain nombre de problèmes de la mécanique des solides impliquant des domaines illimités ont été résolus analytiquement. Des solutions élastiques ont été développées pour le cas d'une charge concentrée appliquée à l'intérieur d'un corps infini (problème de Kelvin), à la frontière du demi-espace (problème de Boussinesq) et à l'intérieur d'un solide semi-infini avec la frontière libre ou fixe (problème de Mindlin et Rongved). La plaque infini avec un trou circulaire (plaque trouée) sous la tension uniaxiale a été également considéré (problème de Kirsch) ou avec une charge appliquée à l'intérieur de la surface du trou (problème de Beckley)... etc[14].

On va donner ci-dessous quelques importantes solutions appliquées dans la mécanique des solides, ces solutions sont valables pour des milieux isotropes et peuvent être s'étendre aux milieux anisotropes[4].

1.1 Charge concentrée sur demi-espace élastique (Problème de Boussinesq)

En 1885 le scientifique Français Boussinesq a obtenu une solution pour les efforts et les contraintes dans demi-espace élastique linéaire isotrope homogène, chargée par une force verticale sur la surface [4,25,29]. Le milieu élastique a le module d'élasticité de Young E , le module de cisaillement G et le coefficient de Poisson ν . La charge concentrée prend la valeur P . (Voir la figure ci-dessous). Les déplacements dans les directions x, y, z sont respectivement

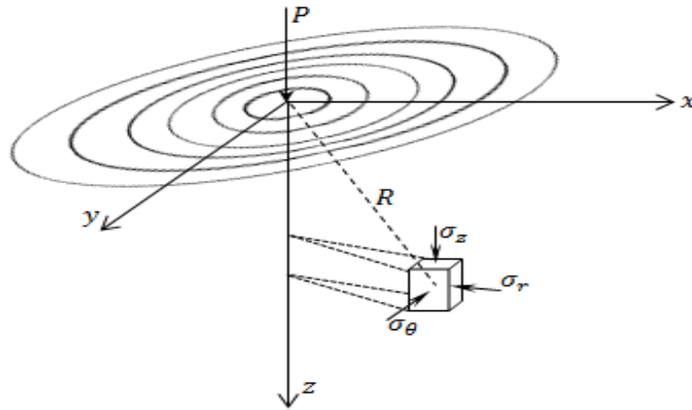


FIG. 1.1: Charge concentrée

u, v, w . La distribution des contraintes est comme suit :

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right\} \quad (1.1)$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} (1 - 2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right\} \quad (1.3)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} r z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2} \quad (1.4)$$

Dans ces équations r est la coordonnée cylindrique ;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et les déplacements sont données par :

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)P}{2\pi Er} \left[z(r^2 + z^2)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{(1 - 2\nu)} r^2 z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \quad (1.5)$$

$$v = 0 \quad (1.6)$$

$$w = \frac{P}{2\pi E} \left[(1 + \nu)z^2(r^2 + z^2)^{-3/2} + 2(1 - \nu^2)(r^2 + z^2)^{-1/2} \right] \quad (1.7)$$

1.2 Demi-plan et demi-espace sous charge normale agissant sur une ligne (Problème de Flamant)

En 1892 Flamant et Boussinesq ont donné des solutions pour une charge concentrée sur un demi-plan élastique, linéaire, isotrope et homogène. Selon Timoshenko et Goodier, une solution a été développée par Flamant pour une force normale sur la surface libre de la solution tridimensionnelle de Boussinesq. C'est l'équivalent bidimensionnel du problème de base de Boussinesq.

Comme dans beaucoup de problèmes d'élasticité, la distribution des contraintes peut être dérivée d'une fonction de contraintes ϕ , dans ce cas-ci elle est donnée par :

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (1.8)$$

Les expressions des contraintes sont données par :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (1.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \quad (1.10)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.11)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Comme il est montré par Timoshenko et Goodier, les contraintes peuvent être employées pour dériver les déformations, qui seront intégrées pour donner les déplacements.

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + B \cos \theta \quad (1.13)$$

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta - B \sin \theta \quad (1.14)$$

Tel que :

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d \quad (1.15)$$

Dans cette équation, d est une distance de l'origine d'un point sur l'axe (x) pour lequel nous imposons un déplacement verticale v nul. La valeur de d est assez arbitraire, la fonction $\log r$ tends vers l'infini quand r augmente. Ceci donne donc des résultats paradoxaux que les déplacements à un rayon infini, eux-mêmes, être infini. C'est une conséquence du fait qu'il n'existe aucun domaine plan «réellement infini»[4]. (Voir figure ci-dessous).

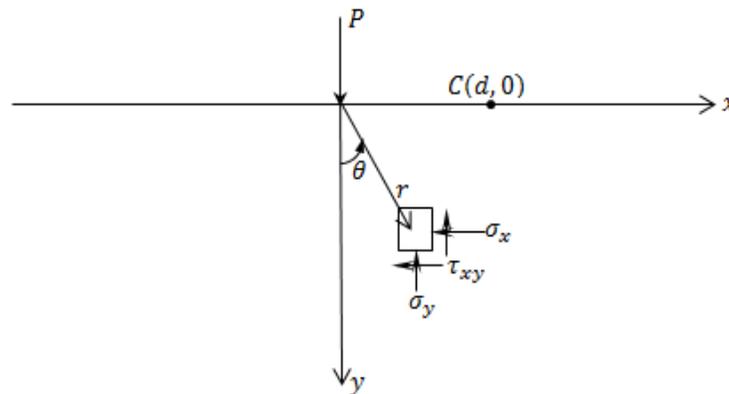


FIG. 1.2: *Problème de Flamant*

1.3 Solutions analytiques pour les ouvrages souterrains[19]

Deux types de solutions analytiques ont été recherchés : les solutions valables pour des tunnels à grande profondeur (cavité dans un milieu infini) et celles obtenues pour des tunnels proches de la surface (cavité dans un milieu semi-infini). D'une façon générale, ces solutions sont fondées sur les hypothèses suivantes :

- Cavité circulaire, revêtu ou non. L'interaction sol-structure est de type adhérence parfaite ou glissement parfait ;
- Massif infini ou semi-infini à surface horizontale, bidimensionnel (déformation plane), à symétrie de révolution ou tridimensionnel ;
- Sol non pesant, état de contrainte initial homogène, isotrope ou anisotrope ;
- Comportement du sol élastique linéaire ou élastique-parfaitement plastique ;
- Etude en section courante (le front de taille est très éloigné).

1.3.1 Solutions pour un tunnel circulaire non revêtu à grande profondeur

Pour un tunnel creusé à une profondeur suffisante, il est admis couramment que l'influence de la pesanteur est négligeable autour de la cavité et que les contraintes initiales sont constantes ainsi que le comportement du massif est élastique linéaire.

L'ouvrage est assimilé à une cavité dans un milieu infini. Le champ de contrainte en un point M , défini par ses coordonnées polaires (r, θ) , est donné par les formules de Kirsch (1898) :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_v + \sigma_h) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_v - \sigma_h) \left(1 - 4\frac{R^2}{r^2} + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (1.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_v + \sigma_h) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_v - \sigma_h) \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (1.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_v - \sigma_h) \left(1 + 2\frac{R^2}{r^2} - 3\frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \quad (1.18)$$

Où $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ représentent respectivement les contraintes radiale, tangentielle et de cisaillement ; R , le rayon du tunnel et r , la distance radiale au centre du tunnel (figure 1.3). Les contraintes σ_v et σ_h sont les contraintes principales initiales dans le plan perpendiculaire à l'axe du tunnel. Dans la plupart des cas, la contraintes σ_v est verticale et plus grande que la contrainte σ_h . Sur la paroi ($R = r$), la contrainte radiale et la contrainte de cisaillement sont nulles et la contrainte tangentielle vaut :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_v + \sigma_h - 2(\sigma_v - \sigma_h) \cos 2\theta \quad (1.19)$$

Le signe de cette contrainte, autrement dit la possibilité que des tractions apparaissent, dépend du rapport entre les contraintes σ_v et σ_h . Dans le cas où la pression interstitielle

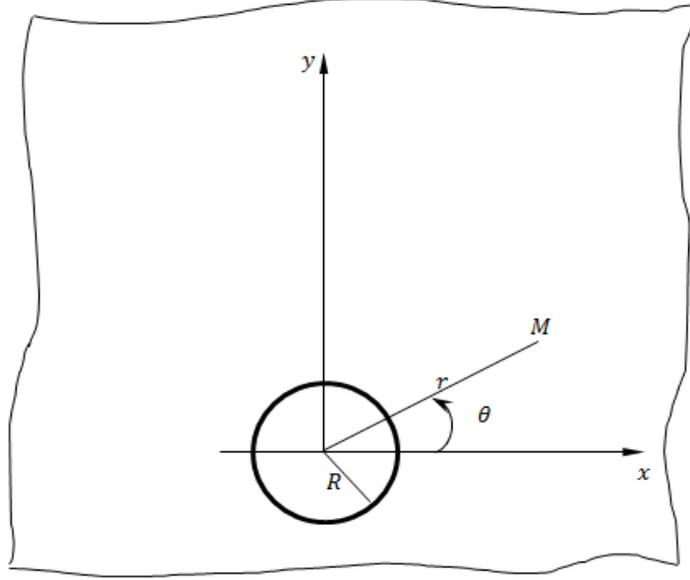


FIG. 1.3: Creusement d'un tunnel dans un massif élastique : solution de Kirsch

n'intervient pas, la contrainte tangentielle en paroi se met sous la forme suivante, où K_0 désigne le coefficient de pression de terre au repos :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_v[(1 + K_0) + 2(1 - K_0)\cos 2\theta] \quad (1.20)$$

D'autre part, l'utilisation de la loi de comportement élastique linéaire de Hooke permet de déduire, après intégration, les déplacements radial $u(r, \theta)$ et tangential $t(r, \theta)$:

$$u(r, \theta) = \frac{1 + \nu}{2E} r \left[(\sigma_v + \sigma_h) \frac{R^2}{r^2} - (\sigma_v - \sigma_h) \left[4(1 - \nu) \frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \right] \quad (1.21)$$

$$t(r, \theta) = \frac{1 + \nu}{2E} r (\sigma_v - \sigma_h) \left[2(1 - 2\nu) \frac{R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\theta \quad (1.22)$$

Où E désigne le module de Young et ν , le coefficient de Poisson du terrain. Sous la pression appliquée, la section du tunnel prend la forme d'une ellipse.

Lorsque l'état initial des contraintes est supposé isotrope ($\sigma_v = \sigma_h = \sigma_0$), la solution de Kirsch se réduit aux expressions suivantes, pour une valeur quelconque de la distance à l'axe r :

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) ; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1.23)$$

Sur toute la paroi la contrainte tangentielle est alors constante et égale à $2\sigma_0$. Le déplacement est alors uniquement radial :

$$u(r) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_0 \frac{R^2}{r} \quad (1.24)$$

1.3.2 Solutions pour un tunnel circulaire non revêtu à faible profondeur

Le problème de creusement d'une cavité dans un massif semi-infini, homogène et isotrope, à comportement élastique linéaire a été étudié par plusieurs auteurs. Dans le cas d'un massif incompressible, les déplacements à la surface (u, v, w) , causés par le creusement, sont donnés par les relations suivantes (d'après Sagaseta (1987)) :

$$\frac{u}{\delta_0} = -\frac{x D}{2(x^2 + H^2)} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} \right) \quad (1.25)$$

$$\frac{w}{\delta_0} = \frac{s}{\delta_0} = \frac{H D}{2(x^2 + H^2)} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} \right) \quad (1.26)$$

$$\frac{v}{\delta_0} = \frac{D}{2\sqrt{x^2 + y^2 + H^2}} \quad (1.27)$$

Où δ_0 est la convergence radiale moyenne de la cavité.

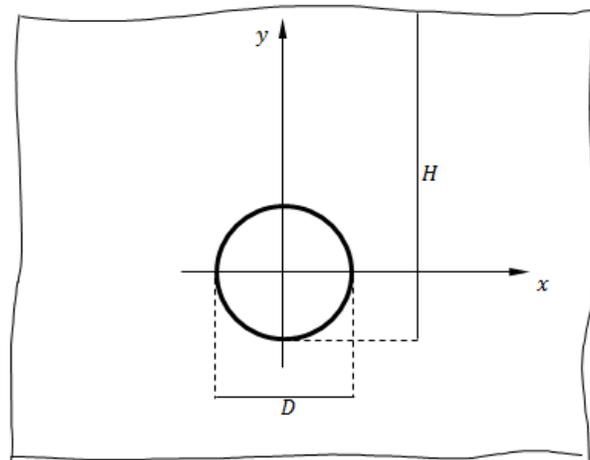


FIG. 1.4: Creusement d'un tunnel dans un massif élastique semi-infini

1.4 Force concentrée dans un solide illimité(Problème de Kelvin)

pour un solide illimité chargé par une force concentrée verticale de valeur F [11], Kelvin (1848)a obtenu une solution pour le milieu élastique ayant le module de Young E , le coefficient de Poisson ν (figure ci-dessous).

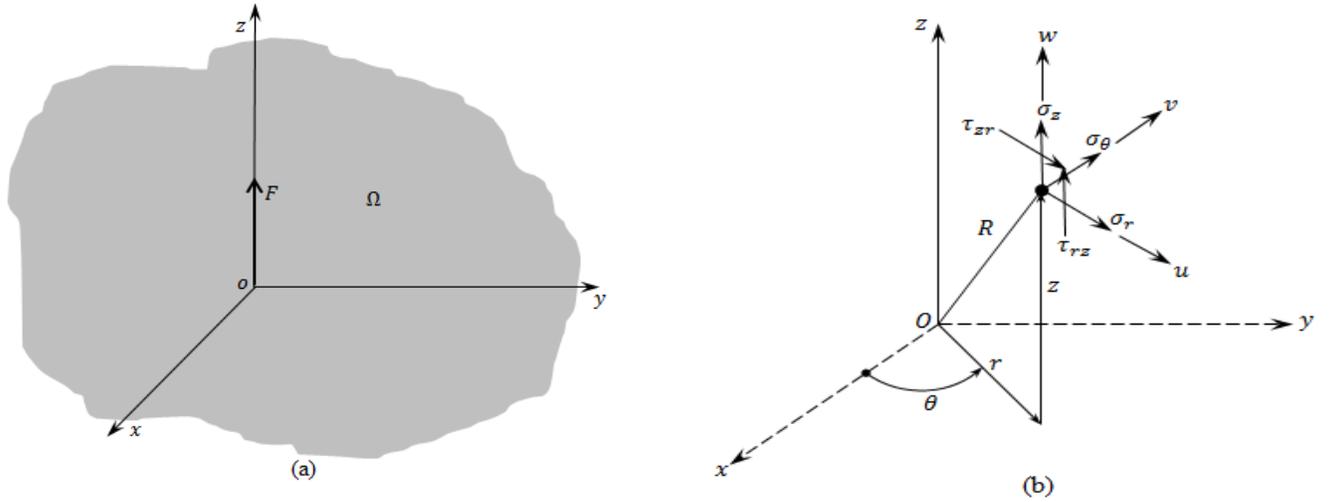


FIG. 1.5: *Problème de Kelvin : (a) données ; (b) coordonnées cylindriques*

La distribution des contraintes dans les coordonnées cylindriques est comme suit :

$$\sigma_r = \frac{F}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{(1-2\nu)z}{R^3} - \frac{3r^2z}{R^5} \right) \quad (1.28)$$

$$\sigma_\theta = \frac{F}{8\pi(1-\nu)} \frac{(1-2\nu)z}{R^3} \quad (1.29)$$

$$\sigma_z = \frac{F}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{(1-2\nu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5} \right) \quad (1.30)$$

$$\tau_{rz} = \frac{F}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{(1-2\nu)r}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5} \right) \quad (1.31)$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.32)$$

Avec ; $R^2 = r^2 + z^2$. Les déplacements dans les directions x, y, z sont respectivement :

$$u = \frac{F}{16\pi G(1-\nu)} \frac{rz}{R^3} \quad v = 0 \quad w = \frac{F}{16\pi G(1-\nu)} \left(\frac{3-4\nu}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right) \quad (1.33)$$

G étant le module de cisaillement.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné quelques solutions analytiques des problèmes d'élastostatique à domaines ouverts existantes dans la littérature. Alors qu'il existe d'autres problèmes qui n'ont pas résolus analytiquement, et pour les résoudre on doit recourir aux solutions approchées basées sur des techniques numériques.

Chapitre 2

Les éléments infinis - Approche directe -

Quand on veut modéliser numériquement les problèmes à domaines ouverts en utilisant la technique classique des éléments finis. L'approche traditionnelle pour représenter l'effet de la partie infinie est d'incorporer un grand nombre d'éléments prolongeant à des distances significatives au-delà de la zone chargée. Cependant, l'utilisation de telles grandes discrétisations peut avoir comme conséquence une grande quantité d'effort informatique. Aussi, la position de la frontière à tronquer est indéterminée, une telle position arbitraire peut mener aux résultats incorrects. Pour cela, différentes méthodes numériques ont été développées et utilisées avec succès, par exemple la méthode des éléments de frontière, la méthode des frontières absorbantes, la méthode des éléments infinis,...etc. Celle-ci est très efficace pour ce genre de problèmes [2,4,8,9,10,31] du fait que, les éléments infinis fournissent des conditions appropriées pour représenter la partie infinie alors que le champ proche du domaine est traité par des éléments finis.

Le but visé dans le présent chapitre, est de montrer la méthode de construction des éléments infinis selon l'approche directe, ainsi que la présentation de différentes fonctions de décroissance.

2.1 Approche directe

L'élément infini est un élément fini spécial qui peut se prolonger à l'infini. À la différence de la méthode des éléments de frontière, la méthode des éléments infinis peut être facilement incorporée dans le cadre de la méthode des éléments finis. Ungless et Bettess sont les créateurs indépendants des éléments infinis[1,4,14,27]. Le progrès récent est examiné par Bettess qui décrit en détail le développement des deux formulations principales d'élément infini ; l'approche directe par des fonctions de forme décroissantes et l'approche inverse par des fonctions de transformations géométriques ascendantes.

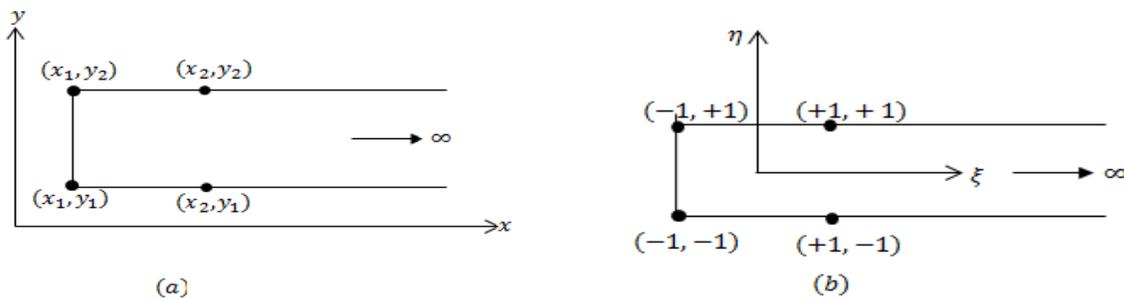


FIG. 2.1: Approche directe - élément infini dans une seule direction

(a)élément réel

(b)élément de référence

L'idée de base de cette approche est que les fonctions de forme de l'élément fini sont gardées mais multipliées par une fonction décroissante. Le rôle de cette fonction est de s'assurer que le comportement de l'élément à l'infini est une réflexion raisonnable de la physique du problème. Si $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ sont les fonctions de forme de l'élément fini tridimensionnel avec ξ , η et ζ les coordonnées locaux, et $f_i(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction décroissante ; alors, les fonctions de forme de l'élément infini s'écrivent :

$$P_i(\xi, \eta, \zeta) = N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot f_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.1)$$

La fonction décroissante $f_i(\xi, \eta, \zeta)$ doit être égale à l'unité dans chaque nœud ou elle est attribuée. Et aucune condition sur les valeurs qu'elle doit les prendre dans les autres nœuds.

$$f_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = 1$$

En effet, quel que soit la fonction décroissante les dérivées des fonctions de forme peuvent être établis comme suit :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \cdot N_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot f_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot f_i \quad (2.2)$$

Pour une décroissance dans une seule direction.

