

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Magister  
En Mathématiques Appliquées  
Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

THÈME

*Estimation de l'erreur de la  
troncature par la méthode de  
stabilité forte*

Présenté par :  
M<sup>r</sup> ISSAADI Badredine

Devant le jury composé de :

|            |                    |            |                          |
|------------|--------------------|------------|--------------------------|
| Président  | Smail Adjabi       | M.C.A      | Université de Béjaïa     |
| Rapporteur | Djamil Aïssani     | Professeur | Université de Béjaïa     |
| Examineur  | Djamel Hamadouche  | Professeur | Université de Tizi Ouzou |
| Examineur  | Louiza Bouallouche | M.C.A      | Université de Béjaïa     |
| Invité     | Karim Abbas        | M.C.B      | Université de Béjaïa     |

Béjaïa 2011

# *Au nom de dieu le compatissant, le miséricordieux*

*Je ne peux pas concevoir un vrai scientifique dénué de cette foi profonde. Cette situation peut être décrite par cette image : la science sans religion serait éclopée.*

*Albert Einstein*

*Quiconque s'est engagé sérieusement sur le sentier de la science se rend compte qu'il est inscrit sur les portes du temple de la science : vous devez avoir la foi. Il s'agit d'une qualité indispensable dont on ne peut pas se passer.*

*Max Planck*

*A Tous Ce Qui Luttent Pour Un Monde  
Meilleur Et Pour Une Paix Universelle*

*Je dédie ce travail surtout à mes parents (mon cher père et ma chère mère) grâce à eux que j'ai trouvé le chemin de la réussite et que j'ai pu suivre convenablement de longues études. Ainsi de m'avoir supporté, dans les deux sens du terme. Sans leur travail et leur courage, rien n'aurait été possible. Je ne leur serai jamais trop reconnaissant, ainsi qu'à tous les membres de ma famille (frères et soeurs), particulièrement à mon grand frère auquel je souhaite une grande réussite pour sa prochaine soutenance en doctorat, à mon second frère auquel je souhaite aussi toute la réussite dans ses études de médecine en phase de spécialité en neurologie, à ma soeur laquelle je souhaite une longue vie heureuse à l'occasion de son mariage, que je lui souhaite aussi toute la réussite pour son doctorat et dans son travail d'enseignante, sans oublié le reste de mes soeurs et de leurs souhaiter toutes la réussite dans leurs études, à mes amis (es) et tous ceux qui m'aiment.*

# *Remerciements*

Tout d'abord je tiens à remercier messieurs D. Aïssani et K. Abbas pour l'encadrement qu'il m'ont assuré et leurs précieux et judicieux conseils qu'ils n'ont cessé de me prodiguer tout au long de ce projet, leurs confiance témoignée, sans oublier leurs qualités humaines. Ils trouveront ici ma gratitude et ma reconnaissance profondes.

Je remercie les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de participer au jugement de ce travail.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants du département Recherche Opérationnelle pour leurs conseils et surtout leur compréhension.

J'adresse ma sympathie à toutes les personnes que j'ai pu côtoyer amicalement et qui ont toujours su maintenir une ambiance de travail chaleureuse.

De peur d'en oublier certains, je ne m'aventurerais pas à tous les citer et, nul doute qu'ils sauront ici se reconnaître.

Je réserve une pensée toute particulière à mes chers parents qui m'ont toujours soutenu et guidé tout au long de mes études. Qu'ils trouvent, en ce mémoire, le modeste témoignage de ma profonde reconnaissance.

*Badredine ISSAADI*

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction générale</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Stabilité des chaînes de Markov</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1 Noyau de transition et chaîne de Markov . . . . .                               | 6         |
| 1.2 Irréductibilité, atome, apériodicité . . . . .                                  | 8         |
| 1.3 Chaînes récurrentes, chaînes transitoires . . . . .                             | 11        |
| 1.4 Existence de mesures invariantes . . . . .                                      | 13        |
| 1.5 Ergodicité . . . . .  | 15        |
| 1.6 Critères de classification . . . . .  | 16        |
| 1.7 Conclusion . . . . .  | 18        |
| <b>2 La <math>V</math>-Ergodicité uniforme et la <math>V</math>-Stabilité forte</b> | <b>19</b> |
| 2.1 Préliminaires et notations . . . . .  | 19        |
| 2.2 $V$ -Ergodicité uniforme . . . . .  | 22        |
| 2.3 Ergodicité uniforme et stabilité forte . . . . .                                | 23        |
| 2.4 Généralisation des concepts de base . . . . .                                   | 27        |
| 2.5 $V$ -Stabilité forte d'une chaîne de Markov . . . . .                           | 28        |
| 2.6 Les inégalités de stabilité . . . . .   | 29        |
| 2.7 Conclusion . . . . .  | 30        |
| <b>3 <math>V</math>-Ergodicité géométrique</b>                                      | <b>31</b> |
| 3.1 Ergodicité géométrique . . . . .  | 32        |
| 3.2 $V$ -Ergodicité géométrique . . . . .   | 32        |
| 3.3 Fonctions de Lyapunov . . . . .   | 33        |
| 3.4 Bornes pour les chaînes $V$ -géométriquement ergodiques . . . . .               | 34        |
| 3.4.1 Bornes calculables . . . . .  | 35        |
| 3.4.2 Bornes pour l'opérateur inverse . . . . .                                     | 37        |
| 3.4.3 Bornes pour l'opérateur inverse sur $ z  \leq 1$ . . . . .                    | 38        |
| 3.4.4 Bornes pour les chaînes fortement apériodiques . . . . .                      | 39        |
| 3.5 Stabilité des chaînes $V$ -géométriquement ergodiques . . . . .                 | 40        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.6      | Conclusion . . . . .  | 41        |
| <b>4</b> | <b>Sur l'approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov</b> | <b>42</b> |
| 4.1      | Les différents types d'augmentation . . . . .                                     | 42        |
| 4.1.1    | L'augmentation linéaire . . . . .   | 42        |
| 4.1.2    | Renormalisation . . . . .   | 43        |
| 4.2      | Approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov . . .        | 44        |
| 4.2.1    | Les chaînes uniformément ergodiques . . . . .                                     | 45        |
| 4.2.2    | Les chaînes géométriquement ergodiques . . . . .                                  | 47        |
| 4.2.3    | Les chaînes stochastiquement monotones . . . . .                                  | 49        |
| 4.3      | Conclusion . . . . .  | 50        |
| <b>5</b> | <b>Application aux systèmes de files d'attente M/G/1</b>                          | <b>51</b> |
| 5.1      | Système de files d'attente M/G/1 et sa troncature . . . . .                       | 51        |
| 5.2      | Application de la méthode de stabilité forte . . . . .                            | 53        |
| 5.2.1    | Déviations du noyau de transition . . . . .                                       | 58        |
| 5.2.2    | Inégalités de stabilité . . . . .   | 60        |
| 5.2.3    | Algorithme de stabilité forte . . . . .   | 62        |
| 5.3      | Application de l'approche sur les chaînes stochastiquement monotones . . .        | 65        |
| 5.3.1    | Algorithme d'approximation . . . . .  | 69        |
| 5.4      | Simulation de l'erreur due à l'approximation par rapport à une norme donnée       | 69        |
| 5.4.1    | Algorithme de simulateur . . . . .  | 70        |
| 5.5      | Application numérique . . . . .   | 70        |
| 5.6      | Conclusion . . . . .  | 73        |
|          | <b>Conclusion générale</b>  | <b>74</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>76</b> |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La modélisation est un outil de la recherche d'une expression simplifiée d'un phénomène naturel dans sa complexité, et qui permet de prévoir le comportement dans un intervalle de temps et d'échelle de grandeur. En simplifiant le "Réel", le modèle donne accès à des prédictions accessibles à la manipulation algébrique ou algorithmique. De plus, lorsque la modélisation tient compte des facteurs aléatoires, on parle alors de modélisation stochastique et de modèles stochastiques. En particulier, une grande classe de modèles mathématiques provient de la théorie de files d'attente. Celle-ci est née d'exigences pratiques liées à la nécessité de fournir aux décideurs des méthodes mathématiques d'aide à l'organisation rationnelle du service massif de clients, ou de phénomènes apparentés, et qui conduisent à la formation de files d'attente. Des phénomènes d'attente se manifestent dans les domaines d'activité les plus divers : les stations téléphoniques, les ateliers de réparation, les guichets de vente des billets, l'exécution des tâches dans un centre de calcul, l'organisation des transports, l'automatisation industrielle, la technique militaire (stations de guidage automatique, lignes de communication, aérodromes), etc. Par conséquent, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outil puissant pour l'analyse et l'optimisation de performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques et les réseaux de communication. L'analyse stochastique (méthodes exactes [23], méthodes d'approximation [68]), et plus récemment, l'analyse opérationnelle [20], donnent une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de files d'attente.

Lors de la modélisation d'un système réel, on est souvent amené à remplacer les éléments stochastiques réels mais compliqués gouvernant le système, par d'autres éléments plus simples. Ces derniers sont supposés être, dans un certain sens, proches des éléments réels. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel, d'où l'apparition du problème de "stabilité".

Le problème de stabilité en théorie de files d'attente permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel et occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques. Pour mieux définir ce concept de stabilité, considérons un système de files d'attente comme une application  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , où l'ensemble  $\mathcal{X}$  représente les paramètres du système (les éléments stochastiques gouvernant le système). Les paramètres du système peuvent être : la distribution du flux des arrivées, la loi du service, la structure du système, etc. L'ensemble  $\mathcal{Y}$  est l'ensemble des caractéristiques du système. Ces dernières peuvent être : le nombre moyen de clients dans le système, le taux d'occupation du système, etc. La notion de stabilité en théorie de files d'attente est identique à celle de continuité de l'application  $F$ .

*"Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres (entrées) entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques (sorties)."*

Par conséquent, la déviation des caractéristiques correspondantes de deux systèmes de files d'attente stables, varie en fonction de la déviation des paramètres d'entrée. En général, les valeurs des paramètres d'un système de files d'attente ne sont connues qu'approximativement (elles sont obtenues à l'aide de méthodes statistiques [33]), ce qui conduit à des erreurs pour le calcul des caractéristiques recherchées. C'est pourquoi, en pratique, on utilise les inégalités de stabilité pour estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques en question.

