

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire De Magister

En Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Stabilité des Processus QBD
(Quasi Birth and Death process)

Présenté par :

M^{elle} Yasmina DJABALI

Devant le jury composé de :

Président	M ^r	S. Adjabi	M. C. A	U. de Béjaïa
Rapporteur	M ^r	D. Aïssani	Professeur	U. de Béjaïa
Rapporteur	M ^r	B. Rabta	Maître de Rech	U. Amsterdam
Examineur	M ^r	D. Hamadouche	Professeur	U. Tizi Ouzou
Examineur	M ^r	M. O. Bibi	Professeur	U. de Béjaïa
Invité	M ^r	K. Abbas	M. C. B	U. de Béjaïa

Béjaïa, 2011

Remerciements

**Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela
n'aurait pu être.**

Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à M^r D. Aïssani professeur à l'université A. Mira de Béjaïa, pour son encadrement, ses qualités tant scientifiques qu'humaines. Ce travail doit beaucoup à sa disponibilité permanente, sa rigueur scientifique et sa patience.

J'exprime également toute ma gratitude envers M^r B. Rabta pour avoir co-encadré mon travail, je le remercie de sa patience, ses conseils et son aide précieuse.

Je tiens également à remercier M^r S. Adjabi, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie M^r D. Hamadouche, M^r M.O. Bibi et M^r K. Abbas d'avoir accepté de faire partie du jury et consacré leur temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.

Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents, en qui j'ai puisé tout le courage, la volonté et la confiance, je leur serai éternellement reconnaissante.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère défunte grand mère Djamila.

A mes chers parents.

A mes frères et soeurs.

A mon cher neveu Sid-Ali.

A ma chère nièce Youmna.

A tous mes amis.

Yasmina

Table des matières

Table des matières	i
Table des Figures	vi
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
1 Processus de quasi naissance et mort (QBD)	6
1.1 Introduction	6
1.2 Processus de quasi naissance et mort	8
1.3 Exemples de processus QBD	10
1.4 Distribution stationnaire d'un processus QBD	11
1.4.1 Méthode de la matrice géométrique	11
1.5 Files d'attente de type phase	14
1.5.1 Distributions de type phase	14
1.5.2 Propriétés des distributions de type phase	16
1.5.3 Exemples de distributions de type phase	17
1.5.4 Files d'attente de type $PH/M/1$	22
1.5.5 Files d'attente de type $M/PH/1$	23
1.5.6 Files d'attente de type $PH/PH/1$	24
1.6 Conclusion	25

2	Approximation d'une distribution positive par une distribution de type phase	27
2.1	Introduction	27
2.2	Approximation via la méthode des moments	31
2.3	Exemples d'approximation par la méthode des moments	31
2.3.1	Approximation par la loi hypoexponentielle	32
2.3.2	Approximation par la loi hyperexponentielle	33
2.4	Conclusion	35
3	Théorie de stabilité	36
3.1	Introduction	36
3.2	Méthodes de stabilité	36
3.2.1	Méthode des fonctions tests	37
3.2.2	Méthode métrique	37
3.2.3	Méthode de convergence faible	37
3.2.4	Méthode de renouvellement	37
3.2.5	Méthode de stabilité forte	38
3.2.6	Méthode de stabilité uniforme	38
3.2.7	Méthode de développement en série de Taylor	38
3.3	Critère de stabilité forte	39
3.4	Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov	40
3.5	ν -Stabilité forte d'une chaîne de Markov	42
3.6	Inégalités de stabilité forte	43
3.7	Conclusion	44
4	Stabilité des systèmes de files d'attente $HOE_2/M/1$ et $H_2/M/1$	46
4.1	Introduction	46
4.2	Stabilité forte dans le système $HOE_2/M/1$	47
4.2.1	Description et notations relatives aux modèles	47

4.2.2	v -stabilité forte de la chaîne de Markov X	49
4.2.3	Estimation quantitative	53
4.3	Stabilité forte dans le système $H_2/M/1$	56
4.3.1	Description et notations relatives au modèle	56
4.3.2	v -stabilité forte de la chaîne de Markov X^*	57
4.3.3	Estimation quantitative	60
4.4	Conclusion	62
5	Stabilité des systèmes de files d'attente $M/HOE_2/1$ et $M/H_2/1$	63
5.1	Introduction	63
5.2	Stabilité forte dans le système $M/HOE_2/1$	64
5.2.1	Description et notations relatives aux modèles	64
5.2.2	v -stabilité forte de la chaîne de Markov \hat{X}	65
5.2.3	Estimation quantitative	68
5.3	Stabilité forte dans le système $M/H_2/1$	71
5.3.1	Description et notations relatives aux modèles	71
5.3.2	v -stabilité forte de la chaîne de Markov \check{X}	72
5.3.3	Estimation quantitative	75
5.4	Conclusion	76
6	Mesure de performances de la méthode de stabilité forte	77
6.1	Introduction	77
6.2	Environnement MATLAB	77
6.3	Mesure de performances	78
6.4	Première partie	78
6.4.1	Approche algorithmique	78
6.4.2	Approche simulation	79
6.4.3	Application numérique	83
6.5	Deuxième partie	86

Table des matières **iv**

6.5.1	Approche algorithmique	86
6.5.2	Approche simulation	87
6.5.3	Application numérique	90
6.6	Conclusion	93
	Conclusion générale	94
	Bibliographie	96

Table des figures

1.1	Les niveaux du processus QBD	9
1.2	Exemples de processus QBD	10
1.3	Distribution PH à trois phases	15
1.4	Représentation de la distribution exponentielle	17
1.5	Représentation de la distribution Erlang	18
1.6	Représentation de la distribution hyperexponentielle	20
1.7	Représentation de la distribution hypoexponentielle	21
1.8	Représentation de la distribution Cox	22
1.9	Exemple graphique de la file PH/M/1	23
1.10	Exemple de deux phases dans la file M/PH/1	24
1.11	Exemple graphique de la file PH/PH/1	25
2.1	Exemple d'approximation1	28
2.2	Exemple d'approximation2	29
2.3	Exemple d'approximation3	30
2.4	Exemple d'approximation4	30
6.1	Organigramme du simulateur	80
6.2	Organigramme du simulateur $GI/M/1$ classique	81
6.3	Courbes comparatives des erreurs	84
6.4	Courbes comparatives des erreurs	85
6.5	Organigramme du simulateur	88
6.6	Organigramme du simulateur $M/G/1$ classique	89

6.7	Courbes comparatives des erreurs	91
6.8	Courbes comparatives des erreurs	93

Liste des tableaux

6.1	Tableau comparatif des erreurs	84
6.2	Tableau comparatif des erreurs	85
6.3	Tableau comparatif des erreurs	91
6.4	Tableau comparatif des erreurs	92

Introduction générale

La modélisation est un outil de plus en plus utilisé pour configurer et analyser les différents systèmes réels. En tenant compte des facteurs aléatoires, on parle alors de modélisation et de modèles stochastiques.

Les processus stochastiques décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Leur étude s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique, biologie, médecine, et bien entendu les sciences de l'ingénieur. C'est ainsi que les spécialistes font appel de plus en plus, à la modélisation par les processus stochastiques, notamment ceux de type Markovien.

Actuellement, la théorie des processus de Markov s'est largement répandue et a trouvé des applications dans de nombreux domaines. Malgré la simplicité apparente de l'hypothèse markovienne, un grand nombre de systèmes réels peuvent être modélisés par les processus de Markov et grâce aux résultats déjà établis dans cette théorie, divers outils ont été conçus pour l'analyse du modèle et la résolution des problèmes.

L'étude des performances des systèmes complexes par les modèles de files d'attente n'a cessé d'être un domaine de recherche d'un intérêt croissant. En effet, une grande classe de modèles mathématiques provient de la théorie de files d'attente, qui peuvent être considérés comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, et qui se manifestent dans les domaines d'activité les plus divers. L'origine des travaux sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909 – 1920 avec les travaux de A.K. Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. Cette théorie mathématique s'est ensuite développée no-

tamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek,..., et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques.

La portée des méthodes analytiques s'avère limitée lors de l'étude de beaucoup de systèmes de files d'attente, en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve, confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est très difficile ou possèdent des solutions qui ne sont pas facilement interprétables. Par ailleurs, on peut citer le degré de difficulté pour l'obtention de certaines caractéristiques de ce genre de modèle, notamment les modèles de files d'attente avec vacances, arrivées ou service par groupe, avec rappels,... Pour pallier à toutes ces difficultés, les chercheurs ont recouru à des méthodes d'approximation. Dans ce cas, on est amené à remplacer le système réel, complexe, par un système idéal plus simple dont les résultats analytiques sont exploitables. Le modèle ainsi utilisé représente une idéalisation du système complexe. Cela est généralement réalisé en altérant soigneusement la structure ou les hypothèses du modèle. De plus, les différents paramètres sont estimés par des méthodes statistiques à partir de données empiriques. Le modèle est alors sujet à des perturbations qui pourront naturellement induire une déviation dans ses caractéristiques par rapport à celles d'origine. D'où l'apparition du problème de stabilité.

L'étude de la stabilité consiste à délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel. En d'autres termes, un modèle est stable s'il résiste suffisamment aux perturbations dans sa structure ou dans ses paramètres (entrées). Dans ce cas, une petite perturbation dans les entrées induit seulement une petite déviation dans les sorties (caractéristiques). Cette question est importante et loin d'être triviale car d'un côté, seuls les systèmes stables peuvent être exploités et de l'autre côté, la vérification n'est souvent pas directe.

L'étude de la stabilité des modèles de files d'attente se fait en général via celle de la chaîne de Markov induite. Plusieurs méthodes ont été élaborées pour l'étude de la stabilité des chaînes de Markov. Ces méthodes diffèrent par l'outil mathématique utilisé mais se partagent le même concept de base. Par ailleurs, la plupart de ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques,

tels que l'économie, les finances, la recherche opérationnelle, la théorie de la décision, etc. En particulier, elles jouent un rôle important dans l'analyse des problèmes complexes de files d'attente et leurs applications en télécommunications, systèmes de production,...

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom de méthode des opérateurs de la théorie de stabilité, est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle a été introduite au début des années 1980 [3]. Elle suppose que la perturbation du noyau de transition du processus aléatoire décrivant le système étudié est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode, il est possible d'obtenir des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de N.V. Kartashov [60].

La méthode de stabilité forte a été principalement appliquée aux : modèles d'attente classiques (Aïssani et Kartashov [4], Aïssani [2], Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [21, 22] et Benaouicha et Aïssani [11]), modèles d'attente avec rappels (Berdjoudj et Aïssani [12]), modèles d'attente avec vacances (Rahmoune et Aïssani [87]), modèles d'attente avec impatiences (Mouhoubi et Aïssani [71]), modèles d'attente avec arrivées négatives (Abbas et Aïssani [1]), modèles d'attente avec priorités (Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [23] et Hamadouche et Aïssani [45]), modèles d'attente avec arrivées par groupes (Boukir et al. [25]), modèles stochastiques de gestion des stocks (Rabta et Aïssani [82, 83, 84]), (Mouhoubi et Aïssani [70]). De même, Rabta et Aïssani [85] ont récemment obtenu des bornes de perturbation des chaînes de Markov discrètes à espace d'états fini ou dénombrable.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'approximation de certains modèles de files d'attente en remplaçant les distributions générales par des distributions de type phase (PH) proche dans un certain sens. Nous obtenons ainsi des modèles de files d'attente (de type phase) qui peuvent être résolus d'une manière exacte en utilisant la méthode de la matrice géométrique après représentation par des processus de quasi naissance et mort (QBD). Cette approximation est toujours possible car l'ensemble des

distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives [9]. Nous allons présenter la méthode des moments qui consiste en la recherche d'une distribution PH possédant les mêmes premiers moments que la distribution d'origine. Cette approche a été utilisée par plusieurs auteurs [33, 46, 48, 79]. La flexibilité de cette classe de distributions de probabilité et leurs propriétés de calculabilité ont rendu l'utilisation des lois de type phase très populaires dans les modèles stochastiques. Nous considérons pour le cas du système de files d'attente de type $G/M/1$ (resp. $M/G/1$) la possibilité de l'approximer par un modèle $PH/M/1$ (resp. $M/PH/1$) où PH désigne une distribution hyperexponentielle H_2 ou hypoexponentielle HOE_2 suivant la valeur du coefficient de variabilité de la distribution d'origine. Nous utilisons la méthode de stabilité forte pour justifier cette approximation et estimer l'erreur qui en résulte. Ainsi, il est obtenu pour chaque cas, l'affirmation de la stabilité de la chaîne de Markov induite et l'estimation d'une borne supérieure de la déviation de sa distribution stationnaire.

Ces résultats peuvent être considérés comme la généralisation des résultats obtenus par d'autres auteurs dans le cadre de la méthode de stabilité forte (e.g. [21, 22]). De plus, nous fournissons la justification mathématique de la méthode d'approximation par distributions de type phase déjà utilisée dans plusieurs travaux [33, 46, 48, 79] et nous proposons aussi des estimations des erreurs commises.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

- Le premier chapitre comprend une synthèse des résultats sur les processus de quasi naissance et mort (QBD). Nous expliquons comment peut-on obtenir leurs caractéristiques stationnaires et nous montrons leur utilisation pour l'analyse des systèmes de files d'attente $M/PH/1$, $PH/M/1$ et $PH/PH/1$.
- Dans le deuxième chapitre, nous illustrons la démarche pour l'approximation des distributions positives par des distributions de type phase.
- Le troisième chapitre est consacré aux principaux résultats relatifs à la méthode de stabilité forte.
- Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente $HOE_2/M/1$, $H_2/M/1$.

- Le cinquième chapitre est consacré à l'application de la méthode de stabilité forte dans les systèmes d'attente M/HOE₂/1 et M/H₂/1.
- Dans le sixième chapitre, nous présentons et discutons des résultats numériques concernant l'estimation des bornes de perturbation obtenus par application de la méthode de stabilité forte, ainsi que ceux obtenus par simulation.

Chapitre 1

Processus de quasi naissance et mort (QBD)

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous synthétisons le fondement théorique des processus de quasi naissance et mort (QBD, Quasi Birth and Death). Nous introduisons, certaines notions générales et théorèmes fondamentaux, notamment les résultats relatifs à l'approche de la matrice géométrique pour le calcul de la distribution stationnaire.

Dans un deuxième temps, nous consacrons la dernière section aux systèmes de files d'attente de types $M/PH/1$, $PH/M/1$ et $PH/PH/1$ où l'on expose les principaux résultats relatifs à chaque système.

Les processus de quasi naissance et mort sont une généralisation des processus de naissance et de mort. Ils ont attiré une attention considérable dans les trois dernières décennies et sont devenus un des outils mathématiques les plus importants pour les systèmes d'attente, systèmes de production, réseaux de télécommunication et autre systèmes.

L'étude de ce type de processus a été introduite pour la première fois par Wallase dans sa thèse de Ph.D [99], et par Evants dans [34], mais les discussions détaillées ont été faites par Neuts [76] et par Latouche et Ramaswami [63, 64]. Une panoplie de travaux ayant

comme objet les méthodes numériques pour le calcul de la distribution stationnaire d'un processus QBD ont surgi.

La première procédure numérique, connue sous le nom de la méthode de la matrice géométrique, a été proposée par Neuts dans sa monographie [76]. Les méthodes proposées par Latouche et Ramaswami [63, 64], Naumov [72] et Naumov et al. [73] sont des versions améliorées de la méthode classique de la matrice géométrique. Dans ces études, une analyse profonde et une interprétation probabiliste concernant les processus QBD ont été effectuées. Latouche et Ramaswami [63] ont proposé un algorithme pour le calcul de la matrice des taux, qui a été amélioré dans la suite par Naoumov et al. [73]. Ces méthodes sont devenues populaires et ont été largement appliquées dans plusieurs travaux.

Chakka [27] et Chakka et Mitrani [28] ont développé une méthode de calcul exact pour les processus QBD appelée "spectral expansion". Au lieu d'utiliser la relation géométrique entre les vecteurs de probabilité stationnaire, une autre expression a été définie en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice polynomiale construite du processus. D'après les auteurs, cette méthode est efficace, précise et simple à utiliser.

Notons que d'autres méthodes de résolution ont été considérées, telles que celles de Ciardo et Smirni [29], Bini et Mini [13, 14], Akar et Sohraby [5], Haverkort et Ost [49, 50], Mitrani et Chakka [69], Leeuwaarden et Winands [65], Dayar et Quessette [31], Latouche et al. [61],... C'est pourquoi une étude comparative entre ces méthodes développées pour l'analyse stationnaire des processus QBD a été effectuée [49, 97].

Par ailleurs, une étude sur les processus QBD à espace d'états fini a été effectuée. Plusieurs auteurs ont apporté leurs contributions pour la recherche du vecteur de probabilité stationnaire : Neuts [76] en 1981, Hajek [44] en 1982, Gun et Makowski [42, 43] en 1987 puis en 1996, Le Boudec [24] en 1991, Ye et Li [103, 102] en 1992 puis 1994, Grassi [81] en 1996, et Elhafsi et Molle [32] en 2007.

Comme cela a été mentionné par Neuts dans sa monographie, les processus QBD sont d'utilisation croissante pour la modélisation d'une large variété d'applications. A titre d'exemple, on peut citer les résultats obtenus pour la modélisation des réseaux de Petri stochastiques : Florin et Natkin [38, 39, 40], Haverkort [47], Haverkort and Ost [49, 50], Ost [80], et la modélisation des systèmes de production : Dallery et Gershwin [30], Fadiloglu et Yeralan [36, 37], Yeralan et Muth [105] et Yeralan et Tan [106]. Egalement, divers travaux ont porté sur l'application de ces techniques dans le cadre des systèmes de files d'attente. On peut citer par exemple : Latouche et Ramaswami [64] : files d'attente M/M/1, M/M/1 dans un environnement aléatoire, systèmes prioritaires, systèmes avec rappel. Pour les systèmes d'attente de type phase, on cite les travaux suivants : Sengupta dans l'analyse de la file GI/PH/1 [92, 93], Asmussen [7] dans la représentation des distributions de type phase et leurs applications dans les modèles d'attente, Neuts [75, 76] dans l'étude bibliographique sur les processus QBD et sur les distributions de type phase, et dans l'analyse des systèmes M/PH/1, PH/M/1 et PH/PH/1, Latouche et Ramaswami [62, 64], Bocharov et Naumov [15] dans l'application de la méthode de la matrice géométrique pour la recherche de la distribution stationnaire du système PH/PH/1/N, O'Cinneide [78] dans l'étude des caractéristiques des distributions de type phase, Britran et Dasu [26], ...

1.2 Processus de quasi naissance et mort

Définition 1.1. Un processus QBD (Quasi Birth and Death), est un processus de Markov à espace d'état bidimensionnel défini comme suit :

$$\Omega = \{(i, j), i \geq 0, 1 \leq j \leq m\},$$

Ω peut être écrit comme étant $\cup_{i \geq 0} l(i)$ où : $l(i) = \{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, m)\}, \forall i \geq 0$.

- L'état (i, j) représente le niveau et la phase du processus,
- Le sous-ensemble d'états $l(i)$ représente le niveau i ,

- m est le nombre de phase dans le niveau $l(i)$,
- Chaque niveau peut avoir un nombre fini où infini de phases m ,
- Les transitions entre états sont limitées seulement aux états qui sont dans le même niveau ou entre deux niveaux adjacents. (Voir Figure 1.1).

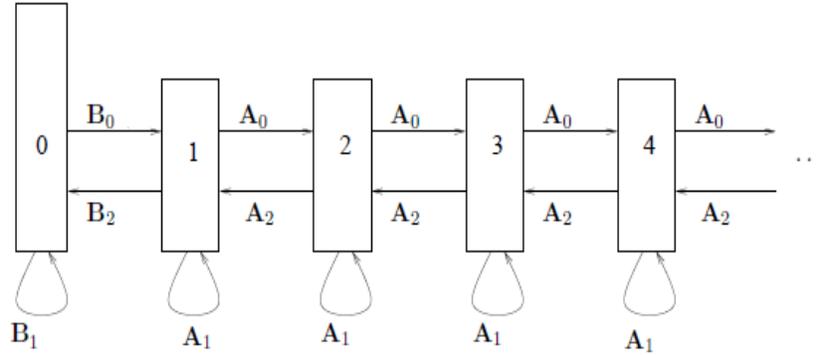


FIGURE 1.1 – Les niveaux du processus QBD

Le générateur infinitésimal est donné comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ B_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

où $A_0, A_1, A_2, B_1, B_0, B_2$ sont des matrices carrées d'ordre m .

avec $B_0e + A_0e = B_1e + A_1e + A_0e = (A_2 + A_1 + A_0)e = 0$,

où e est un vecteur unitaire.

La matrice $A = A_0 + A_1 + A_2$ est un générateur fini.

Corollaire 1.1. Supposons que $A = A_0 + A_1 + A_2$ est irréductible, et $\mu = \alpha^T(-A_2 + A_0)e$, où α est le vecteur de probabilité stationnaire de A . Le QBD est :

- récurrent non nul si et seulement si $\mu < 0$,
- récurrent nul si et seulement si $\mu = 0$,
- transitoire si et seulement si $\mu > 0$.

1.3 Exemples de processus QBD

Exemple 1.1. Le premier exemple est le processus de naissance et de mort (Figure 1.2(a)). Ce processus modélise le nombre de clients dans une file d'attente de type $M/M/1$, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ et les durées de service sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ . Le processus de naissance et de mort est un processus de Markov dans l'espace d'états $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, où les transitions sont limitées seulement aux états adjacents i.e. : de l'état i il est possible de passer à l'état $i + 1$ dans le cas de naissance et à l'état $i - 1$ ($i \geq 1$) dans le cas de mort.

Exemple 1.2. Dans le deuxième exemple (Figure 1.2(b)), le processus QBD modélise le nombre de clients dans une file d'attente de type $M/Er/1$, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ et les durées de service sont distribuées selon une loi d'Erlang $Er(2, \mu)$. Dans ce système, le client commence son service dans la phase 1 du niveau 0, où la durée de service dans chaque phase est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre μ . Ensuite, les transitions de ce client seront entre deux niveaux adjacents ou entre les phases du même niveau.