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \cdot N_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \cdot N_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot f_i \quad (2.3)$$

Pour une décroissance dans les deux directions ; et la même chose pour trois directions :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \cdot N_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \cdot N_i \quad , \quad \frac{\partial P_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \cdot f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \zeta} \cdot N_i \quad (2.4)$$

La somme des fonctions de forme "infinies" P_i devient différente de l'unité. En effet, il peut être montré par un calcul que la somme est un polynôme en ξ , η ou en ζ selon la direction considérée infinie, d'ordre au moins égal à celui de l'élément. Les expressions correspondantes à chaque type d'élément sont données par les relations suivantes :

Élément linéaire :

$$\sum P_i = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)\xi + \frac{1}{2}(f_2 + f_1) \quad (2.5)$$

Élément quadratique :

$$\sum P_i = \frac{1}{2}(f_1 - 2f_2 + f_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1)\xi + f_2 \quad (2.6)$$

Élément cubique :

$$\begin{aligned} \sum P_i = \frac{9}{16}[(f_4 - f_1) + 3(f_2 - f_3)]\xi^3 + \frac{9}{16}[(f_4 + f_1) - (f_2 + f_3)]\xi^2 \\ - \frac{1}{16}[(f_4 - f_1) + 27(f_2 - f_3)]\xi - \frac{1}{16}[(f_4 + f_1) - 9(f_2 + f_3)] \quad (2.7) \end{aligned}$$

Ces expressions permettent de suggérer à priori le type de fonctions de décroissance à utiliser pour que les polynômes correspondant tendent vers 0 quand ξ tend vers ∞ . Elles sont valides aussi pour le cas bi et tridimensionnel avec une seule direction infinie.

2.2 Choix des fonctions de décroissance

Le théorème de Green est tellement important dans le traitement d'un problème donné qu'on ne peut pas s'en passer aussi bien dans la formulation variationnelle que dans l'utilisation des résidus pondérés. Ceci pose quelques restrictions sur le choix des fonctions de forme. En plus ; si le domaine d'intégration est illimité, d'autres conditions doivent être prises en compte. D'où pour une fonction décroissante réussite, les fonctions de forme complètes (fonctions de forme d'un élément infini) doivent répondre à ces conditions. Dans cette section deux types de fonctions décroissantes seront maintenant étudiés.

2.2.1 Décroissance de type exponentiel

Cette formulation est suggéré par Peter Bettess, elle a l'avantage de décroître rapidement vers zéro à l'infini que d'autre type en plus, elle est facile à manipuler mathématiquement. Elle a comme expression :

$$f_i(\xi, \eta) = e^{[\frac{(\xi_i - \xi)}{L}]} \quad (2.8)$$

Pour une décroissance dans le sens ξ ; et pour une décroissance dans les deux sens ξ et η l'expression devient,

$$f_i(\xi, \eta) = e^{[\frac{(\xi_i - \xi)}{L_1} + \frac{(\eta_i - \eta)}{L_2}]} \quad (2.9)$$

Il est possible de prolonger la formulation pour une décroissance dans les trois directions par :

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = e^{\left[\frac{(\xi_i - \xi)}{L_1} + \frac{(\eta_i - \eta)}{L_2} + \frac{(\zeta_i - \zeta)}{L_3}\right]} \quad (2.10)$$

$L(L_1, L_2, L_3)$: est une longueur qui détermine la sévérité de décroissance, on peut le fixer à l'unité et contrôler la sévérité par la distance entre les nœuds de l'élément réel dans le maillage du problème physique à étudié. Mais, dans la plupart des cas, plusieurs auteurs préfèrent le varier. Dans le cas où la tendance de la solution théorique du problème posé est connue à priori en champs lointain, la valeur du paramètre L pourrait être estimée, mais, généralement il est déterminé par une étude paramétrique.

Les expressions des fonctions de forme pour un élément infini dans le sens ξ s'écrivent alors :

$$P_i(\xi, \eta) = P_i(\xi, \eta) \cdot e^{\left[\frac{(\xi_i - \xi)}{L}\right]} \quad (2.11)$$

Et leurs dérivées :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{L}\right) \cdot e^{\left[\frac{(\xi_i - \xi)}{L}\right]}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot e^{\left[\frac{(\xi_i - \xi)}{L}\right]} \quad (2.12)$$

Dans le cas ci-dessus la décroissance est défini dans les coordonnées locaux ξ , η et ζ . Il est aussi possible de définir la décroissance de type exponentielle dans les coordonnées globales du problème. Dans ce cas la partie dominante de la fonction décroissante est $\exp(-r = L)$, où L est une longueur décroissante et r est le rayon d'une certaine origine.

2.2.2 Décroissance de type puissance

Dans 3D la fonction de Green pour des problèmes potentiels est $\frac{l}{r}$, où r est un rayon assez grand pour être infini et l une longueur constante spécifique au problème. Il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement est essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes de type puissance, qui assurent une décroissance en $\frac{l}{r}$ quand ξ tend vers l'infini. Pour une décroissance seulement dans cette direction, ces fonctions ont comme expression :

$$f_i = \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n \quad (2.13)$$

Là où ξ_0 est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être en dehors de l'élément infini, c.à.d. il sera du côté opposé à celle qui se prolonge à l'infini. Habituellement si la

décroissance est dans la direction positive ξ alors ξ_0 doit être inférieur à -1 . Ceci évite une singularité dans l'élément infini. Le paramètre de sévérité n , contrôlant la décroissance en puissance, est choisi de façon d'être supérieur au plus grand ordre des polynômes en ξ intervenant dans les fonctions de forme standard N . Ceci permet d'assurer que lorsque ξ tend à l'infini, la fonction de forme P tend à $\frac{1}{\xi}$ qui est la forme nécessaire pour beaucoup de problèmes potentiels. Il n'existe aucune règle à suivre pour déterminer n , encore, seule l'expérimentation permet de porter un jugement. Clairement si n est trop petit, alors d'une part, les conditions d'application de l'identité de Green pourraient être violées et d'autre part les fonctions de forme complètes infinies deviennent ascendantes. S'il est trop grand, d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représentées et même omises. Il n'y a aucune nécessité de mettre n un nombre entier.

Comme dans le cas d'une décroissance exponentiel, la fonction décroissante peut être généralisée à deux directions :

$$f_i(\xi, \eta) = \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n \left[\frac{(\eta_i - \eta_0)}{(\eta - \eta_0)} \right]^m \quad (2.14)$$

et à trois directions par :

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n \left[\frac{(\eta_i - \eta_0)}{(\eta - \eta_0)} \right]^m \left[\frac{(\zeta_i - \zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)} \right]^l \quad (2.15)$$

Les paramètres n , m et l peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique.

Enfin ; les expressions des fonctions de forme pour un élément infini dans une seule direction sont :

$$P_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n \quad (2.16)$$

Et leurs dérivées ;

$$\frac{\partial P_i}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{n N_i}{\xi - \xi_i} \right] \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n, \quad \frac{\partial P_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\frac{(\xi_i - \xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \right]^n \quad (2.17)$$

2.2.3 Élément infini B8

Pour plus de clarté et de pratique, la construction ainsi que les propriétés des fonctions de forme d'un élément infini linéaire tridimensionnel, basé sur l'élément fini de type Lagrange à 8 nœuds (B8), sont détaillées et constituées l'exemple à traiter dans cette section. On suppose que cet élément se prolonge à l'infini dans un seul sens(ζ).

La numérotation des nœuds et des fonctions de forme dans le plan de référence (ξ, η, ζ) est montrée dans la figure (2.2) suivante :

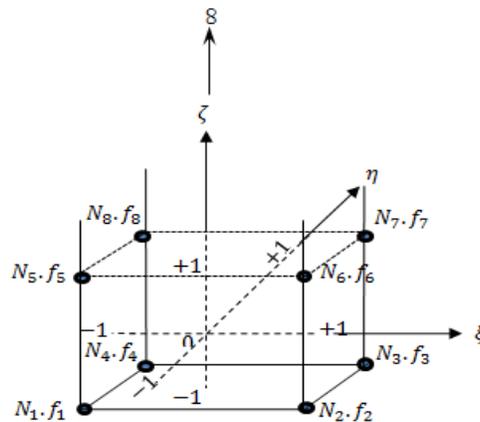


FIG. 2.2: Élément de référence infini B8 - Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

Les deux fonctions de décroissance correspondantes aux nœuds de coordonnées $\zeta_1 = -1$ et $\zeta_5 = +1$ sont illustrées dans la Figure 2.3. Ces fonctions sont obtenues pour un exemple de paramètres typiques. Les fonctions à décroissance de type exponentielle avec $L = 2$ sont représentées en (a) et celles à décroissance de type puissance avec $n = 5$ et $\zeta_0 = -6$ en (b).

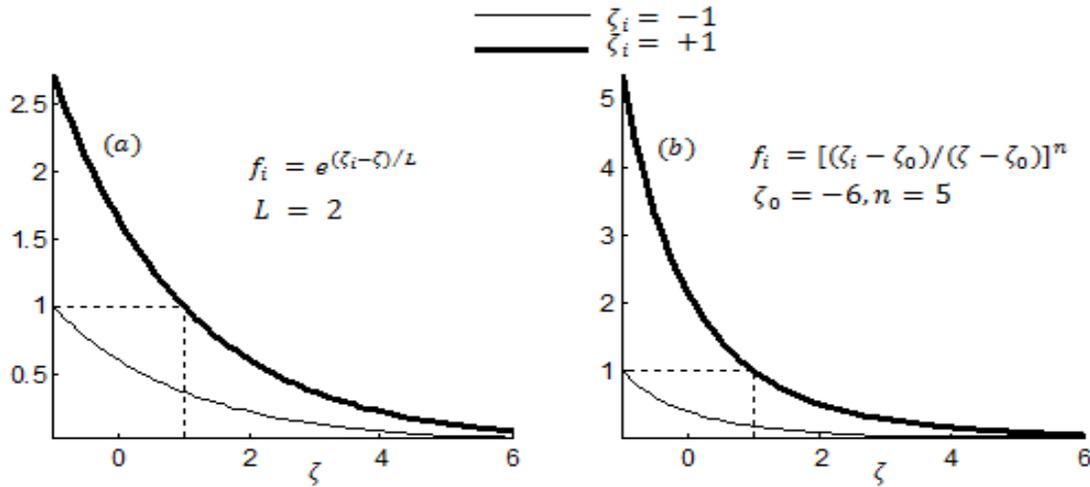


FIG. 2.3: Exemple de fonctions de décroissance de type (a) exponentiel et (b) puissance

La multiplication de chacune de ces fonctions par la fonction de forme appropriée permet de déterminer les fonctions de formes (infinies) ayant, respectivement, pour une décroissance de type exponentielle et pour une décroissance de type puissance, avec les mêmes paramètres fixés précédemment, les expressions suivantes :

$$P_1(\xi = \eta = -1, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)e^{-(1+\zeta)/2} ; \quad P_1(\xi = \eta = +1, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)[5/(\zeta + 6)]^5 \quad (2.18)$$

$$P_5(\xi = \eta = -1, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)e^{(1-\zeta)/2} ; \quad P_5(\xi = \eta = +1, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)[7/(\zeta + 6)]^5 \quad (2.19)$$

Pour une comparaison, les courbes correspondantes sont reportées sur les mêmes graphes représentant les N_i dans la figure (2.4-(c)) et (2.4-(d)) pour P_1 et P_5 respectivement.

Dans le domaine $\zeta \in [-1, 1]$, les fonctions P_i varient de la même manière que N_i indépendamment du type de décroissance considéré. Leurs sensibilités aux paramètres de décroissance est faible. Cependant, pour des valeurs de $\zeta > 1$, les fonctions de formes standards, n'étant pas définies sur cet intervalle, divergent si elles sont prolongées alors que leur multiplication par

des fonctions décroissantes les ramène vers zéro pour des valeurs de ζ assez grand pour que les termes de décroissance dominent le comportement du produit. Dans cet intervalle, les fonctions P_i sont fortement sensibles aux paramètres de décroissance; elles peuvent même diverger si n n'est pas assez grand ou si L est négatif.

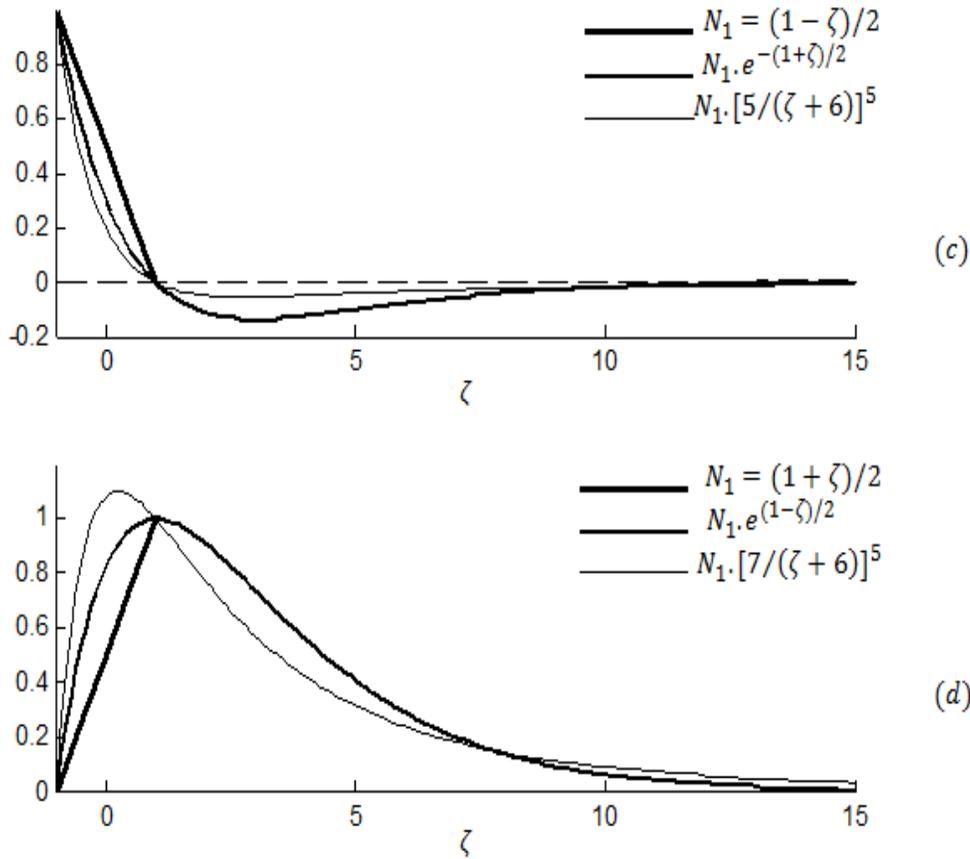


FIG. 2.4: Construction des fonctions de forme décroissantes d'un élément infini 3D linéaire. (c) et (d) Fonctions N_1 et N_5 pour $-1 \leq \zeta \leq +1$ et $\xi = \eta = -1$ avec les fonctions de forme décroissantes P_1, P_5 correspondantes ($L = 2$, $\zeta_0 = -6$ et $n = 5$) pour $-1 \leq \zeta \leq +15$ et $\xi = \eta = -1$

Il est aussi intéressant d'examiner les variations de la somme des fonctions de forme. Dans le cas d'un élément fini, elle est constante et égale à l'unité. Ce qui permet de représenter les valeurs unitaires aux nœuds, que peuvent prendre les variables champs, et d'interpoler correctement les valeurs de champ constant dans le milieu discrétisé. Par contre, dans le cas d'un élément infini la somme varie et dépend des fonctions et des paramètres de décroissance utilisés. Les équations (4.2) à (4.4) mentionnées précédemment expriment d'une manière générale cette variation, pour l'élément considéré dans cet exemple, elle s'écrit dans le cas d'une décroissance de type exponentiel par :

$$\sum P_i = \frac{1}{2} e^{-\frac{\zeta}{L}} [(1 + \zeta)e^{\frac{1}{L}} + (1 - \zeta)e^{-\frac{1}{L}}] \quad (2.20)$$

et dans le cas d'une décroissance de type puissance, par :

$$\sum P_i = \frac{1}{2(\zeta - \zeta_0)^n} [(1 + \zeta)(1 - \zeta_0)^n + (1 - \zeta)(-1 + \zeta_0)^n] \quad (2.21)$$

Ces deux types de variation sont représentés dans les figures (2.4) et (2.5). A l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$, la somme oscille autour de l'unité et prend des valeurs égales à 1 aux nœuds (en $\zeta = -1$ et $\zeta = +1$), puis décroît d'une manière asymptotique vers zéro quand ζ augmente. Les valeurs unitaires aux nœuds sont donc reproduites mais celles de champ constant ne peuvent être interpolées, puisque par définition de l'élément, le champ varie et tend à s'annuler à l'infini. Cette propriété est obtenue par les deux types de décroissance et dépend fortement des paramètres de sévérité. L'influence du paramètre L intervenant dans les fonctions exponentielles est montrée sur la figure (2.4). Pour des valeurs de L de plus en plus faibles, les variations dans l'intervalle $[-1, +1]$ ainsi que la décroissance sont de plus en plus prononcées. Les valeurs de $L \geq 1$ sont ainsi à recommander.

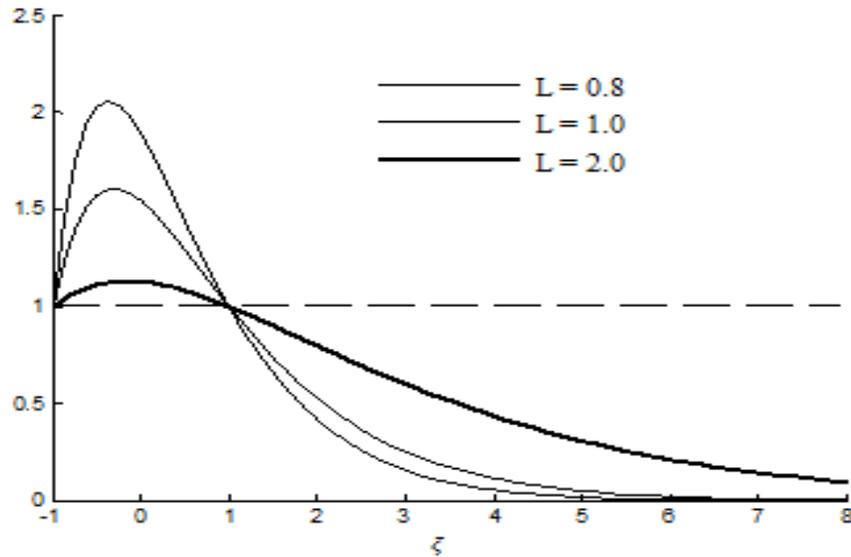


FIG. 2.5: Somme des fonctions de forme à décroissance exponentielle de l'élément considéré

L'influence des deux paramètres n et ζ_0 intervenant dans les fonctions à décroissance de type puissance dépend de l'ordre m des fonctions de forme de l'élément fini de base. Pour le cas de l'exemple présent ; $m = 1$, les différentes situations pouvant se produire sont reportées sur la figure (4.5). Pour des valeurs discrètes de $n = 0, 1, 2, \dots, m$ la somme se réduit à 1 ; les fonctions f_i sont de même forme que les termes des polynômes de Lagrange et les termes produits de la somme se simplifient. Pour des valeurs de n réelles positives et inférieurs à m , la somme diverge vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ selon que $n < 1$ ou, $n > 1$. La divergence est d'autant plus rapide que le pôle ζ_0 et proche du nœud $\zeta = -1$.

Cette situation est représentée dans la figure par les courbes relatives à $\zeta_0 = 1.25$ et $n = 0.5; 1.5$. Le seul cas où la somme décroît d'une manière asymptotique vers 0 correspond aux valeurs prévues de $n > m$. Ce cas est analogue au cas précédent de décroissance exponentielle ; ζ_0 influe sur les variations de la somme dans l'intervalle $[-1, 1]$ de la même façon que L . Il serait donc prudent d'éloigner ζ_0 .