Les premiers résultats sur la stabilité des systèmes de files d'attente ont été obtenus par Rossberg [2], Gnedenko [26] et Franken [24]. Par la suite, sont apparus les travaux de Kenedy [39], Borovkov [12] (méthode de renouvellement), Stoyan [79] (méthode de convergence faible), Kalaschnikov et Tsitsiachvili [34] (méthode des fonctions tests), Zolotarev [87] (méthode métrique), Klebanov [40], Aïssani et Kartashov [6] (méthode de stabilité forte), Rachev [65], Ipsen et Meyer [31] (méthode de stabilité absolue). Tous ces travaux ont considéré différentes positions et différentes approches du problème. Ainsi, un système peut être stable par rapport à une définition et ne pas être stable par rapport à une autre définition. Par ailleurs, la plupart de ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques, tels que l'économie, les finances, la recherche opérationnelle, la théorie de la décision, etc. En particulier, elles jouent un rôle important dans l'analyse des problèmes complexes de files d'attente et leurs applications en télécommunications, systèmes de production, etc.

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", a été élaborée au début des années 1980 par Aïssani et Kartashov [6]. Les auteurs ont notamment étudié la propriété de stabilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques. Cette méthode nous permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et quantitative de certains systèmes complexes. Elle permet également de rechercher l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov induites [3, 4]. À la différence des autres approches, on suppose que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode, il est possible d'obtenir des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de Kartashov [35].

Cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle a été principalement appliquée aux : modèles d'attente classiques (Aïssani et Kartashov [7], Aïssani [3], Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [13, 14] et Benaouicha et Aïssani [8]), modèles d'attente avec rappels (Berdjoudj et Aïssani [10]), modèles d'attente avec vacances (Rahmoune et Aïssani [66]), modèles d'attente avec priorités (Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [15] et Hamadouche et Aïssani [27]), réseaux de files d'attente (Lekadir et Aïssani [43, 44]), modèles stochastiques de gestion des stocks (Rabta et Aïssani [62, 63, 61]) et modèles de risques (Benouaret et Aïssani [9]). En outre, des précisions et des compléments à des résultats sur l'estimation de la vitesse de convergence et de la stabilité pour le cas apériodique ont été apporté par Mouhoubi [50] et Mouhoubi et Aïssani [52, 53]. De même, Rabta et Aïssani [64] ont récemment obtenu des bornes de perturbation des chaînes de Markov discrètes à espace d'états fini ou dénombrable. Toutefois, l'applicabilité de la méthode de stabilité forte, du point de vue théorique, est loin d'être évidente, notamment pour les systèmes complexes. En effet, en plus de l'identification du paramètre à perturber (flux des arrivées, structure du système, intensité du service, etc), les difficultés se situent dans l'écriture des noyaux de transition et surtout dans le choix des normes poids. Par ailleurs, elle nécessite souvent la réalisation d'une série de recherches intermédiaires, qui ont un intérêt particulier.

L'approximation d'une chaîne de Markov à espace d'état infini, en utilisant des chaînes de Markov à espaces d'états finis est d'une grande importance et souvent présente un défi, qui a attiré l'attention de nombreux chercheurs. Lorsque nous avons une distribution sta-

tionnaire d'une chaîne de Markov à espace d'état infini à résoudre, quand elle existe, la matrice des probabilités de transition, doit être tronquée d'une certaine façon, en vue d'avoir une matrice finie comme étant une première étape. Nous calculons ensuite la distribution stationnaire de la chaîne de Markov à états finis comme une approximation de celle à espace d'état infini. Nous pouvons nous attendre à ce que le niveau de troncature (ou de taille) augmente à l'infini, pour que la solution de la chaîne de Markov finie converge vers celle de la chaîne de Markov infinie.

Le principe de la troncature a commencé comme suit : " Pour résoudre un système infini d'équations linéaires avec un nombre infini d'inconnues, on limite le système aux  $n$  premières équations avec  $n$  inconnues, et on néglige le reste. La solution de ce système tend vers la solution du système original ". Le principe de la méthode remonte à 1913 par Riesz, la légitimité de la méthode a été examinée pour la première fois par Poincaré, où il montre que si la matrice  $A$  et le vecteur infini  $c$  du système ci-dessous

$$Ax = c \quad (\text{i.e. } \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots )$$

satisfait certaines conditions, alors le principe de la méthode est valide.

Le problème est étroitement connecté au problème des déterminants infinis, la solution  $y(n)$  du système tronqué  $n \times n$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}y_k(n) = c_i \quad \text{est donné par } y_k(n) = \Delta_n^{(k)} / \Delta_n$$

$i, k = 1, \dots, n$ , si  $\Delta_n \neq 0$ .

Dès que la théorie des déterminants infinis a été résolue, deux nouvelles branches de mathématiques sont apparues. Perron et Frobenius, en Allemagne, ont développé la théorie spectrale des matrices carrées finies non négatives. En Russie A. A. Markov a initié l'étude des chaînes de Markov qui équivaut à l'étude des matrices stochastiques carrées  $P = \{P(i, j)\}$ ,  $P(i, j) \geq 0$ ,  $\sum_j P(i, j) = 1$ .

Clairement, si la chaîne de Markov est finie (i.e.  $P$  est finie), alors la théorie de Perron et Frobenius est applicable. Cette approche de traitement des chaînes de Markov finies a été exploitée par Fréchet (1938) et en particulier par V.I. Romanovsky.

Cependant, il est clair que la théorie spectrale des matrices finies est insuffisante pour couvrir la théorie générale des chaînes de Markov, lorsque  $P$  devient infini. Les travaux de recherche sur la validité de la méthode de troncature pour les chaînes de Markov sont devenu utilisable, et un outil de travail important.

Dans ce travail, nous prouvons pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux problèmes de troncatures. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité forte dans la chaîne de Markov induite définie par troncature et augmentation de la matrice de transition du système  $M/M/1$ , et cela dans les deux types d'augmentation, augmentation de la première colonne et augmentation de la dernière colonne. Nous mettons en évidence les conditions pour lesquelles il sera possible d'approcher les caractéristiques du système idéal par celles correspondantes du modèle tronqué et augmenté. Après avoir prouvé le fait de stabilité forte, nous obtenons les inégalités de stabilité, avec un calcul exact des constantes. Dans un deuxième temps, et dans le but d'effectuer une étude comparative, nous avons appliqué l'approche sur les chaînes  $V$ -géométriquement ergodiques et stochastiquement monotones. Pour cela, nous avons construit, à partir des résultats de ces méthodes, des algorithmes permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur est établie. De plus, nous avons élaboré un simulateur dont l'objectif est de valider les résultats obtenus par un procédé algorithmique.

Ce mémoire comprend cinq chapitres avec une introduction générale, une conclusion générale et une bibliographie.

Le premier chapitre traite le problème de stabilité des chaînes de Markov. Dans le second chapitre nous abordons la théorie des chaînes  $V$ -fortement ergodiques et les chaînes  $V$ -fortement stables. Le troisième chapitre concerne la théorie des chaînes  $V$ -géométriquement ergodiques. Dans le quatrième chapitre, nous présentons la méthode de la troncature et les différents types d'augmentations. Nous présentons également trois méthodes pour approximer la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable. Le cinquième chapitre représente la partie pratique du mémoire. Il est consacré à la présentation et la discussion des résultats numériques concernant l'estimation des bornes de perturbation obtenus par l'application de la méthode de stabilité forte et l'une des approches présentés dans le quatrième chapitre, ainsi que ceux obtenus par simulation.

Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives et les directions de recherche induites par les résultats obtenus.

# STABILITÉ DES CHAÎNES DE MARKOV

L'objet de ce chapitre est d'introduire les principaux outils et concepts de la théorie de stabilité dans les chaînes de Markov, que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Les propriétés des chaînes de Markov à temps discret et espace d'états dénombrable sont bien connues et elles figurent dans de nombreux manuels (voir par exemple Meyn et Tweedie (2009) [47]). En particulier, les états d'une chaîne de Markov homogène sur un espace dénombrable sont transitoires ou récurrents, selon que la probabilité que le temps de retour dans cet état soit fini est strictement inférieur à 1 ou non. Chaque état récurrent peut ensuite être classé comme étant "nul" ou "positif" : on dira qu'un état récurrent est nul si la probabilité de retour dans cet état en  $n$  étapes tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, et positif sinon. Enfin, si la chaîne est irréductible, ce qui de manière heuristique signifie que tous les états communiquent avec probabilité positive, tous les états ont la même classification.

Même si les notions ne coïncident pas toujours, une classification similaire existe pour les chaînes de Markov à espace d'états général. Nous renvoyons aux ouvrages de Duflo (1990) [22], Meyn et Tweedie (2009) [47], Hernández-Lerma et Lasserre (2003) [29], Nummelin (2004) [55] pour une étude détaillée.

## 1.1 Noyau de transition et chaîne de Markov

La définition suivante introduit la notion de noyau de transition sur un ensemble quelconque  $\mathcal{X}$  muni d'une tribu  $\mathcal{B}$  ( $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ ).

**Définition 1.1.1** [29, 47, 55] *On appelle noyau de transition toute famille  $\mathcal{P} = \{P(x, \mathcal{B}), x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}\}$  telle que :*

1.  $P(x, \cdot)$  est une mesure de probabilité sur  $\mathcal{B}$  pour chaque  $x \in \mathcal{X}$  fixé, et
2.  $P(\cdot, B)$  est une fonction mesurable sur  $\mathcal{X}$  pour chaque  $B \in \mathcal{B}$  fixé.

Les  $P(x, B)$  sont appelées probabilités de transition (de  $x$  vers  $B$ ).

Etant donnée une mesure de probabilité initiale  $\mu$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , la définition d'une chaîne de Markov homogène  $(X_n)$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  repose sur ses distributions fini-dimensionnelles. Pour tout entier  $n$  et tout  $(n + 1)$ -uplet  $(B_0, \dots, B_n)$  de parties de  $\mathcal{B}$ , on pose :

$$\mathbb{P}_\mu[X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n] = \int_{x_0 \in B_0} \cdots \int_{x_{n-1} \in B_{n-1}} \mu(dx_0) P(x_0, dx_1) \cdots P(x_{n-1}, B_n) \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.2** [47] *Le processus  $X = (X_n)$  dont les lois fini-dimensionnelles satisfont (1.1) est appelé chaîne de Markov homogène de noyau de transition  $\mathcal{P}$  et de mesure initiale  $\mu$ .*

Etant donnés deux noyaux de transition  $\mathcal{P} = \{P(x, B)\}$  et  $\mathcal{Q} = \{Q(x, B)\}$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , il est utile d'introduire leur produit  $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \{[PQ](x, B)\}$  défini par :

$$[PQ](x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P(x, dy) Q(y, B), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}$$

On vérifie facilement que cette égalité définit un nouveau noyau de transition sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ . En particulier, on notera  $\mathcal{P}^n$  le noyau de transition obtenu en effectuant  $(n - 1)$  produits de  $\mathcal{P}$  avec lui même. On a pour tout  $n \geq 1$  :  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}, P^n(x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P(x, dy) P^{n-1}(y, B)$ , en prenant pour  $P^0(y, B)$  la mesure de Dirac en  $y$  ( $P^0(y, B) = 1$  si  $y \in B$ ,  $P^0(y, B) = 0$  sinon). On vérifie que  $P^n(x, B)$  s'interprète comme la probabilité de l'évènement  $X_n \in B$  conditionnelle à  $X_0 = x$ .