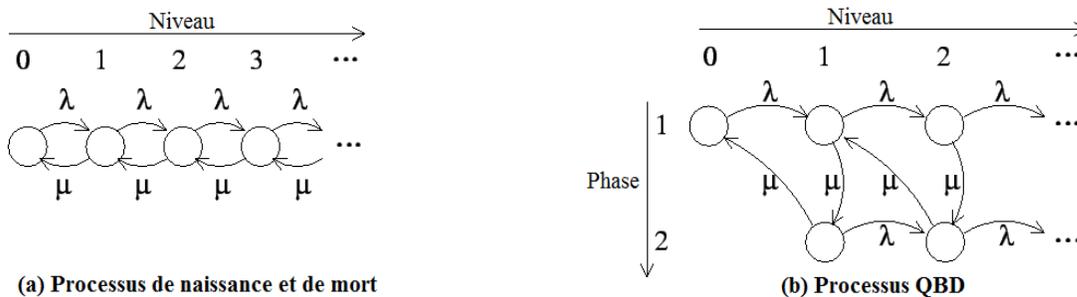


FIGURE 1.2 – Exemples de processus QBD

1.4 Distribution stationnaire d'un processus QBD

Soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ le vecteur de probabilité stationnaire avec $\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{im})$ pour $i = 0, 1, \dots$

Cette distribution limite existe si la chaîne de Markov associée est irréductible, apériodique et récurrente positive.

Le vecteur des probabilités stationnaires π doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \pi e = 1. \end{cases}$$

où e est le vecteur colonne unitaire.

En utilisant le générateur défini dans (1.1) nous obtenons :

$$\begin{cases} \pi_0 B_1 + \pi_1 B_2 = 0, & \text{(a)} \\ \pi_0 B_0 + \pi_1 A_1 + \pi_2 A_2 = 0, & \text{(b)} \\ \pi_i A_0 + \pi_{i+1} A_1 + \pi_{i+2} A_2 = 0, \quad i \geq 1 & \text{(c)} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i e = 1. & \text{(d)} \end{cases}$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution de ce système (Voir [90]), on peut citer entre autre la méthode de la matrice géométrique.

1.4.1 Méthode de la matrice géométrique

La méthode de la matrice géométrique s'applique aux types de systèmes qui ont une certaine structure régulière. Particulièrement l'espace d'état du système est subdivisé en une infinité de niveau dont chaque niveau est subdivisé en m phases.

L'idée principale de cette méthode de résolution est que le vecteur de solution π possède une forme de matrice géométrique i.e.

Théorème 1.1. [76] Supposons que le processus QBD est irréductible et ergodique et qu'il existe une matrice R d'ordre m . Alors la distribution stationnaire π est donnée comme suit :

$$\pi_i = \pi_0 R^i, \quad i \geq 0. \quad (1.2)$$

Remarque 1.1.

- La démonstration du théorème dans le cas $m < \infty$ est donnée par Neuts [76].
- Dans le cas $m = \infty$ voir les résultats obtenus par Tweedie [98], et Ramaswami et Latouche [64, 88].

Du théorème 1.1, la distribution stationnaire du processus QBD est connue dès que π_0 et R sont déterminés.

En remplaçant (1.2) dans (c), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_0 R^i A_0 + \pi_0 R^{i+1} A_1 + \pi_0 R^{i+2} A_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \pi_0 R^i (A_0 + R A_1 + R^2 A_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.3) on a :

$$\begin{cases} \pi_0 R^i = 0, \\ \vee \\ A_0 + R A_1 + R^2 A_2 = 0. \end{cases}$$

- **1^{er} Cas :**

$$\pi_0 R^i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \vee \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow_{de(1.2)} \begin{cases} \pi_0 = 0 \Rightarrow \pi_i = 0, & \forall i \\ R = 0 \Rightarrow \pi_i = 0. & \forall i \end{cases}$$

Ce premier cas ne donne pas de solution utile, alors

- **2^{ème} Cas :**

$$A_0 + R A_1 + R^2 A_2 = 0, \quad (1.4)$$

où R est la solution minimale non négative de l'équation matricielle quadratique (1.4).

-Il existe plusieurs algorithmes pour la résolution numérique de l'équation (1.4) (voir chapitre 8 de [64]).

-Le vecteur de probabilité stationnaire π_0 existe et il est déterminé en résolvant l'équation de la condition limite

$$\pi_0 B_1 + \pi_1 B_2 = 0 \Rightarrow \pi_0 B_1 + \pi_0 R B_2 = 0 \Rightarrow \pi_0 [B_1 + R B_2] = 0,$$

et la condition de normalisation

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i e = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0 R^i e = 1 \Rightarrow \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} R^i e = 1 \Rightarrow \pi_0 [I - R]^{-1} e = 1,$$

où I est la matrice identité.

Interprétation probabiliste de la matrice R

L'analyse des processus QBD est basée sur la signification probabiliste de la matrice R . Cette matrice peut être interprétée comme étant le taux de visite prévu au niveau $l(i+1)$, d'où l'appellation : "matrice des taux R ".

Plus précisément, pour $i \geq 0$, R_{jk} ($1 \leq j, k \leq m$) décrit le temps moyen de séjour dans l'état $(i+1, k)$ avant le premier retour au niveau $l(i)$, sachant que l'état initial est (i, j) .

On peut écrire :

$$R_{jk} = V_{jk} \cdot \frac{\Delta_{jj}}{\Delta_{kk}}, \quad (1.5)$$

où V_{jk} est le nombre de visites prévues à l'état $(i+1, k)$, avant le premier retour au niveau $l(i)$, sachant que l'état initial est (i, j) .

$$\Delta = -diag(A_1),$$

Alors la fraction dans (1.5) exprime le rapport entre le $j^{\text{ème}}$ et le $k^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de la matrice A_1 .

1.5 Files d'attente de type phase

L'emploi de distributions générales reste toujours souhaitable pour la modélisation de nombreux phénomènes réels. Il s'agit, notamment, de la famille de distributions de type phase (PH) qui peuvent être décrites par un "graphe de services exponentiels". Elles sont constituées d'une succession d'étapes où la durée de service de l'étape numéro i suit une loi exponentielle de moyenne μ_i . Comme cas particulier de cette famille de distributions, nous citons la distribution d'Erlang, hyperexponentielle, hypoexponentielle, Cox,...

Le principal avantage des lois de type phase réside dans le fait que cette classe de distributions de probabilité permet de modéliser un grand nombre de phénomènes aléatoires tout en gardant un caractère Markovien, elle permet de décrire des durées réelles et plus complexes que celles pouvant être décrites par la loi exponentielle. Par exemple, la fabrication d'un produit peut se diviser en plusieurs étapes de construction et de vérification. Les durées de ces différentes étapes suivent des lois exponentielles.

La flexibilité de cette classe de distributions de probabilité et leurs propriétés de calculabilité ont rendu l'utilisation des lois de type phase très populaires dans les modèles stochastiques. On peut citer pour l'exemple : Sengupta [92, 93], Asmussen [7], Neuts [76], Latouche et Ramaswami [64], Whitt [101], Johnson [53], Luhman et Johnson [68], Faddy [35],...

1.5.1 Distributions de type phase

Définition 1.2. Soit un processus de Markov à espace d'état fini $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ où $\{1, 2, \dots, m\}$ sont des états transitoires et 0 est un état absorbant.

Le générateur infinitésimal de ce processus peut être décrit par :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{t} & T \end{pmatrix}$$

où T est une matrice $m \times m$, elle représente les transitions entre les états transitoires, avec $T_{ii} < 0$, pour $1 \leq i \leq m$ et $T_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$.

\vec{t} : vecteur colonne de taille m , il représente les transitions entre les états transitoires et

l'état absorbant.

$\vec{0}$: vecteur ligne de 0 de même dimension que \vec{t} .

Comme H est le générateur infinitésimal du processus de Markov alors, on a :

$$\vec{t} + T\vec{1} = 0 \Rightarrow \vec{t} = -T\vec{1},$$

où $\vec{1}$ est un vecteur colonne unitaire.

Soit $(\tau_0, \vec{\tau})$ le vecteur de probabilité initiale vérifiant la relation suivante :

$$\tau_0 + \vec{\tau}\vec{1} = 1 \Rightarrow \tau_0 = 1 - \vec{\tau}\vec{1},$$

avec $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$

La distribution du temps jusqu'à l'absorption dans l'état 0 est appelée distribution phase-type où distribution PH avec les paramètres $(\vec{\tau}, T)$ (voir Figure 1.3).

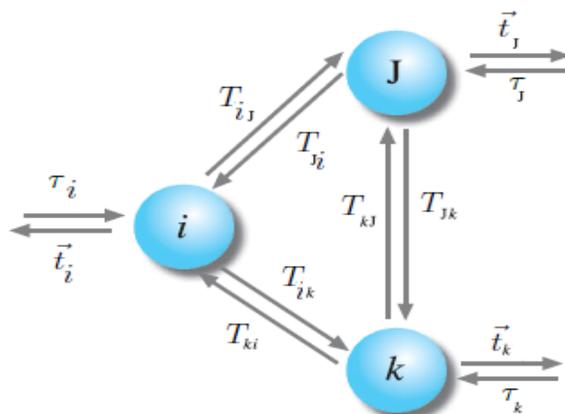


FIGURE 1.3 – Distribution PH à trois phases

On note la distribution par $\text{PH}(\vec{\tau}, T)$.

La dimension m de la matrice T est appelée l'ordre de la distribution PH.

Les états transitoires $\{1, 2, \dots, m\}$ sont appelés phases.

Proposition 1.1. soit $X \in \text{PH}(\vec{\tau}, T)$ alors :

-sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = 1 - \vec{\tau}e^{Tx}\vec{1}, \quad x \geq 0,$$

-sa fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \vec{\tau} e^{Tx} \vec{t}, \quad x \geq 0,$$

où e^{Tx} est l'exponentielle de la matrice Tx .

-La transformée de Laplace de $PH(\vec{\tau}, T)$ est donnée par

$$\tilde{X}(s) = \tau_0 + \vec{\tau}(sI - T)^{-1} \vec{t},$$

I : est la matrice identité.

- Le moment de la distribution est donné par

$$E[X^i] = (-1)^i i! \vec{\tau} T^{-i} \vec{1} \quad i \geq 1.$$

Remarque 1.2. L'exponentielle d'une matrice A est définie par :

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n.$$

1.5.2 Propriétés des distributions de type phase

1. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $X + Y \sim PH(\gamma, C)$ avec $m + n$ phases, où

$$\gamma = (\vec{\tau}, \tau_0 \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T & \vec{t} \cdot \beta \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $(\vec{t} \cdot \beta)_{ij} = \vec{t}_i \beta_j$.

2. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases, et de fonction de distribution $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ respectivement, alors pour $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta F(\cdot) + (1 - \theta)G(\cdot)$, est une distribution PH représentée par $PH(\gamma, C)$ avec $m + n$ phases, où

$$\gamma = (\theta \vec{\tau}, (1 - \theta) \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

3. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $\min(X, Y) \sim PH(\gamma, C)$ avec mn phases, où

$$\gamma = \vec{\tau} \otimes \beta, \quad \text{et} \quad C = T \oplus B$$

4. Si $X \sim PH(\vec{\tau}, T)$ et $Y \sim PH(\beta, B)$ (indépendant de X), avec n et m phases respectivement, alors $\max(X, Y) \sim PH(\gamma, C)$ avec $mn + n + m$ phases, où

$$\gamma = (\vec{\tau} \otimes \beta, \beta_0 \vec{\tau}, \tau_0 \beta) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} T \oplus B & I \otimes \vec{b} & \vec{t} \otimes I \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Remarque 1.3. Si A est une matrice $n \times m$ et B est une matrice $n' \times m'$ alors $A \otimes B$ est une matrice $nn' \times mm'$ définie par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

et $A \oplus B = A \otimes I + I \otimes B$.

1.5.3 Exemples de distributions de type phase

1- La distribution exponentielle

L'exemple le plus simple des distributions de type phase, est la distribution exponentielle de taux λ (voir Figure 1.4)

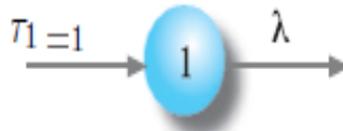


FIGURE 1.4 – Représentation de la distribution exponentielle

La distribution exponentielle est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état 0 dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{0, 1\}$, avec les paramètres suivants

$$\vec{r} = (1), \quad T = (-\lambda), \quad \vec{t} = (\lambda).$$

Le vecteur de probabilité initiale est $(0, 1)$ et le générateur infinitésimal

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

et sa fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

2- La distribution d'Erlang

La distribution Erlang est la distribution d'une combinaison en série de k variables aléatoires suivant des lois exponentielles. Elle possède deux paramètres $k > 0$ et $\lambda > 0$, d'où la notation $E(k, \lambda)$.

Le diagramme de la distribution d'Erlang est représenté dans la figure suivante :



FIGURE 1.5 – Représentation de la distribution Erlang

La distribution $E(k, \lambda)$ est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état $k + 1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{1, 2, \dots, k, k + 1\}$, avec le vecteur de probabilité

initiale $(0, 1, 0, \dots, 0)$ et le générateur infinitésimal

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Les paramètres de cette loi de type phase sont alors :

$$\vec{\tau} = (1, 0, \dots, 0), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est le produit de convolution de k densités exponentielles de paramètre λ :

$$f_{k,\lambda}(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Et sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_{k,\lambda}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}.$$

3- La distribution hyperexponentielle

La distribution hyperexponentielle est la distribution d'une combinaison en parallèle de k variables aléatoires suivant des lois exponentielles, de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Cette distribution est appelée hyper-distribution exponentielle car son coefficient de variabilité (> 1) est plus grand que celui de la distribution exponentielle ($= 1$).

Le diagramme de cette distribution est représenté par la figure suivante :

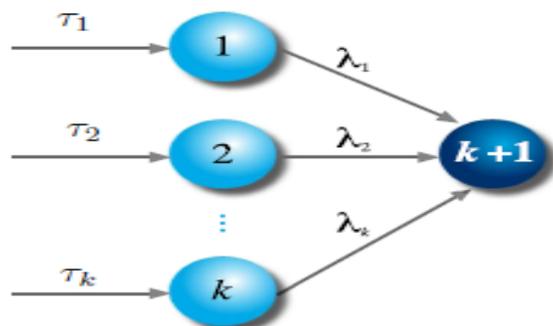


FIGURE 1.6 – Représentation de la distribution hyperexponentielle

La distribution hyperexponentielle est la distribution de type phase, qui est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état $k + 1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{1, 2, \dots, k, k + 1\}$, et ayant les paramètres suivants :

$$\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -\lambda_k \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

avec le vecteur de probabilité initiale $(0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, (tel que $\sum \tau_i = 1$ et $\tau_i > 0, \forall i$), et le générateur infinitésimal H :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k & 0 & 0 & & -\lambda_k \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \tau_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0,$$

Et sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^k \tau_i e^{-\lambda_i x}.$$

4- La distribution hypoexponentielle

La distribution hypoexponentielle est une généralisation de la distribution Erlang, dans laquelle le taux de transition est différent dans chaque phase (voir Figure 1.7).

Cette distribution est appelée hypo-distribution exponentielle car son coefficient de variabilité est inférieur à 1.

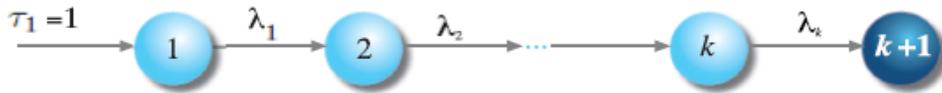


FIGURE 1.7 – Représentation de la distribution hypoexponentielle

Une distribution hypoexponentielle de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est la distribution du temps jusqu'à l'absorption par l'état $k + 1$ dans une chaîne de Markov à espace d'état $\{1, 2, \dots, k, k + 1\}$, avec le vecteur de probabilité initiale $(0, 1, 0, \dots, 0)$ et le générateur infinitésimal

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}$$

où les paramètres de la loi phase sont donnés comme suit :

$$\vec{\tau} = (1, 0, \dots, 0), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

5- La distribution de Cox

Un exemple plus général est la distribution de Cox qui est une distribution d'Erlang généralisée dans laquelle, à chaque phase, il existe une possibilité de rentrer à l'état absorbant sans passer par les phases suivantes (voir Figure 1.8)

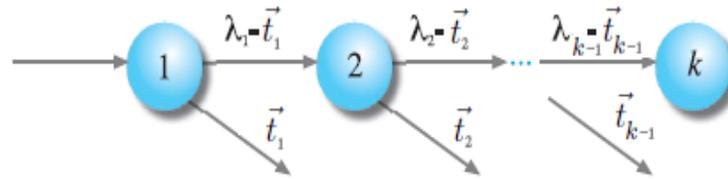


FIGURE 1.8 – Représentation de la distribution Cox

Les paramètres de la loi phase sont donnés comme suit :

$$\vec{\tau} = (1, 0, \dots, 0), \quad T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & p_1\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & p_2\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-1} & p_{k-1}\lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} (1-p_1)\lambda_1 \\ (1-p_2)\lambda_2 \\ \vdots \\ (1-p_{k-1})\lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

où $0 < p_1, \dots, p_{k-1} \leq 1$.

Dans le cas où $p_i = 1$ nous avons la distribution hypoexponentielle.

Remarque 1.4. Le coefficient de variabilité d'une variable aléatoire X de moyenne m et d'écart type σ est donné par $c_X = \sigma/m$. Beaucoup d'articles et livres utilisent le coefficient au carré (squared coefficient of variation) $c_X^2 = \text{Var}(X)/m^2$.

1.5.4 Files d'attente de type PH/M/1

Dans ce système, on considère une file d'attente à un seul serveur où la durée de service est exponentielle de paramètre μ et la durée des inter-arrivées est distribuée selon une loi de type PH notée par $H(\cdot)$ avec les paramètres (α, T) , d'ordre m et de moyenne $\lambda = -\alpha T^{-1}e$ (Voir Figure 1.9).

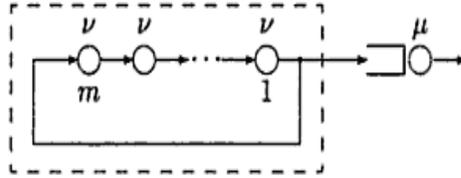


FIGURE 1.9 – Exemple graphique de la file PH/M/1

Le système PH/M/1 peut être étudié comme un processus QBD dans un espace d'état $E = \{(i, j); i \geq 0, 1 \leq j \leq m\}$, où $i \geq 1$ est le nombre de clients dans le système, et j est la phase du processus d'arrivée.

Le générateur Q est donné comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} T & \vec{t}\alpha & 0 & 0 & \dots \\ \mu I & T - \mu I & \vec{t}\alpha & 0 & \dots \\ 0 & \mu I & T - \mu I & \vec{t}\alpha & \dots \\ 0 & 0 & \mu I & T - \mu I & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le vecteur de probabilité stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ est donné par :

Théorème 1.2. [76]

$$\begin{cases} \pi_0 e = 1 - \rho, \\ \pi_i = (1 - \rho)\alpha R^i, \text{ pour } i \geq 1. \end{cases}$$

où $\rho = \frac{1}{\mu\lambda}$, la matrice R est donnée par

$$R = (I - e.\alpha - T/\mu).$$

1.5.5 Files d'attente de type M/PH/1

Le flot des arrivées dans le système M/PH/1 est Poissonnien de paramètre λ et la durée de service est distribuée selon une loi de type PH (phase-type) notée par $H(\cdot)$ avec les paramètres (α, T) et d'ordre m . Le temps moyen de service est $\mu = -\alpha T^{-1}e$. (voir Figure 1.10).

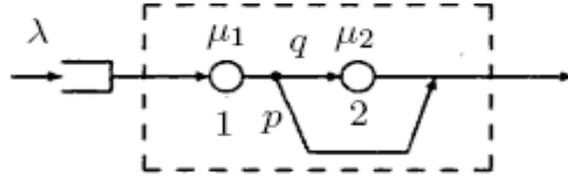


FIGURE 1.10 – Exemple de deux phases dans la file M/PH/1

Le système M/PH/1 peut être étudié comme un processus QBD dans un espace d'état $E = \{0, (i, j); i \geq 1, 1 \leq j \leq m\}$. L'état 0 correspond à un système vide, l'état (i, j) signifie qu'il y a $i \geq 1$ clients dans le système, et le processus de service est dans la phase j , $1 \leq j \leq m$. Le générateur Q est donné comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vec{t} & T - \lambda I & \lambda I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \vec{t}\alpha & T - \lambda I & \lambda I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \vec{t}\alpha & T - \lambda I & \lambda I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le vecteur de probabilité stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3. [76]

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho, \\ \pi_i = (1 - \rho)\alpha R^i, \text{ pour } i \geq 1. \end{cases}$$

où $\rho = \lambda\mu$, la matrice R est donnée par

$$R = \lambda(\lambda I - \lambda B^o - T)^{-1},$$

où $B^o = e.\alpha$.

1.5.6 Files d'attente de type PH/PH/1

Considérons une file d'attente à un seul serveur de type PH/PH/1. Les inter-arrivées sont distribuées selon une loi de type PH notée $F(\cdot)$ avec les paramètres (α, T) , d'ordre m et le temps moyen d'entrée est λ .

La durée de service est distribuée selon une loi de type PH notée $K(\cdot)$ avec les paramètres (β, S) , d'ordre ν et le temps moyen de service μ (Voir, Figure 1.11).