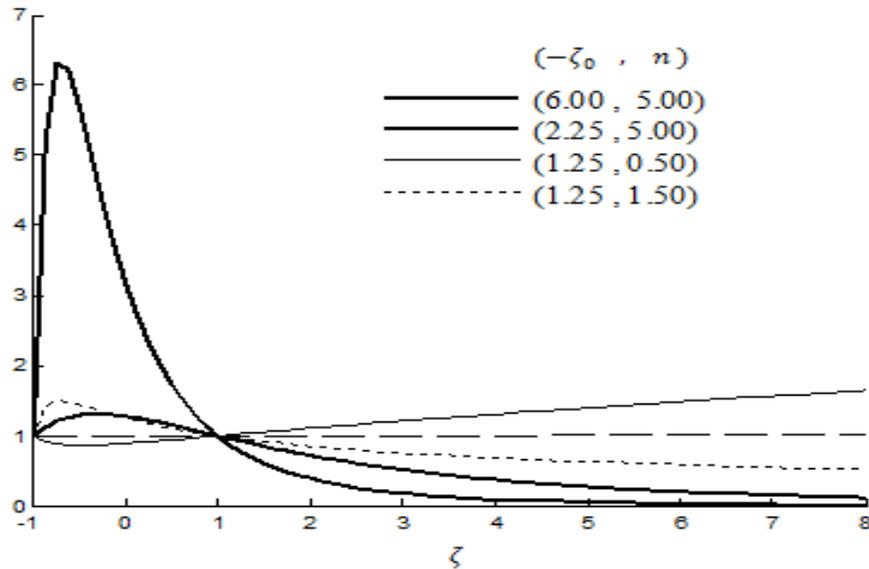


FIG. 2.6: Somme des fonctions de forme à décroissance de type puissance de l'élément considéré

2.2.4 Autres choix des fonctions de décroissance

D'autres choix de fonctions décroissantes peuvent être adoptés. En exemple, une décroissance de type tangente hyperbolique a été suggérée [22], elle est similaire à la décroissance exponentielle. Si n'importe qu'elle information sur la nature de la solution en champs lointain est connue, elle pourrait être exploitée pour le choix judicieux de type de décroissance. Dans certains cas, la solution à l'infini peut différer de zéro, être constante ou variant dans le temps. Un choix de fonctions, combinées avec les fonctions de formes standards, permettant de tendre vers cette solution peut devenir une tâche pénible.

2.3 Intégration des fonctions de forme de l'élément infini

Il est possible d'intégrer analytiquement les matrices élémentaires de l'élément infini ; ceci est donné par Betess lors du développement des premiers éléments infinis. Cependant la règle d'intégration numérique pour l'intervalle $[0, +\infty[$ est disponible et elle est simple

que celle utilisée pour les éléments finis. Ainsi l'intégration numérique est plus générale que l'analytique et permet l'utilisation des techniques iso paramétriques.

2.3.1 Intégration numérique Gauss-Laguerre

La forme standard de l'intégration de Gauss-Laguerre permet d'évaluer les intégrales de la forme :

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx \quad (2.22)$$

Cette intégrale est exacte si $f(x)$ est un polynôme et un nombre approprié des points d'intégration est utilisé. Il est clair que cette formule d'intégration est idéalement adaptée pour une décroissance de type exponentiel et elle est utilisée pour former les matrices élémentaires.

Un terme type apparaît dans les fonctions de forme et ses dérivées est de la forme suivant :

$$p(\xi)e^{\frac{-\xi}{L}} \quad (2.23)$$

$p(\xi)$ est un polynôme et la multiplication de ces termes forme les matrices élémentaires, la forme finale devient :

$$q(\xi)e^{\frac{-2\xi}{L}} \quad (2.24)$$

$q(\xi)$ est un autre polynôme et comme l'élément utilisé est basé sur l'élément fini standard qui s'étend à l'infini ; alors les bords d'intégrale sont de -1 à ∞ donc, l'intégrale final prend la forme suivant :

$$\int_{-1}^{\infty} q(\xi)e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi \quad (2.25)$$

La formule de Gauss-Laguerre peut être adapté pour évaluer ce genre d'intégrale par un simple changement de variable de telle sorte que quand $\xi = -1$, $s = 0$ et quand $\xi = \infty$, $s = \infty$

$$s = \frac{2}{L}(\xi + 1) \quad , \quad \xi = \frac{L}{2}s - 1$$

Et pour les dérivées :

$$ds = \frac{2}{L}d\xi \quad , \quad d\xi = \frac{L}{2}ds$$

Ainsi l'intégrale devient ;

$$\int_{-1}^{\infty} q(\xi)e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(\frac{L}{2}s - 1\right)\frac{L}{2}e^{\frac{2}{L}L}e^{-s}ds = \frac{L}{2}e^{\frac{2}{L}} \int_0^{\infty} f(s)e^{-s}ds \quad (2.26)$$

D'où pour utiliser l'intégration de Gauss-Laguerre, les abscisses et poids (s, w_0) doivent être modifiés de la façon suivante ;

$$\xi = \frac{L}{2}s - 1 \quad , \quad w = w_0 \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}}$$

ξ et w sont les nouvelles valeurs à remplacer dans la somme permettant de calculer les matrices élémentaires.

Si la décroissance est dans la direction négative ces expressions deviennent :

$$\int_{-\infty}^1 q(\xi) e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(1 - \frac{L}{2}s\right) \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}} e^{-s} ds = \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}} \int_0^{\infty} f(s) e^{-s} ds \quad (2.27)$$

Avec un changement de variable :

$$s = \frac{2}{L}(1 - \xi) \quad , \quad \xi = 1 - \frac{L}{2}s$$

2.3.2 Intégration numérique Gauss-Legendre

Il est possible d'employer des intégrations numériques de Gauss-Laguerre pour les fonctions qui ne contiennent pas un terme exponentielle simplement en multipliant la fonction à intégrer par e^{-x} . Ceci fonctionnera seulement si la fonction se comporte raisonnablement bien lorsque x tend vers l'infini. Une autre possibilité d'intégrer les fonctions de décroissance de type puissance est de concevoir une méthode d'intégration spécifique, la technique consiste à transformer le domaine d'intégration infini en domaine fini puis utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre qui est applicable dans l'intervalle $[-1, +1]$ sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ ou $[0, +\infty[$. La méthode de faire ça est la suivante ;

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{a + bt}{1 + t}\right) \frac{dt}{1 + t^2} \quad (2.28)$$

Dans ce cas, il est clair que $a = -1$ et $b = +1$. Alors l'équation devient :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right) \frac{dt}{1 + t^2} \quad (2.29)$$

Où $x = (t - 1)/(t + 1)$ et $t = 1 + 2x/(1 - x)$.

Dans le cas actuel, pour un élément infini basé sur l'élément fini, l'intervalle désiré de l'intégration numérique est $[-1, +\infty[$. Une nouvelle variable ξ est définie de sorte que lorsque $\xi = s - 1$, $s = \xi + 1$ et par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi = 2 \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1 - s}\right) \frac{dt}{1 - s^2} \quad (2.30)$$

Pour une décroissance dans le sens négatif :

$$\int_{-\infty}^{+1} f(\xi) d\xi = 2 \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1+s}\right) \frac{dt}{1+s^2} \quad (2.31)$$

Dans ce cas aussi, les abscisses et les poids (s, w_0) doivent être modifiés. Pour une direction infinie positive :

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad , \quad w = w_0 \frac{2}{(1-s)^2}$$

Pour ne direction infinie négative :

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad , \quad w = w_0 \frac{2}{(1+s)^2}$$

2.4 Formulation des matrices de rigidité élémentaires

Pour les problèmes d'élasticité la matrice de rigidité élémentaire est donnée comme d'habitude par (chapitre 4) :

$$k^e = \int_V B^T D B dV \quad (2.32)$$

Les modifications nécessaires pour insérer l'approche directe dans un programme de calcul par éléments finis concernent essentiellement l'intégration numérique et l'évaluation des nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre puis modifiés pour l'intervalle $[-1, \infty[$. L'algorithme permettant de construire les matrices élémentaires des éléments infinis ne diffère pas trop de celui des matrices élémentaires des éléments finis (Voir Algorithme 1).

```
Début de la routine
Initialisation;
pour tous les points de Gauss-Lagerre faire
    Appel des fonctions de forme de l'élément fini et leurs dérivées;
     $N, \partial N/\partial \xi, \partial N/\partial \eta, \partial N/\partial \zeta$ ;
    Appel des fonctions de forme de l'élément infini et leurs dérivées;
     $P, \partial P/\partial \xi, \partial P/\partial \eta, \partial P/\partial \zeta$ ;
    former la matrice Jacobéenne;
     $J = [X \ Y \ Z]^T [\partial N/\partial \xi \ \partial N/\partial \eta \ \partial N/\partial \zeta]$ ;
    calcul du déterminant et de l'inverse de  $J$ ;
    évaluation de la matrice  $B$  et  $D$ ;
    calcul de la somme appropriée;
fin
Fin de la routine
```

Algorithm 1: *Procédure de calcul la matrice de rigidité dans l'approche directe*

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la formulation des éléments infinis par l'approches directe, dans laquelle on peut contrôler la vitesse de décroissance à l'aide des paramètres de sévérité. Il est à noter qu'ils existent d'autres fonctions de décroissance qui ne sont pas présentées dans le cadre de ce mémoire.

Chapitre 3

Les éléments infinis - Approche inverse -

Dans l'approche inverse, le domaine de définition de l'élément de référence ainsi les fonctions de forme sont retenues et gardées comme définis pour un élément fini standard. Cependant, le seul changement est dans le calcul de la matrice Jacobéenne ou on utilise les fonctions de transformation géométrique qui sont construites ascendantes avec une singularité aux nœuds limites de l'élément de référence, de telle sorte à projeter les nœuds physique de l'élément naturel correspond à l'infini.

Marques et Owen ont présenté les transformations géométriques des éléments infinis tridimensionnels pour la première fois [26]. Il existe une large gamme de problème physique qui présente des comportements différent et plusieurs transformations ont été proposées par exemple celle présentée par Abdel-Fattah[1]. Dans ce travail on va exposer la transformation proposée par Zienkiewicz à cause de sa simplicité et ses avantages théoriques[4].

3.1 Transformation de Abdel-Fattah[1]

L'élément unidimensionnel de la figure ci-dessous forme la base pour les éléments bis et tridimensionnels. De nouveau ; l'élément s'étend du nœud 1, au nœud 2, puis le nœud 3 qui se trouve à l'infini. Le système de coordonnées globales $X \in [X_0, \infty[$ est transformé en élément fini défini par le système des coordonnées locaux $\xi \in [-1, +1]$.

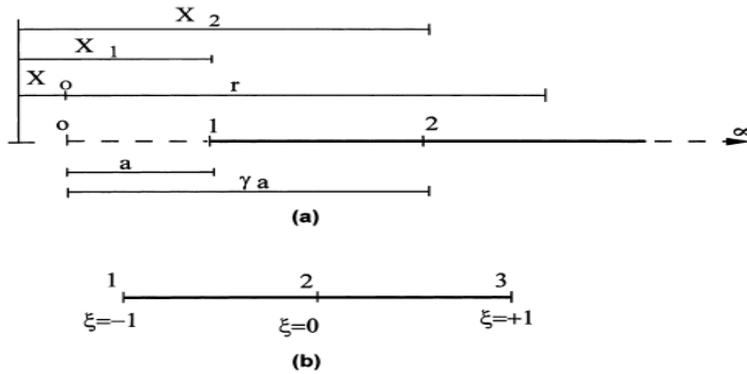


FIG. 3.1: *Élément infini unidimensionnel : a-representation globale et b-representation locale*

Comme il est montré dans la figure(3.1) le terme X_0 représente la coordonnée globale de l'origine de décroissance de l'élément tel que $X_0 < X_1$. L'endroit de l'origine de décroissance (pôle) est déterminé selon le paramètre de position γ , qui est défini par :

$$\gamma = \frac{X_2 - X_0}{X_1 - X_0} \quad (3.1)$$

La transformation du système des coordonnées globales au coordonnées locaux doit être exprimée par :

$$X = M_1(\xi)X_1 + M_2(\xi)X_2 \quad (3.2)$$

Pour inclure le paramètre de décroissance dans les fonctions de transformations géométriques $M_i(\xi)$ doit être écrite sous forme polynomial comme suit :

$$M_1(\xi) = A_0 + A_1 r(\xi) \quad (3.3)$$

$$M_2(\xi) = B_0 + B_1 r(\xi) \quad (3.4)$$

Là où $r(\xi)$ est une fonction du même rang prévue de croissance selon le type de décroissance du champ de variables considéré.

Les constantes A_0 , A_1 , B_0 , et B_1 sont déterminées en substituant les conditions de base suivantes :

$$M_i(\xi_j) = 1 \quad i = j \quad (3.5)$$

$$M_i(\xi_j) = 0 \quad i \neq j \quad (3.6)$$

Dans l'éq.(3.3) et (3.4), et résolvant les constantes correspondantes. Ceci rapporte :

$$A_0 = \frac{-r(\xi_2)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \quad (3.7)$$

$$A_1 = \frac{1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \quad (3.8)$$

$$B_0 = \frac{r(\xi_1)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \quad (3.9)$$

$$B_1 = \frac{-1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \quad (3.10)$$

Le champ de variables u , peut être interpolé en utilisant la fonction standard de forme :

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (3.11)$$

Avec,

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad (3.12)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad (3.13)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad (3.14)$$

Dans la formulation des fonctions de transformation géométriques pour n'importe quel type de décroissance, trois points correspondants peuvent être identifiés comme suit :

$$\begin{cases} \xi_1 = -1, & X = X_1 \\ \xi_2 = 0, & X = X_2 \\ \xi_3 = 1, & X = X_3 = \infty \end{cases}$$

Le terme r dans l'éq.(3.3) et (3.4) sera déterminé selon le type de décroissance proposé. Immédiatement, trois types de décroissance sont considérés.

3.1.1 Décroissance de type puissance

Pour un type de décroissance $(1/r^n)$ du champ de variables, les variables nodales peuvent être assumées comme :

$$u_1 = \left[\frac{r(\xi)}{a} \right]^n u \quad (3.15)$$

$$u_2 = \left[\frac{r(\xi)}{\gamma a} \right]^n u \quad (3.16)$$

Résolvant l'éqs.(3.11)-(3.16) pour $r(\xi)$ et supposant que $u_3 = 0$; on obtient :

$$r(\xi) = \frac{2^{1/n} \gamma a}{[\xi^2(\gamma^n - 2) - \xi\gamma^n + 2]^{1/n}} \quad (3.17)$$

3.1.2 Décroissance de type exponentiel

Considérant un type de décroissance $(1/e^{nr})$ du champ de variables, les variables nodales peuvent être écrites comme suit :

$$u_1 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{na}} u \quad (3.18)$$

$$u_2 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{n\gamma a}} u \quad (3.19)$$

Par conséquent $r(\xi)$ peut prendre la forme :

$$r(\xi) = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{2e^{na} e^{n\gamma a}}{f_1(\xi)} \right] \quad (3.20)$$

Où :

$$f_1(\xi) = 2e^{na}(1 - \xi^2) - e^{n\gamma a}\xi(1 - \xi) \quad (3.21)$$

3.1.3 Décroissance de type logarithmique

Pour ce type de décroissance $(\frac{1}{\ln r})^n$, les variables nodales peuvent être définies aussi :

$$u_1 = \frac{[\ln r(\xi)]^n}{(\ln a)^n} u \quad (3.22)$$

$$u_2 = \frac{[\ln r(\xi)]^n}{(\ln \gamma a)^n} u \quad (3.23)$$

Puis, $r(\xi)$ peut être exprimé comme suit :

$$r(\xi) = \exp \left\{ \frac{2^{1/n} \ln a \ln \gamma a}{[f_2(\xi)]^{1/n}} \right\} \quad (3.24)$$

Avec :

$$f_2(\xi) = 2(1 - \xi^2)(\ln a)^n - \xi(1 - \xi)(\ln \gamma a)^n \quad (3.25)$$

3.1.4 Position du pôle

Dans la transformation de Zienkiewicz, le pôle se trouve en dehors de l'élément alors que là, le déterminant du Jacobien a une valeur positive seulement dans les gammes suivantes :

$$(4/3)^{1/n} \leq \gamma \leq (4)^{1/n} \quad (3.26)$$

Pour une décroissance de type puissance :

$$\ln \frac{4e^{na}}{3} \leq \gamma \leq \ln \frac{4e^{na}}{na} \quad (3.27)$$

Pour une décroissance de type exponentiel :

$$\frac{\exp\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{1/n} \ln a\right]}{a} \leq \gamma \leq \frac{\exp(4^{1/n} \ln a)}{a} \quad (3.28)$$

Pour une décroissance de type logarithmique.

Ces conditions doivent être remplies lorsqu'en plaçant le pôle. L'extension de cette transformation aux cas bi et tridimensionnel est simple [1].

3.2 Transformation de Zienkiewicz

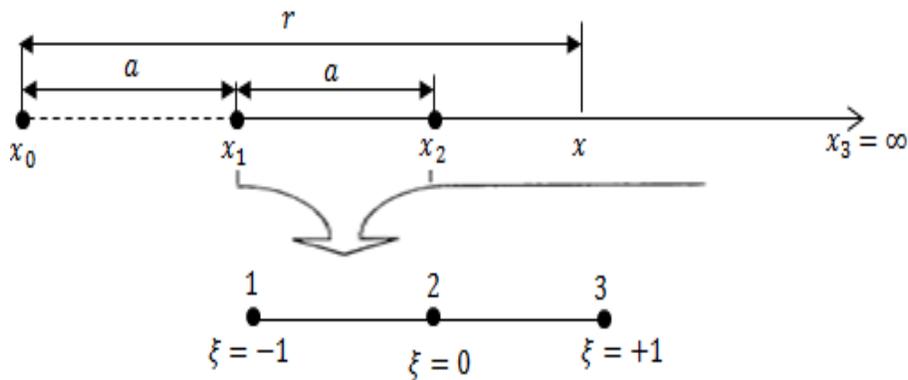


FIG. 3.2: Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel

Pour donner l'idée de base, on considère un élément quadratique unidimensionnel montré dans la figure ci-dessous et qui forme la base pour un élément bidimensionnel ou tridimensionnel, cet élément s'étendant du point x_1 à travers x_2 en x_3 qui se trouve à l'infini. x_0

étant le pôle du problème. Cet élément doit être tracé sur le domaine fini $-1 < \xi < 1$. La transformation appropriée peut s'écrire :

$$x = \tilde{N}_0 x_0 + \tilde{N}_2 x_2 \quad (3.29)$$

$$\tilde{N}_0 = \frac{-\xi}{1-\xi} \quad , \quad \tilde{N}_2 = 1 + \frac{\xi}{1-\xi} \quad (3.30)$$

Cette expression permet d'avoir :

$$\begin{cases} x = \infty & , \text{pour } \xi = +1 \\ x = x_2 & , \text{pour } \xi = 0 \\ x = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = x_1 & , \text{pour } \xi = -1 \end{cases}$$

Le point $\xi = -1$ correspond au point x_1 , qui est maintenant défini pour être le milieu entre x_0 et x_2 . Il est possible de choisir x_1 tels qu'il se trouve n'importe où dans l'intervalle $[x_0, x_2]$ et n'est pas au milieu. Ceci peut être réalisé par l'expression :

$$x_1 = \gamma x_2 + (1 - \gamma)x_0 \quad (3.31)$$

La théorie est seulement établie ici pour le cas $\gamma = \frac{1}{2}$ [4].

Cette transformation peut aussi s'écrire directement en fonction des seules coordonnées de l'élément infini en éliminant x_0 ;

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 \quad (3.32)$$

Avec :

$$M_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi} \quad , \quad M_2(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

Ce qui définit les fonctions de transformation géométrique de l'élément.