Une généralisation utile est la relation de Chapman-Kolmogorov [47, 11] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m, \quad 0 \leq m \leq n, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

$$P^n(x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P^m(x, dy) P^{n-m}(y, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P^{n-m}(x, dy) P^m(y, B)$$

On montre cette relation à partir de (1.1) en choisissant  $B_i = \mathcal{X}$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  et  $B_0 = \{x\}$ . Cette équation admet une interprétation intéressante : pour atteindre  $B$  en  $n$  étapes, partant de  $x$ , la chaîne doit nécessairement passer par une valeur  $y$  en  $m$  étapes, puis tout se passe comme si la chaîne démarrait en  $y$ , pour atteindre  $B$  en  $n - m$  étapes. Les valeurs prises antérieurement en  $y$  n'ont donc plus d'importance pour ce qui est postérieur à l'étape  $m$ . Plus généralement, la propriété suivante traduit l'indépendance entre futur et passé conditionnellement au présent :

**Propriété 1.1.1** [47] *Si  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de mesure initiale  $\mu$ , pour toute fonction mesurable bornée  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on a*

$$E[h(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) | X_0, \dots, X_n; X_n = x] = E[h(X_1, X_2, \dots) | X_0 = x]$$

## 1.2 Irréductibilité, atome, apériodicité

L'irréductibilité traduit le fait que, partant de n'importe quel point, la chaîne peut atteindre toute partie de mesure positive de l'espace d'états, pour une mesure appropriée [19]. Au préalable, définissons pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,

- Le temps de séjour dans  $B$  (après la date initiale) :

$$\eta_B = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n \in B}$$

où  $\mathbb{1}_A$  désigne la variable indicatrice d'un événement  $A$  ;

- Le temps de premier passage dans  $B$  (hormis l'état initial) :

$$\tau_B = \min\{n \geq 1, X_n \in B\}.$$

La durée moyenne de séjour dans  $B$  partant de  $x \in \mathcal{X}$  s'obtient comme :

$$E[\eta_B | X_0 = x] = \sum_{n=1}^{\infty} P^n[x, B] = U(x, B)$$

La famille  $\{U(x, B)\}$  a des propriétés similaires à celles d'un noyau de transition mais les  $U(x, \cdot)$  ne sont pas des probabilités. On utilisera également la probabilité de passage dans  $B$  partant de  $x$  :

$$L(x, B) = \mathbb{P}(\tau_B < \infty | X_0 = x)$$

Nous pouvons maintenant définir le concept de  $\phi$ -irréductibilité.

**Définition 1.2.1** [47, 55, 29, 69] *Soit  $\phi$  une mesure non identiquement nulle définie sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ . On dit que  $\phi$  est une mesure d'irréductibilité si*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}, \phi(B) > 0 \implies L(x, B) > 0$$

*On dit alors que la chaîne  $X = (X_n)$  est  $\phi$ -irréductible.*

On vérifie facilement qu'une définition équivalente de l'irréductibilité est obtenue en remplaçant  $L(x, B)$  par  $U(x, B)$  [29, 47]. Le choix de la mesure d'irréductibilité conditionnant la classification de la chaîne, comme nous le verrons ensuite, il importe de choisir une mesure de support le plus large possible. On définit ainsi une mesure d'irréductibilité

"maximale", dont l'existence est assurée par la proposition 1.2.2, Pour cela, considérons le noyau :

$$K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, B) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, B)2^{-(n+1)}, \quad x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B},$$

qui est un cas particulier de la résolvante de  $X$  [47].

**Proposition 1.2.1** [47] *Les formulations suivantes sont équivalentes à la  $\varphi$ -irréductibilité :*

1. Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , si  $\varphi(B) > 0$  alors  $U(x, B) > 0$ .
2. Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , si  $\varphi(B) > 0$  alors il existe  $n > 0$  (qui dépend peut être de  $x$  et  $B$ ) tel que  $P^n(x, B) > 0$ .
3. Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , si  $\varphi(B) > 0$  alors  $K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, B) > 0$ .

**Proposition 1.2.2** [47, 29, 55] *Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $\varphi$ -irréductible, il existe une mesure  $\psi$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  telle que :*

1.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $\psi$ -irréductible ;
2. Pour toute autre mesure  $\varphi'$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ,  $(X_n)$  est  $\varphi'$ -irréductible si et seulement si  $\varphi'$  est absolument continue par rapport à  $\psi$  ( $\psi \succ \varphi'$ ) ;
3. Si  $\psi(B) = 0$ , alors  $\psi(\bar{B}) = 0$  où  $\bar{B} = \{x; L(x, B) > 0\}$ .
4. La mesure de probabilité  $\psi$  est équivalente à

$$\psi'(B) = \int_{\mathcal{X}} \varphi'(dx) K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, B),$$

pour toute mesure d'irréductibilité finie  $\varphi'$ .

La mesure  $\psi$  est alors appelée mesure d'irréductibilité maximale.

Nous noterons, pour une chaîne de mesure d'irréductibilité maximale  $\psi$  :

$$B^+ = \{B \in \mathcal{B}; \psi(B) > 0\}.$$

D'après la proposition précédente, cet ensemble ne dépend pas du choix de  $\psi$ , car toutes les mesures d'irréductibilité maximales sont équivalentes.

**Définition 1.2.2** [47]

1. La chaîne de Markov  $(X_n)$  est dite  $\psi$ -irréductible si elle est  $\varphi$ -irréductible pour une certaine mesure  $\varphi$  et la mesure  $\psi$  est une mesure d'irréductibilité maximale vérifiant les conditions de la proposition 1.2.2.
2. On dit également qu'un ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est plain si  $\psi(B^c) = 0$ .
3. On dit qu'un ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est absorbant si  $P(x, B) = 1$  pour tout  $x \in B$ .

Les résultats suivants montrent la relation entre les ensembles plains et les ensembles absorbants :

**Proposition 1.2.3** [47] *Supposons que la chaîne de Markov  $(X_n)$  est  $\psi$ -irréductible. Alors*

1. *Chaque ensemble absorbant est plain.*
2. *Tout ensemble plain contient un sous-ensemble non vide qui est absorbant.*

**Définition 1.2.3** [47] *Un ensemble  $\alpha \in \mathcal{B}$  est appelé atome s'il existe une mesure  $\phi$  sur  $\mathcal{B}$  telle que :*

$$P(x, \cdot) = \phi(\cdot), \quad \forall x \in \alpha.$$

*Si la chaîne est  $\psi$ -irréductible et  $\psi(\alpha) > 0$  alors  $\alpha$  est dit atome accessible.*

Cette définition signifie simplement que pour tout  $x \in \alpha$ ,  $P(x, \cdot) \equiv P(\alpha, \cdot)$ . Un point singulier  $\alpha$  est toujours un atome.

L'existence d'une mesure d'irréductibilité est compatible avec un comportement périodique de la chaîne. Afin d'exclure cette possibilité, définissons précisément un concept de périodicité pour les chaînes à espace d'états quelconque. Dans le cas où  $\mathcal{X}$  est dénombrable et la chaîne irréductible (tout les états communiquent), il suffit que  $P(x, x) > 0$  pour un état  $x$  pour que la chaîne soit apériodique : on parle alors de chaîne fortement apériodique. La définition est moins immédiate pour un espace d'états quelconque.

Nous commençons par définir les notions de "small set" et "petite set".

**Définition 1.2.4** [47, 29] *On appelle  $\nu_m$ -small set tout  $C \in \mathcal{B}$  tel qu'il existe  $m > 0$  et une mesure non triviale  $\nu_m$  sur  $\mathcal{B}$  tels que :*

$$P^m(x, B) \geq \nu_m(B), \quad \forall x \in C, \forall B \in \mathcal{B}.$$

*On appelle  $\nu_a$ -petite set tout  $C \in \mathcal{B}$  tel que :*

$$K_a(x, B) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P^m(x, B) \geq \nu_a(B), \quad \forall x \in C, \forall B \in \mathcal{B}.$$

*où  $a = (a_m)$  est une suite de constantes positives de somme égale à 1 et  $\nu_a$  est une mesure non triviale sur  $\mathcal{B}$ .*

**Remarque 1.1** [47] On montre que (i) si  $C$  est  $\nu_a$ -petite, il existe  $(b_m)$  telle que  $C$  soit  $\nu_b$ -petite, avec  $\nu_b$  mesure maximale d'irréductibilité; (ii) l'union de deux petite (resp. small) sets est également un petite (resp. small) set.

Soit un  $\nu_M$ -small set  $C$ , où la mesure  $\nu_M := \nu$  est telle que  $\nu(C) > 0$ . Une telle mesure existe toujours si  $C \in \mathcal{B}^+$  [47].

On considère l'ensemble des entiers  $m$  tels que  $C$  est  $\nu_m$ -small pour une mesure  $\nu_m$  proportionnelle à  $\nu$  :

$$E_C = \{m \geq 1 \mid C \text{ est } \nu_m\text{-small, avec } \nu_m = \delta_m \nu, \text{ pour un } \delta_m > 0\}.$$

**Définition 1.2.5** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{R}}$  une chaîne  $\varphi$ -irréductible. Soit  $C \in \mathcal{B}^+$ . Alors  $d = \text{p.g.c.d.}(E_C)$  ne dépend pas du choix de  $C$  et est appelé période de la chaîne. Si  $d = 1$ ,  $(X_n)$  est dite apériodique. Si  $1 \in E_C$ ,  $(X_n)$  est dite fortement apériodique.

Notons en particulier que dans le cas fortement apériodique,  $P(x, C) > 0, \forall x \in C$ , ce qui fait le lien avec la définition dans le cas dénombrable.

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.2.1** [47] Pour une chaîne apériodique, les petite sets sont des small sets.

Pour les chaînes irréductibles et fortement apériodique, une première classification est fondée sur la notion de récurrence.

### 1.3 Chaînes récurrentes, chaînes transitoires

Lorsque  $\mathcal{X}$  est dénombrable et la chaîne  $(X_n)$  irréductible, un état est dit transitoire si le temps de séjour moyen dans cet état, partant de ce même état, est fini et il est dit récurrent dans le cas contraire. De plus, tous les états sont de même nature (récurrents ou transitoires) et la chaîne peut être qualifiée de récurrente ou transitoire.

On retrouve la même dichotomie pour un espace d'états quelconque, mais les définitions sont plus délicates. La classification repose sur le (pseudo) noyau de transition  $\{U(x, B)\}$ ,  $U(x, B)$  représentant le temps de séjour moyen dans  $B$  partant de  $x$ .