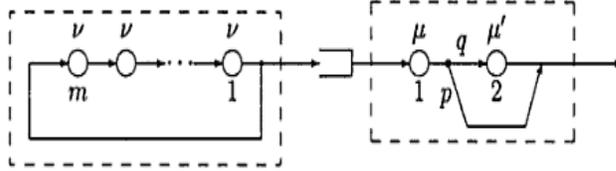


FIGURE 1.11 – Exemple graphique de la file PH/PH/1

Le système PH/PH/1 peut être étudié comme un processus QBD dans un espace d'état $E = \{(0, j), 1 \leq j \leq m\} \cup \{(i, j, k), i \geq 1, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq \nu\}$.

L'indice $i \geq 1$, décrit le nombre de clients dans le système, l'indice $1 \leq j \leq m$, représente les phases dans le processus d'arrivée et $1 \leq k \leq \nu$, indique la phase du service en cours.

Les états sont donnés dans l'ordre lexicographique :

$(0, 1), \dots, (0, m), (1, 1, 1), \dots, (1, 1, \nu), (1, 2, 1), \dots, (1, 2, \nu), \dots$

Le générateur Q peut être écrit de la manière suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} T & \vec{t}\alpha \otimes \beta & 0 & 0 & \dots \\ I \otimes \vec{s} & T \otimes I + I \otimes S & \vec{t}\alpha \otimes I & 0 & \dots \\ 0 & I \otimes \vec{s}\beta & T \otimes I + I \otimes S & \vec{t}\alpha \otimes I & \dots \\ 0 & 0 & I \otimes \vec{s}\beta & T \otimes I + I \otimes S & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le vecteur de probabilité stationnaire z est de la forme $z = (z_o, z_1, z_1 R, z_1 R^2, \dots)$, tel que z_o et z_1 sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{cases} z_o T + z_1 (I \otimes \vec{s}) = 0, \\ z_o (\vec{t}\alpha \otimes \beta) + z_1 (T \otimes I + I \otimes S + R(I \otimes \vec{s}\beta)) = 0, \\ z_o e + z_1 (I - R)^{-1} e = 1. \end{cases}$$

1.6 Conclusion

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons établi une synthèse bibliographique sur les processus QBD (Quasi Birth and Death). Ainsi nous avons donné les notions de base et

les théorèmes fondamentaux concernant ce processus. Par la suite, notre attention s'est focalisée sur les distributions de type phase, certaines notions et quelques exemples ont été introduits. Enfin, une étude sur les systèmes d'attente de type phase a été réalisée, en développant les principaux résultats relatifs à chaque système.

Chapitre 2

Approximation d'une distribution positive par une distribution de type phase

2.1 Introduction

L'analyse des systèmes d'attente avec une distribution générale, par exemple le système G/G/1, est très compliquée et ce genre de systèmes ne peuvent être résolus que d'une manière approximative. En particulier, il est souvent désiré d'approximer une distribution générale par une combinaison de lois exponentielles, i.e., une distribution de type phase. Cette classe de distributions de probabilité permet de modéliser un grand nombre de phénomènes aléatoires tout en conservant un caractère Markovien. En outre, toute distribution positive peut être approximée par une distribution de type phase à un niveau de précision adéquat. Cette idée trouve sa justification dans le résultat suivant :

Théorème 2.1. [9] L'ensemble des distributions de type phase PH est dense (au sens de la convergence faible) dans l'ensemble des distributions positives \mathcal{P} . D'une manière plus générale : pour toute distribution positive $F \in \mathcal{P}$ possédant un moment d'ordre p , $(\mu_F^{(p)})$ fini, il existe une suite de distributions $F_k \in PH$ telle que : $F_k \rightarrow F$ et $\mu_{F_k}^{(q)} \rightarrow \mu_F^{(q)}$ pour tout $q \leq p$.

Exemple 2.1. [9] Un exemple d'approximation d'une fonction de distribution F (pour une loi de Gauss inverse) par une distribution $F_p \in PH$ à p phases, avec ($p = 2, 3, 6$) est donné dans la figure suivante :

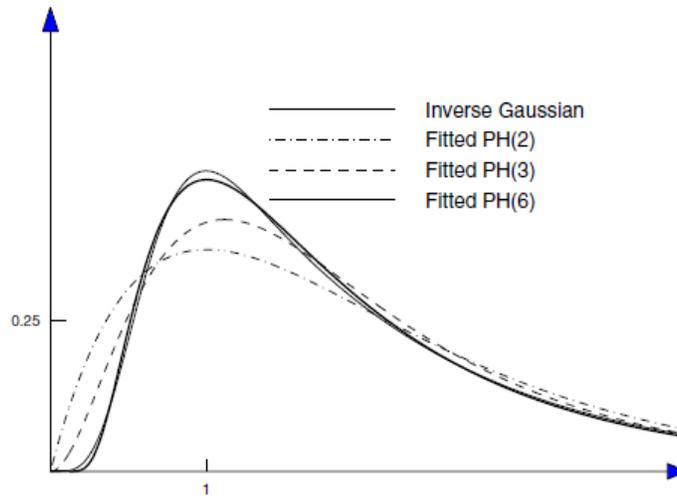


FIGURE 2.1 – Exemple d'approximation1

Il est facile de remarquer que lorsque le nombre de phases augmente, on obtient une approximation meilleure de la distribution F et que l'erreur peut être significative si l'on se contente d'un nombre de phases réduit.

Exemple 2.2. [8]

Un exemple d'approximation de la distribution de Weibull par une distribution PH est illustré dans la figure suivante :

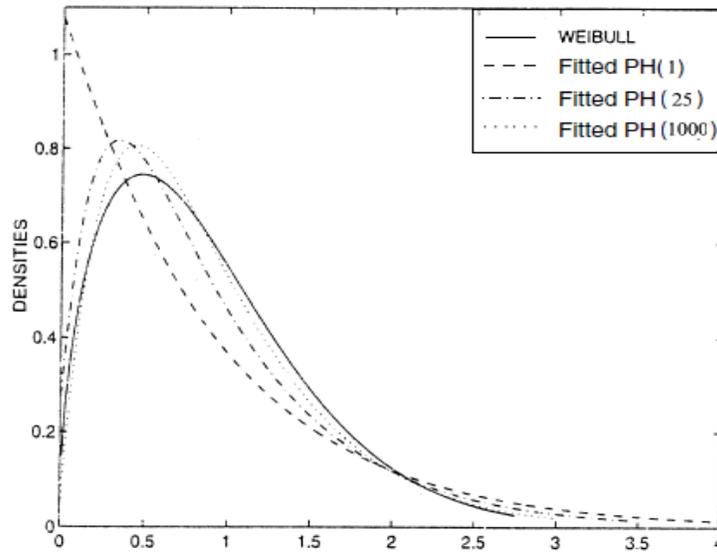


FIGURE 2.2 – Exemple d'approximation2

Nous remarquons que lorsque la loi de Weibull est approximée par la loi PH(1) (ie : par la loi exponentielle), on obtient une mauvaise approximation comparant à l'approximation par une PH avec un nombre de phase supérieur.

Ainsi, lors de l'approximation d'une distribution quelconque par une distribution exponentielle, cette distribution doit être choisie assez proche de la loi exponentielle, par exemple la loi hyperexponentielle avec un coefficient de variabilité $\eta = 9$ et $\eta = 14.5$ (voir Figure 2.3)[9]

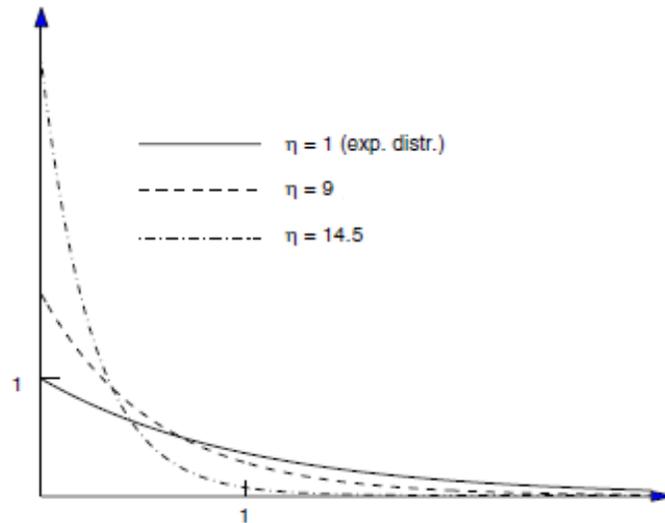


FIGURE 2.3 – Exemple d'approximation3

Exemple 2.3. [33] Dans cet exemple, une approximation de la loi beta par la loi d'Erlang généralisée à deux phases (HOE_2) est donnée par la figure(a), et une approximation de la loi de Weibull par la loi d'Erlang généralisée à trois phases (HOE_3) est donnée par la figure(b).

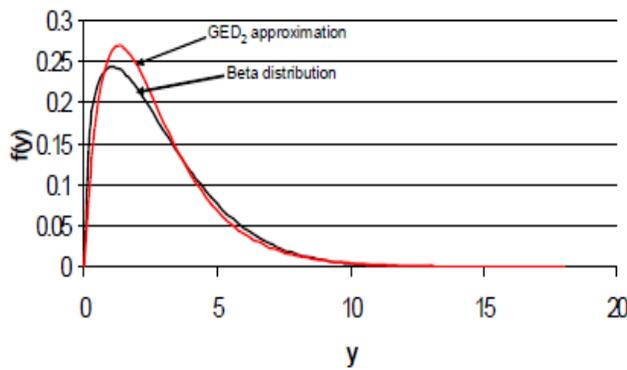


Figure (a)

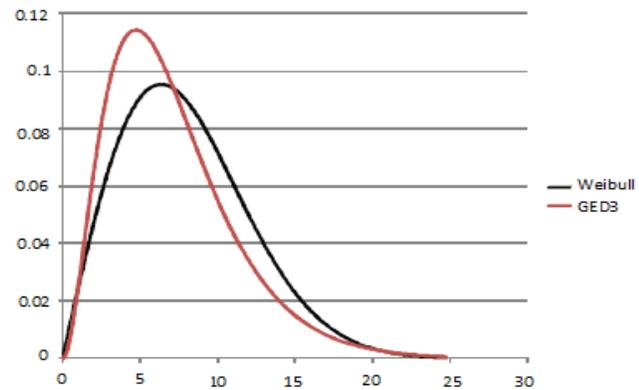


Figure (b)

FIGURE 2.4 – Exemple d'approximation4

Plusieurs approches ont été développées dans la littérature pour trouver une distribution PH qui approxime convenablement une distribution générale. Dans le présent chapitre, nous présentons la méthode des moments qui consiste en la recherche d'une distribution PH possédant les mêmes premiers moments que la distribution d'origine. Nous illustrons l'applicabilité sur quelques exemples.

2.2 Approximation via la méthode des moments

La méthode des moments peut être utilisée pour l'approximation d'une distribution générale G par une distribution de type phase PH. Elle a été employée dans plusieurs travaux (e.g., [54, 79, 91]). L'idée derrière cette approche est simple : la distribution de type phase PH doit être choisie assez proche de G dans le sens où les (premiers) moments des deux distributions G et PH coïncident. Les auteurs utilisent souvent les deux ou trois premiers moments : la moyenne, la variance, et le moment d'ordre trois. En général, il faut passer à des moments d'ordre supérieurs pour obtenir une très bonne approximation.

Plusieurs algorithmes ont été développés pour obtenir les paramètres de la distribution PH, à partir des équations résultant de l'égalisation des moments, on peut citer [6, 91, 100].

Le défi est de concilier les contraintes suivantes :

- Faire coïncider les p premiers moments.
- La distribution PH a un nombre réduit de phases.
- L'algorithme est défini pour une large classe de distributions.
- Le temps d'exécution est assez court.

2.3 Exemples d'approximation par la méthode des moments

Le choix d'une distribution de type phase pour approximer une distribution générale passe d'abord par la détermination de la classe de cette distribution PH. Il vient ensuite

le calcul de ses paramètres. En effet, une distribution hyperexponentielle possède un coefficient de variabilité $cv > 1$ et ne peut donc approximer que les distributions positives avec un coefficient de variabilité dans le même intervalle. Par contre, si le coefficient de variabilité de la distribution à approximer est inférieur à 1, une loi hyperexponentielle ne peut pas être utilisée. Mais nous avons le choix entre plusieurs classes de distributions PH possédant un coefficient de variabilité $cv < 1$, comme l'hypoexponentielle, l'Erlang,...

2.3.1 Approximation par la loi hypoexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité inférieur à 1 par une loi hypoexponentielle à deux phases.

La fonction de densité d'une loi hypoexponentielle de paramètres (λ_1, λ_2) , est donnée par :

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}).$$

Les premiers moments de la distribution hypoexponentielle sont donnés comme suit :

- Le moment d'ordre 1 (la moyenne) : $\mu_1 = \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$.
- Le moment d'ordre 2 (la variance) : $\mu_2 = \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_i^2}\right)$.

Supposons que la distribution générale à approximer possède une moyenne μ et une variance σ^2 finie, on cherchera alors une distribution hypoexponentielle possédant les mêmes moments. On écrit alors :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \mu, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = \sigma^2. \quad (2.2)$$

En résolvant le système ci-dessus, et en prenant en considération que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{2}{\mu - \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (2.4)$$

à condition que :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2}{\mu^2} < 1.$$

Exemple 2.4. Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres (α, β) . Sa fonction de densité est donnée par

$$w(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\alpha)^\beta}.$$

Notons par μ sa moyenne et par σ^2 sa variance. On a alors,

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \\ \sigma^2 &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \mu^2, \\ c_X^2 &= \frac{\Gamma(1 + 2/\beta)}{(\Gamma(1 + 1/\beta))^2} - 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hypoexponentielle se fait à condition que :

$$0.75 < \frac{\beta \Gamma(2/\beta)}{(\Gamma(1/\beta))^2} < 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme β doit être défini dans l'intervalle $[1, 1.4355]$ pour pouvoir utiliser cette approximation.

2.3.2 Approximation par la loi hyperexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité supérieur à 1 par une loi hyperexponentielle à deux phases.

La fonction de densité d'une loi hyperexponentielle de paramètres (λ_1, λ_2) , est donnée par :

$$f(t) = \tau_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \tau_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Supposons que la distribution générale possède une moyenne μ et un coefficient de variabilité c_X^2 , on va les faire égaux avec les deux premiers moments de la distribution hyperexponentielle :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \frac{\tau_2}{\lambda_2} &= \mu, \\ \frac{2\tau_1/\lambda_1^2 + 2\tau_2/\lambda_2^2}{(\tau_1/\lambda_1 + \tau_2/\lambda_2)^2} - 1 &= c_X^2.\end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu} \left[1 - \sqrt{\frac{\tau_2 c_X^2 - 1}{\tau_1}} \right]^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mu} \left[1 + \sqrt{\frac{\tau_1 c_X^2 - 1}{\tau_2}} \right]^{-1}, \quad (2.6)$$

où $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 = 1$ et $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Exemple 2.5. Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres (α, β) . Sa fonction de densité est donnée par

$$w(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\alpha)^\beta}.$$

Notons par μ sa moyenne et par σ^2 sa variance. On a alors,

$$\begin{aligned}\mu &= \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \\ \sigma^2 &= \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \mu^2, \\ c_X^2 &= \frac{\Gamma(1 + 2/\beta)}{(\Gamma(1 + 1/\beta))^2} - 1.\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hyperexponentielle se fait à condition que :

$$1 < c_X^2 < \frac{2\tau_1}{\tau_2} + 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme β doit être défini dans l'intervalle $[0.7, 1]$ pour pouvoir utiliser cette approximation.

2.4 Conclusion

Dans le but d'approximer une distribution G par une distribution PH, on a présenté dans ce chapitre la méthode des moments qui justifie l'approximation et on a donné quelques distributions pour illustrer l'applicabilité de cette méthode. Et pour étudier la stabilité des systèmes de type phase (PH) qui approximent les systèmes avec une distribution générale, nous développerons dans les deux prochains chapitres la stabilité forte des systèmes $HOE_2/M/1$, $H_2/M/1$, $M/HOE_2/1$ et $M/H_2/1$.

Chapitre 3

Théorie de stabilité

3.1 Introduction

Le problème fondamental de stabilité, en théorie des modèles stochastiques, consiste à délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel. Depuis le travail de Rossberg en 1965, plusieurs méthodes de stabilité ont été élaborées. Notre attention se focalisera sur la méthode de stabilité forte, qui permet d'étudier l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov après avoir soumis leurs opérateurs de transition à de petites perturbations. Cette méthode donne la possibilité de clarifier les conditions pour lesquelles les caractéristiques du système complexe peuvent être approximées par celles du système plus simple. Nous présenterons notamment les concepts de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte, par rapport à des normes données dans des espaces de mesures et de noyaux de transitions.

3.2 Méthodes de stabilité

Comme il est précisé précédemment, plusieurs méthodes de stabilité ont été élaborées en considérant diverses situations et diverses approches, on peut citer :

3.2.1 Méthode des fonctions tests

L'idée de cette méthode est inspirée de la méthode de Lyapunov élaborée initialement pour les équations différentielles. Elle consiste à construire convenablement une fonction test vérifiant certaines propriétés et permettant de comparer le comportement d'un système perturbé (réel) et celui non perturbé (idéal). Les premiers travaux entrepris dans cet axe ont été réalisés par Kalashnikov et Tsitsiashvili [55, 56, 57]. La difficulté majeure de cette méthode réside dans le choix de la fonction test.

3.2.2 Méthode métrique

Cette approche a été initiée par Zolotarev [107], elle est basée sur la théorie des métriques de probabilité [108, 109]. Elle considère le problème de stabilité comme un problème de continuité entre les espaces métriques. Les résultats obtenus par cette méthode ont été synthétisés par Rachev [86].

3.2.3 Méthode de convergence faible

Cette méthode est introduite par Stoyan [95], elle est utilisée pour démontrer les propriétés de stabilité des processus Markoviens homogènes. La plupart des outils et des notions utilisés par celle-ci sont empruntés à l'analyse fonctionnelle. Comparée aux autres méthodes de stabilité des systèmes stochastiques, cette méthode est moins contraignante. Cependant, elle fait appel à plusieurs paramètres non directement liés aux caractéristiques des systèmes étudiés.

3.2.4 Méthode de renouvellement

Cette méthode basée sur la théorie de renouvellement a été proposée par Borovkov [16]. Il s'agit d'une approche permettant de prouver les théorèmes de stabilité et d'ergodicité des processus aléatoires décrivant le comportement d'une classe de modèles stochastiques. Elle est appliquée principalement aux systèmes de files d'attente et aux réseaux de communication et de files d'attente [17, 18, 19, 20]

3.2.5 Méthode de stabilité forte

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom de méthode des opérateurs de la théorie de la stabilité, est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle a été introduite au début des années quatre vingt par Aïssani et Kartashov [3]. Elle suppose que la perturbation du noyau de transition du processus aléatoire décrivant le système étudié est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode, il est possible d'obtenir des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de Kartashov [60].

3.2.6 Méthode de stabilité uniforme

Elaborée par I.C.F. Ipsen et C.D. Meyer en 1994 [52], cette méthode est applicable aux chaînes de Markov finies et irréductibles. Son idée est d'étudier la réaction des distributions stationnaires à des perturbations quelconques. En effet, il a été constaté que, pour les chaînes de Markov finies et irréductibles, les distributions stationnaires réagissent d'une manière uniforme aux perturbations de leurs distributions de transition.

3.2.7 Méthode de développement en série de Taylor

Elaborée par Heidergott et Hordijk en 2003 [51], le principe de cette méthode inspiré de la méthode de stabilité forte [60], est d'écrire la distribution stationnaire du système perturbé en fonction de la distribution stationnaire du système idéal et d'une série qui dépend de la perturbation de la matrice de transition du système idéal et de la matrice de déviation du même système. Cependant, cette approche exige toujours le calcul de la matrice de déviation, ce qui rend l'applicabilité de celle-ci essentiellement aux chaînes de Markov à espace d'états fini. Ainsi, l'analyse de perturbation en utilisant cette approche

est limitée par le problème d'écriture de la matrice de déviation.

3.3 Critère de stabilité forte

Considérons une chaîne de Markov homogène $X = (X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) , (où \mathcal{E} est une σ -algèbre engendrée par une partie dénombrable de E), donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, $x \in E, A \in \mathcal{E}$. Par ailleurs, on suppose que la chaîne X admet une unique mesure invariante π tel que $\pi(E) = 1$.

Notons par $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$) l'espace des mesures finies (non négatives) sur \mathcal{E} et $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$) l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur E . Associons à chaque noyau de transition P , les deux applications linéaires suivantes :

$$\mathcal{L}_P : m\mathcal{E} \rightarrow m\mathcal{E} \text{ et } \mathcal{L}_P^* : f\mathcal{E} \rightarrow f\mathcal{E}$$

dont les valeurs aux points $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mu P(A) &= \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A), \forall A \in \mathcal{E}, \\ P f(x) &= \mathcal{L}_P^*(f)(x) = \int_E P(x, dy) f(y), \forall x \in E. \end{aligned}$$

Le produit des deux noyaux de transitions P et Q est le noyau

$$PQ(x, A) = \int_E P(x, dy) Q(y, A) \text{ pour } x \in E, A \in \mathcal{E}.$$

Le produit d'une mesure $\mu \in m\mathcal{E}$ et d'une fonction $f \in f\mathcal{E}$, notée μf , est défini par

$$\mu f = \int_E \mu(dx) f(x).$$

Egalement, $f \circ \mu$ désignera le produit direct d'une fonction mesurable $f \in f\mathcal{E}$ par une mesure $\mu \in m\mathcal{E}$:

$$(f \circ \mu)(x, A) = f(x) \mu(A), x \in E, A \in \mathcal{E}.$$

On considère, dans l'espace $m\mathcal{E}$, l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$ de norme $\|\cdot\|$ compatible avec l'ordre structurel dans $m\mathcal{E}$, c'est à dire :

1. $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|$ pour $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$,
2. $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|$ pour $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$ et $\mu_1 \perp \mu_2$,
3. $|\mu|(E) \leq k\|\mu\|$ pour $\mu \in \mathcal{M}$.

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ , k est une constante positive finie et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$.