Donc, c'est une projection sur le domaine de référence $[-1, +1]$ d'un élément infini unidimensionnel défini par deux nœuds. Les fonctions de transformation géométriques pour les éléments de plus haut ordre et les éléments bi-et tridimensionnels sont élaborées sur la base de cette projection.

Une caractéristique importante de ces fonctions est qu'elles conduisent à une transformation indépendante de l'origine du système des coordonnées car :

$$M_1(\xi) + M_2(\xi) = 1 \quad (3.33)$$

Si l'origine du système global des coordonnées est décalé par Δx la valeur de x indiqué par (3.33) devrait changer par la même quantité ;

$$x + \Delta x = (x_1 + \Delta x)M_1(\xi) + (x_2 + \Delta x)M_2(\xi)x_2 \quad (3.34)$$

Qui sera simplifier à :

$$x + \Delta x = [M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2] + \Delta x[M_1(\xi) + M_2(\xi)] \quad (3.35)$$

Cette expression est juste sauf si la propriété (3.34) est vérifiée. Ce qui montre que :

$$M_1(\xi + \Delta\xi) + M_2(\xi + \Delta\xi) = M_1(\xi) + M_2(\xi) \quad (3.36)$$

Une transformation géométrique entre le domaine fini et le domaine infini a été maintenant établi. La prochaine étape est de voir dans quel forme les polynômes du domaine fini ξ sont transformés en domaine infini x .

Considérons un polynôme P :

$$P = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \dots \quad (3.37)$$

Ce qui est typique de ceux utilisés dans la méthode des éléments finis. Soit par exemple le polynôme u qui représente l'approximation nodale de la variable de champ dans le domaine fini ξ et qui peut se mettre sous la forme suivante ;

$$u = \sum N_i u_i = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \dots \quad (3.38)$$

La transformation de ξ à x est toujours obtenue :

$$x = x_0 \frac{2a}{(1 - \xi)} \quad (3.39)$$

Avec : $a = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Et son inverse :

$$\xi = 1 - \frac{2a}{x - x_0} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (3.40)$$

Où $r = x - x_0$ la distance radial mesurée à partir du pole x_0 . La substitution de (3.40) dans (3.38) conduit à un nouvel polynôme ;

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \dots \quad (3.41)$$

Où les β_i peuvent être détermines à partir de α_i et a . Si le polynôme est exigé de se décroître à 0 à l'infini, dans ce cas $\beta_0 = 0$.

3.2.1 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz

Considérons maintenant les fonctions de formes type Lagrange pour un élément fini quadratique unidimensionnel. Les trois nœuds sont conventionnellement placés à $\xi = -1$, $\xi = 0$ et $\xi = 1$. les fonctions de forme peuvent s'écrire sous :

$$L_1(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}\right) + \left(\frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3}\right) = \left(\frac{\xi - 0}{-1 - 0}\right)\left(\frac{\xi - 1}{-1 - 1}\right) = -\xi\left(\frac{1 - \xi}{2}\right) \quad (3.42)$$

$$L_2(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right) + \left(\frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3}\right) = \left(\frac{\xi + 1}{0 + 1}\right)\left(\frac{\xi - 1}{0 - 1}\right) = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (3.43)$$

On compare l'expression des fonctions de forme de l'élément fini et celle des transformations géométriques, on note que la seule différence est dans le terme relatif à $\xi = +1$ (ce qui implique $(1 - \xi)$). Ceci est démontré dans le tableau ci-dessous.

Nœud (i)	ξ_i	Fonctions de forme quadratique (EF)	Fonctions de transformation géométrique (EI)
1	-1	$-\xi \times (1 - \xi)/2$	$-\xi \times 2/(1 - \xi)$
2	0	$(1 + \xi) \times (1 - \xi)$	$(1 + \xi) \times 1/(1 - \xi)$

TAB. 3.1: Comparaison entre les fonctions de forme de l'élément fini et infini

Le terme à l'infini est inversé. Ceci montre immédiatement la possibilité de générer les fonctions de transformation géométrique pour un élément infini, Serendipity ou Lagrange, à n'importe quel ordre désiré et pour n'importe quel élément(bi ou tridimensionnel). Le processus sera maintenant expliqué :

$$M_i = \frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad ; \quad i = 1, n - 1 \quad (3.44)$$

Avec, n est le nombre de nœuds y compris celui qui est à l'infini(relatif à $\xi = +1$).

Il est à noter que l'expression (3.44) peut s'écrire sous la forme :

$$M_i = N_i \bar{f}_i \quad (3.45)$$

Donc, comme l'approche directe les fonctions de transformation géométrique s'écrivent comme un produit entre les fonctions de forme standards (élément fini) et une fonction croissante

\bar{f}_i qui présente une singularité à l'infini.

Avec :

$$\bar{f}_i = \left(\frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \right)^2 \quad (3.46)$$

Sont des fonctions croissantes parce que l'intervalle de définition est restreint de celui de l'élément fini $[-1,+1]$. Cette écriture s'applique aussi pour les éléments bis- et tridimensionnels.

3.3 Construction des éléments infinis tridimensionnels

Dans le domaine non borné tridimensionnel, il est toujours nécessaire de discrétiser l'infini entier du domaine pour appliquer les éléments infinis qui peuvent être couplés avec les éléments finis tridimensionnels conventionnels à 8 nœuds, élément cubique ou d'autres types d'éléments (voir chapitre 4). L'élément infini unidirectionnel (Fig.3.3 (a)) est employé pour dénoter les éléments qui se prolongent à l'infini dans une seule direction et l'élément infini de deux directions (Fig.3.3 (b)) est employé pour dénoter les éléments qui se prolongent à l'infini dans les deux directions, plus rarement on rencontre un élément qui se prolonge à l'infini dans trois directions. Pour ces types d'élément on peut dériver leurs fonctions de transformation géométrique. Celles-ci tombent dans des types de Lagrange et de Serendipity. Les types de Lagrange sont les plus simples et seront traités d'abord.

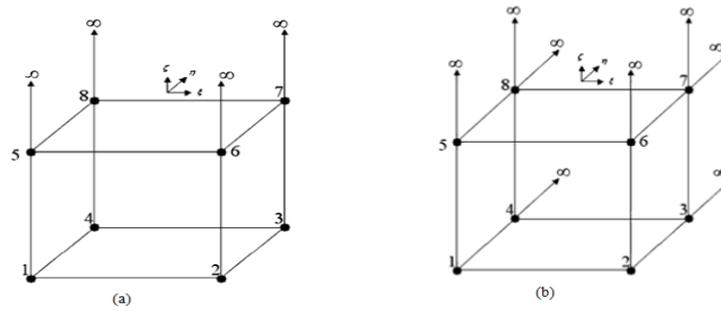


FIG. 3.3: Éléments infinis tridimensionnels

- (a) : une direction infinie
 (b) : deux directions infinies

3.3.1 Type de Lagrange-une direction infini

L'élément infini peut aisément être prolongé à deux ou trois dimensions. Dans trois dimensions les fonctions de transformation géométrique sont dérivées de celles unidimensionnelles. Si la définition originale de Zienkiewicz est employée, ceci mène aux expressions de la forme donnée dans l'équation 3.47.

$$\begin{aligned}
 x = & N_1(\eta)N_1(\xi)[x_0\tilde{N}_0 + x_1\tilde{N}_1] + N_2(\eta)N_1(\xi)[x_0\tilde{N}_0 + x_2\tilde{N}_1] + \\
 & + N_2(\eta)N_2(\xi)[x_0\tilde{N}_0 + x_3\tilde{N}_1] + N_1(\eta)N_2(\xi)[x_0\tilde{N}_0 + x_4\tilde{N}_1]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Là où les nombres de nœud sont comme définis sur le schéma 3.4. Ils sont essentiellement pris pour être les mêmes que pour l'élément fini équivalent. N_1 et N_2 sont les fonctions de forme standard de Lagrange. Les expressions semblables se tiennent pour x et y .

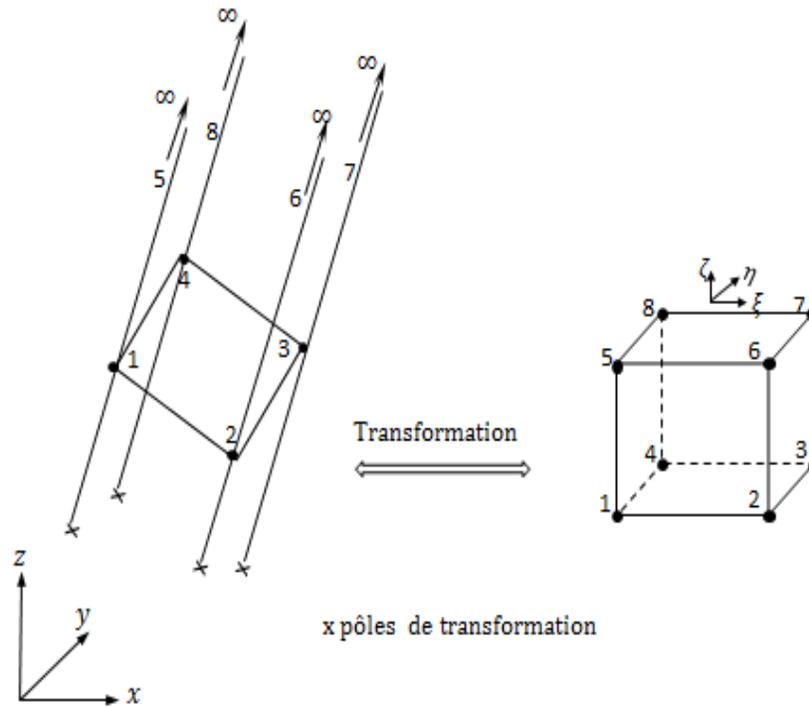


FIG. 3.4: Numérotation nodale d'élément infini tridimensionnel

Ces idées peuvent être converties en notation de Marques et d'Owen, simplement en multipliant les fonctions de transformation géométriques appropriées finies et infinies ensemble, pour l'ensemble désiré de directions finies et infinies. Dans le tableau 3.2, les fonctions de transformation géométriques sont établies pour l'élément de 8 nœuds, qui est infini dans la direction ζ et fini dans les directions ξ et η .

La construction des fonctions de transformation géométriques pour des éléments infinis de plus de 8 nœuds est pratiquement simple, en se basant sur l'idée précédente.

Nœud, i	ξ_i	η_i	ζ_i	M_i	$\partial M_i / \partial \xi$
1	-1	-1	-1	$(1 - \xi)(1 - \eta)/2(1 - \zeta)$	$-(1 - \eta)/2(1 - \zeta)$
2	1	-1	-1	$(1 + \xi)(1 - \eta)/2(1 - \zeta)$	$(1 - \eta)/2(1 - \zeta)$
3	1	1	-1	$(1 + \xi)(1 + \eta)/2(1 - \zeta)$	$(1 + \eta)/2(1 - \zeta)$
4	-1	1	-1	$(1 - \xi)(1 + \eta)/2(1 - \zeta)$	$-(1 + \eta)/2(1 - \zeta)$

Nœud, i	$\partial M_i / \partial \eta$	$\partial M_i / \partial \zeta$
1	$-(1 - \xi) / 2(1 - \zeta)$	$(1 - \xi)(1 - \eta) / 2(1 - \zeta)^2$
2	$-(1 + \xi) / 2(1 - \zeta)$	$(1 + \xi)(1 - \eta) / 2(1 - \zeta)^2$
3	$(1 + \xi) / 2(1 - \zeta)$	$(1 + \xi)(1 + \eta) / 2(1 - \zeta)^2$
4	$(1 - \xi) / 2(1 - \zeta)$	$(1 - \xi)(1 + \eta) / 2(1 - \zeta)^2$

TAB. 3.2: Fonctions de transformation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 8 nœuds type Lagrange

3.3.2 Type de Lagrange-deux directions infinis

Il est parfois souhaitable de construire des fonctions de transformation géométriques pour deux directions infinies, le troisième étant fini. Ici nous supposons que les deux directions infinies sont ξ et η . Il est naturellement simple de changer les calculs si une autre paire de direction est choisie (par exemple les deux directions infinies sont ζ et η). On prend comme exemple, l'élément à 8 nœuds (B8), là sont seulement deux fonctions de transformation géométriques différentes de zéro, en effet les nœuds 1 et 5.

Le prochain membre de la famille est quadratique avec 27 nœuds. Quand l'élément est infini dans deux directions, il y a seulement 12 fonctions de transformation géométriques différentes de zéro.

Le tableau ci-après montrent les fonctions de transformation géométrique pour un élément infini tridimensionnel à 8 nœuds dans deux directions.

Nœud, i	ξ_i	η_i	ζ_i	M_i	$\partial M_i / \partial \xi$
1	-1	-1	-1	$2(1 - \zeta) / [(1 - \xi)(1 - \eta)]$	$-2(1 - \zeta) / [(1 - \xi)^2(1 - \eta)]$
5	-1	-1	1	$2(1 + \zeta) / (1 - \xi)(1 - \eta)$	$-2(1 + \zeta) / [(1 - \xi)^2(1 - \eta)]$

Nœud, i	$\partial M_i / \partial \eta$	$\partial M_i / \partial \zeta$
1	$-2(1 - \zeta) / [(1 - \xi)(1 - \eta)^2]$	$-2 / [(1 - \xi)(1 - \eta)]$
5	$-2(1 + \zeta) / [(1 - \xi)(1 - \eta)^2]$	$2 / [(1 - \xi)(1 - \eta)]$

Fonctions et dérivés de tran.géo dont ξ, η infini/, ζ fini, les fonctions nulle sont omises

TAB. 3.3: Fonctions de transformation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 8 nœuds type Lagrange

3.3.3 Type de Lagrange-trois directions infinis

L'élément le plus simple a une fonction de transformation géométrique pour seulement un nœud. Elle est à $\xi = \eta = \zeta = -1$, et elle est donnée par l'expression suivante.

$$M_1 = 1/[(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)], \quad \partial M_1/\partial \xi = 1/[(1 - \xi)^2(1 - \eta)(1 - \zeta)]$$

$$\partial M_1/\partial \eta = 1/[(1 - \xi)(1 - \eta)^2(1 - \zeta)], \quad \partial M_1/\partial \zeta = 1/[(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)^2]$$

3.3.4 Type de Serendipity-une direction infini

L'élément de Serendipity le plus simple a 8 nœuds, et il est identique à l'élément cubique à 8 nœuds type Lagrange, ainsi il ne sera pas répété ici. Les premières fonctions de transformation géométriques type Serendipity sont pour un élément de 20 nœuds, duquel 12 nœuds ont des fonctions de transformation géométriques différentes de zéro. Le processus sera détaillé pour le nœud 1, situé à $\xi = -1$, $\eta = -1$ et $\zeta = -1$; et la même technique sera répétée pour les autres nœuds.

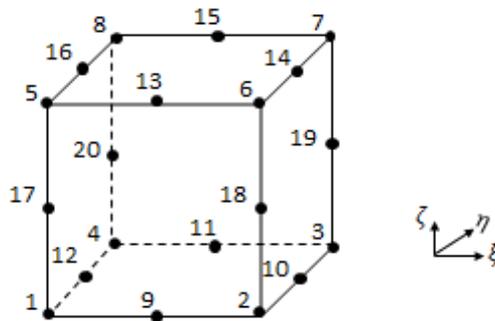


FIG. 3.5: *Element cubique à 20 nœuds*

D'abord les fonctions de transformation géométriques pour les nœuds de mi-côte sont développées. Considérons le nœud 12, à $\xi = -1$ et $\eta = 0$. La fonction de transformation géométrique pour ce nœud est simplement la fonction de transformation géométrique linéaire dans ξ multipliée par la fonction de forme linéaire dans η et la fonction de forme quadratique dedans ζ , ce qui nous donne :

$$M_{12} = (1 - \eta^2) \times 1/(1 - \xi) \times (1 - \zeta)/2 \quad (3.48)$$

Considérons maintenant le nœud 9 à $\xi = 0$ et $\eta = -1$. La fonction de transformation géométrique pour ce nœud est simplement la fonction de transformation géométrique quadratique dedans ξ multipliée par les fonctions de forme linéaires appropriées dedans η et ζ , c.à.d,

$$M_9 = \frac{(1 - \xi)}{(1 - \xi)} \times (1 - \eta)(1 - \zeta)/4 \quad (3.49)$$

La fonction de transformation géométrique pour le nœud 17 est :

$$M_{17} = (1 - \zeta^2)(1 - \eta)/(1 - \xi) \quad (3.50)$$

La fonction de transformation géométrique infinie pour le nœud 1 à $\xi = -1$, $\eta = -1$ et $\zeta = -1$ est maintenant construite en commençant par le produit des fonctions de transformation géométriques linéaires dans les directions ξ , η et ζ . Nous dénotons ceci par :

$$\hat{M}_1 = \frac{2}{(1 - \xi)} \times \frac{(1 - \eta)}{2} \times \frac{(1 - \zeta)}{2} = \frac{(1 - \eta)(1 - \zeta)}{2(1 - \xi)} \quad (3.51)$$

Cette fonction n'est pas, cependant, zéro aux nœuds de mi-côte. Pour réaliser ça, des multiples des fonctions de transformation géométrique du nœud de mi-côte sont maintenant soustraits. La valeur du multiple doit clairement être la valeur des fonctions de transformation géométriques du coin aux nœuds de mi-côte à côté du nœud 1. (à tous les autres nœuds appropriés de mi-côte, les fonctions de transformation géométriques sont zéro).

$$\hat{M}_1(-1, 0, -1) = \frac{1}{2}, \quad \hat{M}_1(-1, -1, 0) = \frac{1}{2}, \quad \hat{M}_1(0, -1, -1) = 2 \quad (3.52)$$

Par conséquent l'expression finale pour M_1 est :

$$M_1 = \hat{M}_1 - 2M_9 - \frac{1}{2}M_{12} - \frac{1}{2}M_{17} = -\frac{(1 - \eta)(1 - \zeta)}{2(1 - \xi)}[2 - \xi - \eta - \zeta] \quad (3.53)$$

Ce processus se répète pour les autres nœuds. Tous les fonctions de transformation géométriques et leurs dérivés sont montrés dans le tableau ci-après. Pour plus d'une direction infinie les fonctions de transformation géométriques peuvent être développées par les méthodes semblables.