**Définition 1.3.1** [47] L'ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est dit

1. récurrent si  $U(x, B) = +\infty, \forall x \in B$  ;
2. uniformément transitoire si  $\exists M < \infty$  t.q  $U(x, B) < M, \forall x \in B$  ;
3. transitoire s'il existe une famille dénombrable  $(B_n)$  d'ensembles uniformément transitoires telle que  $B = \bigcup_n B_n$ .

Avec cette définition, un ensemble récurrent peut également être transitoire. Ainsi  $\mathcal{X}$  est toujours récurrent et s'il est dénombrable, on peut évidemment l'écrire comme la réunion de tous les singletons. Si  $(X_n)$  est transitoire, tous les états sont transitoires donc les singletons sont uniformément transitoires et  $\mathcal{X}$  est transitoire. Le résultat suivant fournit une première dichotomie de l'ensemble des chaînes irréductibles.

**Définition 1.3.2** [47] On note  $\mathcal{R}$  la classe des chaînes récurrentes, définies par :

$$(X_n) \in \mathcal{R} \iff U(x, B) = +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+$$

On note  $\mathcal{T}$  la classe des chaînes transitoires, définies par :

$$(X_n) \in \mathcal{T} \iff \exists (B_j)_j, \mathcal{X} = \bigcup_j B_j, U(x, B_j) \leq M_j < \infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

**Théorème 1.3.1** [47] Si  $(X_n)$  est une chaîne  $\varphi$ -irréductible, elle est soit récurrente soit transitoire.

Une notion de récurrence un peu plus forte, mais permettant d'obtenir des résultats également plus forts, est celle de Harris-récurrence. Au lieu d'être fondée sur l'espérance du temps de séjour dans  $B$ , la définition repose sur la probabilité que ce temps de séjour soit infini.

**Définition 1.3.3** [47] Une chaîne  $(X_n)$   $\varphi$ -irréductible est dite Harris-récurrente si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+, \quad Q(x, B) = \mathbb{P}[\eta_B = +\infty \mid X_0 = x] = 1$$

Autrement dit, partant d'un point quelconque, la chaîne visite infiniment souvent tout ensemble de  $\varphi$ -mesure positive. On peut de manière équivalente [47] définir la Harris-récurrence par :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+, \quad L(x, B) = \mathbb{P}[\tau_B < \infty \mid X_0 = x] = 1.$$

Si  $(X_n)$  est récurrente elle n'est pas nécessairement Harris-récurrente mais il existe un ensemble absorbant  $H$  sur laquelle la restriction de la chaîne est Harris-récurrente, et tel que  $\varphi(H^c) = 0$ . Le critère suivant montre l'importance des petite sets [47].

**Théorème 1.3.2** Si  $(X_n)$  est une chaîne  $\varphi$ -irréductible. S'il existe un petite set  $C$  tel que  $\forall x \in \mathcal{X}, L(x, C) = 1$  alors  $(X_n)$  est Harris-récurrente.

**Propriété 1.3.1** [1]

- Toute chaîne de Harris est récurrente irréductible.
- Si la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$  n'est pas séparable (engendrée par un ensemble dénombrable), alors une chaîne récurrente irréductible n'est pas nécessairement de Harris.
- Toute chaîne de Harris est irréductible.
- Toute chaîne récurrente irréductible et discrète est de Harris.

**Définition 1.3.4** Soit  $X$  une chaîne de Harris à espace de phase  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , de noyau de transition  $P$  et de mesure invariante  $\mu$ .

1.  $X$  est dite périodique de période un entier strictement positif  $d \geq 1$ , s'il existe une partition mesurable  $C_1, \dots, C_d$ ,  $F$  des parties de  $\mathcal{X}$  tel que  $\mu(F) = 0$  et  $P(\cdot, C_i) = 1$  sur  $C_{i-1}$  pour tout  $2 \leq i \leq d$ , et  $P(\cdot, C_1) = 1$  sur  $C_d$ . Les ensembles  $C_i$  sont appelés cycles et la partition de  $\mathcal{X}$ , décomposition cyclique de  $\mathcal{X}$ .
2.  $X$  est dite apériodique si pour tout couple de mesure de probabilité  $(\nu_1, \nu_2)$  sur  $\mathcal{B}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nu_1 P^n - \nu_2 P^n\| = 0$$

Dans ce cas  $d = 1$ , où

$$\mu P^n(x, B) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P^n(x, B), \forall B \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ pour toute mesure } \mu \text{ sur } \mathcal{B}$$

**Remarque 1.2** Si  $X$  est une chaîne de Markov discrète et récurrente au sens de Harris alors  $d$  existe et est défini par :

$$d = \text{PGCD}\{n \geq 1 : P^n(x, \{x\}) > 0, \forall x \in \mathcal{X}\}$$

## 1.4 Existence de mesures invariantes

Afin d'obtenir des propriétés de stabilité plus fortes, on est amené à pousser plus loin la classification des chaînes récurrentes. La stabilité maximale pour une chaîne de Markov consiste en ce que les variables  $X_n$  soient toutes de même loi. Ceci nous amène à introduire les notions de mesure invariante et sous-invariante.

**Définition 1.4.1** [47] Une mesure non nulle  $\sigma$ -finie  $\pi$  sur  $\mathcal{B}$  telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \pi(B) = \int P(x, B)\pi(dx) \quad [\text{resp. } \pi(B) \geq \int P(x, B)\pi(dx)]$$

est dite invariante [resp. sous-invariante]. S'il existe une mesure de probabilité invariante, la chaîne est dite positive.

Pour une chaîne récurrente, une mesure invariante peut ou non exister. Lorsqu'une telle mesure existe et est finie, on peut toujours la normaliser pour obtenir une mesure de probabilité invariante. Remarquons qu'étant donnée une mesure de probabilité initiale  $\mu$ , on a

$$\int P(x, B)\mu(dx) = \mathbb{P}_\mu[X_1 \in B].$$

Donc si  $\mu$  est invariante :

$$\begin{aligned}
 \mu(B) &= \mathbb{P}_\mu[X_1 \in B] = \int \left[ \int P(y, dx) \mu(dy) \right] P(x, B) \\
 &= \int \mu(dy) \int P(y, dx) P(x, B) \\
 &= \int \mu(dy) P^2(y, B) \\
 &= \mathbb{P}_\mu[X_2 \in B]
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $n$ ,  $\mathbb{P}_\mu[X_n \in B] = \mu(B)$  ( $\forall B \in \mathcal{B}$ ). En utilisant la propriété de Markov, cela équivaut à la stricte stationnarité de la chaîne : la loi du processus  $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k})$  est indépendante de  $n$ , pour tout entier  $k$ .

Inversement si  $(X_n)$  est strictement stationnaire,  $X_1$  et  $X_0$  ont la même loi, ce qui s'écrit  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(B) = \int P(x, B) d\mu(x)$ , où  $\mu$  désigne la probabilité initiale. On a donc le résultat suivant.

**Propriété 1.4.1** [47] *La chaîne  $(X_n)$  est strictement stationnaire si et seulement si sa loi de probabilité initiale est invariante.*

Cette propriété rend cruciale la recherche de mesures invariantes de masse finie. Une autre raison de l'importance des mesures de probabilités invariantes est liée au comportement ergodique (ou de long terme) de la chaîne. Supposons en effet qu'il existe une mesure de probabilité limite  $\pi_\mu$ , définie par :  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $\mathbb{P}_\mu[X_n \in B] \longrightarrow \pi_\mu(B)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \pi_\mu(B) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \mu(dx) P^n(x, B) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \mu(dx) \int P^{n-1}(x, dy) P(y, B) \\
 &= \int P(y, B) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int P^{n-1}(x, dy) \mu(dx) \\
 &= \int P(y, B) \pi_\mu(dy)
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_\mu$  est invariante. En particulier, s'il existe une unique mesure de probabilité invariante, la probabilité limite sera indépendante de  $\mu$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.4.1** [47] *Si  $(X_n)$  est récurrente, elle admet une unique mesure sous-invariante  $\pi$  (à une constante multiplicative près) et cette mesure est invariante. De plus,  $\pi$  est équivalente à toute mesure d'irréductibilité maximale  $\psi$ .*

Ce théorème nous conduit à une nouvelle dichotomie parmi les chaînes récurrentes. On distingue celles admettant une mesure de probabilité invariante (la chaîne est dite positive récurrente) des autres (la chaîne est dite nulle récurrente). Avec des notations évidentes, cette dichotomie s'écrit :  $\mathcal{R} = \mathcal{P} + \mathcal{N}$ , avec pour  $(X_n) \in \mathcal{R}$  :

$$(X_n) \in \mathcal{P} \iff \forall B \in \mathcal{B}, \pi(B) = \int P(x, B)\pi(dx)$$

où  $\pi$  est une mesure de probabilité, et

$$(X_n) \in \mathcal{N} \iff \forall B \in \mathcal{B}, \mu(B) \geq \int P(x, B)\mu(dx)$$

où  $\mu$  est une mesure telle que  $\mu(\mathcal{X}) = +\infty$ . Notons qu'il existe d'autres caractérisations de la positive (ou nulle) récurrence fondées sur le temps de retour : par exemple si l'on peut trouver un compact  $C$  tel que  $\sup_{y \in C} E[\tau_C | X_0 = y] < +\infty$ , la chaîne est positive récurrente moyennant quelques conditions supplémentaires. [assurant que les compacts sont des petite sets, voir Théorème 1.6.1 plus bas].

## 1.5 Ergodicité

L'ergodicité traduit la convergence des itérés du noyau de transition vers la mesure stationnaire [42]. Jusqu'ici nous avons caractérisé la stabilité d'une chaîne en terme de récurrence. Une autre façon d'envisager la stabilité d'une chaîne consiste à étudier si elle converge vers un état stationnaire quelque soit son point de départ. Nous avons déjà vu que l'existence d'une mesure de probabilité invariante était une condition nécessaire pour qu'une telle convergence ait lieu. Nous allons voir que pour les chaînes  $\psi$ -irréductibles et positives récurrentes la propriété est vérifiée pour une notion forte de la convergence que nous allons préciser. Rappelons que la norme en variation totale d'une mesure  $\mu$  est définie par  $\|\mu\| = \sup \int f d\mu$ , où le supremum est pris sur  $\{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f| \leq 1\}$ . Plus généralement, on définit  $\|\mu\|_g = \sup\{\int f d\mu : |f| \leq g\}$ , où  $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est mesurable.