La norme induite sur $f\mathcal{E}$ est donnée par

$$\|f\| = \sup(|\mu f|, \|\mu\| \leq 1).$$

La norme induite sur l'espace \mathcal{B} des opérateurs bornés est donnée par :

$$\|P\| = \sup(|\mu P|, \|\mu\| \leq 1).$$

Supposons que l'opérateur $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est borné, i.e :

$$\mathcal{M}P \subset \mathcal{M}, \|P\| < \infty,$$

où $\mathcal{M}P = \{\mu : \mu = \mu_1 P, \mu_1 \in \mathcal{M}\}$.

Notons par $\Pi = \mathbb{I} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P , où \mathbb{I} est la fonction identiquement égale 1, et considérons la moyenne de Césaro définie par : $P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s, t \in \mathbf{N}^*$.

3.4 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov

A présent, introduisons les notions d'ergodicité uniforme et de stabilité forte ainsi que les théorèmes fondamentaux.

Définition 3.1. La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si elle possède une unique mesure invariante π et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P^{(t)} - \Pi\| = 0. \quad (3.1)$$

Théorème 3.1. [3, 59]

La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si et seulement si :

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty,$$

où I est l'opérateur identité.

Définition 3.2. La chaîne de Markov X est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si les assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\|P\| < \infty$.
2. Chaque noyau de transition Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$, admet une unique distribution stationnaire $\nu = \nu(Q)$ telle que $\|\nu - \pi\| \rightarrow 0$, lorsque $\|Q - P\| \rightarrow 0$.

Remarque 3.1. Notons que l'assertion (2) est équivalente à l'existence d'une constante $C = C(P)$ telle que

$$\|\nu - \pi\| \leq C\|Q - P\|, \quad (3.2)$$

pour tout Q dans le voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$.

Théorème 3.2. [3, 59]

La chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.

- Une chaîne de Markov peut être fortement stable (uniformément ergodique) par rapport à une norme donnée et ne pas l'être pour une autre (si ces normes ne sont pas équivalentes).

Théorème 3.3. [3]

La propriété d'ergodicité uniforme de la chaîne X par rapport à la norme $\|\cdot\|$ se conserve pour de petites perturbations du noyau P . Chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage du noyau de transition P de la chaîne de Markov X , uniformément ergodique (fortement stable) par rapport à une norme donnée $\|\cdot\|$ (*i.e.* $\|Q - P\| < \epsilon$), correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique (par rapport à la même norme).

Définition 3.3. Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur (E, \mathcal{E}) , et de noyau de transition P est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante μ^* σ -positive,

telle que $\mu^*(A) > 0$, alors :

$$P_x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_A(X_n) = +\infty \right) = 1, \forall x \in E. \quad (3.3)$$

On dit alors que X ainsi que son noyau de transition sont de Harris.

Propriété 3.1.

- Une chaîne irréductible, discrète et récurrente est une chaîne de Harris.
- Une chaîne de Harris est une chaîne récurrente irréductible.

Théorème 3.4. [3, 59]

Une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique si et seulement si il existe un entier $n \geq 1$, une mesure positive $\alpha_n \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. $\pi h > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$, $\alpha h > 0$,
2. le noyau $T = P^n - h \circ \alpha$ est non négatif,
3. $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$, $\rho < 1$.

• L'ergodicité uniforme de la chaîne X , entraîne que la dernière condition est satisfaite pour tout n , α , et h , vérifiant les deux premières conditions

3.5 v -Stabilité forte d'une chaîne de Markov

Définition 3.4. La chaîne de Markov X sera dite fortement v -stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|_v$ définie par :

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x) |\mu|(dx), \quad (3.4)$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, pas nécessairement finie sur E , $\mu \in m\mathcal{E}$ et $|\mu|$ est la variation de la mesure μ .

Dans ce cas, les normes induites par $\|\cdot\|_v$ dans les espaces $f\mathcal{E}$ et \mathcal{B} sont respectivement :

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|, \forall f \in f\mathcal{E}$$

$$\|P\|_v = \sup\{|\mu P|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} \int v(y) |P(x, dy)|, \forall f \in f\mathcal{E}$$

Remarque 3.2. Pour la classe des normes $\|\cdot\|_v$, définies par la formule (3.4), la condition (3) du théorème (3.4) sera équivalente à la condition suivante :

$$T^m v(x) \leq \rho v(x), \quad \forall x \in E, \quad \text{pour un entier } m \geq 1 \text{ et } \rho < 1.$$

Corollaire 3.1. Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris soit fortement v -stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que : $\pi h > 0$,
 $\alpha \mathbf{1} = 1$, $\alpha h > 0$,
2. le noyau $T = P - h \circ \alpha$ est non négatif,
3. $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x) \quad \forall x \in E$

• Ce corollaire n'est qu'une condition suffisante du théorème 3.4 avec $n = m = 1$ et en tenant compte de la remarque 3.2.

Remarque 3.3.

Le choix de la norme appropriée, se réduit à la recherche d'une fonction test v .

La construction de la fonction test v et le choix de h et de α constituent la difficulté majeure dans l'étude de la v -stabilité forte, puisqu'elles dépendent essentiellement de la forme du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée X .

3.6 Inégalités de stabilité forte

Dans les conditions du théorème 3.4, on peut obtenir les estimations quantitatives de la stabilité d'une chaîne de Markov X ayant P comme opérateur de transition et π comme mesure de probabilité invariante. À cet effet, on présente la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X en termes des fonctions h , v , et la mesure α

Théorème 3.5. [58]

Soit une chaîne X fortement ν -stable et vérifiant les conditions du théorème (3.4), de noyau de transition P , et de mesure invariante π . Alors, pour un noyau stochastique Q , de mesure stationnaire ν appartenant à un certain voisinage de P , on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\nu &= \pi[I - \Delta R_0(I - \Pi)]^{-1} \\ &= \pi + \sum_{t=1}^{\infty} \pi[\Delta R_0(I - \Pi)]^{-1}\end{aligned}$$

où $\Delta = Q - P$ et $R_0 = (I - T)^{-1}$.

Conséquence 3.1. Sous les mêmes conditions du théorème (3.4), on a :

$$\nu = \pi + \pi\Delta R_0(I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \text{ pour } \|\Delta\|_v \rightarrow 0.$$

Conséquence 3.2. Sous les mêmes conditions du théorème (3.4), et pour Δ vérifiant :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (3.5)$$

on a l'estimation

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (3.6)$$

Avec

$$C = m\|P\|_v^{m-1}(1 + \|\mathbf{1}\|_v\|\pi\|_v);$$

et

$$\|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)m\|P\|_v^{m-1}.$$

Dans le cas où $m = 1$, on a : $C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v\|\pi\|_v$.

3.7 Conclusion

La méthode de stabilité forte, initialement introduite dans la théorie de stabilité des chaînes de Markov, peut s'appliquer d'une manière efficace aux systèmes de files d'attente

du moment que la plupart de ces derniers peuvent être régis par des chaînes de Markov. Dans ce chapitre, nous avons présenté certains résultats et critères concernant l'ergodicité uniforme et la stabilité forte dont l'objectif est d'élargir le champs d'application de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente de type phase.

Chapitre 4

Stabilité des systèmes de files d'attente $\text{HOE}_2/\text{M}/1$ et $\text{H}_2/\text{M}/1$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions par le biais de la méthode de stabilité forte, l'approximation des systèmes de files d'attente de type $GI/M/1$ par des systèmes de type phase. Le système de files d'attente $GI/M/1$ est approximé par l'un des systèmes $\text{HOE}_2/\text{M}/1$ ou $\text{H}_2/\text{M}/1$ comme suit :

- a Le coefficient de variabilité des inter-arrivées $ca < 1$: dans ce cas, la distribution des inter-arrivées peut être approximée par une loi hypoexponentielle et on obtient alors un modèle $\text{HOE}_2/\text{M}/1$. Dans ce cas et pour toute loi positive G (avec variance finie), on peut trouver une distribution HOE_2 possédant les deux mêmes premiers moments.
- b Le coefficient de variabilité des inter-arrivées $ca > 1$: dans ce cas, la distribution des inter-arrivées peut être approximée par une loi hyperexponentielle et on obtient alors un modèle $\text{H}_2/\text{M}/1$. Pour toute loi positive G (avec variance finie), on peut trouver une distribution H_2 possédant les deux mêmes premiers moments.

On s'intéressera à l'étude de la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes $\text{HOE}_2/\text{M}/1$ et $\text{H}_2/\text{M}/1$, après perturbation de la loi des arrivées. En plus de l'affirmation qualitative, nous obtenons dans chaque cas une estimation de l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire

de la chaîne de Markov induite.

4.2 Stabilité forte dans le système HOE₂/M/1

Dans cette section, nous considérons le cas de stabilité dans le système d'attente de type phase HOE₂/M/1 après perturbation de la loi des arrivées du système GI/M/1. Pour cela, nous commençons par décrire les deux modèles ($\tilde{\Sigma}$) et (Σ) qui nous intéressent.

4.2.1 Description et notations relatives aux modèles

Considérons le système ($\tilde{\Sigma}$) de files d'attente GI/M/1 à un seul serveur à capacité infinie, de discipline (FIFO) et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Les inter-arrivées sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une distribution générale $G(t)$ de coefficient de variabilité inférieur à 1.
- **Processus de service.** Les durées de service sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ .

Ainsi, le nombre de clients dans le système ($\tilde{\Sigma}$) à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client, est donnée par la chaîne de Markov $\tilde{X} = \{\tilde{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ [41], dont la matrice de transition est notée par $\tilde{P} = (\tilde{P})_{ij}$ et définie comme suit :

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} \tilde{d}_{i+1-j} = \int_0^{+\infty} \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dG(t) & \text{si } 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum_{k=0}^i \tilde{d}_k & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Considérons également le système (Σ) de files d'attente HOE₂/M/1 à un seul serveur à capacité infinie, de discipline (FIFO) et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Les inter-arrivées sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi hypoexponentielle $H(t)$ de paramètres (λ_1, λ_2) .
- **Processus de service.** Les durées de service sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ .

Ainsi, le nombre de clients dans le système (Σ) à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client, est donnée par la chaîne de Markov $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $P = (P_{ij})_{i,j}$ et définie comme suit :

• **Matrice de transition :**

$$P_{ij} = \begin{cases} d_{i+1-j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu^{i+1-j}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{(\lambda_2 + \mu)^{i+2-j}} - \frac{1}{(\lambda_1 + \mu)^{i+2-j}} \right) & \text{si } 1 \leq j \leq i + 1, \\ 1 - \sum_{k=0}^i d_k = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_2} \right)^{i+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_1} \right)^{i+1} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.2)$$

• **Probabilité stationnaire :**

La distribution stationnaire de la chaîne de Markov ergodique X [10], définie par :

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = j], \quad \forall j \geq 0;$$

n'est autre que la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\pi_j = (1 - \sigma) \sigma^j,$$

où

$$\sigma = \frac{(\mu^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)) - \sqrt{\Delta}}{2\mu^2}, \quad (4.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mu\lambda_1 - \mu\lambda_2)^2 + \mu^3(\mu + 2(\lambda_1 + \lambda_2)), \\ \Delta &= \mu^4 \left[(\lambda_1/\mu - \lambda_2/\mu)^2 + (1 + 2(\lambda_1/\mu + \lambda_2/\mu)) \right], \end{aligned}$$

en posant $r_i = \lambda_i/\mu$,

$$\Delta = \mu^4 \left[(r_1 - r_2)^2 + (1 + 2(r_1 + r_2)) \right] = \mu^4 \Delta_0,$$

et

$$\Delta_0 = (r_1 - r_2)^2 + (1 + 2(r_1 + r_2)).$$

d'où

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{(\mu^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)) - \sqrt{\mu^4 \Delta_0}}{2\mu^2}, \\ \sigma &= \frac{(1 + (r_1 + r_2)) - \sqrt{\Delta_0}}{2}.\end{aligned}$$

4.2.2 v -stabilité forte de la chaîne de Markov X

1. Préliminaires

Dans cette section et dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes. Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur \mathbb{N} (la σ -algèbre sur \mathbb{N} est engendrée par les singletons de \mathbb{N}) et $\mathcal{J} = \{f(j)\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathbb{N} . Nous associons à chaque opérateur de transition P , les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}(\mu P)_k &= \sum_{j \geq 0} \mu_j P_{jk}, \\ (Pf)(k) &= \sum_{i \geq 0} f(i) P_{ki}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Introduisons sur \mathcal{M} la classe des normes de la forme

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) |\mu_j|,\tag{4.5}$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie). Cette norme induit dans l'espace \mathcal{J} la norme :

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{v(k)}.\tag{4.6}$$

Considérons enfin l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés sur l'espace $\{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\|_v < \infty\}$, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj}|.\tag{4.7}$$

2. v -stabilité forte

Dans cette section, nous étudions la v -stabilité forte de la chaîne de Markov induite X du système HOE₂/M/1. Nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système ($\tilde{\Sigma}$) par celles correspondantes du système (Σ). L'adaptation du théorème 3.1 à notre modèle nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1. Soit le système de files d'attente HOE₂/M/1. La chaîne de Markov induite $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, où X_n représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$ où

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2r_1r_2},$$

avec

$$\Delta_0 = (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 + r_2) + 1,$$

où $r_i = \lambda_i/\mu$.

Preuve. Pour prouver la v -stabilité de la chaîne de Markov X pour la fonction $v(k) = \beta^k$, où $\beta > 1$, vérifions les conditions du théorème 3.1.

Pour cela, nous choisissons la fonction mesurable

$$h(i) = P_{i0},$$

et la mesure :

$$\alpha_j = \mathbf{1}_{j=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

Alors, on vérifie facilement que :

- $\pi h = \sum_{i \geq 0} \pi_i h_i = \sum_{i \geq 0} \pi_i P_{i0} > 0$,
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \alpha_j = \alpha_0 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j = \alpha_0 = 1$,

- $\alpha h = \sum_{i \geq 0} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i h_i = h_0 = P_{00} > 0$.

On a :

$$T_{ij} = P_{ij} - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0, \\ P_{ij} & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

D'où T est non négatif.

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \\ &= v(0) T_{i0} + \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j d_{i+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu^{i+1-j}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{(\lambda_2 + \mu)^{i+2-j}} - \frac{1}{(\lambda_1 + \mu)^{i+2-j}} \right) \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \mu)} \sum_{j=1}^{i+1} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)} \right)^{i+1-j} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \mu)} \sum_{j=1}^{i+1} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)} \right)^{i+1-j} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \mu)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)}\right)} \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \mu)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)}\right)} \right) \end{aligned}$$

Posons $r_1 = \lambda_1/\mu$ et $r_2 = \lambda_2/\mu$, donc $r_1/r_2 = \lambda_1/\lambda_2$.

$$Tv(i) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{1}{(\lambda_2 + \mu)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)}\right)} \right) - \frac{1}{(\lambda_1 + \mu)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)}\right)} \right) \right]$$

$$Tv(i) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{\mu(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{1}{(r_2 + 1)} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\beta(r_2 + 1)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{1}{\beta(r_2 + 1)}\right)} \right) - \frac{1}{(r_1 + 1)} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\beta(r_1 + 1)}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{1}{\beta(r_1 + 1)}\right)} \right) \right]$$

$$Tv(i) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^{i+1}}{\mu(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{1 - \frac{1}{\beta^{i+1}(r_2 + 1)^{i+1}}}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} - \frac{1 - \frac{1}{\beta^{i+1}(r_1 + 1)^{i+1}}}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right]$$

Donc

$$Tv(i) = \frac{r_1 r_2 \beta^{i+1}}{(r_1 - r_2)} \left[\left[\frac{1}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} - \frac{1}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right] + C \right]$$

$$Tv(i) = \frac{r_1 r_2 \beta^{i+1}}{(r_1 - r_2)} \left[\frac{r_1 - r_2}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})} + C \right]$$

où :

$$C = \frac{1}{\beta^{i+1}} \left[\frac{1}{(r_1 + 1)^{i+1}} \frac{1}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} - \frac{1}{(r_2 + 1)^{i+1}} \frac{1}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right].$$

Nous avons $r_1 > r_2$. Donc $(r_1 + 1)^{i+1} > (r_2 + 1)^{i+1}$ et $r_1 + 1 - \frac{1}{\beta} > r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}$.

Par suite $(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1)^{i+1} > (r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_2 + 1)^{i+1}$. Donc

$$\frac{1}{(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1)^{i+1}} < \frac{1}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_2 + 1)^{i+1}}.$$

Ce qui signifie que $C < 0$.

Finalement,

$$Tv(i) \leq \frac{r_1 r_2 \beta^{i+1}}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})},$$

ie, $Tv(i) \leq \rho v(i)$ avec

$$\rho = \frac{r_1 r_2 \beta}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})}. \quad (4.8)$$

Nous cherchons maintenant la condition pour que $\rho < 1$

$$\begin{aligned} \frac{r_1 r_2 \beta}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})} < 1 &\Rightarrow \\ r_1 r_2 \beta < (r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}) &\Rightarrow \\ r_1 r_2 (\beta - 1) < r_1 (1 - \frac{1}{\beta}) + r_2 (1 - \frac{1}{\beta}) + (1 - \frac{1}{\beta}) - \frac{1}{\beta} (1 - \frac{1}{\beta}) &\Rightarrow \\ r_1 r_2 \beta < r_1 + r_2 + 1 - \frac{1}{\beta} &\Rightarrow \\ r_1 r_2 \beta^2 - (r_1 + r_2 + 1)\beta + 1 < 0. \end{aligned}$$

Le polynôme en β du coté gauche de l'inégalité possède deux racines et est de signe négatif pour tout β compris entre les deux racines. Comme β est supposé > 1 , nous avons

$$\rho < 1 \quad \text{si} \quad 1 < \beta < \beta_0$$

tel que :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2r_1 r_2},$$

où

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= (r_1 + r_2 + 1)^2 - 4r_1r_2 \\ \Delta_0 &= (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 + r_2) + 1 > 0.\end{aligned}$$

- Il reste à vérifier que $\|P\|_v < \infty$:

Nous avons :

$$T = P - h \circ \alpha \Rightarrow P = T + h \circ \alpha \Rightarrow \|P\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v,$$

or, d'après l'équation (4.7)

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{j \geq 0} \beta^j |T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \rho \beta^i \leq \rho < 1.$$

Et d'après les équations (4.6) et (4.5), nous avons

$$\begin{aligned}\|h\|_v &= \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h(i)| = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} P_{i0} < 1, \\ \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \beta^j \alpha_j = \alpha_0 + \sum_{j \geq 1} \beta^j \alpha_j = 1.\end{aligned}$$

Alors,

$$\|P\|_v < \infty.$$

Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées.

4.2.3 Estimation quantitative

1. Déviation de la matrice de transition

Afin d'estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov X et \tilde{X} , estimons d'abord la norme de déviation entre les matrices de transition.

Pour cela, introduisons la mesure de proximité $\mathcal{W}(G, H)$ définie comme suit

$$\mathcal{W}(G, H) = \int_0^\infty |G - H|(dt), \quad (4.9)$$

où $|a|$ est la variation de la mesure a .

A cet effet, la déviation des deux matrices de transitions $P = (P_{ij})$ et $\tilde{P} = (\tilde{P}_{ij})$, des deux chaînes de Markov X et \tilde{X} est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2. Soient P et \tilde{P} , les matrices de transition des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, nous avons :

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq (1 + \beta)\mathcal{W}(G, H),$$

où $\mathcal{W}(G, H)$ est définie par la formule (4.9).

Preuve. D'après (4.7), nous avons

$$\begin{aligned} \|P - \tilde{P}\|_v &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}| \\ &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \left(|P_{k0} - \tilde{P}_{k0}| + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^j |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}| \right) \\ &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \left(\left| \sum_{j=0}^k d_j - \sum_{j=0}^k \tilde{d}_j \right| + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^j |d_{k+1-j} - \tilde{d}_{k+1-j}| \right) \\ &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \left(\left| \sum_{j=0}^k \int_0^\infty \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} dG(t) - \sum_{j=0}^k \int_0^\infty \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} dH(t) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^j \left| \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{k+1-j}}{(k+1-j)!} e^{-\mu t} dG(t) - \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{k+1-j}}{(k+1-j)!} e^{-\mu t} dH(t) \right| \right) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \left(\sum_{j=0}^k \int_0^\infty \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} |G - H|(dt) + \sum_{j=1}^{k+1} \beta^j \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{k+1-j}}{(k+1-j)!} e^{-\mu t} |G - H|(dt) \right) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\beta^k} \int_0^\infty \sum_{j=0}^k \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} |G - H|(dt) + \beta \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(\frac{\mu t}{\beta})^{k+1-j}}{(k+1-j)!} e^{-\mu t} |G - H|(dt) \right) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\beta^k} \int_0^\infty e^{\mu t} e^{-\mu t} |G - H|(dt) + \beta \int_0^\infty e^{\frac{\mu t}{\beta}} e^{-\mu t} |G - H|(dt) \right) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\beta^k} \int_0^\infty |G - H|(dt) + \beta \int_0^\infty |G - H|(dt) \right) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left(\left(\frac{1}{\beta^k} + \beta \right) \int_0^\infty |G - H|(dt) \right) \\ &\leq (1 + \beta)\mathcal{W}(G, H) \end{aligned}$$

D'où

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq (1 + \beta)\mathcal{W}(G, H).$$

2. Inégalités de stabilité

Dans cette section, on s'intéressera à la déviation entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov X et \tilde{X} par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$.

Théorème 4.3. Soient π et $\tilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, tel que l'inégalité

$$\mathcal{W}(G, H) < \frac{(1 - \rho)(1 - \beta\sigma)}{(1 + \beta)(2 - \sigma(1 + \beta))}, \quad (4.10)$$

soit vérifiée on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\pi_j - \tilde{\pi}_j| \leq \frac{(1 + \beta)(1 - \sigma)(2 - \sigma(1 + \beta))}{(1 - \beta\sigma)^2(1 - \rho) - (1 - \beta\sigma)(2 - \sigma(1 + \beta))(1 + \beta)\mathcal{W}(G, H)} \mathcal{W}(G, H). \quad (4.11)$$

où ρ et σ sont définis par les relations (4.8) et (4.3) respectivement.