Nœud, i	1	4	5	8	9	11	12	13	15	16	17	20
ξ_i	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1
η_i	-1	1	-1	1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
ζ_i	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0	0

Nœud, i	M_i	$\partial M_i / \partial \xi_i$
1	$-(1-\eta)(1-\zeta)(2+\xi+\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$-(1-\eta)(1-\zeta)(3+\eta+\zeta)/2(1-\xi)^2$
4	$(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/4(1-\xi)$	$(1-\eta)(1-\zeta)/2(1-\xi)^2$
5	$(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/4(1-\xi)$	$(1+\eta)(1-\zeta)/2(1-\xi)^2$
8	$-(1+\eta)(1-\zeta)(2+\xi-\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$-(1+\eta)(1-\zeta)(3-\eta+\zeta)/2(1-\xi)^2$
9	$(1-\eta)(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)^2$
11	$(1-\eta)(1+\zeta)(1-\zeta)/(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\zeta)(1-\zeta)/(1-\xi)^2$
12	$(1+\eta)(1+\zeta)(1-\zeta)/(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\zeta)(1-\zeta)/(1-\xi)^2$
13	$(1-\eta)(1+\zeta)(-2-\xi-\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\zeta)(-3-\eta+\zeta)/2(1-\xi)^2$
15	$(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/4(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\zeta)/2(1-\xi)^2$
16	$(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/4(1-\xi)$	$(1+\eta)(1+\zeta)/2(1-\xi)^2$
17	$(1+\eta)(1-\zeta)(-2-\xi+\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1+\eta)(1-\zeta)(-3+\eta+\zeta)/2(1-\xi)^2$
20	$(1-\eta)(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)^2$

Nœud, i	$\partial M_i / \partial \eta_i$	$\partial M_i / \partial \zeta_i$
1	$(1-\zeta)(1+\xi+2\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\xi+2\zeta+\eta)/2(1-\xi)$
4	$-(1-\zeta)(1+\xi-2\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1+\eta)(1+\xi-\eta+2\zeta)/2(1-\xi)$
5	$-(1+\zeta)(-1-\xi-2\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1-\eta)(-1-\xi-\eta+2\zeta)/2(1-\xi)$
8	$(1+\zeta)(-1-\xi+2\eta+\zeta)/2(1-\xi)$	$(1+\eta)(-1-\xi+\eta+2\zeta)/2(1-\xi)$
9	$-(1-\zeta)(1+\xi)/4(1-\xi)$	$-(1+\xi)(1-\eta)/4(1-\xi)$
11	$(1-\zeta)(1+\xi)/4(1-\xi)$	$-(1+\xi)(1+\eta)/4(1-\xi)$
12	$-2\eta(1-\zeta)/(1-\xi)$	$-(1-\eta)(1+\eta)/(1-\xi)$
13	$-(1+\xi)(1+\zeta)/4(1-\xi)$	$(1+\xi)(1-\eta)/4(1-\xi)$
15	$(1+\xi)(1+\zeta)/4(1-\xi)$	$(1+\xi)(1+\eta)/4(1-\xi)$
16	$-2\eta(1+\zeta)/(1-\xi)$	$(1-\eta)(1+\eta)/(1-\xi)$
17	$-(1-\zeta)(1+\zeta)/(1-\xi)$	$-2\zeta(1-\eta)/(1-\xi)$
20	$(1-\zeta)(1+\zeta)/(1-\xi)$	$-2\zeta(1+\eta)/(1-\xi)$

Fonctions et dérivés de trans.géo dont ξ infini/ η, ζ fini, les fonctions nulle sont omises

TAB. 3.4: *Fonctions de transforation géométriques et leurs dérivées d'un elt infini 3D à 20 nœuds type Serendipity*

3.4 Formulation des matrices de rigidité élémentaires

Pour les problèmes d'élasticité la matrice de rigidité élémentaire est donnée comme d'habitude par (chapitre 4) :

$$k^e = \int_V B^T D B dV \quad (3.54)$$

Dans le cas de l'approche inverse, le seul changement requis pour rendre l'élément infini réside dans la nouvelle expression de la matrice Jacobéenne ; avec X, Y et Z sont les coordonnées nodales de l'élément infini construit. Ce qui impose l'insertion d'un appel aux fonctions de transformation géométrique (Voir la structure de l'Algorithme 2).

```
Début de la routine
Initialisation;
pour tous les points de Gauss-Legendre faire
    Appel des fonctions de forme de l'élément fini et leurs dérivées;
     $N, \partial N/\partial \xi, \partial N/\partial \eta, \partial N/\partial \zeta$ ;
    Appel des fonctions de transformation géométrique et leurs dérivées;
     $M, \partial M/\partial \xi, \partial M/\partial \eta, \partial M/\partial \zeta$ ;
    former la matrice Jacobéenne;
     $J = [X \ Y \ Z]^T [\partial M/\partial \xi \ \partial M/\partial \eta \ \partial M/\partial \zeta]$ ;
    calcul du déterminant et de l'inverse de  $J$ ;
    évaluation de la matrice  $B$  et  $D$ ;
    calcul de la somme appropriée;
fin
Fin de la routine
```

Algorithm 2: *Procédure de calcul la matrice de rigidité dans l'approche inverse*

3.5 Conclusion

Dans cette approche, on peut facilement générer les fonctions de transformation géométrique d'un élément infini, et mettre ces fonctions comme étant un produit des fonctions de forme standard par des fonctions croissantes qui présentent une singularité à l'infini.

Chapitre 4

Modélisation par Éléments Finis

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un phénomène d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement de ce modèle s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes, qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutés les conditions aux limites. Exemple : la théorie d'élasticité est basée sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte, les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses des petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liant les contraintes et les déformations. En effet une telle analyse constituée des étapes suivantes :

- développement d'un modèle ;
- la formulation des équations régissantes ;
- discrétisation des équations ;
- solution des équations ;
- l'interprétation des résultats.

Dans ce chapitre, on va donner d'abord une idée sur l'intérêt du calcul tridimensionnel dans les problèmes d'élasticité, après on va présenter les équations qui gènèrent ces problèmes(en particulier le domaine sol) en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale. Le système obtenu sera écrit sous forme matricielle. Les expressions des différentes matrices assemblées ainsi que celles des matrices élémentaires correspondantes seront exposées. rappelons que le sol est supposé comme un milieu linéaire élastique.

Face à la complexité d'un espace à trois dimensions, on est peut être tenté de vouloir à tout prix réaliser un calcul bidimensionnel et il paraît difficile d'envisager une utilisation courante des modèles tridimensionnels pour le dimensionnement des ouvrages. Cependant, ce type de calcul est devenu abordable et il peut être mené de manière raisonnable pour étudier des ouvrages exceptionnels, des groupes de structures ou à des fins de recherche pour analyser des procédés particuliers de construction que l'on ne saurait pas aborder autrement. D'une manière générale, en toute rigueur, un calcul tridimensionnel devrait être réalisé dans les cas suivants[17] :

- L'effet de la troisième dimension est important (par exemple, chargement latéral des pieux).
- Aucune simplification géométrique n'est raisonnablement envisageable ou aucune symétrie n'est exploitable à cause des structures ou des terrains ;
- Forte hétérogénéité des couches de sol, avec la présence de failles ou de lentilles ;
- Etude du tassement différentiel d'un groupe de structures ;
- Stabilité du front de taille d'un tunnel et intersection de galeries ;
- Ouvrages de soutènement (mur en T_é ; effet de bord, coins d'une fouille) ;
- Barrage-voûte en milieu rocheux (vallée étroite) ;
- Etude locale d'un phénomène ou de l'interaction du sol avec certains types de renforcement (géogrilles, barres, ancrages) ;

Le tableau suivant résume d'une manière très générale les problèmes posés par les approches bidimensionnelles et tridimensionnelles.

Type de modèle	Avantages	Inconvénients- limitations
Modèle axi-symétrique	<ul style="list-style-type: none"> - Prise en compte d'une géométrie tridimensionnelle particulière - Lois de comportement et état initial quelconques - Etudes paramétriques faciles - Approche bi phasique possible - Élément de contact - Phasage de travaux 	<ul style="list-style-type: none"> - Ouvrage à symétrie de révolution - Respect des conditions de symétrie de révolution pour les terrains - Chargement de révolution ou décomposable en une série de Fourier
Modèle plan (longitudinale ou transversal)	<ul style="list-style-type: none"> - Lois de comportement et état initial quelconques - Etudes paramétriques faciles - Approche biphasique possible, calcul de surface libre - Éléments de contact - Phasage de travaux 	<ul style="list-style-type: none"> - Hypothèse d'un ouvrage de grande longueur (modèle transversal) et/ou d'une largeur suffisante (modèle longitudinal) - Chargement par mètre linéaire - Simulation approximative des renforcements
Modèle tridimensionnel	<ul style="list-style-type: none"> - Géométrie réelle de l'ouvrage et de son environnement - groupes de structures - contraintes initiales quelconques - effet tridimensionnel des renforcements - éléments de contact - phasage de travaux simplifié 	<ul style="list-style-type: none"> - maillages pas assez raffinés - durée des calculs - lois de comportement simples - approche biphasique et évolution dans le temps délicates à mener - complexité des interactions sols-structure (maillage fin requis) - études paramétriques coûteuses

TAB. 4.1: *Avantages et Inconvénients des deux approches bi et tridimensionnelles*

A côté de ces avantages et de ces inconvénients, il convient de signaler que les calculs plans sont généralement du côté de la sécurité en exagérant les déformations et surestimant les contraintes [17]. En revanche, les résultats obtenus avec un modèle tridimensionnel sont plus proches des valeurs réelles (mesurées). Lorsque le calcul tridimensionnel s'impose (c'est-à-dire si le modèle bidimensionnel ne peut être justifié), il faut le réaliser. Il vaut parfois mieux

effectuer un calcul tridimensionnel avec une loi de comportement simple et un maillage aussi fin que possible, plutôt qu'un calcul bidimensionnel inadapté avec une loi de comportement avancée (élastoplasticité avec écrouissage) et un maillage très raffiné.

4.1 Mise en équation du domaine sol

Afin de mettre en équations le problème, considérons un solide Ω et un volume élémentaire $dV \cong d\Omega$ comme la montre la figure ci-dessous ; dans ce chapitre on est concerné uniquement au problème statique.

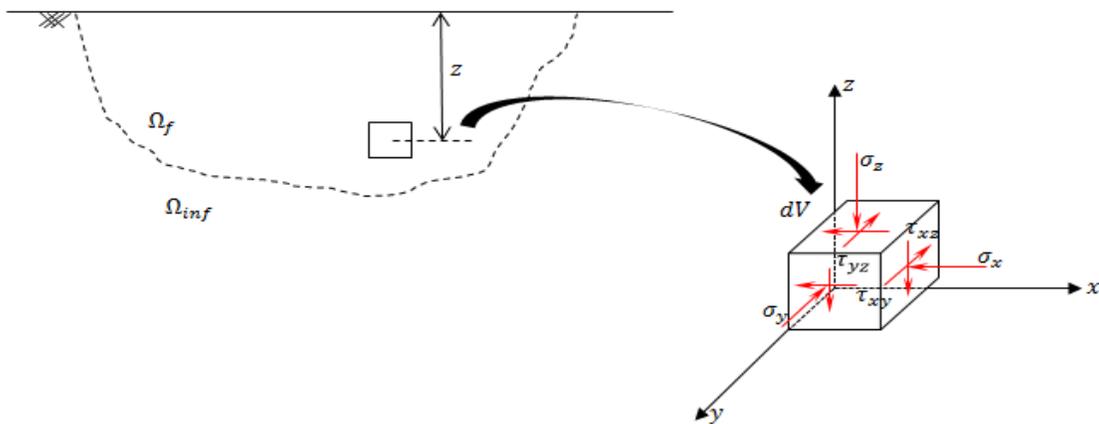


FIG. 4.1: *solide Ω*

4.1.1 Forme différentielle d'équilibre

L'équation d'équilibre gouvernant l'élasticité tridimensionnelle est donnée par la formule suivante[11] :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad (4.1)$$

Où le champ de contrainte σ_{ij} doit être continu et dérivable (classe C^1) et satisfaire à la propriété de symétrie c.à.d.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j)$$

Ainsi aux conditions aux limites statiques.

$$n_i \sigma_{ij} = t_j$$

Dans le cas où aucune force extérieure n'est imposée l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j) \quad n_i \sigma_{ij} = t_j$$

4.1.2 Forme différentielle de la cinématique

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Cette équation représente la forme différentielle de la cinématique et tout champ u_i qui en est solution est dit champ de déplacement compatible.

Ici la propriété de symétrie est évidente ; ainsi que le champ u_i doit être continu et dérivable (classe C^1) et satisfaire aux conditions aux limites :

$$u_i = \bar{u}_i$$

La loi de comportement de l'élasticité linéaire isotrope en petites déformations permet d'écrire les contraintes en fonction des déformations par la forme suivante (loi de Hook) :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.3)$$

Qui peut être écrit sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.4)$$

Avec ; le vecteur des contraintes en élasticité tridimensionnelle s'écrit par :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T \quad (4.5)$$

Et le vecteur des déformations par :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T \quad (4.6)$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Les paramètres E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Les équations cinématiques pour des petits déplacements en écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec : $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les déplacements dans les directions x, y, z respectivement.

D'où, la relation déformation-déplacements peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{u\} \quad (4.9)$$

$$\text{Avec ; } [S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Remplaçant la relation (4.9) dans la relation contraintes-déformation (4.4) :

$$\{\sigma\} = [D][S]\{u\} \quad (4.10)$$

La résolution exacte de la forme différentielle étant pratiquement impossible, on doit recourir à des résolutions approchées, basées sur des techniques numériques. Dans cette optique il s'avère que la forme ci-indiquée n'est pas toujours la meilleure. La forme intégrale, établie selon une démarche type est généralement supérieure.

4.1.3 Forme intégrale de l'équilibre

Nous utilisons la méthode des résidus pondérés, pour passer du système d'équation aux dérivées partielles à la formulation intégrale en adoptant la formulation de type Galerkin

pour une fonction poids δu . La forme forte s'écrit :

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j \right) w_j dV = 0 \quad (4.11)$$

A l'aide du théorème de divergence, l'équation (4.11) peut s'écrire :

$$\int_A \sigma_{ij} w_j n_i dA - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV + \int_V f_j w_j dV = 0 \quad (4.12)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV = \int_A \sigma_{ij} w_j n_i dA + \int_V f_j w_j dV \quad (4.13)$$

On fait de la sorte apparaître un terme aux limites $\int_A \sigma_{ij} w_j n_i dA$, grâce auquel on peut introduire les conditions aux limites.

Négligeant les forces de volume f ;

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV = \int_A \sigma_{ij} w_j n_i dA = \int_A t_j w_j dA \quad (4.14)$$

Si on considère l'équation de mouvement, il est simple de mettre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = \rho \ddot{u} \quad (4.15)$$

La démonstration en est immédiate en suivant le même chemin que pour l'équilibre statique, on trouve à la fin :

$$\int_V \rho \ddot{u}_j w_j dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV = \int_A t_j w_j dA \quad (4.16)$$

4.2 Modélisation du problème

Le domaine sol, de dimension infinie, est divisé en un domaine finie Ω_f au voisinage de la structure(ou charge) et un domaine Ω_{inf} qui s'étend à l'infini [26]. Dans le domaine Ω_f le sol est modélisé par les éléments finis tridimensionnels, les inconnus nodaux sont les déplacements aux nœuds, nous exprimons les déplacements sous la forme :

$$u \approx NU \quad (4.17)$$

Avec : U est le vecteur nodal de déplacement définit comme valeurs inconnues et approximées des champs continus.

N sont les fonctions de forme de l'élément fini appelées aussi fonctions d'interpolation nodale ; dans le tableau suivant on donne les fonctions de forme de quelques éléments tridimensionnels

linéaires (figure ci-dessous) qui peuvent être utilisés. Pour les éléments quadratiques voir l'Annexe A. Les axes (X_1, X_2, X_3) sont respectivement (x, y et z).

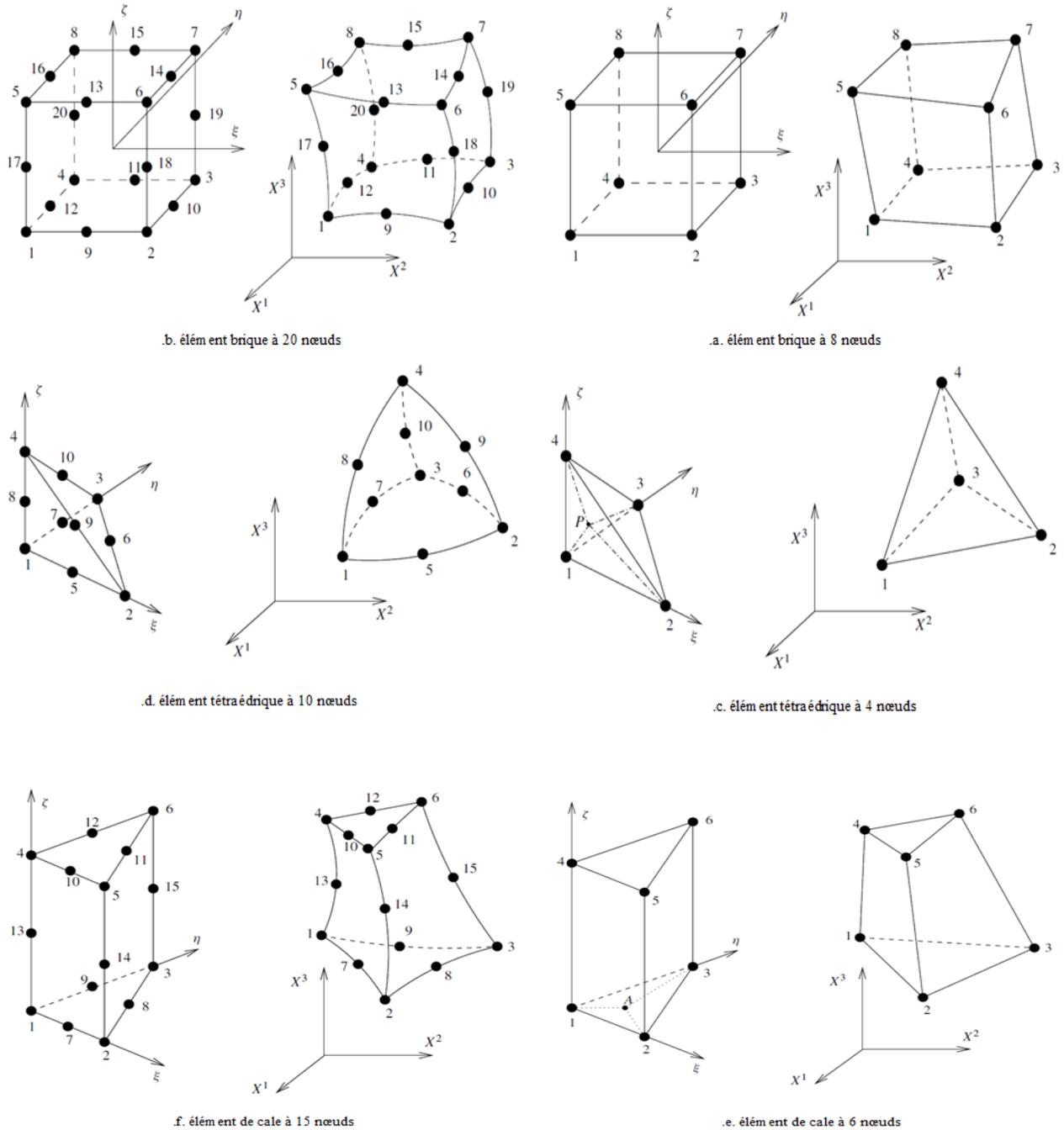


FIG. 4.2: Quelques type d'éléments tridimensionnels

Type d'élément	Les fonctions de forme
élément tétraédrique (4 nœuds)	$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ $N_2 = \xi$ $N_3 = \eta$ $N_4 = \zeta$
élément de cale (6 nœuds)	$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)/2$ $N_2 = \xi(1 - \zeta)/2$ $N_3 = \eta(1 - \zeta)/2$ $N_4 = (1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)/2$ $N_5 = \xi(1 + \zeta)/2$ $N_6 = \eta(1 + \zeta)/2$
élément cubique (8 nœuds)	$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8$ $N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8$ $N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8$ $N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8$ $N_5 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8$ $N_6 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8$ $N_7 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8$ $N_8 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8$

TAB. 4.2: Les fonctions de forme linéaires des éléments tridimensionnels

Discrétisons le domaine en utilisant les éléments cubiques (B8) à trois degré de libertés ; le vecteur nodal de déplacement s'écrit comme suit :

$$U = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8]^T \quad (4.18)$$

La forme générale du vecteur ligne correspond aux fonctions de forme de cet élément pour trois degré de liberté s'écrit :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Afin de développer la formulation en élément fini pour le problème d'élasticité, l'équation (4.14) devient :

$$\int_V \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} dV = \int_A w_j t_j dA \quad (4.20)$$

$$\int_V \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \tau_{xz} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial w_2}{\partial z} \tau_{yz} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial w_3}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \sigma_z \end{pmatrix} dV = \int_A \begin{pmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{pmatrix} dA \quad (4.21)$$

D'où :

$$\int_V \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} dV = \int_A \begin{pmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{pmatrix} dA \quad (4.22)$$

La substitution de l'équation (4.4) dans (4.22) nous donne :

$$\int_V \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} \end{pmatrix} [D] \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} dV = \int_A \begin{pmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{pmatrix} dA \quad (4.23)$$

Substituons l'équation (4.9) dans l'équation précédente, on trouve :

$$\int_V \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} \end{pmatrix} [D][S]\{u\} dV = \int_A \begin{pmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{pmatrix} dA \quad (4.24)$$

Utilisons l'équation (4.17) ; l'équation (4.22) devient :

$$\int_V \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial x} & \frac{\partial w_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} \end{pmatrix} [D][S][N]\{U\} dV = \int_A \begin{pmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{pmatrix} dA \quad (4.25)$$

Nous employons le symbole $[B]$ pour dénoter l'expression de matrice dans l'équation ci-dessus qui est ;

$$\varepsilon = [S][N]\{U\} = [B]\{U\} \quad (4.26)$$

L'expression de la matrice $[B]$ est comme suit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Où la taille des rangées de la matrice $[B]$ est toujours six pour le cas d'élasticité 3D, tandis que la taille des colonnes égale à trois fois le nombre de nœud par élément parce qu'il y a trois degrés de liberté par nœud.