**Théorème 1.5.1** [47] *Si  $(X_t)$  est une chaîne de Markov Harris récurrente, positive de mesure invariante  $\pi$  et apériodique, alors pour toute mesure initiale  $\mu$*

$$\left\| \int P^n(x, \cdot)\mu(dx) - \pi \right\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

En prenant pour  $\mu$  la masse de Dirac en  $x$ , un corollaire de ce théorème est que pour toute fonction  $f$  bornée et mesurable :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \lim_{n \rightarrow +\infty} E[f(X_n) | X_0 = x] = \int f d\pi. \quad (1.2)$$

En particulier, pour  $f = \mathbb{1}_B$ ,  $B \in \mathcal{B}$  :  $P^n(x, B) \longrightarrow \pi(B)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ .

Les chaînes vérifiant les hypothèses du théorème sont dites *ergodiques*.

Lorsque  $f$  n'est pas supposée bornée, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.5.2** [47] *Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov Harris récurrente, positive de mesure invariante  $\pi$ , fortement apériodique, de mesure d'irréductibilité maximale  $\psi$ , et soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow [1, +\infty[$ . Alors*

1. *si  $\int f d\pi = +\infty$ ,  $E[f(X_n) | X_0 = x] \longrightarrow +\infty$  quand  $n \longrightarrow +\infty$*
2. *si  $\int f d\pi < +\infty$ , alors pour tout  $x \in A$ , où  $A$  est absorbant et tel que  $\psi(A^c) = 0$ , on a*

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi\|_f \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On obtient en particulier, cette fois-ci pour  $f$  non nécessairement bornée (mais sous des hypothèses un peu plus fortes)

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} E[f(X_n) | X_0 = x] = \int f d\pi. \quad (1.3)$$

Si dans le théorème, la condition 2 est vraie pour tout  $x$ , la chaîne est dite *f-ergodique*. Il est parfois nécessaire de connaître la vitesse de convergence vers 0 de  $\|P^n(x, \cdot) - \pi\|_f$ , et cela va être l'objectif des deux chapitres suivants.

## 1.6 Critères de classification

Pour des modèles particuliers, il n'est généralement pas facile de vérifier directement les propriétés de chaîne de Markov transitoire, récurrente ou admettant une loi de probabilité invariante. Il existe heureusement des critères s'exprimant simplement à partir de conditions sur les probabilités de transition en une étape. Ces contraintes sont de deux types : continuité et contrôle de la dérive moyenne. Pour simplifier la présentation nous supposerons dans cette partie que l'espace d'états  $\mathcal{X}$  est égal à  $\mathbb{R}^d$ , où  $d$  est un entier, muni de sa topologie usuelle.

La condition suivante est appelée *forte continuité* :

$(C_0)$  : *L'application  $P(\cdot, B)$  est continue, pour tout  $B \in \mathcal{B}$ .*

Cette contrainte se révèle souvent trop forte. Rappelons qu'une fonction  $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement si l'ensemble  $\{x : h(x) > c\}$  est ouvert pour toute constante  $c$ . Une chaîne telle que, pour tout ouvert  $B$ , l'application  $P(\cdot, B)$  est semi-continue inférieurement est dite *Fellerienne*. Plus généralement, on a la définition suivante.

**Définition 1.6.1** [47] *S'il existe une application  $T(\cdot, \cdot)$  telle que*

1.  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}, P(x, B) \geq T(x, B)$ ,

2.  $T(\cdot, B)$  est semi-continue inférieurement,  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,
  3.  $T(x, \cdot)$  est une mesure non nulle sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$
- $(X_t)$  est appelée  $T$ -chaîne.

Une chaîne vérifiant  $(C_0)$  est évidemment une  $T$ -chaîne. La condition 1. peut être remplacée, si nécessaire, par des contraintes moins fortes, portant sur toutes les probabilités de transition, du type

1. Il existe une suite  $(a_n)$  de constantes positives de somme égale à 1 telle que

$$K_a(x, B) = \sum_{n \geq 1} a_n P^n(x, B) \geq T(x, B).$$

$T$  est alors appelée composante continue de  $K_a$ .

Ces contraintes de continuité ne sont pas nécessaires pour la stabilité, mais elles permettent d'obtenir des caractérisations en se limitant aux ensembles compacts.

**Théorème 1.6.1** [47] *Si  $(X_t)$  est une  $T$ -chaîne  $\psi$ -irréductible, les compacts sont des petite sets.*

L'autre type de conditions porte sur l'opérateur de dérive  $\Delta$ . A toute fonction  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , intégrable par rapport aux mesures  $P(x, \cdot)$  ( $\forall x \in \mathcal{X}$ ), on associe

$$\Delta V(x) = \int P(x, dy)V(y) - V(x) = E[V(X_{t+1}) - V(X_t) | X_t = x]$$

Cet opérateur calcule, pour tout point initial  $x$ , la valeur moyenne de la variation de  $V(x)$  en une étape. On a le critère de récurrence suivant :

**Théorème 1.6.2** [47] *Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov  $\psi$ -irréductible,  $V$  une fonction de  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , intégrable par rapport aux mesures  $P(x, \cdot)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ , et  $C$  un compact (ou un petite set). Alors si  $(C_0)$  est vraie, ou si  $(X_n)$  est une  $T$ -chaîne, et si  $\Delta V(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in C^c$ , la chaîne  $(X_n)$  est récurrente.*

L'interprétation de l'inégalité est évidente : si la chaîne sort d'un certain compact, il existe une "force de rappel" faisant diminuer, en moyenne, la valeur de  $V(X_t)$ . En pratique, il s'agit de trouver une telle fonction  $V$  (appelée fonction test, ou fonction de Lyapounov) ainsi qu'un compact  $C$  permettant de conclure. L'existence d'une loi de probabilité invariante peut être obtenue à partir du résultat suivant.

**Théorème 1.6.3** [47] *Sous les hypothèses du Théorème 1.6.2 et si*

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &\leq -1 & \forall x \in C^c \\ \Delta V(x) &\leq M & \forall x \in C \end{aligned}$$

où  $M$  est une constante, la chaîne  $(X_t)$  est positive récurrente.

Dans la première inégalité, la valeur  $-1$  peut être remplacée par n'importe quelle constante strictement négative (quitte à modifier  $V$ ). Le critère suivant permet d'obtenir l'existence de moments de la probabilité invariante.

**Théorème 1.6.4** [47] *Soit  $(X_t)$  une chaîne de Markov positive récurrente de loi de probabilité invariante  $\pi$ . Soient  $V, f$  et  $s$  des fonctions  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que*

$$\Delta V(x) \leq -f(x) + s(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Alors  $\int f d\pi \leq \int s d\pi$ .

Si dans ce Théorème on peut choisir  $s$  de la forme :  $s(x) = b\mathbb{1}_C(x)$ , où  $b$  est une constante positive et  $C \in \mathcal{B}$ , on obtient

$$\int f d\pi \leq b\pi(C) < +\infty.$$

Donnons pour conclure cette partie, des critères utilisant l'opérateur de dérive.

**Théorème 1.6.5** [47] *Si  $(X_t)$  est une chaîne de Markov  $\psi$ -irréductible et si, pour  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on a  $\Delta V(x) \geq 0 \forall x \in C^c$*

*où  $C \in \mathcal{B}^+$ , et*

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \int P(x, dy) |V(x) - V(y)| < \infty,$$

*Si de plus  $\{x \in \mathcal{X} \mid V(x) > \sup_{y \in C} V(y)\} \in \mathcal{B}^+$ , alors la chaîne n'est pas positive récurrente.*

**Théorème 1.6.6** [47] *Soit  $(X_t)$  est une chaîne de Markov  $\psi$ -irréductible. Alors  $(X_t)$  est transitoire si et seulement si il existe une fonction,  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  bornée, et  $r \geq 0$  tels que*

1.  $\{x \mid V(x) \leq r\}$  et  $\{x \mid V(x) > r\}$  appartiennent à  $\mathcal{B}^+$
2. Pour tout  $x$  tel que  $V(x) > r$ , on a  $\Delta V(x) > 0$ .

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les principaux outils et concepts de la théorie de stabilité dans les chaînes de Markov, que nous utiliserons dans les chapitres suivants. L'accent est mis sur les outils de base (Noyau de transition, irréductibilité, atome, apériodicité, ...). De même, nous avons précisé la différence entre les chaînes récurrentes et les chaînes transitoires. Ainsi, nous avons donné des conditions suffisantes sur le noyau de transition pour l'existence d'une unique mesure invariante  $\pi$ . Et nous avons terminé par des critères de classification.

# LA $V$ -ERGODICITÉ UNIFORME ET LA $V$ -STABILITÉ FORTE

## 2.1 Préliminaires et notations

Dans ce paragraphe, on présente tous les objets mathématiques dont on aura besoin au cours de ce travail. Ainsi, on définit dans la catégorie des espaces topologiques, la sous-catégorie particulière des espaces mesurables, de même que leurs foncteurs particuliers correspondants, de la manière suivante :

1. Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  un espace mesurable, où  $\mathcal{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre engendrée par une partie dénombrable  $\mathcal{X}$ .
  2. On considère  $X = \{X_t, t = 0, 1, \dots\}$  une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathcal{X}$ , donnée par un noyau de transition régulier  $P(x, B)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ .
  3. On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante  $\pi$  de l'opérateur  $P$  tel que  $\pi(\mathcal{X}) = 1$  (mesure de probabilité). Cette hypothèse est satisfaite, en particulier, si la chaîne est récurrente positive au sens de Harris.
  4. On considère  $m\mathcal{B}$  ( $m\mathcal{B}^+$ ), l'espace des mesures finies (non négatives) sur  $\mathcal{B}$ .
  5. On considère  $\mathcal{J}$  ( $\mathcal{J}^+$ ), l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives).
- Associons à chaque noyau de transition  $P$  les deux applications linéaires suivantes :

$$\mathcal{L}_p : m\mathcal{B} \longrightarrow m\mathcal{B}$$

et

$$\mathcal{L}_p^* : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$$

définies par

$$\mu P(B) = \mathcal{L}_p(\mu)(B) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P(x, B), \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

et

$$Pf(B) = \mathcal{L}_p^*(f)(x) = \int_{\mathcal{X}} P(x, dy)f(y), \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Le produit de la mesure  $\mu \in m\mathcal{B}$  et la fonction  $f \in \mathcal{J}$ , sera noté  $\mu f$ , et défini par

$$\mu f = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx)f(x)$$

Le produit des deux noyaux de transition  $P$  et  $Q$  est défini de la manière suivante :

$$PQ(x, B) = \int_{\mathcal{X}} P(x, dy)Q(y, B), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}$$

Supposons que l'espace  $m\mathcal{B}$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , qui confère au sous espace  $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{B} : \|\mu\| < \infty\}$  une structure d'espace normé complet et par suite d'espace de Banach. Cette norme met en évidence dans la classe des applications linéaires de l'espace  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$ , l'espace  $\mathcal{A}$  des opérateurs bornés dont la norme induite par celle de  $\mathcal{M}$  est définie par

$$\|P\| = \sup\{\|\mu P\|, \|\mu\| \leq 1\}$$

**Remarque 2.1** Le produit  $\mu f$  défini une forme bilinéaire qui établie la dualité entre les deux espaces  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{J}$ . Les opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^*$  sont transposés, en d'autres termes :

$$\mu(Pf) = (\mu P)f$$

Dans la suite, on notera

- a)  $\mathcal{L}_p(\mu)$  par  $\mu P$  pour  $\mu \in \mathcal{M}$ .
- b)  $\mathcal{L}_p^*(f)$  par  $Pf$  pour  $f \in \mathcal{J}$ .