Preuve. Afin de démontrer ce résultat, nous utilisons la conséquence (3.2). Pour cela, nous estimons au préalable $\|\mathbf{1}\|_v$ et $\|\pi\|_v$.

D'après la formule (4.6), nous avons

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

De (4.5), nous avons

$$\|\pi\|_v = \sum_{j \geq 0} \beta^j \pi_j = \sum_{j \geq 0} \beta^j (1 - \sigma) \sigma^j = (1 - \sigma) \sum_{j \geq 0} (\beta\sigma)^j = \frac{1 - \sigma}{1 - \beta\sigma}.$$

Alors

$$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v = \frac{2 - \sigma(1 + \beta)}{1 - \beta\sigma}.$$

En remplaçant dans (3.6), on aura

$$\|\pi_j - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \frac{(1 + \beta)(1 - \sigma)(2 - \sigma(1 + \beta))}{(1 - \beta\sigma)^2(1 - \rho) - (1 - \beta\sigma)(2 - \sigma(1 + \beta))(1 + \beta)\mathcal{W}(G, H)} \mathcal{W}(G, H).$$

4.3 Stabilité forte dans le système H₂/M/1

Considérons maintenant le cas de stabilité dans le système d'attente H₂/M/1 après perturbation de la loi des arrivées du système GI/M/1. Pour cela, nous commençons à décrire le modèle (Σ^*) qui nous intéresse.

4.3.1 Description et notations relatives au modèle

Considérons le système (Σ^*) de files d'attente H₂/M/1 à un seul serveur à capacité infinie, de discipline (FIFO) et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Les inter-arrivées sont indépendantes et distribuées selon une loi hyperexponentielle $L(t)$ de paramètres (λ_1, λ_2) .
- **Processus de service.** Les durées de service sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ .

Ainsi, le nombre de clients dans le système (Σ^*) à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client, est donnée par la chaîne de Markov $X^* = \{X_n^*, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $P^* = (P^*)_{ij}$ et définie comme suit :

• **Matrice de transition :**

$$P_{ij}^* = \begin{cases} d_{i+1-j}^* = \frac{\tau_1 \lambda_1 \mu^{i+1-j}}{(\lambda_1 + \mu)^{i+2-j}} + \frac{\tau_2 \lambda_2 \mu^{i+1-j}}{(\lambda_2 + \mu)^{i+2-j}} & \text{si } 1 \leq j \leq i + 1, \\ 1 - \sum_{k=0}^i d_k^* = \tau_1 \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_1}\right)^{i+1} + \tau_2 \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda_2}\right)^{i+1} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.12)$$

• **Probabilité stationnaire :**

Notons par π^* la distribution stationnaire de la chaîne de Markov ergodique X^* [10], vérifiant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \pi_j^* = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* P_{ij}^*, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^* = 1. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\pi_j^* = (1 - \alpha)\alpha^j,$$

où

$$\alpha = \frac{(\mu^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)) - \sqrt{\Delta}}{2\mu^2}, \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mu^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2))^2 - 4\mu^2(\tau_1\lambda_1\mu + \tau_2\lambda_2\mu + \lambda_1\lambda_2) \\ \Delta &= \mu^4 \left[(1 + (r_1 + r_2))^2 - 4(\tau_1r_1 + \tau_2r_2 + r_1r_2) \right] = \mu^4 \Delta_0, \end{aligned}$$

et

$$\Delta_0 = (1 + (r_1 + r_2))^2 - 4(\tau_1r_1 + \tau_2r_2 + r_1r_2).$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(\mu^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)) - \sqrt{\mu^4 \Delta_0}}{2\mu^2}, \\ \alpha &= \frac{(1 + (r_1 + r_2)) - \sqrt{\Delta_0}}{2}. \end{aligned}$$

4.3.2 v -stabilité forte de la chaîne de Markov X^*

Théorème 4.4. Soit le système de files d'attente H₂/M/1. La chaîne de Markov induite $X^* = \{X_n^*, n = 0, 1, \dots\}$, où X_n^* représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$ où

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2(\tau_1r_1 + \tau_2r_2 + r_1r_2)},$$

avec

$$\Delta_0 = (r_1 + r_2 + 1)^2 - 4(\tau_1r_1 + \tau_2r_2 + r_1r_2),$$

avec $r_i = \lambda_i/\mu$.

Preuve. Pour prouver la v -stabilité de la chaîne de Markov X_n^* pour la fonction $v(k) = \beta^k$, où $\beta > 1$, vérifions les conditions du théorème 3.1.

Pour cela, nous choisissons la fonction mesurable

$$h(i) = P_{i0}^*,$$

et la mesure :

$$\alpha_j = \mathbf{1}_{j=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

Alors, on vérifie facilement que :

- $\pi^* h = \sum_{i \geq 0} \pi_i^* h_i = \sum_{i \geq 0} \pi_i^* P_{i0}^* > 0$,
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \alpha_j = \alpha_0 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j = \alpha_0 = 1$,
- $\alpha h = \sum_{i \geq 0} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i h_i = h_0 = P_{00}^* > 0$.

On a :

$$T_{ij} = P_{ij}^* - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0, \\ P_{ij}^* & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

D'où T est non négatif.

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \\ &= v(0) T_{i0} + \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j d_{i+1-j}^* \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j \left(\frac{\tau_1 \lambda_1 \mu^{i+1-j}}{(\lambda_1 + \mu)^{i+2-j}} + \frac{\tau_2 \lambda_2 \mu^{i+1-j}}{(\lambda_1 + \mu)^{i+2-j}} \right) \\ &= \frac{\tau_1 \lambda_1 \beta^{i+1}}{(\lambda_1 + \mu)} \sum_{j=1}^{i+1} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)} \right)^{i+1-j} + \frac{\tau_2 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_2 + \mu)} \sum_{j=1}^{i+1} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)} \right)^{i+1-j} \\ &= \frac{\tau_1 \lambda_1 \beta^{i+1}}{\lambda_1 + \mu} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)} \right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)} \right)} \right) + \frac{\tau_2 \lambda_2 \beta^{i+1}}{(\lambda_2 + \mu)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)} \right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)} \right)} \right) \\ &= \frac{\tau_1 \lambda_1 \beta^{i+1} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_1 + \mu)} \right)^{i+1} \right)}{\mu + \lambda_1 - \frac{\mu}{\beta}} + \frac{\tau_2 \lambda_2 \beta^{i+1} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda_2 + \mu)} \right)^{i+1} \right)}{\mu + \lambda_2 - \frac{\mu}{\beta}} \end{aligned}$$

Posons $r_1 = \lambda_1/\mu$ et $r_2 = \lambda_2/\mu$ donc $r_1/r_2 = \lambda_1/\lambda_2$.

$$Tv(i) = \frac{\tau_1 r_1 \beta^{i+1} \left(1 - \frac{1}{\beta^{i+1} (r_1 + 1)^{i+1}} \right)}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \beta^{i+1} \left(1 - \frac{1}{\beta^{i+1} (r_2 + 1)^{i+1}} \right)}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}},$$

Donc

$$Tv(i) = \beta^{i+1} \left[\frac{\tau_1 r_1 \left(1 - \frac{1}{\beta^{i+1}(r_1+1)^{i+1}} \right)}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \left(1 - \frac{1}{\beta^{i+1}(r_2+1)^{i+1}} \right)}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right]$$

$$Tv(i) = \beta^{i+1} \left[\frac{\tau_1 r_1}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} + C \right]$$

où :

$$C = \frac{-1}{\beta^{i+1}} \left[\frac{\tau_1 r_1}{(r_1 + 1)^{i+1}} \frac{1}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2}{(r_2 + 1)^{i+1}} \frac{1}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right]$$

Comme $C < 0$.

Alors,

$$Tv(i) \leq \beta^{i+1} \left[\frac{\tau_1 r_1}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} \right]$$

D'où

$$\rho = \frac{\tau_1 r_1 \beta}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \beta}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} \quad (4.14)$$

Nous cherchons maintenant la condition pour que $\rho < 1$

$$\frac{\tau_1 r_1 \beta}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \beta}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}} < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\tau_1 r_1 \beta (r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}) + \tau_2 r_2 \beta (r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})}{(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})} < 1 \Rightarrow$$

$$\tau_1 r_1 (\beta - 1) + r_2 \tau_2 (\beta - 1) + r_1 r_2 (\beta - 1) < r_1 (1 - \frac{1}{\beta}) + r_2 (1 - \frac{1}{\beta}) - \frac{1}{\beta} (1 - \frac{1}{\beta}) \Rightarrow$$

$$\beta \tau_1 r_1 + \beta r_2 \tau_2 + \beta r_1 r_2 < r_1 + r_2 - \frac{1}{\beta} + 1 \Rightarrow$$

$$\beta^2 (\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2) - (r_1 + r_2 + 1) \beta + 1 < 0$$

Le polynôme en β du coté gauche de l'inégalité possède deux racines et est de signe négatif pour tout β compris entre les deux racines. Comme β est supposé > 1 , nous avons $\rho < 1$ pour tout $\beta < \beta_0$, tel que :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2)},$$

où

$$\Delta_0 = (r_1 + r_2 + 1)^2 - 4(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2) > 0.$$

- Il reste à vérifier que $\|P^*\|_v < \infty$:

Nous avons :

$$T = P^* - h \circ \alpha \Rightarrow P^* = T + h \circ \alpha \Rightarrow \|P^*\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v,$$

or, d'après l'équation (4.7)

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{j \geq 0} \beta^j |T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \rho \beta^i \leq \rho < 1.$$

Et d'après les équations (4.6) et (4.5), nous avons

$$\|h\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h(i)| = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} P_{i0}^* < 1,$$

$$\|\alpha\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \beta^j \alpha_j = \alpha_0 + \sum_{j \geq 1} \beta^j \alpha_j = 1.$$

Alors,

$$\|P^*\|_v < \infty.$$

Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées.

4.3.3 Estimation quantitative

1. Déviation de la matrice de transition

Afin d'estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov X^* et \tilde{X} , estimons d'abord la norme de déviation entre les matrices de transition.

A présent, définissons la mesure de proximité $\mathbb{W}(G, L)$ donnée comme suit

$$\mathbb{W}(G, L) = \int_0^\infty |G - L|(dt). \quad (4.15)$$

Par suite, la déviation des deux matrices de transitions $P^* = (P_{ij}^*)$ et $\tilde{P} = (\tilde{P}_{ij})$, relativement à la norme $\|\cdot\|_v$, est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.5. Soient P^* et \tilde{P} , les matrices de transition des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ^*) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, nous avons :

$$\|P^* - \tilde{P}\|_v \leq (1 + \beta)\mathbb{W}(G, L).$$

2. Inégalités de stabilité

Dans cette section, on s'intéressera à la déviation entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov X^* et \tilde{X} par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$.

Théorème 4.6. Soient π^* et $\tilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ^*) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$\mathbb{W}(G, L) < \frac{(1 - \rho)(1 - \beta\alpha)}{(1 + \beta)(2 - \alpha(1 + \beta))}, \quad (4.16)$$

on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\pi_j^* - \tilde{\pi}_j| \leq \frac{(1 + \beta)(1 - \alpha)(2 - \alpha(1 + \beta))}{(1 - \beta\alpha)^2(1 - \rho) - (1 - \beta\alpha)(2 - \alpha(1 + \beta))(1 + \beta)\mathbb{W}(G, L)} \mathbb{W}(G, L). \quad (4.17)$$

où ρ et α sont définis par les relations (4.14) et (4.13) respectivement.

Preuve. Estimons au préalable $\|\mathbf{1}\|_v$ et $\|\pi^*\|_v$.

D'après la formule (4.6), nous avons

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

De (4.5), nous avons

$$\|\pi^*\|_v = \sum_{j \geq 0} \beta^j \pi_j^* = \sum_{j \geq 0} \beta^j (1 - \alpha) \alpha^j = (1 - \alpha) \sum_{j \geq 0} (\beta\alpha)^j = \frac{1 - \alpha}{1 - \beta\alpha}.$$

Alors

$$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi^*\|_v = \frac{2 - \alpha(1 + \beta)}{1 - \beta\alpha}.$$

En remplaçant dans (3.6), on aura

$$\|\pi_j^* - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \frac{(1 + \beta)(1 - \alpha)(2 - \alpha(1 + \beta))}{(1 - \beta\alpha)^2(1 - \rho) - (1 - \beta\alpha)(2 - \alpha(1 + \beta))(1 + \beta)\mathbb{W}(G, L)} \mathbb{W}(G, L).$$

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'approximation des systèmes de files d'attente de type $GI/M/1$ en remplaçant la distribution générale G par une distribution hypoexponentielle (HOE_2) lorsque le coefficient de variabilité est inférieur à 1, ou par une distribution hyperexponentielle (H_2) lorsque le coefficient de variabilité est supérieur à 1. L'approximation se fait par le biais de la méthode des moments précédemment expliquée. Nous avons prouvé par le biais de la méthode de stabilité forte la robustesse de la chaîne induite dans chacun des modèles de type phase considérés et nous avons obtenu les inégalités correspondantes. Les bornes de perturbation que nous avons présentées donnent pour chaque cas l'estimation quantitative de l'erreur de l'approximation.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes de files d'attente $M/HOE_2/1$ et $M/H_2/1$

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'approximation des systèmes $M/G/1$ par des systèmes de type phase. Suivant la valeur du coefficient de variabilité de la loi de la durée de service, celle-ci est remplacée par une distribution hypoexponentielle ou hyperexponentielle. Notons que la démarche est identique à celle du chapitre précédent. Alors, deux cas peuvent être distingués :

- Le coefficient de variabilité des durées de service $cs < 1$: la distribution des durées de service peut être approximée par une loi hypoexponentielle et on obtient alors un modèle $M/HOE_2/1$. Pour toute loi positive G (avec variance finie), on peut trouver une distribution HOE_2 qui possède les deux mêmes premiers moments.
- Le coefficient de variabilité des durées de service $cs > 1$: la distribution des durées de service peut être approximée par une loi hyperexponentielle et on obtient alors un modèle $M/H_2/1$. Dans ce cas, toute loi positive G (avec variance finie), peut être approximée par une distribution H_2 possédant les deux mêmes premiers moments.

Nous prouvons la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes $M/HOE_2/1$ et $M/H_2/1$, après perturbation de la loi des durées de service. Nous obtenons également, dans chaque cas, une borne supérieure pour la norme de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite.

5.2 Stabilité forte dans le système M/HOE₂/1

Dans cette section, nous considérons le cas de stabilité dans le système d'attente de type phase M/HOE₂/1 après perturbation de la loi des durées de service du système M/G/1. Pour cela, nous commençons par décrire les deux modèles ($\bar{\Sigma}$) et ($\hat{\Sigma}$) qui nous intéressent.

5.2.1 Description et notations relatives aux modèles

Considérons le système ($\bar{\Sigma}$) de files d'attente M/G/1 à un seul serveur, à capacité infinie, de discipline de service FIFO et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Le processus d'entrée est un processus de Poisson d'intensité λ .
- **Processus de service.** Les durées de service sont identiquement distribuées suivant une distribution générale $F(t)$ de coefficient de variabilité inférieur à 1.

Ainsi, le nombre de clients dans le système ($\bar{\Sigma}$), juste après le départ du n^{ème} client, est donné par la chaîne de Markov $\bar{X} = \{\bar{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $\bar{P} = (\bar{P})_{ij}$ et définie comme suit [41] :

$$\bar{P}_{ij} = \begin{cases} \bar{f}_j & \text{si } i = 0, \\ \bar{f}_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.1)$$

avec

$$\bar{f}_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF(t).$$

Considérons également le système ($\hat{\Sigma}$) de files d'attente M/HOE₂/1 à un seul serveur, à capacité infinie, de discipline de service FIFO et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Le processus d'entrée est un processus de Poisson d'intensité λ .
- **Processus de service.** Les durées de service sont identiquement distribuées selon une loi hypoexponentielle $H_2(t)$ de paramètres (μ_1, μ_2) .

Ainsi, le nombre de clients dans le système ($\hat{\Sigma}$), juste après le départ du n^{ème} client, est donné par la chaîne de Markov $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $\hat{P} = (\hat{P})_{ij}$ et définie comme suit :

- **Matrice de transition :**

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \hat{f}_j & \text{si } i = 0, \\ \hat{f}_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.2)$$

avec

$$\hat{f}_k = \frac{\mu_1 \mu_2 \lambda^k}{(\mu_1 - \mu_2)} \left[\frac{1}{(\lambda + \mu_2)^{k+1}} - \frac{1}{(\lambda + \mu_1)^{k+1}} \right].$$

• **Probabilités stationnaire :**

Notons la distribution de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov ergodique \hat{X} par $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_i, i = 0, 1, \dots)$, où

$$\hat{\pi}_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\hat{X}_n = i], \quad i = 0, 1, \dots$$

et $\mathcal{G}(z)$ sa fonction génératrice. Afin de calculer $\mathcal{G}(z)$, on note $H^*(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{P}_{ij} z^j$, la transformée de Laplace-Stieltjes de $H(t)$. La fonction génératrice $\mathcal{G}(z)$ de la distribution de probabilité stationnaire $(\hat{\pi}_i, i = 0, 1, \dots)$ est donnée comme suit

$$\mathcal{G}(z) = \hat{\pi}_0 \frac{z - 1}{z - H^*(\lambda(1 - z))} H^*(\lambda(1 - z)). \quad (5.3)$$

5.2.2 v -stabilité forte de la chaîne de Markov \hat{X}

Théorème 5.1. Soit le système de files d'attente M/HOE₂/1. La chaîne de Markov induite $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$, où \hat{X}_n représente le nombre de clients dans le système juste après le départ du $n^{\text{ème}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$. où

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\blacktriangle}}{2\lambda^2}, \quad (5.4)$$

avec

$$\blacktriangle = \lambda^2 [\lambda^2 + 2\lambda(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2].$$

Preuve. Pour prouver la v -stabilité de la chaîne de Markov \hat{X} pour la fonction $v(k) = \beta^k$, où $\beta > 1$, vérifions les conditions du théorème 3.1.

Pour cela, nous choisissons la fonction mesurable

$$h(i) = \mathbf{1}_{i=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

et la mesure :

$$\alpha_j = \hat{f}_j = \hat{P}_{0j}.$$

Alors, on vérifie facilement que :

- $\hat{\pi}h = \sum_{i \geq 0} \hat{\pi}_i h_i = \hat{\pi}_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \hat{\pi}_i h_i = \hat{\pi}_0 > 0$,
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \hat{P}_{0j} = 1$,
- $\alpha h = \sum_{i \geq 0} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i h_i = \alpha_0 = \hat{P}_{00} > 0$.

On a :

$$T_{ij} = \hat{P}_{ij} - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ \hat{P}_{ij} & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

D'où T est non négatif.

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

1-Cas $i = 0$:

$$Tv(i) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \Rightarrow Tv(0) = \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{0j} = 0.$$

2-Cas $i > 0$:

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \hat{f}_{j-i+1} \\ &= \sum_{j \geq i-1} \beta^j \frac{\mu_1 \mu_2 \lambda^{j-i+1}}{(\mu_1 - \mu_2)} \left(\frac{1}{(\lambda + \mu_2)^{j-i+2}} - \frac{1}{(\lambda + \mu_1)^{j-i+2}} \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^{j+i-1} \frac{\mu_1 \mu_2 \lambda^j}{(\mu_1 - \mu_2)} \left(\frac{1}{(\lambda + \mu_2)^{j+1}} - \frac{1}{(\lambda + \mu_1)^{j+1}} \right) \\ &= \beta^{i-1} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{1}{\lambda + \mu_2} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_2} \right)^j - \frac{1}{\lambda + \mu_1} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_1} \right)^j \right] \end{aligned}$$

Supposons que

$$\beta < \frac{\mu_1}{\lambda} + 1 \quad \text{et} \quad \beta < \frac{\mu_2}{\lambda} + 1,$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} T_v(i) &\leq \beta^{i-1} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{1}{\lambda + \mu_2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_2}} \right) - \frac{1}{\lambda + \mu_1} \left(\frac{1}{1 - \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_1}} \right) \right] \\ T_v(i) &\leq \beta^{i-1} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{1}{\lambda + \mu_2 - \beta \lambda} - \frac{1}{\lambda + \mu_1 - \beta \lambda} \right] \\ T_v(i) &\leq \beta^{i-1} \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda)} \end{aligned}$$

D'où

$$\rho = \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda)}. \quad (5.5)$$

Nous cherchons maintenant la condition pour que $\rho < 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda)} &< 1 \Rightarrow \\ \mu_1 \mu_2 &< \beta(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda) \Rightarrow \\ \mu_1 \mu_2(1 - \beta) &< \lambda^2 \beta(1 - \beta)(1 - \beta) + \lambda \mu_1 \beta(1 - \beta) + \lambda \mu_2 \beta(1 - \beta) \Rightarrow \\ \lambda^2 \beta^2 - (\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2) \beta + \mu_1 \mu_2 &> 0. \end{aligned}$$

Le polynôme en β du côté gauche de l'inégalité possède deux racines et est de signe négatif pour tout β compris entre les deux racines. Comme β est supposé > 1 , nous avons

$$\rho < 1 \quad \text{si} \quad 1 < \beta < \beta_0$$

tel que :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2) - \sqrt{\blacktriangle}}{2\lambda^2},$$

où

$$\begin{aligned} \blacktriangle &= (\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2)^2 - 4\lambda^2 \mu_1 \mu_2 \\ \blacktriangle &= \lambda^2 [\lambda^2 + 2\lambda(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2] > 0. \end{aligned}$$

- Vérifions que $\|\hat{P}\|_v < \infty$:

Nous avons :

$$T = \hat{P} - h \circ \alpha \Rightarrow \hat{P} = T + h \circ \alpha \Rightarrow \|\hat{P}\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v,$$

or, d'après l'équation (4.7)

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{j \geq 0} \beta^j |T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \rho \beta^i \leq \rho < 1.$$

Et d'après les équations (4.6) et (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} \|h\|_v &= \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h(i)| = 1, \\ \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \beta^j \hat{P}_{0j} = \beta \rho < \infty. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|\hat{P}\|_v < \infty.$$

Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées.