La méthode de Galerkin[36] énonce que $w_1 = N_i$ $i = (1, 2, 3, \dots, 8)$, $w_2 = N_i$ $i = (1, 2, 3, \dots, 8)$ et $w_3 = N_i$ $i = (1, 2, 3, \dots, 8)$. Appliquant ces fonctions dans l'éq(4.25) donne pour l'intégrale du domaine fini :

$$\int_{\Omega_f} [B]^T [D] [B] d\Omega \{U\} \quad (4.28)$$

Par conséquent la matrice de rigidité élémentaire peut être exprimée comme :

$$[K_f] = \int_{\Omega_f} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4.29)$$

Le deuxième intégrale de l'équation (4.25) donne le vecteur force, avec ;

$$\int_A \begin{Bmatrix} w_1 t_x \\ w_2 t_y \\ w_3 t_z \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} dA = \int_A [N]^T \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} dA \quad (4.30)$$

Dans le domaine Ω_{inf} , le sol est modélisé par les éléments infinis, les déplacements en tout point dans un élément sont exprimés par :

$$u \approx MU \quad (4.31)$$

Avec : M sont des fonctions de forme de l'élément infini définies soit selon l'approche directe ou selon l'approche inverse.

En suivant la même démarche que pour les éléments finis ; on obtient la matrice de rigidité de l'élément infini :

$$[K]_{inf} = \int_{\Omega_{inf}} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4.32)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial M_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial M_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial M_8}{\partial z} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial M_8}{\partial y} & \frac{\partial M_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial M_8}{\partial z} & \frac{\partial M_8}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & \dots & \frac{\partial M_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

D'où : la matrice de rigidité totale s'écrit :

$$[K]_t = [K]_f + [K]_{inf} \quad (4.34)$$

En fin on obtient la forme matricielle suivante ;

$$[K]_t \{U\} = \{F\} \quad (4.35)$$

avec :

$[K]_t$:matrice de rigidité.

$\{F\}$:vecteur de sollicitation.

4.3 Conclusion

En terme économique, la modélisation bidimensionnelle d'un problème élastostatique ou élastodynamique est très attirante. Cependant, si le modèle bidimensionnel ne peut être justifié, le recours à une modélisation tridimensionnelle est indispensable.

Chapitre 5

Applications

Dans beaucoup de problèmes liés à l'ingénierie et plus précisément les problèmes de géomécanique, l'ingénieur se préoccupe de contraintes, déformations et les déplacements aux points loin du point de chargement, par exemple, le problème d'un tunnel souterrain situé en profondeur, d'une interaction barrage-fondation ou sol-structure et la propagation des ondes dans des milieux infinis ou semi-infinis. Le sol support est soumis au différents cas de chargement de type sismique ou quelconque, ces charges-là ont en commun une source d'énergie situés à la surface libre ou en profondeur du sol, ce dernier qui induit la dissipation d'énergie vers l'infini. Avant le développement des éléments infinis, une manière d'étudier la réponse à l'infini consiste à tronquer le domaine d'analyse à des grandes distances à partir du point d'application de la charge. Cependant, une telle analyse exige un grand nombre d'équations à résoudre ce qui rend le coût des calculs prohibitifs.

Ce chapitre comporte la partie pratique de notre travail, et dans lequel on a montré la performance des éléments infinis dans le traitement des milieux infinis et semi-infinis. Au premier lieu, les programmes développés sont d'abord validés et comparés à des solutions analytiques telle que la solution de Boussinesq dans le cas d'un milieu semi-infini soumis à une charge ponctuelle à sa surface libre, et la solution de Kirsh qu'on peut l'assimiler à un tunnel très profond dans un milieu infini. Ensuite, des différentes applications ont été effectués dans le but de montrer l'influence du paramètre de décroissance et de la position de la limite de troncature.

5.1 Règles générales pour construire des maillages [18]

Un maillage d'éléments finis doit être le fruit d'un compromis entre la capacité de calcul disponible (nombre maximal de degrés de liberté) et la précision acceptable sur les résultats numériques, pour cela le maillage doit être construit en considérant les points suivants :

- Toutes les symétries compatibles avec le problème mécanique (géométrie, conditions aux limites, chargements) doivent être utilisées afin de réduire la taille du système étudié ;
- Le maillage doit être suffisamment fin dans les zones les plus sollicitées, c'est-à-dire dans les zones où les plus fortes variations des déplacements et des contraintes sont attendues. Ces variations sont occasionnées soit par un chargement important, soit par la présence d'une singularité géométrique, soit par des contours géométriques à forte courbure (cavité)... etc ;
- La taille des éléments doit rester, dans la mesure du possible, telle que le rapport de la plus grande dimension de l'élément sur sa plus petite dimension soit proche de l'unité, en particulier dans les zones de forts gradients. Ce rapport est appelé *rapport de forme*, il dépend de la nature du problème. D'après [18], l'expérience montre que, pour obtenir une solution correcte en déplacements, un rapport de forme de 10 est un maximum et que, pour obtenir une solution correcte en contraintes, le rapport de forme ne doit pas dépasser 3. Pour ne pas introduire de perturbation dans les calculs numériques (distorsion des éléments). Dans le cas où le comportement est non linéaire, il semble préférable d'avoir un rapport de forme plus faible ;
- Dans les zones moins sollicitées, des éléments de taille plus importante sont généralement mis en place pour atteindre les frontières extérieures.

5.2 Application et validation

5.2.1 Cas du problème de Boussinesq

Le fameux problème de Boussinesq consiste à étudier la déformation dans un massif élastique semi-infini sous l'action d'une force ponctuelle et verticale appliquée à sa surface libre. Pour des raisons économiques, la symétrie du problème permet de réduire la taille du domaine, en considérant uniquement un quart du massif (figure ci-après).

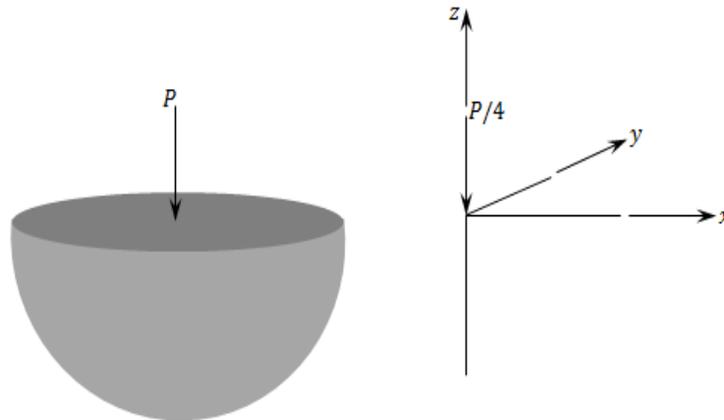


FIG. 5.1: Géométrie et chargement (problème de Boussinesq)

La valeur de la charge ponctuelle appliquée est $P = 10000N$. Les propriétés mécaniques du sol tel que le module de Young et le coefficient de Poisson sont respectivement fixés à $E = 10MPa$ et $\nu = 0.33$.

5.2.1.1 Choix du type d'élément

Le choix des éléments finis constitue l'un des aspects essentiels de la modélisation ; dans le programme développé (EF) avec encastrement de la limite de troncature , on a choisi un élément cubique à huit nœuds (B8) pour la modélisation tridimensionnelle du problème. Les résultats de cet élément sont comparés à celles de Belarbi[3] ,ce dernier qui a utilisé un élément cubique à quatorze nœuds (B14) et à la solution analytique de Boussinesq. Le maillage adopté (raffiné autour de la charge ponctuelle) implique 125(5x5x5) éléments avec 216 nœuds, les résultats sont regroupés sur les tableaux suivants :

TAB. 5.1: *Tassements sur l'axe de symétrie du problème de Boussinesq*

Profondeur z	Tassement le long de l'axe $z \times 10^{-5}$			
	0	-1	-3	-7
Théorie	∞	-49.60	-16.06	-7.09
MEF(B14)	-190.19	-40.52	-13.77	-5.04
Profondeur z	0	-1	-3	-7
Théorie	∞	-49.60	-16.06	-7.09
MEF(B8)	-146.51	-44.38	-11.42	-5.38

Les tassements obtenus par l'élément B8 sont proches des valeurs théoriques, ainsi ceux de l'élément B14; l'écart entre les résultats de B8 et B14 revient à la différence entre les deux éléments utilisés, en effet un élément cubique à 14 nœuds améliore bien la solution numérique du fait qu'il contient des fonctions de forme quadratiques. D'où; l'élément choisit B8 contenant des fonctions de forme linéaires donne des bons résultats et il est très utilisé dans les maillages tridimensionnelles.

5.2.1.2 Validation

Après le choix du type d'élément, on va aller dans cette étude à valider notre programme développé en utilisant la méthode des éléments finis avec encastrement de la limite de troncature (EF) et la méthode des éléments infinis (EFI). Le sol de la région proche du domaine est représenté par les éléments finis tridimensionnels(B8); et la région extérieure (partie infinie) est divisée en deux parties qui sont respectivement représentées par EI-1 et EI-2 (EI-1 désigne que les éléments infinis tridimensionnels utilisés se prolongent à l'infini dans une seule direction et EI-2 dans les deux directions). Comme il est montré sur FIG 5.2.

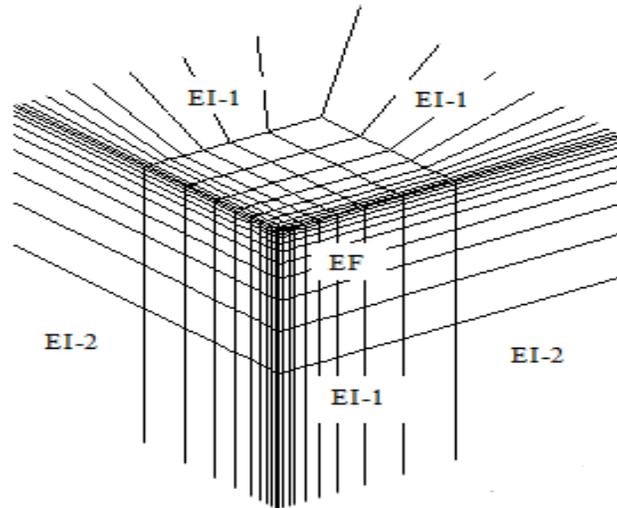
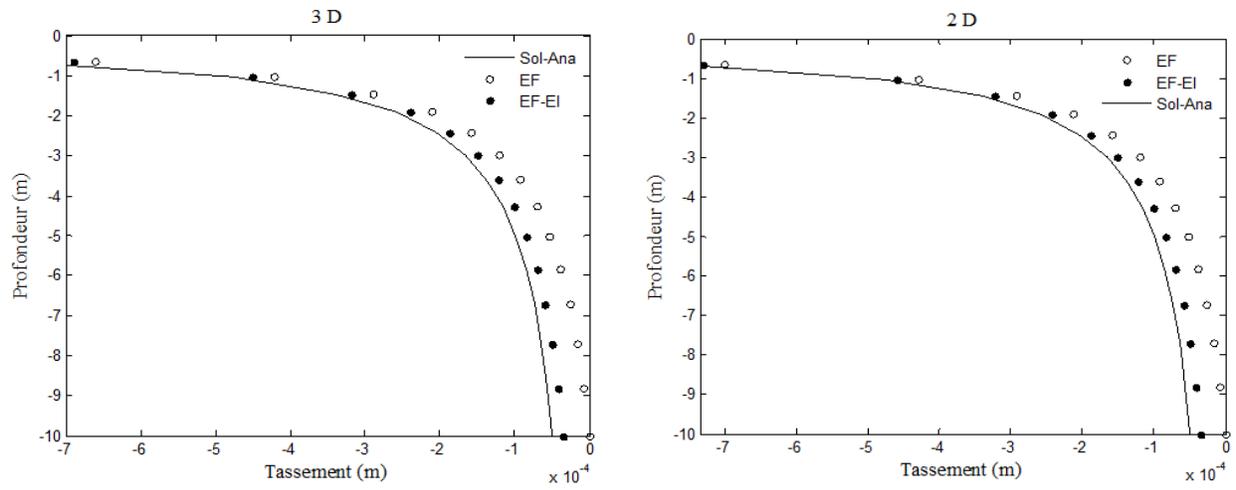
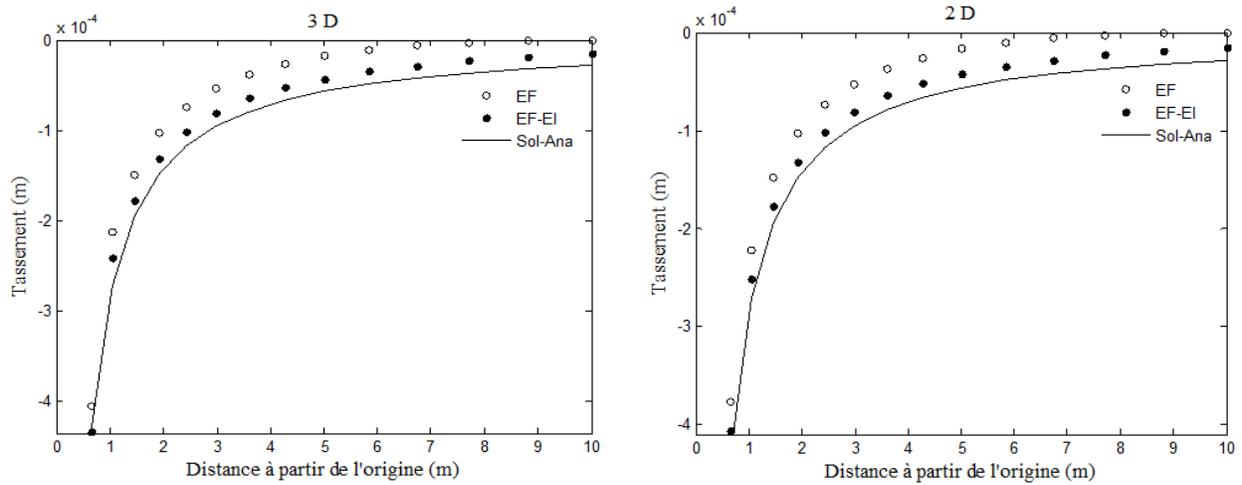


FIG. 5.2: Configuration globale et régions infinies

Les figures ci-dessous (FIG 5.3 et 5.4) présentent Les valeurs numériques des tassements calculées par la méthode (EF) et la méthode des éléments infinis(EFI)en 2D et 3D, ainsi que les erreurs relatives par rapport à la solution analytique de Boussinesq sont reportées sur les tableaux qui suivent. Ici, le problème de Boussinesq est un problème tridimensionnel, mais, il peut être traité en 2D à cause de l'état axisymétrique qu'il le présente. Le maillage utilisé en 2D est $n \times n$ éléments avec une géométrie de $B \times B$, l'équivalent de ce maillage en 3D est comme suit : $n \times n \times n$ éléments et une géométrie de $B \times B \times B$. Les données précédentes restent valables (module de Young, coefficient de Poisson et la valeur de P).

FIG. 5.3: Tassement le long de l'axe de symétrie (z)FIG. 5.4: Tassement le long de l'axe (x)

TAB. 5.2: Tassements sur l'axe de symétrie en 3D

Profondeur (m)	Théorie Sol Ana	EF		EFI	
		Tassement.3D $\times 10^{-4}$ (m)	Er.relative %	Tassement.3D $\times 10^{-4}$ (m)	Er.relative %
0	$-\infty$	-47.9515	-	-48.2384	-
-0.3147	-15.7771	-15.6886	0.3117	-15.9781	1.5282
-1.0418	-4.7665	-4.2187	11.2713	-4.5133	5.0745
-1.9215	-2.5842	-2.1046	18.3577	-2.4041	6.7378
-2.9860	-1.6630	-1.1997	27.6761	-1.5044	9.3105
-4.2740	-1.1618	-0.6994	39.6498	-1.0105	12.8111
-5.8325	-0.8514	-0.3818	55.0403	-0.7027	17.2607
-7.7182	-0.6434	-0.1588	75.2627	-0.4953	22.8189
-10.0000	-0.4966	0	100.0000	-0.3475	29.8507

TAB. 5.3: Tassements sur l'axe de symétrie en 2D

Profondeur (m)	Théorie Sol Ana	EF		EFI	
		Tassement.2D $\times 10^{-4}$ (m)	Er.relative %	Tassement.2D $\times 10^{-4}$ (m)	Er.relative %
0	$-\infty$	-41.1781	-	-41.5368	-
-0.3147	-15.7771	-15.7147	0.1456	-16.0746	2.1413
-1.0418	-4.7665	-4.2915	9.7399	-4.6532	2.1320
-1.9215	-2.5842	-2.1193	17.7871	-2.4816	3.7314
-2.9860	-1.6630	-1.1999	27.6635	-1.5611	5.8926
-4.2740	-1.1618	-0.6962	39.9246	-1.0545	9.0069
-5.8325	-0.8514	-0.3790	55.3687	-0.7352	13.4320
-7.7182	-0.6434	-0.1577	75.4287	-0.5175	19.3568
-10.0000	-0.4966	0	100.0000	-0.3645	26.4073

D'après ces résultats, on note que :

- le programme de couplage éléments finis-éléments infinis(EF-EI) fournit des résultats plus proches à la théorie (solution analytique de Boussinesq) et ça revient à l'utilisation des éléments infinis car ces derniers donnent de loin la meilleure représentation

physique du comportement lointain du domaine. De plus, d'après les résultats du programme de calcul d'éléments finis avec l'encastrement de la limite de troncature (EF); on remarque qu'un petit écart apparaît entre les deux solutions au voisinage du point d'application de la charge. Cet écart s'étale progressivement lorsqu'on s'éloigne de l'origine, où l'erreur relative peut atteindre jusqu'à 100% loin de la zone chargée. Cela dû à la troncature du domaine infini c.à.d pas de dissipation de l'énergie ce qui influe directement sur la qualité des calculs.

- Les résultats obtenues en 2D et 3D sont pratiquement similaires, et ça justifie l'utilisation courante des calculs bidimensionnels alors qu'il n'existe aucun problème 2D, mais, la présence de certains cas (axisymétrique, état plan de contrainte, état plan de déformation) permet de le traiter en 2D. Un calcul en 3D s'impose lorsque un modèle bidimensionnel ne peut être justifier; l'application ci-après(fondation carrée)est un exemple type.
- Par ailleurs, on voit que la solution analytique de Boussinesq fournit des valeurs qui tendent à l'infini au niveau de l'axe de symétrie du problème. Malheureusement, ces valeurs ne peuvent être représentées sur les figures.

5.2.1.3 Influence de la position de la limite de troncature

Ainsi, car les effets d'un chargement statique décroissent rapidement avec la distance du point (ou de la zone) d'application, plusieurs études paramétriques ont été fait. Ces derniers qui permettent alors de déterminer l'étendue minimale du milieu à modéliser pour que l'effet des chargements ne soit pas perturbé par les conditions aux limites.

Les figures ci-dessous représentent les tassements obtenus sur l'axe de symétrie pour $B=5$ et $B=15$. Clairement la solution en(EF) pour $B=15$ converge mieux à la solution analytique que celle obtenue pour $B=5$.