Pour cela, le noyau stochastique  $P$  correspond à un opérateur linéaire positif  $P$  sur le cône  $\mathcal{M}^+ = m\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{M}$ . On suppose de plus que la norme  $\|\cdot\|$  est compatible avec l'ordre structurel sur  $\mathcal{M}$  et de la topologie uniforme sur le cône  $\mathcal{M}^+$ , c'est à dire :

1.

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \quad \forall i = 1, 2 \quad (2.1)$$

2.

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2 \quad (2.2)$$

3.

$$|\mu|(\mathcal{X}) \leq k\|\mu\| \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \quad (2.3)$$

où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$  et  $k$  une certaine constante finie positive.

4. On suppose tout le long de ce travail que la condition ci-dessous est vérifiée.

$$\|P\| < \infty \quad (2.4)$$

Supposons, en plus, dans certaines situations que la propriété suivante est vérifiée.

5.

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2 \quad (2.5)$$

Cette condition signifie que  $|\mu|$  et  $\mu$  ont la même norme. De plus,  $|\mu(\mathcal{X})| \leq k\|\mu\|$  pour tout  $\mu \in \mathcal{M}$ .

Remarquons ici que les classes de normes définies par

$$\|\mu\|_V = \int_{\mathcal{X}} V(x)|\mu|(dx)$$

et

$$\|\mu\|_{q,\varphi} = \begin{cases} (\int_{\mathcal{X}} |\frac{d\mu}{d\varphi}|^q d\varphi)^{\frac{1}{q}} & \forall \mu \ll \varphi \text{ et } q \geq 1 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

vérifient les conditions (2.1), (2.2) et (2.3), où  $V$  est une fonction mesurable bornée arbitraire strictement positive (pas nécessairement finie) et  $\varphi$  une mesure finie positive. Notons que dans l'expression (2.3),

$$|\mu\mathbf{1}| = |\mu(\mathcal{X})| \leq |\mu|(\mathcal{X}) \leq k\|\mu\| \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \implies \|\mathbf{1}\| \leq k < \infty \implies \mathbf{1} \in \mathcal{J}$$

où  $\mathbf{1}$  est une fonction identiquement égale à l'unité. On note par  $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$  le projecteur stationnaire de noyau  $P$ , En d'autres termes, le noyau défini par

$$\Pi(x, dy) = \mathbf{1}(x)\pi(dy), \quad \forall (x, dy) \in \mathcal{X} \times \mathcal{B} \quad (2.6)$$

et par  $I$  l'opérateur identité sur  $\mathcal{M}$ . On considère l'opérateur de Césaro défini par

$$P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s, \quad t \in \mathbb{N}^*$$

Munissons l'espace  $\mathcal{M}$  d'une certaine norme  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_V$ , définie par

$$\|\mu\|_V = \int_{\mathcal{X}} V(x)|\mu|(dx) \quad (2.7)$$

où  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , et vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\sup[V(x)^{-1}, x \in \mathcal{X}] = \rho > 0$ .
2.  $V$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

La norme induite dans l'espace  $\mathcal{J}$  est

$$\|f\|_V = \sup \left( \frac{|f(x)|}{V(x)}, x \in \mathcal{X} \right)$$

Elle met en évidence dans la classe des applications linéaires de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$ , l'espace  $\mathcal{A}$  des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_V = \sup \left( \frac{\int_{\mathcal{X}} V(y) |P(x, dy)|}{V(x)}, x \in \mathcal{X} \right)$$

Ces normes induites vérifient alors les propriétés suivantes :

$\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall f \in \mathcal{J}, \forall P \in \mathcal{A}$ , on a

- a)  $\|\mu P\|_V \leq \|\mu\|_V \|P\|_V$ .
- b)  $|\mu f| \leq \|\mu\|_V \|f\|_V$ .
- c)  $\|f \circ \mu\|_V \leq \|f\|_V \|\mu\|_V$ .
- d)  $\|Pf\|_V \leq \|P\|_V \|f\|_V$ .
- e)  $\|\mathbb{1}\|_V = \sup[V(x)^{-1}, x \in \mathcal{X}] = \varrho$ , où  $\mathbb{1}$  est la fonction égale à l'unité,  $\mathbb{1} \in \mathcal{J}$ .
- f)  $\|PQ\|_V \leq \|P\|_V \|Q\|_V$ .
- g)  $|\mu|(B) \leq \varrho \|\mu\|_V$ , où  $B \in \mathcal{B}$ .

Avant de terminer ce paragraphe nous donnons la définition du potentiel d'une chaîne.

**Définition 2.1.1** [51] *Soit la chaîne  $X$  de noyau de transition  $P$ . On appelle potentiel de  $X$  ou de  $P$ , le noyau*

$$W = \sum_{t \geq 0} P^t$$

Signalons que la mesure  $W(x, \cdot)$  n'est pas toujours  $\sigma$ -finie. Pour le voir, il suffit de prendre  $P = I$ , où  $I$  est l'opérateur identité.

## 2.2 $V$ -Ergodicité uniforme

Pour formuler la  $V$ -ergodicité uniforme, soit une chaîne de Markov homogène  $(X_n)$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , et soit  $P_1$  et  $P_2$  deux noyaux de transition, et pour une fonction positive  $1 \leq V < \infty$ , on définit la *distance  $V$ -norme* entre  $P_1$  et  $P_2$  par

$$\|P_1 - P_2\|_V = \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{\|P_1(x, \cdot) - P_2(x, \cdot)\|_V}{V(x)}. \quad (2.8)$$

Le produit externe de la fonction  $\mathbb{1}$  et la mesure  $\pi$  est noté par

$$[\mathbb{1} \otimes \pi](x, B) = \Pi(B), \quad x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}.$$

Dans des applications typiques nous considérons la distance  $\|P^k - \mathbb{1} \otimes \pi\|_V = \|P^k - \Pi\|_V$  pour un certain  $k$  grand.

**Définition 2.2.1** [47] Une chaîne de Markov ergodique  $(X_n)$  est dite  $V$ -uniformément ergodique si

$$\|P^n - \Pi\|_V \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

## 2.3 Ergodicité uniforme et stabilité forte

La notion d'ergodicité uniforme correspond à la convergence uniforme de  $\|P^n - \Pi\|$  vers zéro par rapport à  $x$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Définition 2.3.1** [47] Une chaîne  $(X_n)$  est dite uniformément ergodique si elle est  $V$ -uniformément ergodique et cela dans le cas particulier où  $V \equiv 1$  c'est à dire :

$$\|P^n - \Pi\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

ou bien nous pouvons écrire,

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \|P^n(x, \cdot) - \pi\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour les  $T$ -chaînes, nous donnons le résultat suivant :

**Théorème 2.3.1** [47] Si  $(X_n)$  est une  $T$ -chaîne  $\psi$ -irréductible et apériodique, et si l'espace des états  $\mathcal{X}$  est compact, alors  $(X_n)$  est uniformément ergodique.

**Théorème 2.3.2** [6, 36] La chaîne  $(X_n)$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si l'opérateur  $I - P + \Pi$  est inversible et borné

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty \tag{2.9}$$

De plus, la relation (2.9) entraîne  $\|\Pi\| < \infty$ .

**Remarque 2.2** Il est important de noter que :

1. L'inverse de  $B = I - P + \Pi$  est défini dans le sous espace  $\mathcal{MA}$

$$\mathcal{MA} = \{\mu P : \mu \in \mathcal{M}, P \in \mathcal{A}\}$$

De plus,  $\|A^{-1}\| = \sup(\|\mu A^{-1}\| : \|\mu\| \leq 1, \mu \in \mathcal{MA})$ .

2. On définit la période  $d(X)$  d'une chaîne quelconque  $X$  par l'égalité

$$d(X) = \sup_t \dim\{\mu \in \mathcal{M} : \mu = \mu P^t\}$$

Dans le cas où  $d(X) = 1$ , la chaîne  $X$  est dite apériodique et si  $d(X) > 1$ , on dira alors que  $X$  est périodique.

3. Si la chaîne est de Harris, alors la période  $d(X)$  coïncide avec la période introduite dans la définition 1.3.4.
4. Pour les chaînes uniformément ergodiques, comme pour les chaînes récurrentes au sens de Harris, il est possible de construire des sous classes d'états périodiques, c'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 2.3.3** [6, 36] *Considérons une chaîne  $X$  uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ . Alors, il existe une période finie  $d = d(X)$  et une partition de l'espace*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=0}^{d-1} \mathcal{X}_i, \quad \mathcal{X}_i \in \mathcal{B} \forall i \text{ et } \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

tel que les conditions suivantes sont vérifiées

1. Pour chaque  $1 \leq i \leq d$ , la restriction  $P_i$  du noyau  $P^d$  à l'espace  $(\mathcal{X}_i : \mathcal{X}_i \cap \mathcal{B})$  est un noyau de transition relatif à une chaîne de Markov apériodique uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\mu(\cdot)\|_0 = \|\mu(\mathcal{X}_i \cap \cdot)\|$ .
2. L'ensemble  $\mathcal{X}_0$  est tel que :  $\pi(\mathcal{X}_0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu P^t\|_0 \rightarrow 0$  uniformément sur  $\{\mu : \|\mu\| \leq 1\}$ .