5.2.3 Estimation quantitative

Déviaton de la matrice de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov \hat{X} et \bar{X} , estimons au préalable la norme de la déviation de la matrice de transition \hat{P} de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\hat{\Sigma}$) par rapport à la matrice de transition \bar{P} de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\bar{\Sigma}$).

Lemme 1. [22] Supposons que

$$\int_0^\infty t |F - H|(dt) < \frac{W}{\lambda},$$

où

$$W = W(F, H) = \int_0^\infty |F - H|(dt). \quad (5.6)$$

Alors, il existe $\beta > 1$ tel que

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - H|(dt) < \beta W.$$

A cet effet, la distance entre les deux matrices de transition, relativement à la norme $\|\cdot\|_v$, est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.2. Soient \hat{P} (respectivement, \bar{P}) la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\hat{\Sigma}$) (respectivement, de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\bar{\Sigma}$)). Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, nous avons :

$$\|\bar{P} - \hat{P}\|_v < \beta W.$$

Preuve. D'après (4.7), nous avons

$$\|\bar{P} - \hat{P}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j |\bar{P}_{kj} - \hat{P}_{kj}|.$$

i. Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned} \|\bar{P} - \hat{P}\|_v &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |\bar{P}_{0j} - \hat{P}_{0j}| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |\bar{f}_j - \hat{f}_j| \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dF(t) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dH(t) \right| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \beta^j \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} |F - H|(dt) \\ &\leq \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - H|(dt) \end{aligned}$$

ii. Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\bar{P} - \hat{P}\|_v &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j |\bar{P}_{kj} - \hat{P}_{kj}| \\ &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq k-1} \beta^j |\bar{f}_{j-k+1} - \hat{f}_{j-k+1}| \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq k-1} \beta^j \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} |F - H|(dt) \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \sum_{j \geq k-1} \beta^{j-k+1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} |F - H|(dt) \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{j \geq 0} \frac{(\lambda \beta t)^j}{(j)!} |F - H|(dt) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - H|(dt) \end{aligned}$$

Nous avons par conséquent

$$\|P - \hat{P}\|_v \leq \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - H|(dt),$$

or

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\beta-1)t} |F - H|(dt) < \beta W,$$

alors

$$\|\bar{P} - \hat{P}\|_v < \beta W.$$

Inégalités de stabilité

L'estimation de la déviation des distributions stationnaires $\hat{\pi}$ et $\bar{\pi}$ est donnée par le biais du théorème suivant :

Théorème 5.3. Soient $\hat{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes $(\hat{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$W(F, H) < \frac{(1 - \rho)}{\beta C}, \quad (5.7)$$

on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j| \leq \frac{\beta(1 + \mathcal{G}(\beta))\mathcal{G}(\beta)}{1 - \rho - \beta(1 + \mathcal{G}(\beta))W(F, H)} W(F, H). \quad (5.8)$$

où ρ est donné par la relation (5.5).

Preuve. D'après la formule (4.6), nous avons

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

De (4.5), nous avons

$$\|\hat{\pi}\|_v = \sum_{j \geq 0} \beta^j \hat{\pi}_j = \mathcal{G}(\beta).$$

D'après (5.3), nous avons :

$$\mathcal{G}(\beta) = \hat{\pi}_0 \frac{\beta - 1}{\beta - H^*(\lambda(1 - \beta))} H^*(\lambda(1 - \beta)),$$

où

$$\pi_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1} \right),$$

et

$$H^*(\lambda(1 - \beta)) = \left(\frac{\mu_1}{\lambda(1 - \beta) + \mu_1} \right) \left(\frac{\mu_2}{\lambda(1 - \beta) + \mu_2} \right).$$

Alors

$$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\hat{\pi}\|_v = 1 + \mathcal{G}(\beta).$$

En remplaçant dans (3.6), on aura

$$\|\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j\|_v \leq \frac{\beta(1 + \mathcal{G}(\beta))\mathcal{G}(\beta)}{1 - \rho - \beta(1 + \mathcal{G}(\beta))W(F, H)} W(F, H).$$

5.3 Stabilité forte dans le système M/H₂/1

Considérons maintenant le cas de stabilité dans le système d'attente M/H₂/1, Pour cela, nous commençons par décrire le modèle ($\check{\Sigma}$) qui nous intéresse.

5.3.1 Description et notations relatives aux modèles

Considérons le système ($\check{\Sigma}$) de files d'attente M/H₂/1 à un seul serveur à capacité infinie, de discipline (FIFO) et ayant les propriétés suivantes :

- **Processus d'entrée.** Le processus d'entrée est un processus de Poisson d'intensité λ .
- **Processus de service.** Les durées de service sont distribuées selon une loi hyperexponentielle $L(t)$ de paramètres (μ_1, μ_2) .

Ainsi, le nombre de clients dans le système ($\check{\Sigma}$) après le départ du $n^{\text{ème}}$ client, est donné par la chaîne de Markov $\check{X} = \{\check{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $\check{P} = (\check{P}_{ij})_{i,j}$ et définie comme suit :

• **Matrice de transition :**

$$\check{P}_{ij} = \begin{cases} \check{f}_j & \text{si } i = 0, \\ \check{f}_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.9)$$

avec

$$\check{f}_k = \frac{\tau_1 \mu_1 \lambda^k}{(\lambda + \mu_1)^{k+1}} + \frac{\tau_2 \mu_2 \lambda^k}{(\lambda + \mu_2)^{k+1}}.$$

• **Probabilité stationnaire :**

Notons la distribution de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov \check{X} par $\check{\pi} = (\check{\pi}_i, i = 0, 1, \dots)$, où

$$\check{\pi}_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\check{X}_n = i], \quad i = 0, 1, \dots$$

Sa fonction génératrice $\Pi(z)$ est donnée comme suit

$$\Pi(z) = \check{\pi}_0 \frac{z - 1}{z - L^*(\lambda(1 - z))} L^*(\lambda(1 - z)), \quad (5.10)$$

où $L^*(z)$ est la transformée de Laplace-Stieltjes de $L(t)$.

5.3.2 v -stabilité forte de la chaîne de Markov \check{X}

Théorème 5.4. Soit le système de files d'attente M/H₂/1. La chaîne de Markov induite $\check{X} = \{\check{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$, où \check{X}_n représente le nombre de clients dans le système après le départ du $n^{\text{ème}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$. où

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\blacktriangle_0}}{2\lambda^2}, \quad (5.11)$$

avec

$$\blacktriangle_0 = \lambda^4 + 2\lambda^3(1 - 2\tau_1)(\mu_1 - \mu_2) + (\lambda\mu_1 - \lambda\mu_2)^2.$$

Preuve. Pour prouver la v -stabilité de la chaîne de Markov \check{X} pour la fonction $v(k) = \beta^k$, où $\beta > 1$, vérifions les conditions du théorème 3.1.

Pour cela, nous choisissons la fonction mesurable

$$h(i) = \mathbf{1}_{i=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

et la mesure :

$$\alpha_j = \check{f}_j = \check{P}_{0j}.$$

Alors, on vérifie facilement que :

- $\check{\pi}h = \sum_{i \geq 0} \check{\pi}_i h_i = \check{\pi}_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \check{\pi}_i h_i = \check{\pi}_0 > 0$,
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \check{P}_{0j} = 1$,
- $\alpha h = \sum_{i \geq 0} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i h_i = \alpha_0 = \check{P}_{00} > 0$.

On a :

$$T_{ij} = \check{P}_{ij} - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ \check{P}_{ij} & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

D'où T est non négatif.

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

1-Cas $i = 0$:

$$Tv(i) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \Rightarrow Tv(0) = \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{0j} = 0.$$

2-Cas $i > 0$:

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{ij} \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \check{f}_{j-i+1} \\ &= \sum_{j \geq i-1} \beta^j \left(\frac{\tau_1 \mu_1 \lambda^{j-i+1}}{(\lambda + \mu_1)^{j-i+2}} + \frac{\tau_2 \mu_2 \lambda^{j-i+1}}{(\lambda + \mu_2)^{j-i+2}} \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^{j+i-1} \left(\frac{\tau_1 \mu_1 \lambda^j}{(\lambda + \mu_1)^{j+1}} + \frac{\tau_2 \mu_2 \lambda^j}{(\lambda + \mu_2)^{j+1}} \right) \\ &= \beta^{i-1} \frac{\tau_1 \mu_1}{\lambda + \mu_1} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_1} \right)^j + \beta^{i-1} \frac{\tau_2 \mu_2}{\lambda + \mu_2} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_2} \right)^j \end{aligned}$$

Supposant que

$$\beta < \frac{\mu_1}{\lambda} + 1 \text{ et } \beta < \frac{\mu_2}{\lambda} + 1.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} Tv(i) &\leq \beta^{i-1} \frac{\tau_1 \mu_1}{(\lambda + \mu_1)(1 - \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_1})} + \beta^{i-1} \frac{\tau_2 \mu_2}{(\lambda + \mu_2)(1 - \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu_2})} \\ Tv(i) &\leq \beta^{i-1} \frac{\tau_1 \mu_1}{\lambda + \mu_1 - \beta \lambda} + \beta^{i-1} \frac{\tau_2 \mu_2}{\lambda + \mu_2 - \beta \lambda} \\ Tv(i) &\leq \beta^i \left(\frac{\tau_1 \mu_1}{\beta(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda)} + \frac{\tau_2 \mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\rho = \frac{\tau_1 \mu_1}{\beta(\lambda + \mu_1 - \beta \lambda)} + \frac{\tau_2 \mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta \lambda)}. \quad (5.12)$$

Nous cherchons maintenant la condition pour que $\rho < 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_1 \mu_1}{\beta(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)} + \frac{\tau_2 \mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)} < 1 \Rightarrow \\ & \frac{\tau_1 \mu_1 \beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda) + \tau_2 \mu_2 \beta(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)}{\beta^2(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)} < 1 \Rightarrow \\ & \tau_1 \mu_1 \lambda(1 - \beta) + \tau_2 \mu_2 \lambda(1 - \beta) + \mu_1 \mu_2 (1 - \beta) < \lambda^2 \beta(1 - \beta)^2 + \lambda \mu_1 \beta(1 - \beta) + \lambda \mu_2 \beta(1 - \beta) \Rightarrow \\ & \lambda^2 \beta^2 - (\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2) \beta + (\tau_1 \mu_1 \lambda + \tau_2 \mu_2 \lambda + \mu_1 \mu_2) > 0. \end{aligned}$$

Le polynôme en β du coté gauche de l'inégalité possède deux racines et est de signe négatif pour tout β compris entre les deux racines. Comme β est supposé > 1 , nous avons $\rho < 1$ pour tout $\beta < \beta_0$, tel que :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2) - \sqrt{\blacktriangle_0}}{2\lambda^2},$$

où

$$\begin{aligned} \blacktriangle_0 &= (\lambda^2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2)^2 - 4\lambda^2(\tau_1 \mu_1 \lambda + \tau_2 \mu_2 \lambda + \mu_1 \mu_2) \\ \blacktriangle_0 &= \lambda^4 + 2\lambda^3(1 - 2\tau_1)(\mu_1 - \mu_2) + (\lambda \mu_1 - \lambda \mu_2)^2. \end{aligned}$$

- Il reste à vérifier que $\|\check{P}\|_v < \infty$:

Nous avons :

$$T = \check{P} - h \circ \alpha \Rightarrow \check{P} = T + h \circ \alpha \Rightarrow \|\check{P}\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v,$$

or, d'après l'équation (4.7)

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{j \geq 0} \beta^j |T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \rho \beta^i \leq \rho < 1.$$

Et d'après les équations (4.6) et (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} \|h\|_v &= \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h(i)| = 1, \\ \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \beta^j \check{P}_{0j} = \beta \rho < \infty, \end{aligned}$$

Alors,

$$\|\check{P}\|_v < \infty.$$

Ainsi, toutes les conditions sont vérifiées.

5.3.3 Estimation quantitative

Déviaton de la matrice de transition

La déviation des deux matrices de transition \check{P} et \bar{P} , relativement à la norme $\|\cdot\|_v$, est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.5. Soient \check{P} (respectivement, \bar{P}) la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\check{\Sigma}$) (respectivement, de la chaîne de Markov décrivant l'état du système ($\bar{\Sigma}$)). Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, nous avons :

$$\|\bar{P} - \check{P}\|_v < \beta w,$$

où

$$w = w(F, L) = \int_0^\infty |F - L|(dt). \quad (5.13)$$

Inégalités de stabilité

L'estimation de la déviation des distributions stationnaires $\check{\pi}$ et $\bar{\pi}$ est donnée par le biais du théorème suivant :

Théorème 5.6. Soient $\check{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes ($\check{\Sigma}$) et ($\bar{\Sigma}$). Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$w(F, L) < \frac{(1 - \rho)}{\beta C}, \quad (5.14)$$

on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\bar{\pi}_j - \check{\pi}_j| \leq \frac{\beta(1 + \Pi(\beta))\Pi(\beta)}{1 - \rho - \beta(1 + \Pi(\beta))w(F, L)} w(F, L). \quad (5.15)$$

où ρ est donné par la relation (5.12).

Preuve. D'après la formule (4.6), nous avons

$$\|\mathbf{1}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

De (4.5), nous avons

$$\|\check{\pi}\|_v = \sum_{j \geq 0} \beta^j \check{\pi}_j = \Pi(\beta).$$

D'après (5.10), nous avons :

$$\Pi(\beta) = \check{\pi}_0 \frac{\beta - 1}{\beta - L^*(\lambda(1 - \beta))} L^*(\lambda(1 - \beta)),$$

où

$$\pi_0 = 1 - \left(\frac{\tau_1 \lambda}{\mu_1} + \frac{\tau_2 \lambda}{\mu_2} \right),$$

et

$$L^*(\lambda(1 - \beta)) = \left(\frac{\tau_1 \mu_1}{\lambda(1 - \beta) + \mu_1} \right) \left(\frac{\tau_2 \mu_2}{\lambda(1 - \beta) + \mu_2} \right).$$

Alors

$$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\check{\pi}\|_v = 1 + \Pi(\beta).$$

En remplaçant dans (3.6), on aura

$$\|\bar{\pi}_j - \check{\pi}_j\|_v \leq \frac{\beta(1 + \Pi(\beta))\Pi(\beta)}{1 - \rho - \beta(1 + \Pi(\beta))w(F, L)} w(F, L).$$

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude sur la stabilité forte dans les systèmes de files d'attente M/HOE₂/1 et M/H₂/1 après perturbation de la loi de la durée de service du système M/G/1. Par ailleurs, on a exhibé des conditions pour la stabilité forte de la chaîne induite liées à chaque système, ainsi que les inégalités correspondantes.

Chapitre 6

Mesure de performances de la méthode de stabilité forte

6.1 Introduction

L'objet de ce présent chapitre est d'entamer certaines applications numériques concernant l'estimation des bornes de perturbation présentées dans les deux chapitres précédents. Pour cela, nous avons construit, à partir des résultats de la méthode de stabilité forte un algorithme permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur est établie. De plus, nous avons élaboré un simulateur qui comportera deux procédures dont l'une permettra de simuler la distribution stationnaire du système idéal et l'autre celle du système perturbé dont l'objectif est de valider les résultats obtenus par un procédé algorithmique et cela en utilisant l'environnement MATLAB.

6.2 Environnement MATLAB

MATLAB est un langage de programmation à la fois puissant et simple. Il dispose de plusieurs fonctions qui nous permettent d'optimiser les instructions dans différents programmes. C'est un logiciel de calcul numérique et de visualisation graphique réalisé par MathWorks et optimisé pour le traitement des matrices.

6.3 Mesure de performances

Notre application portera sur deux parties.

- La première partie concernera le calcul de l'erreur théorique commise lors de l'approximation du système GI/M/1 par les systèmes HOE₂/M/1 et H₂/M/1, et la simulation des systèmes idéaux HOE₂/M/1 et H₂/M/1 et le système perturbé GI/M/1.
- La deuxième partie concernera le calcul de l'erreur théorique commise lors de l'approximation du système M/G/1 par les systèmes M/HOE₂/1 et M/H₂/1, et la simulation des systèmes idéaux M/HOE₂/1 et M/H₂/1 et le système perturbé M/G/1.

6.4 Première partie

6.4.1 Approche algorithmique

Afin de comprendre le principe de l'algorithme mis en œuvre pour la méthode de stabilité forte nous allons expliquer les différentes étapes suivies.

Algorithme

Étape1 : Définition des paramètres d'entrées

La loi des inter-arrivées : $g(\cdot)$;

Le taux moyen de service : μ ;

La précision avec laquelle l'erreur sera déterminée : ε ;

Étape2 : Détermination de l'espérance de la variable aléatoire η , caractérisant le temps des inter-arrivées des clients ;

$$E(\eta) \leftarrow \int_0^{\infty} u g(u) du;$$

Étape3 : Vérification de l'ergodicité géométrique des système idéaux ;

Si $\mu E(\eta) \leq 1$ alors "Système instable" aller à **Étape 8**

Sinon

aller à l'**Étape 4**

Étape4 : Détermination de $\beta_0 = \sup(\beta \text{ tel que } \rho < 1)$

Étape5 : Détermination de β_{min} (β_{min} correspond à la borne inférieure de l'intervalle des valeurs de β , pour lesquelles l'erreur est définie) ;

Étape6 : Détermination de β_{max} (β_{max} correspond à la borne supérieure des valeurs de β , pour lesquelles l'erreur est définie) ;

Étape7 : Détermination de l'erreur minimale ($erreur_{min}$) ainsi que la valeur $\beta_{idéal}$ correspondante dans l'intervalle $[\beta_{min}; \beta_{max}]$;

Étape8 : Fin.

6.4.2 Approche simulation

Dans cette section, nous établirons quelques éléments essentiels concernant le programme de simulation. Il s'agit du simulateur, les organigrammes des étapes de simulation et les résultats de validation du simulateur.

Simulateur

Étape 1 : Définition des paramètres

La loi des inter-arrivées : $g(\cdot)$;

Le taux moyen de service : μ

Les valeurs du paramètre de la norme associée : $\beta_{idéal}$;

La durée de simulation : t_{max} ;

Étape 2 : Vérification de la condition d'ergodicité géométrique

Si $\mu \int_0^\infty ug(u)du > 1$ alors aller à **Étape3** ;

Sinon aller à **Étape6** ;

Étape3 : Simulation des distributions stationnaires π et π^* des systèmes HOE₂/M/1 et H₂/M/1 respectivement ;

Étape4 : Simulation de la distribution stationnaire $\tilde{\pi}$ du système GI/M/1 perturbé ;

Étape5 : Calcul de l'écart entre les distributions stationnaires par rapport à la norme donnée

$$erreur \leftarrow \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j |\tilde{\pi}_j - \nu_j|;$$

où ν : représente les distributions stationnaires π et π^* .

Étape6 : Fin.

Organigrammes de simulation

Soit la légende des notations utilisées :

t_{max} : Le temps de simulation ;

t_{sim} : L'horloge de la simulation ;

n : Nombre de clients dans le système ;

t_1 : Date des arrivées ;

t_2 : Date du début de service ;

t_3 : Date du fin de service.