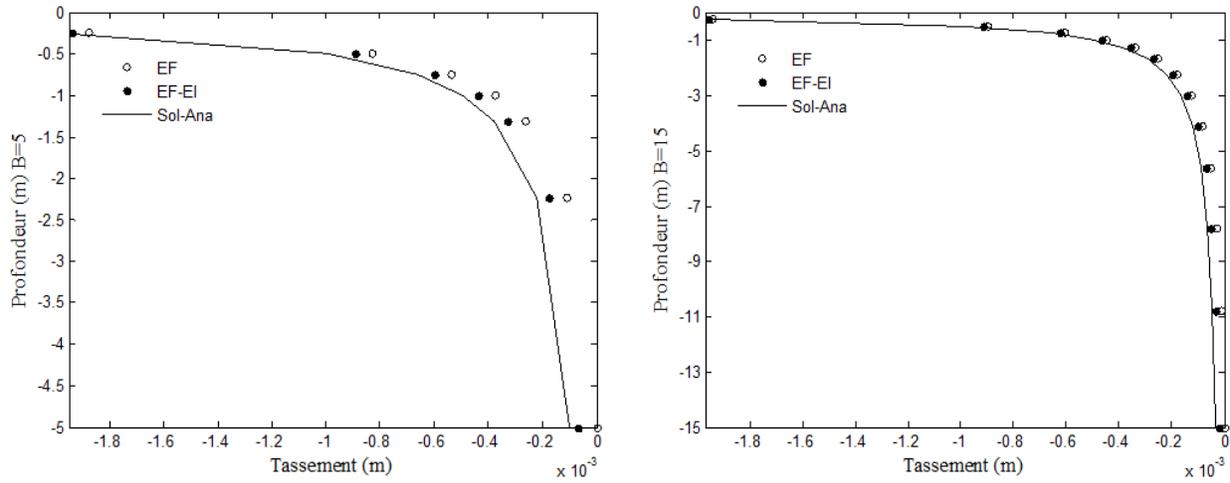


FIG. 5.5: Tassement sur l'axe de symétrie en fonction de B .

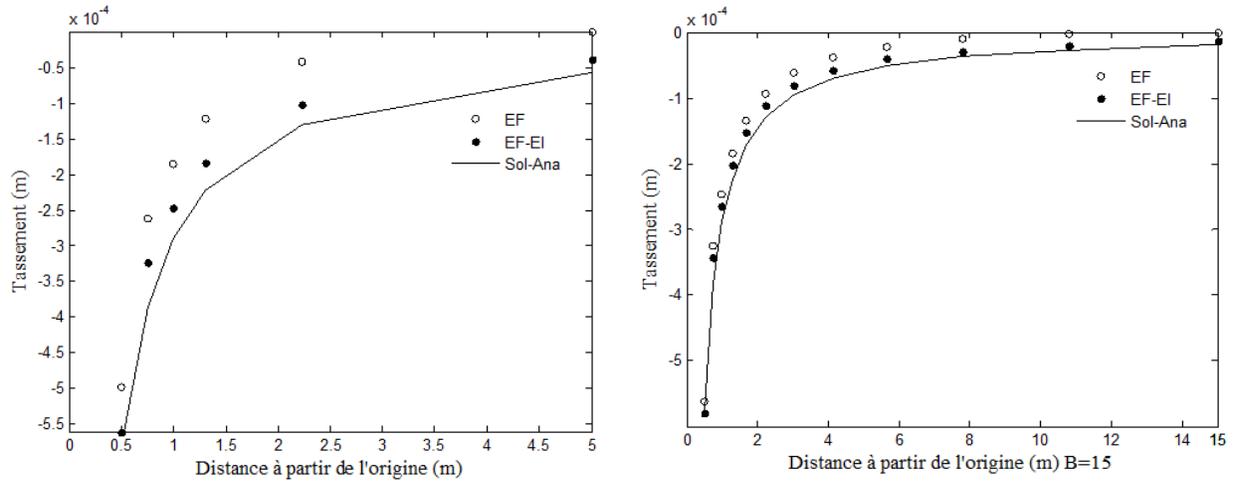


FIG. 5.6: Tassement à la surface libre en fonction de B .

Pour mieux voir ça ; cette distance a été changée entre des tests et on prend la valeur du tassement sous le point D à la surface du sol (figure ci-dessous). Les résultats sont exprimés sur les figures (FIG 5.8-a et 5.8-b) qui suivent :

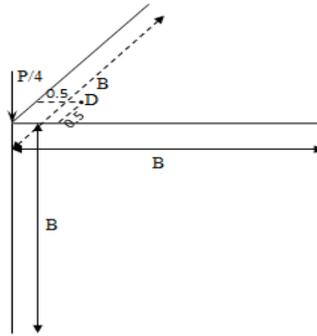


FIG. 5.7: Point D

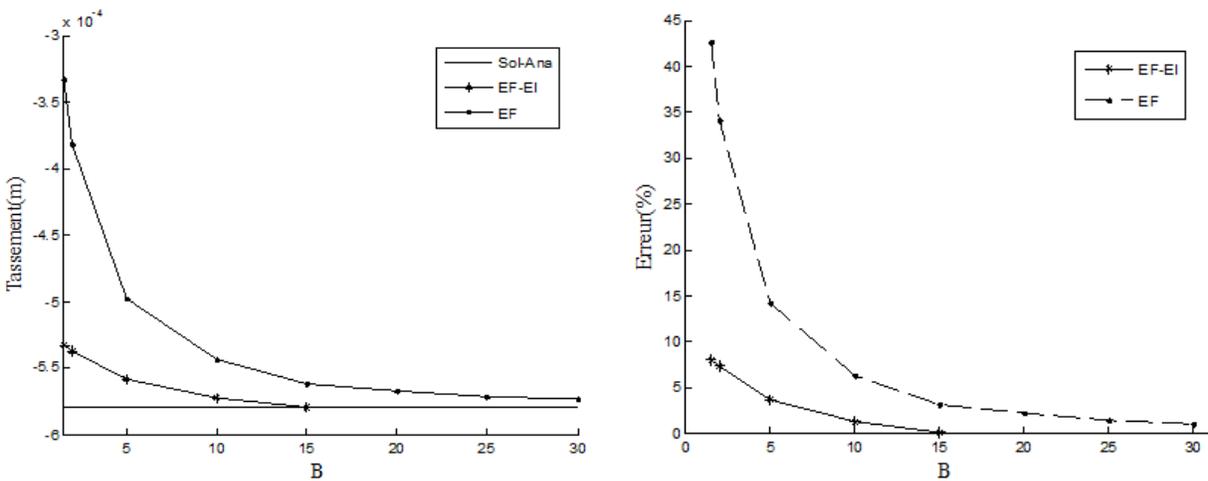


FIG. 5.8: a-Tassements au point D. b-Variation de l'erreur en fonction de B

La figure (FIG 5.8-b) montre que quand les éléments infinis sont placés à une distance $B = 15$, l'erreur dans le tassement au point D est moins de 0.1%. Cependant, dans la méthode classique(EF), la distance doit être prolongée à environ 2 fois B pour obtenir des solutions où l'erreur est de 1%. La figure (FIG 5.8-a) qui compare les deux solutions (EF) et (EF-EI)

par la solution analytique au même point D illustre que la solution couplée (EF-EI) pour $B = 15$ est plus précise que la solution classique en (EF) avec $B = 30$.

5.2.1.4 Le paramètre de décroissance

Dans le chapitre 2 on a parlé sur le paramètre de décroissance L et qu'il sert à déterminer la sévérité de décroissance pour un élément infini construit par l'approche directe. Pour cela l'influence de la variation de ce paramètre est exposée dans la section suivante. Les résultats repérés sur l'axe de symétrie pour les différentes valeurs de L sont montrés sur la figure suivante.

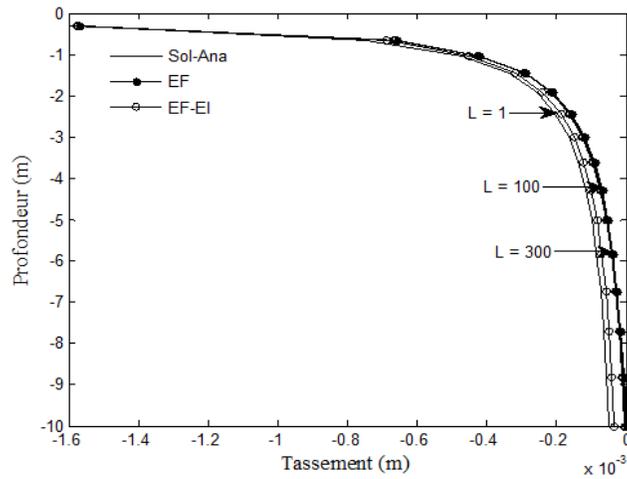


FIG. 5.9: Tassements sur l'axe de symétrie pour les différentes valeurs de L

D'après cette figure, on note que pour des valeurs assez grandes du paramètre L , l'effet d'incorporer des éléments infinis n'apparaît pas, d'une autre façon un petit écart apparaît entre les deux solutions au voisinage de l'application de la charge et il s'accroît progressivement lorsque on s'éloigne de l'origine, c'est comme si on a tronqué le domaine. Alors que, pour des valeurs inférieures notamment $L = 1$ la solution converge à la solution analytique.

5.2.2 Cas d'un tunnel profond

Considérant l'hypothèse d'un sol homogène et isotrope, la solution analytique simplifiée en terme de déplacement le long de r d'un tunnel soumis à une contrainte tangentielle σ_θ est donnée par la formule suivante[19] :

$$u(r) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_\theta \frac{R^2}{r}$$

Avec ;

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Lorsque ; $r = R$ la contrainte tangentielle devient : $\sigma_\theta = 2\sigma_0 = \text{const.}$

σ_0 : contrainte au repos (donnée).

Le maillage typique en éléments finis pour l'analyse numérique ainsi le chargement est montré sur la figure(5.7).

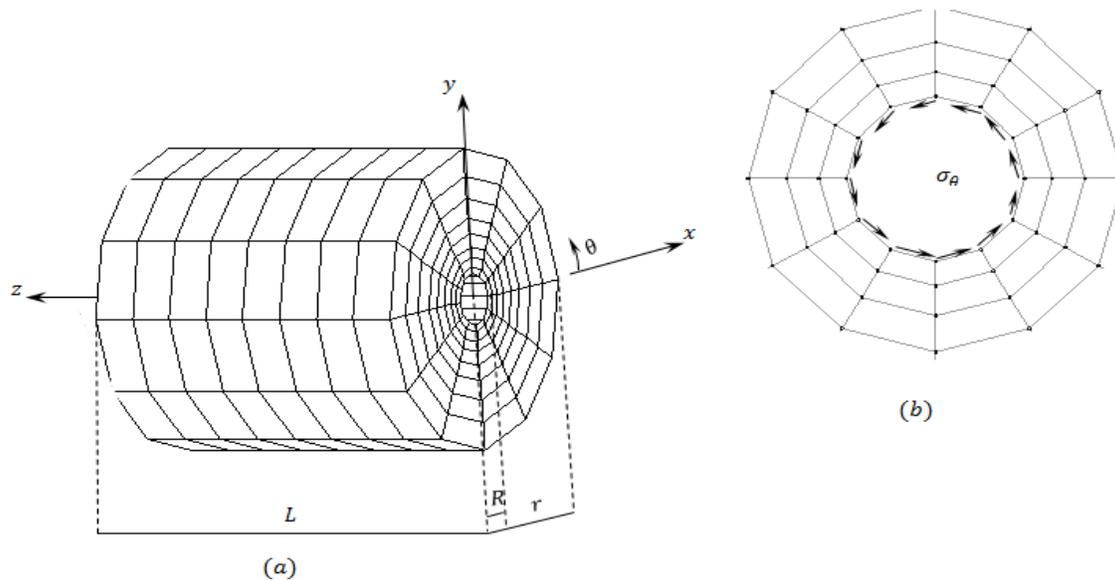


FIG. 5.10: (a) : Maillage typique pour l'analyse. (b) : chargement considéré.

Ici on a pris $R = 5m$, la contrainte tangentielle égale à $1000N$. Le module de Young et le coefficient de poisson sont respectivement fixés à ; $E = 2.10^7 Pa$ et $\nu = 0.3$. La figure ci-dessous représente les déplacements sur l'axe (x) calculés par la méthode conventionnelle

(EF) et la méthode couplée (EF-EI) ainsi ceux de la solution analytique. On peut voir que la méthode (EF-EI) converge rapidement aux valeurs analytiques que la méthode classique. Cette dernière qui note, comme dans le cas du problème de Boussinesq, un petit écart entre les deux solution au voisinage de la charge cet erreur peut atteindre 100% à cause de la troncature du domaine infini ; .

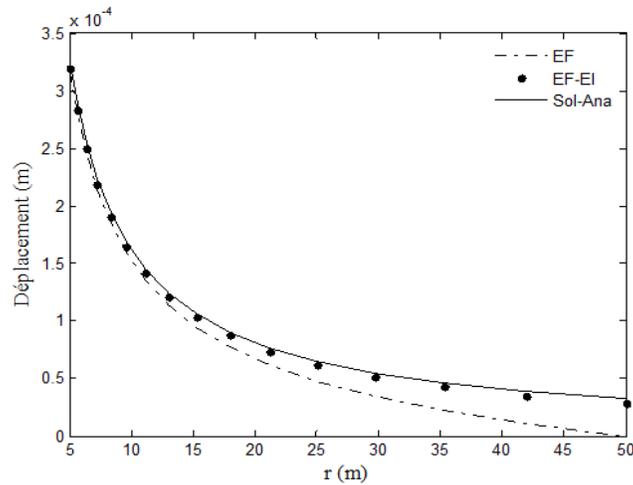


FIG. 5.11: *Déplacement le long de l'axe x*

5.2.3 Une fondation carrée

Une fondation carrée de $2m^2$ ($b = 1m$) est considérée pour cette analyse. La fondation exerce sur le sol une pression uniforme de $1000 t/m^2$. Les propriétés mécanique du sol tel que le module de Young, le coefficient de Poisson sont respectivement fixés à $E = 10MPa$ et $\nu = 0.33$ (FIG 5.12(a)).

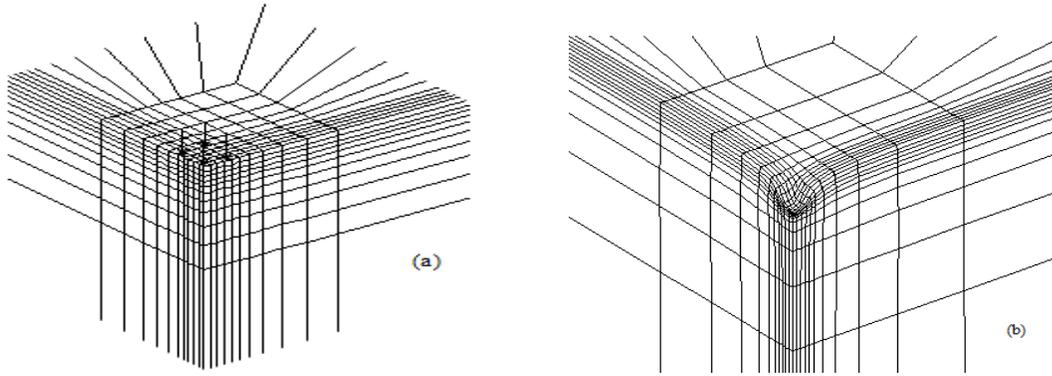
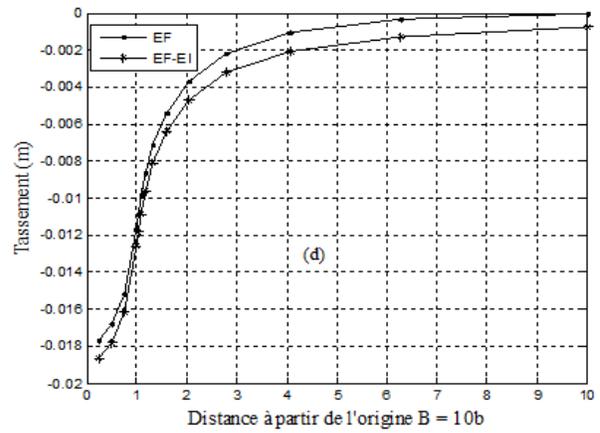
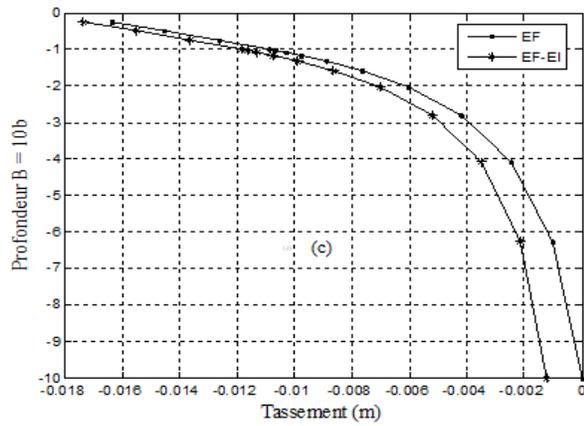
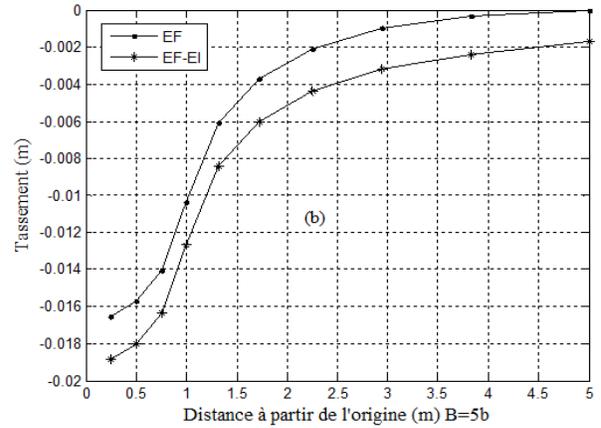
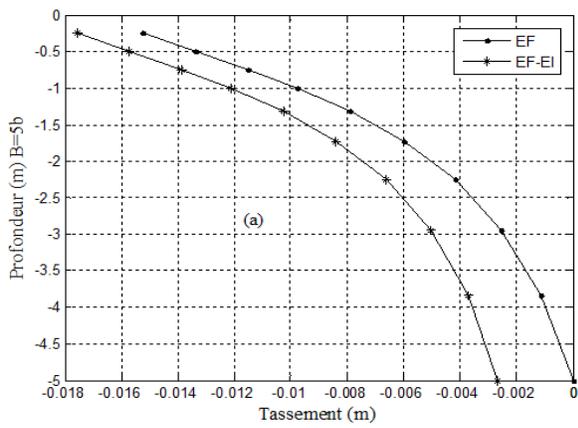


FIG. 5.12: (a) :Fondation carrée. (b) :La déformé



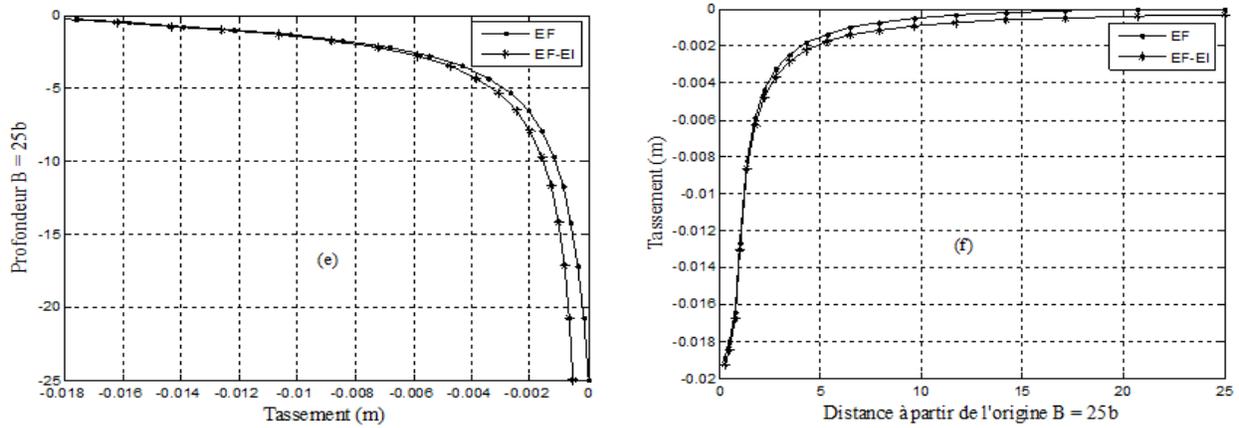


FIG. 5.13: (a),(c),(e) :Tassement repéré sur l'axe de symétrie. (b),(d),(f) :Tassement repéré à la surface du sol

Pour plus de clarté, la figure suivante représente les valeurs du tassement calculées au point D situé à 0.75 au dessous de la fondation c.à.d $D(0.75, 0.75, -0.75)$ pour les différentes valeurs de B (B dépend de la dimensions de la fondation $B(b)$).