Le résultat suivant présente la première estimation de l'ergodicité d'une chaîne apériodique. Pour cela, on considère le coefficient d'ergodicité  $\Lambda_t$ , pour les chaînes apériodiques, définis par

$$\Lambda_t(P) = \sup\{\|\mu P^t\| : \|\mu\| \leq 1, \mu(\mathcal{X}) = 0 \text{ et } \mu \in \mathcal{MP}\}$$

**Théorème 2.3.4** [6, 36] *Une chaîne de Markov  $X$ , récurrente au sens de Harris et apériodique, est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

1.  $\Lambda_t(P) < 1$  pour un certain  $t \geq 1$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_t(P) = 0$
3. Il existe un opérateur compact  $\mathbb{K}$  tel que  $\|P^t - \mathbb{K}\| < 1$  pour un certain  $t \geq 1$  et  $d(X) = 1$ .
4.  $\|P^t - \Pi\| \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .
5. Il existe  $0 < \rho < 1$  tel que

$$\|P^t - \Pi\| = O(\rho^t) \text{ pour } t \rightarrow +\infty$$

Une conséquence importante du théorème, est décrite par le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3.1** *Une chaîne de Markov  $X$ , récurrente au sens de Harris et apériodique, est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un nombre réel  $0 < \rho < 1$  tel que :*

$$\|\mu P^n\| \leq \rho \|\mu\|, \forall \mu \in \mathcal{M} : \mu(\mathcal{X}) = 0 \quad (2.10)$$

Une des conditions les plus significatives pour l'ergodicité des chaînes de Markov est la condition de Doeblin, qui est définie comme suit :

**Définition 2.3.2** [47] (**Condition de Doeblin**) *Supposons qu'il existe une mesure de probabilité  $\phi$  avec la propriété telle que pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\delta > 0$*

$$\phi(B) > \varepsilon \implies P^m(x, B) \geq \delta \quad (2.11)$$

pour tout  $x \in \mathcal{X}$ .

**Théorème 2.3.5** [47] *Une chaîne  $(X_n)$   $\psi$ -irréductible et apériodique, satisfait la condition de Doeblin si et seulement si elle est uniformément ergodique.*

Introduisons à présent la notion de stabilité forte.

**Définition 2.3.3** *La chaîne de Markov  $X$  est dite fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si*

1.  $\|P\| < \infty$ .
2. *Chaque noyau de transition  $Q$  dans un certain voisinage  $\{Q : \|Q - P\| < \varepsilon\}$ , admet une mesure invariante unique  $\nu = \nu(Q)$ .*
3. *Il existe une constante  $C = C(P)$ , telle que*

$$\|\nu - \pi\| \leq C \|P - Q\|$$

Notons qu'une chaîne peut être stable par rapport à une norme et instable par rapport à une autre.

Pour le cas  $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$ , les chaînes uniformément ergodiques ont été étudiées dans [41], [54] et [69]. Des exemples exposés dans plusieurs travaux (cf. [2]) montrent qu'une classe importante de chaînes de Markov (de type marche aléatoire) n'ont pas la propriété de récurrence fortement positive et ne sont pas quasi-compacts. Néanmoins, ces chaînes sont ergodiques pour un choix judicieux des normes poids ( $V$ -normes  $\|\cdot\|_V$ ).

Énonçons à présent un résultat qui exprime qu'une petite déviation sur les noyaux de transition induit une déviation de même ordre sur les mesures stationnaires.

**Théorème 2.3.6** [6, 36] *La stabilité forte de la chaîne  $X$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  est équivalente à son ergodicité uniforme par rapport à cette même norme. Pour cela, quel que soit le noyau  $Q$ , de mesure invariante  $\nu$ , on a*

$$\|\nu - \pi\| = O(\|Q - P\|) \quad (2.12)$$

$$\sup_t \|Q^t - P^t\| = O(\|Q - P\|) \quad (2.13)$$

quand  $\|Q - P\| \rightarrow 0$

Caractérisons à présent la méthode de stabilité forte.

**Théorème 2.3.7** [6, 3] *Soit  $X$  une chaîne uniformément ergodique. Alors, chaque noyau stochastique  $Q$  dans un certain voisinage  $\{Q : \|Q - P\| < \varepsilon\}$  correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique et fortement stable par rapport à la même norme  $\|\cdot\|$ .*

Pour démontrer l'ergodicité uniforme et l'estimation de la vitesse de convergence dans les théorèmes (2.3.3)-(2.3.6), on peut utiliser le critère suivant :

**Théorème 2.3.8** [6, 3] *Soit  $X$  une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris de mesure de probabilité invariante  $\pi$ . Alors,  $X$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  et apériodique, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$G)$   $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $h \in \mathcal{J}^+$  tel que  $\pi h > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$  et  $\alpha h > 0$ .

$B_n)$   $P = T^n + h \circ \alpha$  pour un certain  $n \geq 1$ , où  $T$  est un noyau non négatif,  $\|\alpha\| < \infty$  et  $\|h\| < \infty$ .

$C_m)$   $\|T^m\| \leq \rho$  pour un certain  $m \geq 1$  et  $0 < \rho < 1$ .

De plus, la condition  $C_m)$  découle de l'ergodicité uniforme et de l'apériodicité de la chaîne  $X$  pour tout  $n$ ,  $\alpha$  et  $h$  vérifiant les conditions  $G)$  et  $B_n)$ .

**Remarque 2.3** On peut noter les remarques suivantes :

1. Pour  $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$ , les conditions du théorème sont équivalentes aux conditions de Doeblin relatives à la quasi-compacité du noyau  $P$  (J. Neveu [54]).
2. L'hypothèse de récurrence au sens de Harris de la chaîne  $X$ , n'est pas nécessaire pour démontrer l'équivalence entre l'ensemble des conditions  $G)$ ,  $B_n)$  et  $C_m)$  et la relation 2.10 du corollaire 2.3.1.
3. De plus, les conditions  $G)$  et  $B_n)$ , sont toujours vérifiées dans toute chaîne  $X$  récurrente au sens de Harris.

## 2.4 Généralisation des concepts de base

Afin de généraliser les théorèmes (2.3.4) et (2.3.8) pour les chaînes périodiques, N.V. Kartashov a introduit le coefficient d'ergodicité  $\Lambda_t^d$ , de la façon suivante

$$\Lambda_t^d(P) = \sup\{\|\mu P^t\|; \|\mu\| \leq 1, \mu(\mathcal{X}) = 0 \text{ et } \mu \in \mathcal{M}P^{(d)}\}$$

On a alors, dans le cadre général (périodique) des chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris, le résultat suivant.

**Théorème 2.4.1** [36] *Une chaîne de Markov  $X$ , récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée pour un certain  $d \geq 1$  :*

1.  $\Lambda_t^d(P) < 1$  pour un certain  $t \geq 1$ .
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_t^d(P) = 0$ .
3. Il existe un opérateur compact  $\mathbb{K}$  tel que  $\|P^t - \mathbb{K}\| < 1$  pour un certain  $t \geq 1$ .
4. Pour un certain  $0 < \rho < 1$ , le spectre de l'opérateur  $P$  dans le domaine  $\{z : |z| > \rho\}$  contient seulement des racines de l'unité dont l'ordre de multiplicité est au plus égal à  $d$  et qui constituent des pôles simples pour la résolvante.
5.  $\|P^{(d)}(P^t - \Pi)\| = O(\rho^t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ , pour un certain  $0 < \rho < 1$ .
6. Il existe une projection orthogonale bornée  $\Pi_0$  de dimension au plus égale à  $d$  tel que :

$$\|P^{td} - \Pi_0\| = O(\rho^t) \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

pour un certain  $0 < \rho < 1$ .

De plus, le plus petit nombre  $d$  satisfaisant le théorème coïncide avec la période  $d(X)$  de la chaîne  $X$  et la dimension de la projection  $\Pi_0$  est égale dans ce cas à  $d(X)$ .

**Remarque 2.4** Les remarques suivantes s'imposent.

- a) Les conditions 1), ..., 6) sont équivalentes sans la condition que  $X$  est de Harris.
- b) Chacune des conditions 1), ..., 6) implique que  $X$  est uniformément ergodique.
- c) On remarque que si on remplace  $d = 1$  dans  $\Lambda_t^d(P)$ , on aura  $\Lambda_t^1(P) = \Lambda_t(P)$ .

Formulons à présent un critère d'ergodicité uniforme dans le cas périodique, qui généralise le théorème 2.3.8.

**Théorème 2.4.2** [36] *Soit  $X$  une chaîne récurrente au sens de Harris. Alors,  $X$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si :*

*Il existe des entiers positifs  $n$  et  $d$ , et des mesures  $\alpha_i \in \mathcal{M}^+$  et des fonctions  $h_i \in \mathcal{J}^+$ ,  $1 \leq i \leq d$  tel que les assertions suivantes soient vérifiées :*

1)  $\pi h_i > 0$ ,  $\alpha_i \mathbb{1} = 1$ ,  $\alpha_i h_i > 0$  et  $\alpha_i h_j = 0$  pour tout  $i \neq j$ .

2) Le noyau  $T = P^{nd} - \sum_{i=1}^d h_i \circ \alpha_i$  est non négatif.

$C_m$ )  $\|T^m\| \leq \rho$  pour un certain  $0 < \rho < 1$  et  $m \geq 1$ .

De plus, le plus petit  $d$  vérifiant l'assertion 2) coïncide avec la période  $d(X)$  de la chaîne  $X$ .

**Remarque 2.5** Il est à noter que.

- ▲ La décomposition de  $P$  est presque similaire à celle des opérateurs quasi-compacts, ce qui nous montre, une fois de plus, la généralisation des résultats obtenus dans le cadre de la théorie des opérateurs quasi-compacts. L'opérateur  $T$  représente en fait l'opérateur de déviation. En d'autres termes, il constitue la mesure de la perturbation induite sur l'opérateur  $P$ .
- ▲ Notons que la convergence en norme de l'opérateur  $T$  ( $\|T\| \rightarrow 0$ ), en général, n'assure pas la stabilité forte [36, 37], alors que l'ergodicité uniforme est assurée par le biais du théorème 2.3.8.

## 2.5 $V$ -Stabilité forte d'une chaîne de Markov

**Définition 2.5.1** On dit qu'une chaîne de Markov est  $V$ -fortement stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme  $\|\cdot\|_V$ .

**Remarque 2.6** Pour la classe de norme  $\|\cdot\|_V$ , donnée par l'expression (2.7), la condition  $C_m$ ) du théorème 2.3.8 est équivalente à la condition

$$T^m V(x) \leq \rho V(x) \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \text{pour un certain } 0 < \rho < 1 \quad (2.14)$$

De plus, les conditions  $G$ ) et  $B_n$ ) et la relation (2.14), pour  $V \equiv 1$ , sont équivalentes à la quasi-compacité de l'opérateur de transition  $P$  et par suite à la condition de Doeblin 2.11. Ce qui montre clairement que la méthode de la  $V$ -stabilité forte généralise celle des opérateurs quasi-compacts pour les chaînes de Harris à espace de phase dénombrablement engendré.

**Corollaire 2.5.1** [1] Pour que la chaîne de Markov  $X$  récurrente au sens de Harris soit fortement  $V$ -stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.

1.  $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+$  et  $\exists h \in \mathcal{J}^+$  tels que :  $\alpha h > 0$ ,  $\alpha \mathbb{1} = 1$  et  $\pi h > 0$ .
2. Le noyau  $T = P - h \circ \alpha$  est non négatif.
3.  $\exists \rho < 1$  tel que,  $TV(x) \leq \rho V(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$ .
4.  $\|P\|_V < \infty$ .