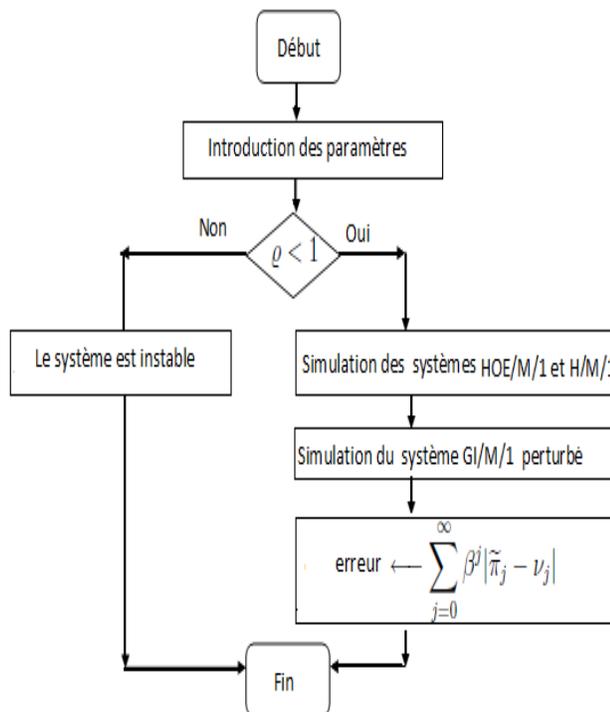


FIGURE 6.1 – Organigramme du simulateur

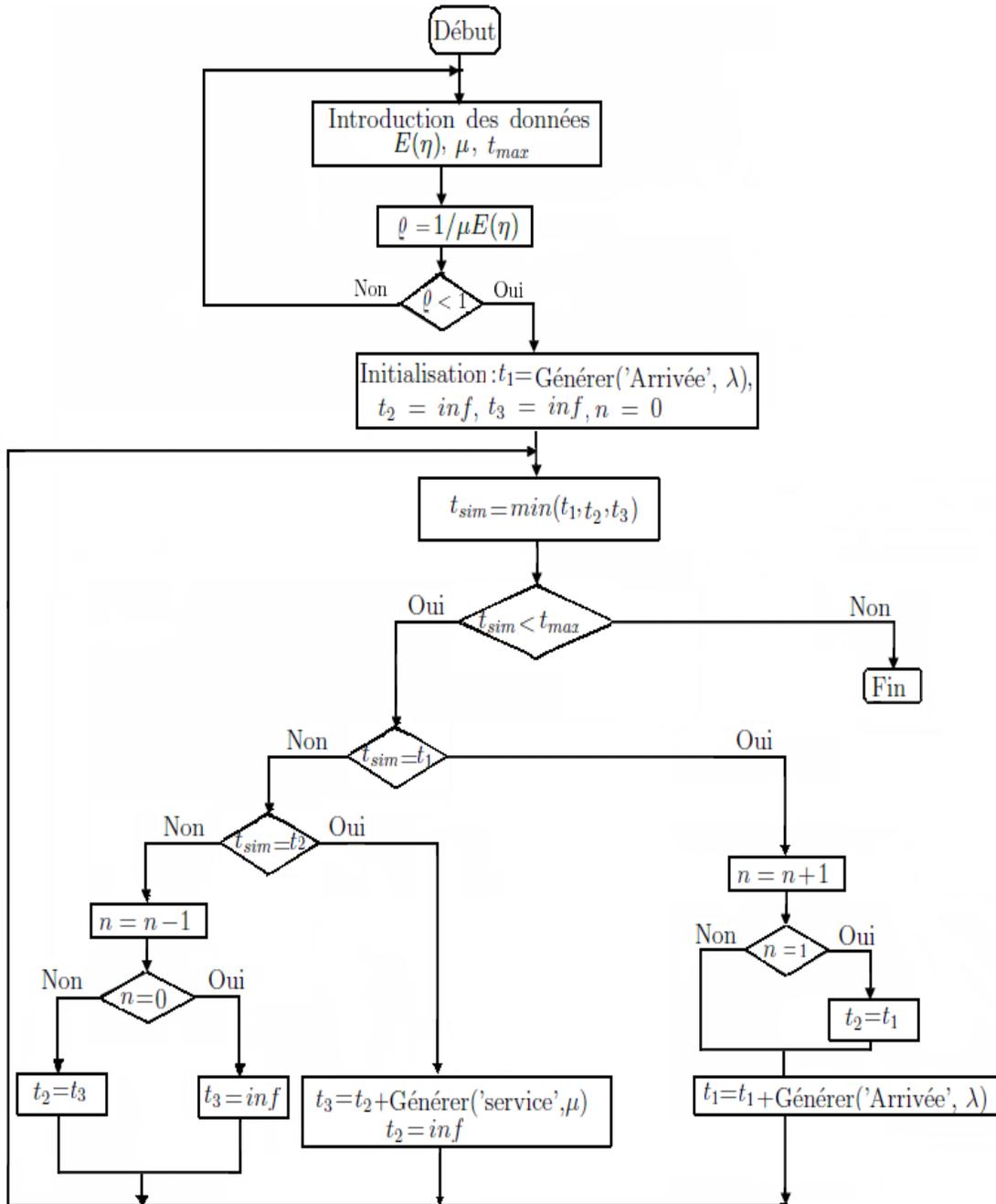


FIGURE 6.2 – Organigramme du simulateur $GI/M/1$ classique

Validation du simulateur

Pour valider un modèle de simulation d'un système de files d'attente, il suffit de simuler n fois et de comparer les résultats obtenus (par exemple, le nombre moyen de clients dans le système, le temps moyen de séjour,...) avec les résultats théoriques. Notons par m une caractéristique moyenne donnée par le simulateur et m_{th} sa valeur théorique. Ce qui revient donc à tester

$$"H_0 : m = m_{th}" \quad \text{contre} \quad "H_1 : m \neq m_{th}"$$

A la $n^{\text{ème}}$ simulation, on obtient un estimateur X_n de m . Soit \bar{m} et S^2 sa moyenne et sa variance empiriques.

Le test de validation du simulateur dépend de la statistique :

$$T_{n-1} = \frac{|\bar{m} - m_{th}|}{S} \sqrt{n-1} \curvearrowright t_{(\alpha/2, n-1)},$$

L'hypothèse H_0 est accepté au seuil α si : $T_{n-1} < t_{(\alpha/2, n-1)}$.

Validation du simulateur HOE₂/M/1

* Introduisons les données suivantes :

- La loi des inter-arrivées est une loi hypoexponentielle de paramètres λ_1, λ_2 données par (2.3, 2.4), avec $a = 10, b = 1.3$;
- Temps de simulation $t_{max} = 3000$ unités de temps ;
- Nombre de réplication $n = 100$;

Les résultats obtenus par le simulateur : $\bar{m} = 0.0030$ et la variance $S^2 = 4.2081 * 10^{-10}$;

Le résultat théorique $m_{th} = 0.0030$;

La statistique est $T_{99} = 0.3588$,

La statistique de Student au niveau $\alpha = 0.05$ est $t_{99} = 1.98$;

On a donc $T_{99} = 0.3588 < t_{(0.025, 99)} = 1.98$;

D'où le simulateur est validé.

Validation du simulateur H₂/M/1

* Introduisons les données suivantes :

- La loi des inter-arrivées est une loi hyperexponentielle de paramètres λ_1, λ_2 données dans (2.5, 2.6), avec $a = 10, b = 0.9$;
- Temps de simulation $t_{max} = 3000$ unités de temps ;
- Nombre de réplication $n = 100$;

Les résultats obtenus par le simulateur : $\bar{m} = 0.0027$ et la variance $S^2 = 5.6468 * 10^{-10}$;

Le résultat théorique $m_{th} = 0.0027$;

La statistique est $T_{99} = 1.6150$;

La statistique de Student au niveau $\alpha = 0.05$ est $t_{99} = 1.98$;

On a donc $T_{99} = 1.6150 < t_{(0.025,99)} = 1.98$;

D'où le simulateur est validé.

6.4.3 Application numérique

Remarque 6.1. Dans la suite de l'application le symbole :

(-) : Signifie que la condition de stabilité associée à la constante n'est pas vérifiée.

1-Cas d'approximation par le système HOE₂/M/1

Considérons le système de files d'attente HOE₂/M/1 où la loi des arrivées des clients est hypoexponentielle de paramètres λ_1, λ_2 définies dans (2.3, 2.4).

Ainsi, en fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 1.3$.

L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Erreur Simulée	Erreur Algorithmique
5	-	-	-	-	-
8.96	1.0408	1.0555	1.0475	0.1630	1.3976×10^3
9	1.0322	1.0727	1.0477	0.1403	197.2039
10	1.0115	1.3172	1.0510	0.1170	8.7956
15	1.0051	2.4766	1.0660	0.1061	1.5392
20	1.0041	3.6323	1.0792	0.1018	0.8511
25	1.0037	4.7838	1.0911	0.0963	0.5915
30	1.0035	5.9287	1.1022	0.0708	0.4552
40	1.0033	8.1883	1.1223	0.0516	0.3139
50	1.0031	10.3861	1.1404	0.0390	0.2414
60	1.0031	12.4932	1.1570	0.0382	0.1971
80	1.0030	16.3139	1.1869	0.0168	0.1459
100	1.0029	19.4327	1.2132	0.0130	0.1171

TABLE 6.1 – Tableau comparatif des erreurs

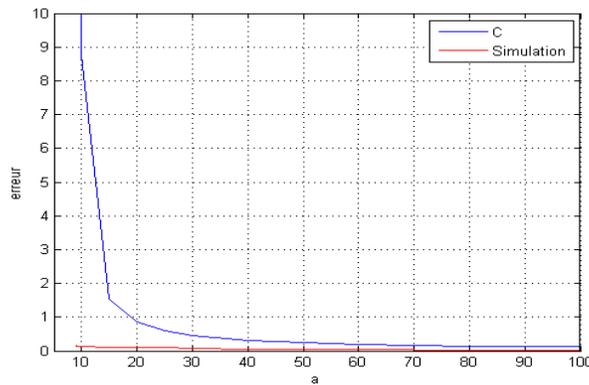


FIGURE 6.3 – Courbes comparatives des erreurs

2-Cas d'approximation par le système $H_2/M/1$

Considérons le système de files d'attente $H_2/M/1$ où la loi des arrivées des clients est hyperexponentielle de paramètres λ_1, λ_2 définies dans (2.5, 2.6) et $\tau_1 = \frac{1}{2}, \tau_2 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, en fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 0.9$.

On a obtenu les résultats suivants :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Erreur Simulée	Erreur Algorithmique
5	-	-	-	-	-
9.2	1.0447	1.1242	1.0745	0.1338	107.5304
9.5	1.0270	1.2114	1.0757	0.1197	24.5185
10	1.0178	1.3364	1.0776	0.1058	10.7398
15	1.0058	2.4839	1.0945	0.0978	1.6479
20	1.0043	3.5710	1.1084	0.0862	0.9048
25	1.0037	4.5938	1.1204	0.0579	0.6289
30	1.0034	5.5428	1.1311	0.0404	0.4847
40	1.0031	7.1964	1.1496	0.0275	0.3360
50	1.0029	8.5138	1.1652	0.0200	0.2597
60	1.0028	9.5131	1.1788	0.0180	0.2133
80	1.0027	10.7225	1.2015	0.0109	0.1595
100	1.0027	11.1843	1.2199	0.0090	0.1292

TABLE 6.2 – Tableau comparatif des erreurs

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

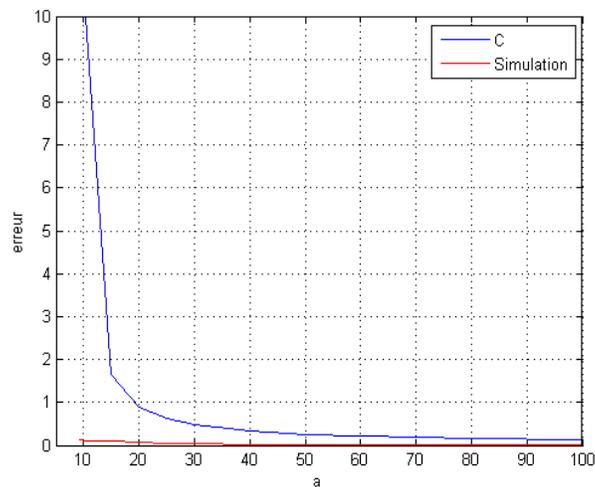


FIGURE 6.4 – Courbes comparatives des erreurs

Interprétation des résultats

L'application numérique de la perturbation de la loi des inter-arrivées, nous a permis d'observer le comportement de l'erreur relatif à la borne obtenue. Il est alors aisé de re-

marquer que, pour des perturbations assez petites du paramètre (a) de la loi de Weibull, la condition de stabilité associée à la constante n'est pas vérifiée. Comme on peut remarquer la variation du paramètre de la loi de Weibull induit une diminution de l'erreur commise, ainsi qu'une légère augmentation du domaine de stabilité. De plus, l'erreur obtenue par le simulateur est toujours inférieure à l'erreur algorithmique.

6.5 Deuxième partie

6.5.1 Approche algorithmique

Algorithme

Étape1 : Définition des paramètres d'entrées

Le taux moyen des arrivées des clients : λ ;

La distribution de la durée de service des clients : $b(\cdot)$;

La précision avec laquelle l'erreur sera déterminée : ε ;

Étape2 : Détermination de l'espérance de la variable aléatoire η , caractérisant la durée de service des clients ;

$$E(\eta) \leftarrow \int_0^{\infty} u b(u) du$$

Étape3 Vérification de l'ergodicité géométrique des systèmes idéaux ;

Si $\lambda E(\eta) \geq 1$ alors "Système instable" aller à **Étape 8**

Sinon

aller à l'**Étape 4**

Étape4 : Détermination de $\beta_0 = \sup(\beta \text{ tel que } \rho < 1)$

Étape5 : Détermination de β_{min} (β_{min} correspond à la borne inférieure de l'intervalle des valeurs de β , pour lesquelles l'erreur est définie) ;

Étape6 : Détermination de β_{max} (β_{max} correspond à la borne supérieure des valeurs de β , pour lesquelles l'erreur est définie) ;

Étape7 : Détermination de l'erreur minimale ($erreur_{min}$) ainsi que la valeur $\beta_{idéal}$ correspondante dans l'intervalle $[\beta_{min}; \beta_{max}]$;

Étape8 : Fin.

6.5.2 Approche simulation

Simulateur

Étape 1 Définition des paramètres

Taux moyen d'arrivées des clients : λ ;

Loi de la durée de service des clients : $b(\cdot)$;

Les valeurs du paramètre de la norme associée : β ;

La durée de simulation : t_{max} ;

Étape 2 Vérification de la condition d'ergodicité géométrique

Si $\lambda \int_0^\infty ub(u)du < 1$ alors aller à **Étape 3** ;

Sinon aller à **Étape 6** ;

Étape 3 : Simulation des distributions stationnaires $\hat{\pi}$ et $\check{\pi}$ des systèmes M/ HOE₂/1 et M/H₂/1 respectivement ;

Étape 4 : Simulation de la distribution stationnaire $\bar{\pi}$ du système M/G/1 perturbé ;

Étape 5 : Calcul de l'écart entre les distributions stationnaires par rapport à la norme donnée

$$erreur \leftarrow \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j |\bar{\pi}_j - \omega_j|;$$

où ω : représente les distributions stationnaires $\hat{\pi}$ et $\check{\pi}$.

Étape 6 : Fin.

Organigrammes de simulation

Dans cette section, nous présentons l'organigramme des étapes du simulation de système de files d'attente M/G/1, et l'organigramme du simulateur général.

Soit la légende des notations utilisées :

t_{max} : Le temps de simulation ;

n : Nombre de clients dans le système à un instant donné ;

t_{sim} : L'horloge de la simulation ;

$n_i(\cdot)$: Durée cumulée pendant laquelle le système contient n clients ;

t_1 : Date de la prochaine arrivée ;

t_2 : Date du prochain départ.

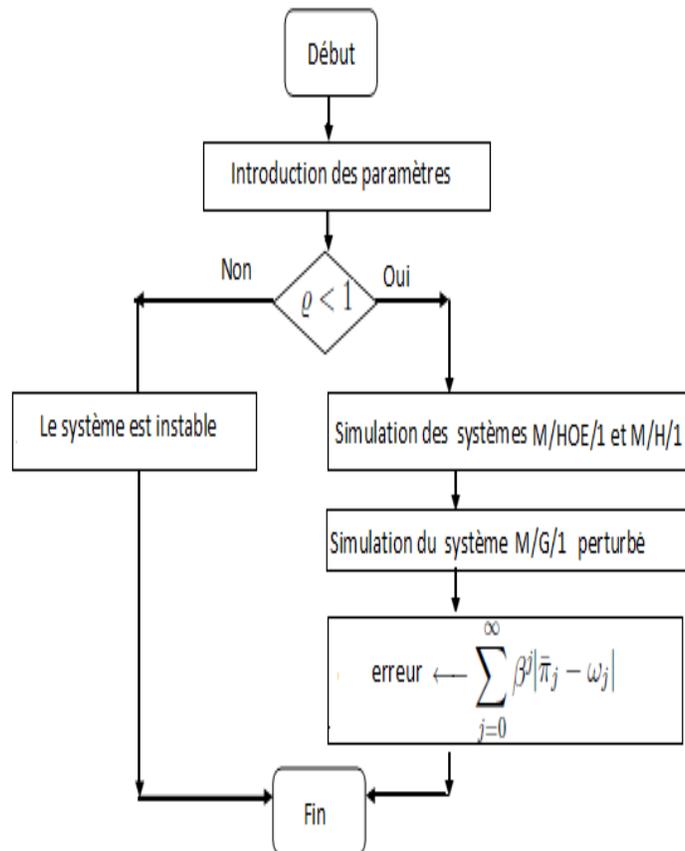


FIGURE 6.5 – Organigramme du simulateur

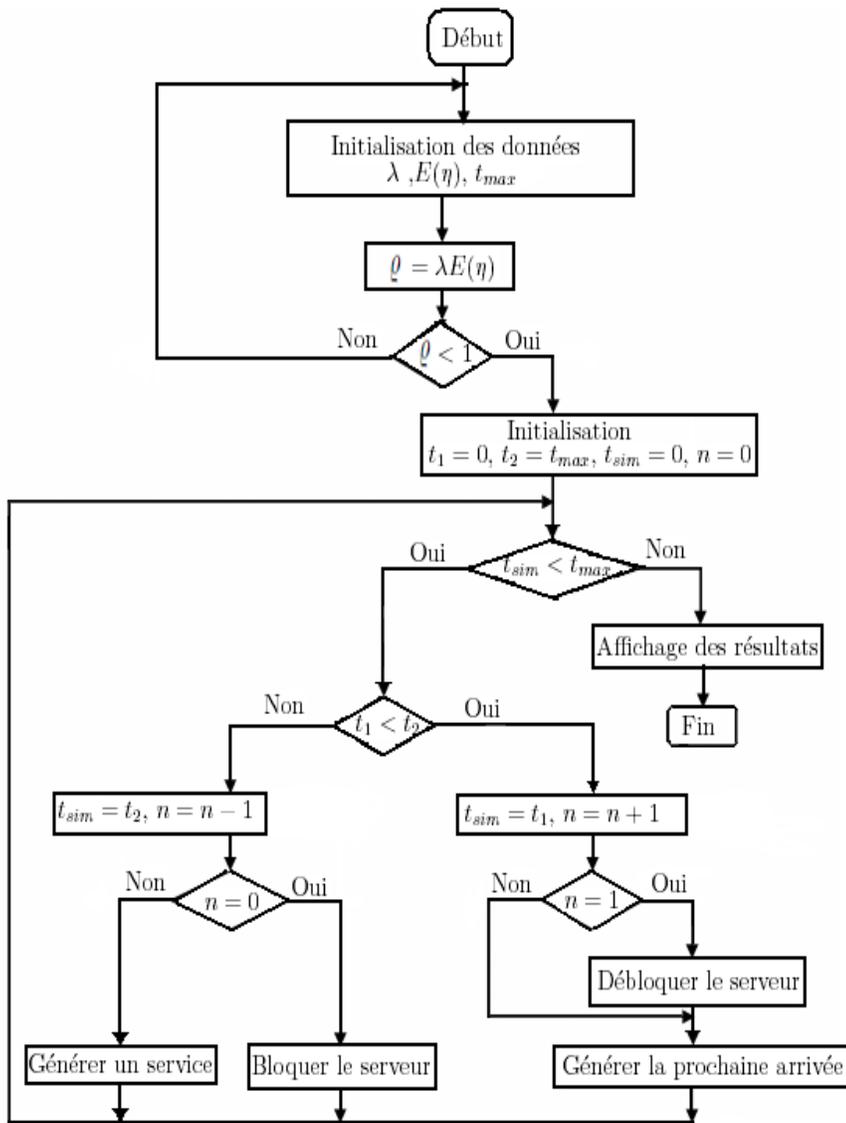


FIGURE 6.6 – Organigramme du simulateur $M/G/1$ classique

Validation du simulateur

Validation du simulateur M/HOE₂/1

* Introduisons les données suivantes :

- Le taux des arrivées des clients $\lambda = 0.5$;
- Temps de simulation $t_{max} = 3000$ unités de temps ;
- Nombre de réplication $n = 100$;

Les résultats obtenus par le simulateur : $\bar{m} = 0.0214$ et la variance $S^2 = 0.0037$;

Le résultat théorique $m_{th} = 0.0262$;

La statistique est $T_{99} = 0.7917$;

La statistique de Student au niveau $\alpha = 0.05$ est $t_{99} = 1.98$;

On a donc $T_{99} = 0.7917 < t_{(0.025,99)} = 1.98$; d'où le simulateur est validé.

Validation du simulateur M/H₂/1

* Introduisons les données suivantes :

- Le taux des arrivées des clients $\lambda = 0.2$;
- Temps de simulation $t_{max} = 3000$ unités de temps ;
- Nombre de réplication $n = 100$;

Les résultats obtenus par le simulateur : $\bar{m} = 0.0105$ et la variance $S^2 = 0.0015$;

Le résultat théorique $m_{th} = 0.0118$;

La statistique est $T_{99} = 0.3546$;

La statistique de Student au niveau $\alpha = 0.05$ est $t_{99} = 1.98$;

On a donc $T_{99} = 0.3546 < t_{(0.025,99)} = 1.98$; d'où le simulateur est validé.

6.5.3 Application numérique

Cas d'approximation par le système M/HOE₂/1

Considérons le système de files d'attente M/HOE₂/1 muni des paramètres suivants :

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.5$;

La loi de la durée de service des clients est hypoexponentielle de paramètres μ_1, μ_2 donnés par (2.3, 2.4).

La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 1.3$.

L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Erreur Simulée	Erreur Algorithmique
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.8700	2.0882	1.9729	0.1329	318.2881
20	1.4986	2.8989	1.9712	0.1458	8.5822
25	1.2959	4.2001	1.9706	0.1161	2.4889
30	1.2163	5.3785	1.9720	0.0912	1.4522
40	1.1425	7.6501	1.9757	0.0703	0.7908
50	1.1067	9.8838	1.9790	0.0536	0.5429
60	1.0854	12.1031	1.9816	0.0479	0.4132
70	1.0712	14.3153	1.9837	0.0403	0.3334
80	1.0611	16.5235	1.9853	0.0350	0.2795
100	1.0476	20.9332	1.9879	0.0322	0.2111

TABLE 6.3 – Tableau comparatif des erreurs

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

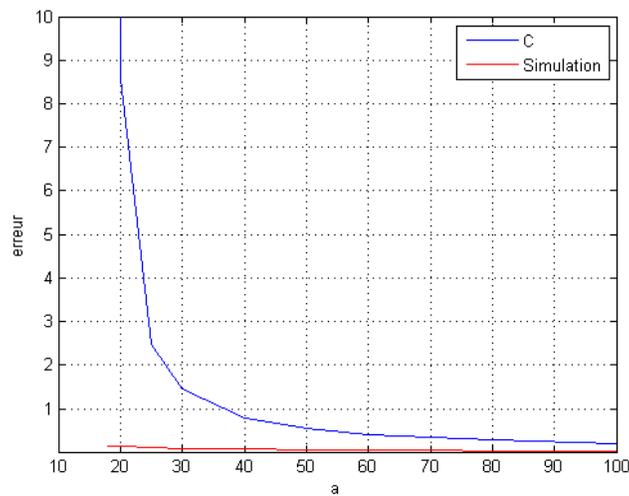


FIGURE 6.7 – Courbes comparatives des erreurs

Cas d'approximation par le système M/H₂/1

Considérons le système de files d'attente M/H₂/1 muni des paramètres suivants :

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.2$.