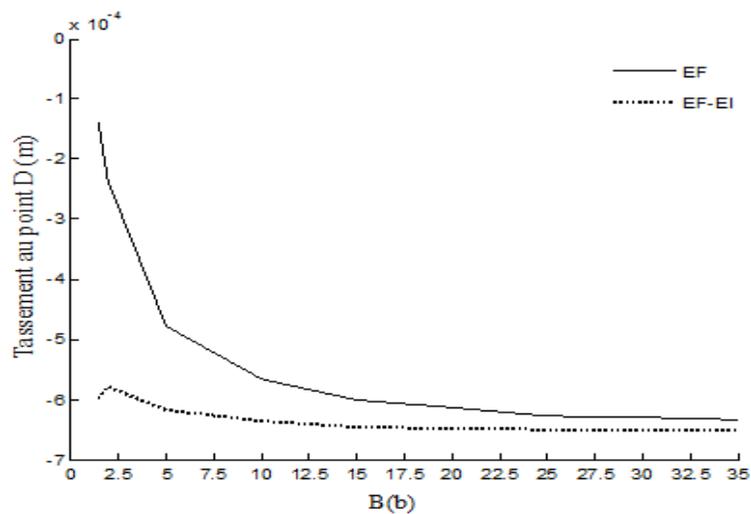


FIG. 5.14: Tassements au point D

Pour $B = 10b$; la solution en (EF-EI) commence à se stabiliser et à partir de $B = 25b$ elle devient stable. Alors que la solution conventionnelle décroît rapidement pour des valeurs de

$B \leq 10b$ et à partir de ce point la décroissance devient asymptotique à la 1ère solution et plus on augmente B plus elle converge.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a vu l'apport des éléments infinis à l'amélioration de la solution. Leur facilité d'incorporer dans un programme de calcul en élément fini améliore énormément la solution recherchée.

Conclusion général

Ce travail a fait l'objet d'un mémoire de Magistère dont le thème est la construction et l'utilisation des éléments infinis tridimensionnels dans le traitement des problèmes à domaines ouverts. A cet effet, les problèmes d'élastostatique 3D à domaines non bornés ont été considérés dans ce travail. Ainsi, des programmes de calcul permettant le couplage entre les éléments finis et infinis ont été développés et élaborés afin de traiter ce genre de problème.

En réalisant ce mémoire, les points essentiels qu'on peut les tirer comme conclusion sont :

- L'utilisation des éléments infinis permet, d'une part d'accélérer la convergence de la solution recherchée et d'autre part, de positionner la limite de troncature à des distances très proche de l'origine. Cela, permet des gains importants d'espace de mémoire et de temps de calculs en réduisant les tailles de maillages.
- Le paramètre de sévérité L dans les fonctions de décroissance (type exponentiel) de l'approche directe, permet de contrôler la vitesse de décroissance. En effet, pour des valeurs très grandes du paramètre L , les résultats obtenus convergent à ceux du modèle d'éléments finis avec l'encastrement de la limite de troncature.
- Pour une modélisation tridimensionnelle, la discrétisation spatiale par l'élément fini (B8) à 8 noeuds, fournit une bonne approximation. Donc, il est rare d'utiliser d'autres types d'éléments d'ordre supérieurs.
- En terme de temps de calcul, la modélisation bidimensionnelles est très économique

comparativement au calcul tridimensionnel. Cependant, lorsque la modélisation bidimensionnelle n'est pas justifiée, le recours au calcul tridimensionnel est indispensable.

- Les éléments infinis utilisés fournissent de bon résultats en élastostatique. Alors qu'en élastodynamique, il est préférable d'utiliser d'autres types d'éléments infinis dites "périodiques".

Les perspectives de ce travail est la construction de nouveaux types d'éléments infinis permettant d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant des problèmes d'élastodynamique à domaines non bornés.

Bibliographie

- [1] Abdel-Fattah,T.T.,Hodhod,H.A.& Akl, A.Y.«*A novel formulation of infinite elements for static analysis*»,Computers & structures 77(2000)371-379.
- [2] Astley R Jeremy .«*Infinite Elements*»,Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Highfield, Southampton, SO17 1BJ,2008, United Kingdom.
- [3] Belarbi,M.T.& Lahouel.B.«*Grand élément fini B14 approprié à la résolution des problèmes de mécanique des sols*»,Courrier du Savoir – N°06, Juin 2005, pp.29-37.
- [4] Bettés,P.«*Infinite Elements*»,Penshaw Press,1992.
- [5] Boucerredj N., Meksaoiune M.«*Modélisation de l'interaction dynamique sol-structure à l'aide de la méthode des frontières absorbantes*»,”SICZS – 2010” Symposium International sur la Construction en Zone Sismique,Université Hassiba Benbouali de Chlef (Algérie), 26 – 27 octobre 2010.
- [6] Bourouba,A.«*Traitement des Conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures*»,Thèse de magistère, U.A.Mira,Béjaia(Algérie),2008.
- [7] Cetin,M&Mengi,Y.«*Transmitting boundary conditions suitable for analysis of dam-reservoir interaction and wave load problems*»,Applied Mathematical Modelling,27(2003)451-470.
- [8] Chongbin Zhao and S.Valliappan.«*Mapped transient infinite elements for heat transfer problems in infinite media*»,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 108(1993)119-131.
- [9] Chongbin Zhao .«*Computational simulation of wave propagation problems in infinite domains*»,Physics, Mechanics & Astronomy.August 2010 Vol.53 No.8 : 1397–1407.

- [10] Chongbin Zhao .«*Dynamic and Transient Infinite Elements : Theory and Geophysical, Geotechnical and Geoenvironmental Applications*»,ISBN 978-3-642-00845-0,2009.
- [11] Frey,F.«*Analyse des structures et milieux continus, volume 3 : Mécanique des solides*»,Presses polytechniques et universitaires romandes,1998.
- [12] Gopal R.Karpurapu and R.J.Bathurst.«*Comparative analysis of some geomechanics problems using finite and infinite element methods*»,Computers and Geotechnics 5(1988)269-284.
- [13] Guido Dhondt. «*The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications*»,ISBN 0-470-85752-8,John Wiley & Sons, Ltd,2004.
- [14] José Manuel Mota Couto Marques, Lic.Eng. «*Finite and infinite elements in static and dynamic structural analysis*», University of Wales, SWANSEA, April 1984.
- [15] Khani,M.H.B.M.«*Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite element methode*»,Computers and Geotechnics 5,(1988),269-284.
- [16] L. Demkowicz,Jie Shen.«*A few new (?) facts about infinite elements*»,Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 3572–3590.
- [17] Mestat Philippe, Magnan J-P, Guilloux A. «*La pratique des calculs tridimensionnels en géotechnique*», Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Journées d'étude-Paris,24 et 25 novembre 1998.
- [18] Mestat Philippe. «*Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique : Conseils et recommandations*»,Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées - 212 -PP. 39-64,Novembre-Décembre 1997.
- [19] Mestat Philippe, M.Part.«*Ouvrage en interaction*»,hermes science publication, Paris, 1999.
- [20] Michou, F.E.& Koumoussis, V.K.«*Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems*», 5th GRAM international congress on computational mechanics, Limassol, 29June-1July, 2005.
- [21] Robert,D.Cook. «*Finite element modeling for stress analysis*»,ISBN 0-471-10774-3,1995.
- [22] Seghir,A. & T.A.«*Analyse dynamique des systèmes barrage-réservoir avec couplage éléments finis-éléments infinis*»,7^{eme} Colloque National AFPS 2007 – Ecole Centrale Paris.

- [23] Seghir, A. « *Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-infinis* », Thèse de magistère, ENP, Alger (Algérie), 1999.
- [24] Sitharam, T.G. & Vijay Kumar, I.V. « *Non-linear analysis of geomechanical problems using coupled finite and infinite elements* », Geotechnical and Geological engineering, 16, 129-149, 1998.
- [25] Verruijt, A. « *Soil mechanics* », Delft University of Technology, 2001, 2010.
- [26] Viladkar, M.N., Godbole, P.N. & Noorzaeei, J. « *Some new three-dimensional infinite elements* », Computers & structures, vol. 34, N. 3, pp. 455-467, 1990.
- [27] Viollet Pierre-Louis. « *Mécanique des fluides à masse volumique variable* », Ponts et Chaussées (Presses), ISBN : 2-85978-277-X, 1 avril 1997.
- [28] Thatcher R W. « *On the finite element method for unbounded regions* », SIAM J Numer Anal, 1978, 15 : 466-477.
- [29] Timoshenko S. & Goodier J.N. « *Theory of elasticity* », McGRAW-Hill Book Company, Inc, 1951.
- [30] Y.Q. Feng, H. Oudin, J.P. Quevat, B. Peseux. « *Résolution d'un problème d'hydroélasticité extérieure tridimensionnel par une méthode numérique : éléments finis-éléments infinis* », 2^{ème} Journée de l'hydrodynamique 13 au 15 Février 1989, Nantes.
- [31] Ying Lungan. « *Infinite element method for problems on unbounded and multiply connected domains* », School of Mathematical Sciences, Peking University, 2001, 21B(4) : 440-452.
- [32] Ying L -a. « *Infinite element approximation to axial symmetric Stokes flow* », J Comp Math, 1986, 4(2) : 111-120.
- [33] Ying L -a. « *Infinite element method for the exterior problems of the Helmholtz equations* », J Comp Math, 2000, 18(16) : 657-672.
- [34] Ying L -a, Han H D. « *On the infinite element method for unbounded domain and non-homogeneous problems* », Acta Math Sinica, 1980, 23(1) : 118-127.
- [35] Ying L -a, Wei W -m. « *Infinite element approximation to axial symmetric Stokes flow (II)* », Math Numer Sinica, 1993, 15(2) : 129-142.
- [36] Young W.Kwon & Hyochoong.B. « *The finite element method using MATLAB* », ISBN 0-8493-9653-0, CRC Press LLC, 1997.
- [37] Zienkiewicz, O.M. & Taylor, R.L. « *The finite element method, volume 1 : The Basis* », Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.

Integration numérique

5.4 Integration Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n H_i f(a_i) \tag{5.1}$$

Ordre=1

Nombre,i	Abscisse $\pm a_i$	poids H_i
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000

Ordre=2

Nombre,i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.577350269189626	1.0000000000000000

Ordre=3

Nombre,i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.0000000000000000	0.8888888888888889
2	0.774596669241483	0.5555555555555555

Ordre=4

Nombre,i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.339981043584856	0.652145154862546
2	0.861136311594053	0.347854845137454

Ordre=8

Nombre, i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.183434642495650	0.362683783378362
2	0.525532409916329	0.313706645877887
3	0.796666477413627	0.222381034453375
4	0.960289856497536	0.101228536290377

Ordre=12

Nombre, i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.125233408511469	0.249147045813403
2	0.367831498998180	0.233492536538355
3	0.587317954286617	0.203167426723066
4	0.769902674194305	0.160078328543346
5	0.904117256370475	0.106939325995319
6	0.981560634246719	0.047175336386512

Ordre=16

Nombre, i	Abscisse $\pm a_i$	Poids H_i
1	0.095012509837637	0.189450610455068
2	0.281603550779259	0.182603415044924
3	0.458016777657227	0.169156519395003
4	0.617876244402644	0.149595988816577
5	0.755404408355003	0.124628971255534
6	0.865631202387832	0.095158511682493
7	0.944575023073233	0.062253523938648
8	0.989400934991650	0.027152459411755

5.5 Integration Gauss-Laguerre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N f(a_i) H_i \quad (5.2)$$

Ordre=4

No., <i>i</i>	Abscisse a_i	Poids H_i
1	0.322547689619392E+00	0.603154104341634E+00
2	0.174576110115835E+01	0.357418692437800E+00
3	0.453662029692113E+01	0.388879085150054E-01
4	0.939507091230113E+01	0.539294705561327E-03

Ordre=8

No., <i>i</i>	Abscisse a_i	Poids H_i
1	0.170279632305101E+00	0.369188589341632E+00
2	0.903701776799380E+00	0.418786780814343E+00
3	0.225108662986613E+01	0.175794986637171E+00
4	0.426670017028766E+01	0.333434922612156E-01
5	0.704590540239347E+01	0.279453623522567E-02
6	0.107585160101810E+02	0.907650877335820E-04
7	0.157406786412780E+02	0.848574671627254E-06
8	0.228631317368893E+02	0.104800117487151E-08

Ordre=12

No., i	Abscisse a_i	Poids H_i
1	0.115722117358021E+00	0.264731371055446E+00
2	0.611757484515131E+00	0.377759275873138E+00
3	0.151261026977642E+01	0.244082011319878E+00
4	0.283375133774351E+01	0.904492222116810E-01
5	0.459922763941835E+01	0.201023811546341E-01
6	0.684452545311518E+01	0.266397354186532E-02
7	0.962131684245687E+01	0.203231592662999E-03
8	0.130060549933063E+02	0.836505585681980E-05
9	0.171168551874623E+02	0.166849387654091E-06
10	0.221510903793970E+02	0.134239103051501E-08
11	0.284879672509840E+02	0.306160163503503E-11
12	0.370991210444669E+02	0.814807746742626E-15

Ordre=16

No., i	Abscisse a_i	Poids H_i
1	0.876494104789278E-01	0.206151714957796E+00
2	0.462696328915081E+00	0.331057854950885E+00
3	0.114105777483123E+01	0.265795777644217E+00
4	0.212928364509838E+01	0.136296934296378E+00
5	0.343708663389321E+01	0.473289286941249E-01
6	0.507801861454977E+01	0.112999000803395E-01
7	0.707033853504823E+01	0.184907094352631E-02
8	0.943831433639194E+01	0.204271915308279E-03
9	0.122142233688662E+02	0.148445868739813E-04
10	0.154415273687816E+02	0.682831933087119E-06
11	0.191801568567531E+02	0.188102484107967E-07
12	0.235159056939919E+02	0.286235024297388E-09
13	0.285787297428821E+02	0.212707903322411E-11
14	0.345833987022866E+02	0.629796700251783E-14
15	0.419404526476883E+02	0.505047370003552E-17
16	0.517011603395433E+02	0.416146237037284E-21

Fonctions de forme d'un élément fini 3D quadratique

Les fonctions de forme standards d'un élément fini tridimensionnel quadratique sont représentées sur le tableau suivant :

Type d'élément	Les fonctions de forme
élément tétraédrique (10 nœuds)	$N_1 = [2(1 - \xi - \eta - \zeta) - 1][1 - \xi - \eta - \zeta]$ $N_2 = (2\xi - 1)\xi$ $N_3 = (2\eta - 1)\eta$ $N_4 = (2\zeta - 1)\zeta$ $N_5 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\xi$ $N_6 = 4\xi\eta$ $N_7 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\eta$ $N_8 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\zeta$ $N_9 = 4\xi\zeta$ $N_{10} = 4\eta\zeta$

Type d'élément	Les fonctions de forme
élément de cale (15 nœuds)	$N_1 = -(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)(2\xi + 2\eta + \zeta)/2$
	$N_2 = \xi(1 - \zeta)(2\xi - \zeta - 2)/2$
	$N_3 = \eta(1 - \zeta)(2\eta - \zeta - 2)/2$
	$N_4 = -(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)(2\xi + 2\eta - \zeta)/2$
	$N_5 = \xi(1 + \zeta)(2\xi + \zeta - 2)/2$
	$N_6 = \eta(1 + \zeta)(2\eta + \zeta - 2)/2$
	$N_7 = 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)$
	$N_8 = 2\xi\eta(1 - \zeta)$
	$N_9 = 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)$
	$N_{10} = 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)$
	$N_{11} = 2\xi\eta(1 + \zeta)$
	$N_{12} = 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)$
	$N_{13} = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta^2)$
	$N_{14} = \xi(1 - \zeta^2)$
	$N_{15} = \eta(1 - \zeta^2)$
élément cubique (20 nœuds)	$N_1 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi + \eta + \zeta)/8$
	$N_2 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi + \eta + \zeta)/8$
	$N_3 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi - \eta + \zeta)/8$
	$N_4 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi - \eta + \zeta)/8$
	$N_5 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi + \eta - \zeta)/8$
	$N_6 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi + \eta - \zeta)/8$
	$N_7 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi - \eta - \zeta)/8$
	$N_8 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi - \eta - \zeta)/8$
	$N_9 = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/4$
	$N_{10} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$
	$N_{11} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$
	$N_{12} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$
	$N_{13} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{14} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{15} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{16} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{17} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{18} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$
	$N_{19} = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$
$N_{20} = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$	

TAB. 5.4: *Les fonctions de forme quadratiques*

Résumé

Les domaines ouverts ou domaines non bornés apparaissent dans beaucoup de problèmes pratiques d'ingénierie ; le traitement de ces derniers a fait l'objet de plusieurs études récentes notamment la technique de couplage éléments finis - éléments infinis (EF-EI). Dans ce travail, on s'est intéressé à la construction et à l'utilisation des éléments infinis tridimensionnels dans le traitement des milieux infinis et semi - infinis 3D rencontrés en géotechnique. Et pour cela, des programmes de calcul en EF-EI ont été élaborés traitants les problèmes d'élasticité à domaines ouverts. La validation des résultats aux solutions analytiques existantes ainsi que des études comparatives entre les différentes approches ont été effectuées. L'influence de certains paramètres à savoir la position de la limite de troncature et le paramètre de sévérité des éléments infinis a été examiné.

Mots-clés : Problèmes tridimensionnels ; Domaines ouverts ; Éléments finis 3D ; Éléments infinis 3D ; Fonctions décroissantes ; Transformations géométriques ; Couplage.

Abstract

The open domains or non limited domains appear in a lot of problems convenient of engineering; the treatment of these last was the subject of several recent studies notably the technique of coupling finite elements - infinite elements (EF-EI). In this work, we are interested in the construction and the use of the three-dimensional infinite elements in the treatment of the infinite and semi - infinite mediums 3D met in geotechnical engineering. To this effect, programs of calculation in EF-EI have been elaborated treating the problems of elasticity with open fields. The validation of the results to the existing analytical solutions as well as the comparative studies between the different approaches has been done. The influence of some parameters to know the position of the truncation limit and the parameter of severity of the infinite elements has been examined.

Key words : Three-dimensional problems; Open fields; Finite elements 3D; Infinite elements 3D; Decreasing functions; Geometrical Transformations; Coupling.

ملخص

المجالات المفتوحة أو غير المحدودة تظهر في العديد من المسائل الهندسية العملية وطريقة معالجتها كانت موضوع العديد من الدراسات الحديثة، لا سيما تقنية الربط عنصر منته - عنصر لا منته (EF-EI). في هذا العمل، أولينا اهتماما ببناء واستخدام العناصر الامتھية ثلاثية الأبعاد في معالجة المجالات غير المحدودة أو النصف محدودة 3D الموجودة في الهندسة الجيوتقنية. ولهذا الغرض تم وضع وتطوير برامج عددية (EF-EI) لحل مسائل المرونة في المجالات المفتوحة. وقد تم التأكد من صحة النتائج بمقارنتها مع النتائج التحليلية، وكذلك مختلف الدراسات المقارنة. تأثير معايير معينة كحد التوقف ومعيار شدة العناصر الامتھية تم فحصه أيضا.

الكلمات المفتاحية: المسائل ثلاثية الأبعاد، المجالات المفتوحة، عنصر منته 3D، عنصر غير منته 3D، الدوال المتناقصة، التحويلات الهندسية، الربط