La loi de la durée de service des clients est hyperexponentielle de paramètres μ_1, μ_2 donnés par (2.5,2.6), $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$.

La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 0.9$.

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Erreur Simulée	Erreur Algorithmique
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.6346	2.5357	1.9860	0.1101	20.1264
20	1.4454	3.1881	1.9862	0.0971	5.9768
25	1.2774	4.5141	1.9864	0.0385	2.1635
30	1.2055	5.7441	1.9869	0.0424	1.3196
40	1.1368	8.1289	1.9888	0.0328	0.7407
50	1.1029	10.4790	1.9903	0.0151	0.5147
60	1.0825	12.8156	1.9915	0.0132	0.3943
70	1.0690	15.1454	1.9924	0.0114	0.3195
80	1.0592	17.4714	1.9932	0.0081	0.2686
100	1.0462	22.1170	1.9945	0.0074	0.2036

TABLE 6.4 – Tableau comparatif des erreurs

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

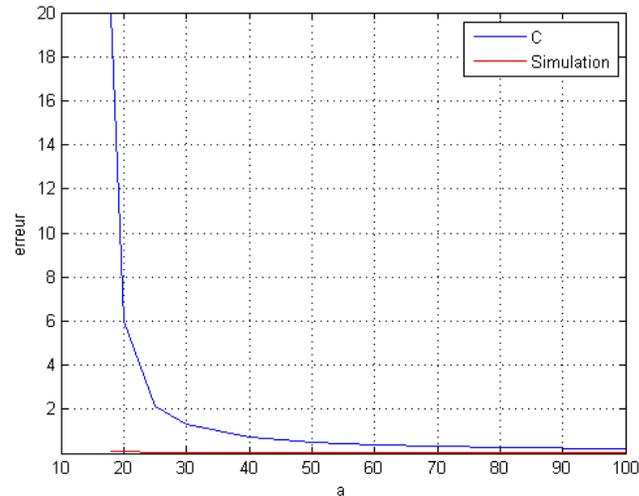


FIGURE 6.8 – Courbes comparatives des erreurs

Interprétation des résultats

Les mêmes remarques que celles de la perturbation précédente peuvent être faites, dans cette partie (le cas de la perturbation de la loi de la durée de service).

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'aspect pratique du problème de stabilité forte appliqué à quelques systèmes d'attente de type phase. Nous avons élaboré un algorithme et des simulateurs nous permettant de déterminer le domaine d'approximation des caractéristiques des systèmes relatif à la borne obtenue. De plus, une comparaison entre les résultats algorithmiques et simulés a été effectuée pour les deux cas de perturbation.

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'approximation des systèmes de files d'attente $GI/M/1$ et $M/G/1$ par des systèmes de type phase pouvant être analysés après représentation par processus de quasi naissance et mort (QBD). L'utilisation des distributions de type phase pour approximer des distributions générales est possible car l'ensemble des distributions PH est dense dans l'ensemble des distributions positives de probabilité. La méthode des moments utilisée à cette fin génère des erreurs comme toute autre méthode d'approximation. Il faut passer souvent à des moments d'ordre supérieurs pour obtenir une très bonne approximation. Ajoutons à cela les perturbations dues à la détermination imprécise des paramètres car ils sont estimés par des méthodes statistiques à partir de données empiriques.

Nous avons étudié la stabilité forte des chaînes de Markov induites dans les systèmes de files d'attente $HOE_2/M/1$, $H_2/M/1$, $M/HOE_2/1$, et $M/H_2/1$. Il nous a été alors possible de clarifier les conditions de stabilité et d'approximation sous différents types de perturbations, i.e., la perturbation de la loi des arrivées du système $GI/M/1$ et la perturbation de la durée de service du système $M/G/1$. De plus, nous avons estimé les bornes d'écart entre les distributions stationnaires des systèmes idéals et celles des systèmes perturbés.

Ces résultats peuvent être considérés comme la généralisation des résultats obtenus par d'autres auteurs dans le cadre de la méthode de stabilité forte (e.g. [21, 22]). En effet, le modèle $M/M/1$ déjà proposé comme approximation des systèmes $GI/M/1$ et $M/G/1$ est un modèle de type phase particulier. Cependant, il ne peut représenter qu'une classe très limitée de systèmes réels (car peu de distributions de probabilité sont proches de l'exponentielle). Par contre, nous pouvons toujours trouver un modèle de type phase approprié.

En outre, nous avons fourni la justification mathématique de la méthode d'approximation par distributions de type phase déjà utilisée dans plusieurs travaux [48, 79, 46, 33] et nous avons également proposé des estimations quantitatives des erreurs commises.

Les résultats obtenus dans le cadre de ce mémoire ouvrent de nombreuses perspectives de recherche :

- Etendre les résultats obtenus aux autres systèmes de files d'attente (G/G/1, plusieurs serveurs, avec pannes ou vacation,...).
- Des résultats similaires peuvent être obtenus pour d'autres modèles stochastiques en utilisant l'approximation des distributions générales par des distributions de type phase.
- Dériver les conditions de stabilité des processus QBD et proposer des bornes de stabilité.

Bibliographie

- [1] K. Abbas and D. Aïssani. Strong stability of the embedded Markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers. *International Journal AMM (Applied Mathematical Modelling)* 34 (10), 2806-2812, 2010.
- [2] D. Aïssani. Ergodicité uniforme et stabilité des chaînes de Markov : Application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Mathématique de Rouen, C.N.R.S. Edition*, 115-121, 1990.
- [3] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, ser. A* 11, 3-5, 1983.
- [4] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Strong stability of the imbedded Markov chain in an M/G/1 system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 29, 1-5, 1984.
- [5] N. Akar and K. Sohraby. Finite and infinite QBD chains : A simple and unifying algorithmic approach. *Proceedings of IEEE INFOCOM*, 1105-1113, 1997.
- [6] T. Altiok. On the phase-type approximations of general distributions. *IIE Transactions* 17 (2), 110-116, 1985.
- [7] S. Asmussen. Phase-type representations in random walk and queueing problems. *Annals of Probability* 20, 772-789, 1992.
- [8] S. Asmussen. Fitting phase-type distributions via the EM algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics* 23, 419-441, 1996.
- [9] S. Asmussen. *Applied probability and queues*. Springer, New York, 2nd edition, 2003.

-
- [10] B. Baynat. Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit. *Hermès Science Publications, Paris*, 2000.
- [11] M. Benaouicha and D. Aïssani. Strong stability in a $G/M/1$ queueing system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 71, 22-32, 2004.
- [12] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong stability in retrial queues. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 68, 11-17, 2003.
- [13] D. Bini and B. Meini. On the solution of a nonlinear matrix equation arising in queueing problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl* 17, 906-926, 1996.
- [14] D. Bini and B. Meini. Improved cyclic reduction for solving queueing problems, *Numerical Algorithms* 15. 57-74, 1997.
- [15] P.P. Bocharov and V.A. Naumov. Matrix geometric stationary distribution for the PH/PH/1/N queue. *INRIA Rapport de Recherche 304, INRIA, France*, 1984.
- [16] A.A. Borovkov. Processus probabilistes de la théorie des files d'attente. *Edition Nauka, Moscow*, 1972.
- [17] A.A. Borovkov. On ergodicity and stability of the sequence $w_{n+1} = f(w_n, \xi_n)$: Applications to communication networks. *Theory of Probability and its Applications* 33 (4), 595-611, 1988.
- [18] A.A. Borovkov and R.A. Shassberger. Continuity theorems for multichannel systems with refusals. *Theory of Probability and its Applications* 17, 434-444, 1972.
- [19] A.A. Borovkov and R.A. Shassberger. Ergodicity of a Jackson network with batch arrivals. *Journal of Applied Probability* 31 (3), 847-853, 1994.
- [20] A.A. Borovkov and R.A. Shassberger. Ergodicity of polling network. *Stochastic Processes and their applications* 50 (2), 253-262, 1994.
- [21] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Measurement and performance of the strong stability method. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 72, 1-9, 2005.

- [22] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$. *International Journal MMOR (Mathematical Methods of Operation Research)* 63 (2), 341-356, 2006.
- [23] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Quantitative estimates in an $M_2/G_2/1$ priority queue with non-preemptive priority : The method of strong stability. *Stochastic Models* 24, 1-21, 2008.
- [24] J.Y. Le Boudec. An efficient solution method for Markov models of ATM links with loss priorities. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 9 (3), 408–417, 1991.
- [25] L. Boukir, L. Bouallouche-Medjkoune, and D. Aïssani. Strong stability of the batch arrival queueing systems. *International Journal Stochastic Analysis and Applications* 28 (1), 08-25, 2010.
- [26] G. Britran and S. Dasu. Analysis of the $\sum PH_i/PH/1$ queue. *Operations Research* 42, 158-174, 1994.
- [27] R. Chakka. Performance and reliability modelling of computing system using spectral expansion. *Ph.D. Thesis, University of Newcastle*, 1995.
- [28] R. Chakka and I. Mitrani. Spectral expansion solution of a class of Markov models : Application and comparison with the matrix-geometric method. *International Journal Performance Evaluation* 23, 241-260, 1995.
- [29] G. Clardo and E. Smirni. ETAQA : An efficient technique for the analysis of QBD processes by aggregation. *International Journal Performance Evaluation* 36, 71-93, 1999.
- [30] Y. Dallery and S. Gershwin. Examples of fitting structured phase type distribution. *Manufacturing Flow Line Systems : A Review of Models and Analytical Results, Queueing Systems* 12 (3), 3-94, 1992.
- [31] T. Dayar and F. Quessette. Quasi-birth and death processes with level geometric distribution. *SIAM J. Matrix Anal. Appl* 24, 281-291, 2002.

-
- [32] E.H. Elhafsi and M. Molle. On the solution to QBD processes with finite state space. *Stochastic Analysis and Applications* 25, 763–779, 2007.
- [33] S. Elmaghraby. On the approximation of arbitrary distributions by phase-type distributions. *North Carolina State University, Raleigh NC, USA*, 7695-7906.
- [34] R. Evants. Geometric distribution in some two-dimensional queueing systems. *Operations Research* 15, 830–846, 1976.
- [35] M. Faddy. Examples of fitting structured phase type distribution. *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 10, 247-255, 1994.
- [36] M. Fadiloglu and S. Yeralan. On the properties of Markovian models of production lines. *In Proceedings of the Second Aegean International Conference on Analysis and Modelling of Manufacturing Systems*, Tinos Island, Greece, 273-285, 1999.
- [37] M. Fadiloglu and S. Yeralan. Models of production lines as quasi-birth-death processes. *Mathematical and Computer Modeling* 35, 2002.
- [38] G. Florin and S. Natkin. On open synchronized queueing networks. *In Proceedings of the International Workshop On Timed Petri Nets*, 226-223, 1985.
- [39] G. Florin and S. Natkin. One place unbounded stochastic petri nets : Ergodicity criteria and steady state solution. *Journal of Systems and Software* 1 (2), 103-115, 1986.
- [40] G. Florin and S. Natkin. Generalizations of queueing networks product-form solutions to stochastic Petri nets. *IEEE TSE* 17 (2), 99-107, 1991.
- [41] E. Gelenbe and G. Pujolle. Introduction to queueing networks. *Wiley, New York*, 1998.
- [42] L. Gun and A.M. Makowski. Matrix-geometric solution for finite capacity queues with phase-type distributions. *Proceedings of Performance 87. Brussels, Belgium*, 269–282, 1987.
- [43] L. Gun and A.M. Makowski. Matrix-geometric solution for two node tandem queueing systems with phase-type servers subject to blocking and failures. *SRC*

- Technical Report 87-210. Systems Research Center, University of Maryland, College Park, MD, 1987.*
- [44] B. Hajek. Birth-and-death processes on the integers with phases and general boundaries. *Journal of Applied Probability* 19 (3), 488–499, 1982.
- [45] N. Hamadouche and D. Aïssani. Stabilité forte d’un système d’attente $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications*, 63-66, 2008.
- [46] B. Haverkort. Approximate analysis of networks of PH/PH/1/k queues : Theory and tool support. *Quantitative Evaluation of Computing and Communication Systems*, 239–253, 1995.
- [47] B. Haverkort. Matrix geometric solution of infinite stochastic Petri nets. *Department of Computer Science, University of Twente, Netherlands, 1995.*
- [48] B. Haverkort. Approximate analysis of networks of PH/PH/1/k queues with customer losses : Test results. *Annals of Operations Research* 79, 271–291, 1998.
- [49] B. Haverkort and A. Ost. Steady state analysis of infinite stochastic petri nets : A comparing between the spectral expansion and the matrix geometric method. *Proceedings of the 7th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, 335-346, 1997.
- [50] B. Haverkort and A. Ost. Evaluating computer-communication systems using infinite-state stochastic Petri nets. *Proceedings of 3rd International Conference on Matrix Analytic Method*, 295-314, 2000.
- [51] B. Heidergott and A. Hordijk. Taylor expansions for stationary Markov chains. *Advances in Applied Probability* 35, 1046-1070, 2003.
- [52] I.C.F. Ipsen and C.D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *SIAM J. Matrix Anal Appl* 4 (15), 1061–1074, 1994.
- [53] M. Johnson. An empirical study of queuing approximations based on phase-type distributions. *Communications in Statistics-Stochastic Models* 9 (4), 531-561, 1993.

- [54] M. Johnson and M. Taaffe. Matching moments to phase distributions : Density function shapes. *Communications in Statistics-Stochastic Models* 6 (2), 283-306, 1990.
- [55] V.V. Kalashnikov. Qualitative analysis of complex systems behavior by the test functions method. *Nauka Edition, Moscow*, 1978.
- [56] V.V. Kalashnikov and G.S. Tsitsishvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Queueing Theory and Reliability* 10, 211-217, 1971.
- [57] V.V. Kalashnikov and G.S. Tsitsishvili. Sur la stabilité des systèmes de files d'attente relativement à leurs fonctions de répartition perturbées. *Journal Izv AN USSR Technique Cybernétique* 2, 41-49, 1972.
- [58] N.V. Kartashov. Strong stability of Markov chains. *VNISSI, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Moscow*, 54–59, 1981.
- [59] N.V. Kartashov. Criteria for uniform ergodicity and strong stability of markov chains with a common phase space. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 30, 71-89, 1985.
- [60] N.V. Kartashov. Strong stable Markov chains. *VSP, Utrecht, TbiMC Scientific Publishers*, 1996.
- [61] G. Latouche, C. Pearce, and P. Taylor. Invariant measures for quasi-birth-and-death processes. *Communications in Statistics-Stochastic Models* 14, 443-460, 1998.
- [62] G. Latouche and V. Ramaswami. An experimental evaluation of the matrix geometric methods for the GI/PH/1 queue. *Communications in Statistics-Stochastic Models* 5, 629-667, 1989.
- [63] G. Latouche and V. Ramaswami. A logarithmic reduction algorithm for quasi- birth-death processes. *Journal of Applied Probability* 30, 650-674, 1993.
- [64] G. Latouche and V. Ramaswami. Introduction to matrix analytic methods in stochastic modelling. *SIAM, Philadelphia PA*, 1999.

- [65] J. Leeuwaarden and E. Winands. Quasi-Birth-and-Death processes with an explicit rate matrix. *Stochastic Models* 22 (1), 77-98, 2006.
- [66] J. Van Leeuwaarden, M. Squillante, and E. Winands. Quasi-Birth-and-Death Processes, lattice path counting, and hypergeometric functions. *Journal of Applied Probability* 46 (2), 2009.
- [67] Q. Li and L. Liu. An algorithmic approach for sensitivity analysis of perturbed quasi-birth-and-death processes. *Kluwer Academic Publishers, Queueing Systems* 48, 365–397, 2004.
- [68] J. Luhman and J. Johnson. Behaviour of queuing approximations based on sample moments. *Applied Stochastic Models and Data analysis* 10, 233-246, 1994.
- [69] I. Mitrani and R. Chakka. Spectral expansion solution of a class of markov models : Application and comparison with the matrix-geometric method. *Performance Evaluation* 23, 241–260, 1995.
- [70] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. Stability of the inventory-backordre process in the $(R, S) <$ inventory production model. *Pliska Stud. Math. Bulgar* 18, 255–270, 2007.
- [71] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. New perturbation bounds for denumerable Markov chains. *Linear Algebra and its Applications* 280, 255–270, 2010.
- [72] V. Naumov. Modified matrix-geometric solution for finite QBD processes, in advances in algorithmic methods for stochastic models. *Notable Publications Inc*, 2000.
- [73] V. Naumov, U .Krieger, and D. Wagner. Analysis of a multi-server delay-loss system with a general Markovian arrival process. In S. Chakravarthy and A. Alfa, editors. *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models* 183, of Lecture Note in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1996.
- [74] R. Nelson. Probability, stochastic process and queueing theory. *Springer verlag, New York*, 1995.
- [75] M. Neuts. Probability distributions of phase type. *In L. Amicorum and H. Florin, University of Louvain*, 173–206, 1975.

- [76] M. Neuts. Matrix-geometric solutions in stochastic models : An Algorithmic Approach. *The Johns Hopkins University Press, Baltimore*, 1981.
- [77] M. Neuts. Two further closure properties of ph-distributions. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 9, 77–85, 1992.
- [78] C. O’Cinneide. Characterization of phase-type distributions. *Stochastic Models* 6 (1), 1–57, 1990.
- [79] T. Osogami. Analysis of multi-server systems via dimensionality reduction of Markov chains. *PhD thesis, School of Computer Science Carnegie Mellon University*, 2005.
- [80] A. Ost. Performance evaluation of complex communication networks with matrix-geometric methods. *PhD thesis, Distributed Systems Group, CSD, RWTH Aachen, 2000*.
- [81] V. De Nitto Persone and V. Grassi. Solution of finite QBD processes. *Journal of Applied Probability* 33, 1003–1010, 1996.
- [82] B. Rabta. Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov avec application aux modèles stochastiques de gestion des stocks. *Thèse de Doctorat, Université de Béjaïa*, 2006.
- [83] B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes* 10 (26), 129-135, 2004.
- [84] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *International Journal of Production Economics* 97, 159-171, 2005.
- [85] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability and perturbation bounds for discrete markov chains. *Linear Algebra and its Applications* 428, 1921-1927, 2008.
- [86] S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems* 4, 287–318, 1989.
- [87] F. Rahmoune and D. Aïssani. Strong stability of queues with multiple vacation of the server. *Stochastic Analysis and Applications* 26, 1-14, 2008.

- [88] V. Ramaswami and G. Latouche. A general class of markoc processes with explicit matrix-geometric solutions. *Operations Research-Spektrum* 8, 209-218, 1986.
- [89] K. Rhee and C. Pearce. On some basic properties of the inhomogeneous quasi birth and death process. *Comm. Korean Math. Soc.* 12 (1), 177–191, 1997.
- [90] R. Sadre. Decomposition-based analysis of queueing networks. *Ph.D Thesis. University of Twente*, January 10th, 2007.
- [91] C. Sauer and K. Chandy. Approximate analysis of central server models. *IBM Journal of Research and Development* 19(3), 301-313, 1975.
- [92] B. Sengupta. Markov processes whose steady state distribution is matrixexponential with an application to the GI/PH/1 queue. *Advances in Applied Probability* 21, 159-180, 1989.
- [93] B. Sengupta. Phase-type representations for matrix-geometric solutions. *Stochastic Models* 6, 163-167, 1990.
- [94] W. Stewart. Introduction to the numerical solution of markov chains. *Princeton University Press*, 1994.
- [95] D. Stoyan. Comparaison methods for queues and other stochastic models. *J. Wiley and Sons, Chichester*, 1983.
- [96] N. Tian. Quasi-birth-and-death processes and matrix geometric solutions. *Beijing Science Press*, 8-13, 2002.
- [97] H. Tran and V. Tien. Computational aspects for steady state analysis of QBD processes. *Department of Telecommunications, Budapest University of Technology and Economics* 44 (2), 179-200, 2000.
- [98] R. Tweedie. Operator-geometric stationary distributions for Markov chains, with applications to queueing models. *Advances in Applied Probability* 14, 368-391, 1982.
- [99] V. Wallace. The solution of quasi-birth and death processes arising from multiple access computer systems,. *Ph.D. Diss, Systems Engineering Laboratory, University of Michigan*, Tech. Rept. no 07742-6-T, 1969.

-
- [100] W. Whitt. Approximating a point process by a renewal process : Two basic methods. *Operations Research* 30 (1), 125-147, 1982.
- [101] W. Whitt. On approximations for queues, III : mixtures of exponential distributions. *AT.T Bell Labs Tech Journal* 63 (1), 163-17, 1984.
- [102] J. Ye and S.Q. Li. Analysis of multimedia traffic queues with finite buffer and overload control, part II : Applications. *Proceedings of IEEE INFOCOM*, 848-859, 1992.
- [103] J. Ye and S.Q. Li. Folding algorithm : A computational method for finite QBD processes with level-dependent transitions. *IEEE Trans. Commu* 42, 625-639, 1994.
- [104] Q. Ye. On Latouche-Ramaswami's logarithmic reduction algorithm for quasi-birth-and-death processes. *Stochastic Models* 18 (3), 449-467, 2002.
- [105] S. Yeralan and E. Muth. A general model of a production line with intermediate buffer and station breakdown,. *IIE Transactions* 19 (2), 130-139, 1987.
- [106] S. Yeralan and B. Tan. Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity part 1 : The subsystem model. *Mathematical and Computer Modelling* 25 (7), 109-122, 1997.
- [107] V.M. Zolotarev. On the continuity of stochastic sequences generated by recurrent processes. *Theory of Probability and its Applications* 20 (4), 819-832, 1975.
- [108] V.M. Zolotarev. Metric distances on space of random variables and their distributions. *Math. USSR. Sbornik.* 30, 373-401, 1976.
- [109] V.M. Zolotarev. Probability metrics. *Theory of Probability and its Applications* 28, 278-302, 1983.