Ce corollaire n'est qu'une condition suffisante du théorème 2.3.8 avec  $n = m = 1$ .

Le choix de la norme appropriée, se réduit à la recherche d'une fonction test  $V$ . Des techniques de construction des fonctions pour une large classe de chaînes de Markov sont données dans [38] et [69].

Soient les conditions notées par  $A)$ ,  $G)$ ,  $B_n)$  et  $C_m)$  définies respectivement par :

$$A) \|P\| < \infty.$$

$$G) \exists \alpha \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \exists h \in \mathcal{J}^+ \text{ tels que : } \alpha h > 0, \alpha \mathbb{1} = 1 \text{ et } \pi h > 0.$$

$$B_n) P = T^n + h \circ \alpha, \text{ où } T \text{ est un noyau non négatif, } \alpha \in \mathcal{M}^+ \text{ et } h \in \mathcal{J}^+.$$

$$C_m) \exists 0 < \rho < 1 \text{ et } \exists m \geq 1 \text{ tel que } \|T^m\| \leq \rho.$$

**Théorème 2.5.1** *Pour qu'une chaîne de Markov, d'opérateur de transition  $P$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$  soit fortement  $V$ -stable, il est suffisant que les conditions  $A)$ ,  $G)$ ,  $B_1)$  et  $C_m)$  soient vérifiées.*

## 2.6 Les inégalités de stabilité

Sous les conditions du théorème 2.3.8, on peut obtenir les estimations quantitatives de la stabilité, telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $X$  en termes des fonctions  $V$ ,  $h$  et la mesure  $\alpha$ .

**Théorème 2.6.1** *Soit une chaîne de Markov  $X$ , de noyau de transition  $P$  et de mesure invariante  $\pi$ . supposons que  $X$  est fortement  $V$ -stable et vérifiant les conditions du théorème 2.3.8. Alors, pour des noyaux stochastiques  $Q$ , de mesure invariante  $\nu$  tels que,  $\|Q - P\|_V$  est suffisamment petit, l'égalité suivante est vérifiée,*

$$\begin{aligned} \nu &= \pi [I - \Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1} \\ &= \pi + \sum_{i=1}^{\infty} \pi [\Delta R_0 (I - \Pi)]^i, \end{aligned}$$

où  $\Delta = Q - P$  et  $R_0 = (I - T)^{-1}$ .

**Conséquence 2.6.1** *Dans les conditions du théorème 2.3.8,*

$$\nu = \pi + \pi \Delta R_0 (I - \Pi) + o(\|\Delta\|_V^2),$$

pour  $\|\Delta\|_V \rightarrow 0$ .

**Conséquence 2.6.2** Dans les conditions du théorème 2.3.8, pour  $\|\Delta\|_V < \frac{1-\rho}{C}$ , on a l'estimation

$$\|\nu - \pi\|_V \leq \|\Delta\|_V \|\pi\|_V C (1 - \rho - C\|\Delta\|_V)^{-1},$$

où

$$\begin{aligned} C &= m\|P\|_V^{m-1}(1 + \|\mathbf{1}\|_V \|\pi\|_V); \\ \|\pi\|_V &\leq (\alpha V)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)m\|P\|_V^{m-1}. \end{aligned}$$

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit et discuté les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov. Nous avons montré que la méthode de la stabilité forte généralisait les notions de quasi-compacité et de récurrence fortement positive. En effet, la méthode de stabilité forte, initialement introduite dans la théorie de stabilité des chaînes de Markov, peut s'appliquer d'une manière efficace aux systèmes de files d'attente du moment que la plupart de ces derniers peuvent être régis par des chaînes de Markov.

# V-ERGODICITÉ GÉOMÉTRIQUE

Il est intéressant de comprendre comment les propriétés ergodiques des chaînes de Markov persistent sous diverses perturbations. Le lien entre la stabilité et l'ergodicité a été très tôt établi. Comme nous l'avons déjà vu, l'ergodicité uniforme est équivalente à la stabilité forte sous quelques conditions.

L'ergodicité géométrique est un outil très puissant dans l'étude des chaînes de Markov. Les conditions de l'ergodicité géométrique et les propriétés des chaînes géométriquement ergodiques ont fait l'objet de nombreux travaux. Nous exposons dans ce qui suit quelques résultats utiles pour notre contexte. Nous suggérons l'ouvrage de Meyn et Tweedie [47] pour plus de détails.

Soit  $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  une chaîne de Markov à temps discret sur un espace d'états général  $\mathcal{X}$ , muni d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ . On désigne par  $P^n(x, B)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  les probabilités de transition (*stationnaire*) de la chaîne, i.e.

$$P^n(x, B) = \mathbb{P}\{X_n \in B \mid X_0 = x\}$$

où  $\mathbb{P}$  désigne la loi de probabilité de la chaîne sous la condition initiale  $X_0 = x$ . Pour toute fonction non négative  $f$ , nous écrivons  $Pf$  et  $P^n f$  respectivement pour les fonctions  $\int P(x, dy)f(y)$  et  $\int P^n(x, dy)f(y)$ , et pour toute mesure de probabilité  $\mu$  nous écrivons  $\mu(f)$  pour  $\int \mu(dy)f(y)$ .

Nous supposons tout au long de ce travail, que la chaîne est  $\psi$ -irréductible et apériodique [47], et nous écrivons  $\mathcal{B}^+ = \{B \in \mathcal{B} : \psi(B) > 0\}$ .

### 3.1 Ergodicité géométrique

La notion d'ergodicité géométrique est l'une des formalisations possibles de la convergence "à vitesse exponentielle" d'une chaîne ergodique vers sa loi invariante. Par rapport à la notion précédente (ergodicité uniforme), on ne demande plus seulement la convergence de  $\|P^n - \Pi\|$ , mais la convergence exponentiellement rapide de ce terme vers zéro, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Définition 3.1.1** [47] *Une chaîne de Markov  $X$  est dite géométriquement ergodique, s'il existe une mesure de probabilité invariante unique  $\pi$  et des constantes telles que  $R_x < \infty$ ,  $\rho < 1$  vérifiées*

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi\| \leq R_x \rho^n$$

où  $x \in \mathcal{X}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Théorème 3.1.1** [47] *Les propriétés suivantes sont équivalentes, sans prendre en compte celles de  $\psi$ -irréductibilité et de l'apériodicité :*

1.  $(X_n)$  est uniformément ergodique.
2. Il existe  $\rho < 1$  et  $R < \infty$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{X}$  on a

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi\| \leq R \rho^n.$$

3. Pour un certain  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \|P^n(x, \cdot) - \pi\| < 1.$$

### 3.2 V-Ergodicité géométrique

**Définition 3.2.1** [47] *Soit  $X$  une chaîne de Markov positive au sens de Harris, et soit  $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, +\infty[$  avec  $\pi(V) < \infty$ , alors nous dirons que la chaîne est  $V$ -géométriquement ergodique, s'il existe une constante  $\rho < 1$  telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \|P^n(x, \cdot) - \pi\|_V < \infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Considérons cette définition

**Définition 3.2.2** [47] *La chaîne de Markov  $X$  ayant l'opérateur de transition  $P$  sera dite  $V$ -géométriquement ergodique si :*

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq R \rho^n, \quad n \geq 0. \tag{3.1}$$

avec  $R < \infty$  et  $\rho < 1$  des constantes.

**Proposition 3.2.1** [47] *Supposons que  $\pi$  est une mesure de probabilité invariante, et pour un certain  $n_0 < n$ , on a*

$$\|P - \Pi\|_V < \infty \quad \text{et} \quad \|P^{n_0} - \Pi\|_V < 1.$$

*Alors il existe un  $\rho < 1$  tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \|P^n - \Pi\|_V < \infty.$$

La notion de l'ergodicité  $V$ -géométrique est un outil théorique puissant mais la condition (3.1) est difficile à vérifier en pratique. La principale difficulté réside dans le calcul des puissances de l'opérateur de transition.

### 3.3 Fonctions de Lyapunov

Considérons la définition suivante basée sur une fonction de Lyapunov.

**Définition 3.3.1** *Pour un certain petite set  $C$ , il existe une fonction de Lyapunov  $V$ ,  $V(x) \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}$ , et des constantes  $\lambda < 1$  et  $b < \infty$ , tels que la condition de Lyapunov suivante soit vérifiée :*

$$PV \leq \lambda V + b\mathbf{1}_C \tag{3.2}$$

*on trouve communément dans la littérature cette condition appelée critère de Dérive.*

Les théorèmes suivants montrent la relation entre la condition de Lyapunov et la  $V$ -ergodicité géométrique.

**Théorème 3.3.1** [47] *Si  $(X_n)$  est une chaîne de Markov  $\psi$ -irréductible et apériodique. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes pour toute fonction  $V \geq 1$  :*

1.  $(X_n)$  est  $V$ -uniformément ergodique,  $\|P^n - \Pi\|_V \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
2. Il existe  $\rho < 1$  et  $R < \infty$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}_+$  on a

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq R\rho^n. \tag{3.3}$$

3. Il existe  $n > 0$  tel que  $\|P^i - \Pi\|_V < \infty$  pour  $i \leq n$  et

$$\|P^n - \Pi\|_V < 1. \tag{3.4}$$

4. Pour un certain petite set  $C$  (et donc pour tout petite set  $B \in \mathcal{B}^+$ ), il existe une fonction  $V_C : \mathcal{X} \rightarrow [1, +\infty[$  et des constantes  $\lambda_C < 1$  et  $b_C < +\infty$  tels que la condition :

$$PV_C \leq \lambda_C V_C + b_C \mathbf{1}_C, \tag{3.5}$$

*soit vérifiée.*

**Théorème 3.3.2** [47] *Si  $(X_n)$  est une chaîne  $\psi$ -irréductible, et pour  $V \geq 1$  il existe  $\rho < 1$  et  $R < \infty$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq R\rho^n. \quad (3.6)$$

*Alors la condition (3.5) est vérifiée, où  $V_C$  est équivalent à  $V$  dans le sens que pour une certaine constante  $c \geq 1$  on a,*

$$c^{-1}V \leq V_C \leq cV. \quad (3.7)$$

Notre objectif est de trouver des bornes pour les constantes  $\rho$  et  $R$ .

### 3.4 Bornes pour les chaînes $V$ -géométriquement ergodiques

Rappelons d'après [47] que pour une chaîne  $\psi$ -irréductible, tout ensemble  $B \in \mathcal{B}^+$  contient un small set  $C$  : qui est, un ensemble pour lequel il existe une certaine mesure de probabilité  $\nu$  qui vérifiée  $\nu(C^c) = 0$  et  $\nu(C) = 1$ , et un certain  $\delta > 0$  et  $m$  avec

$$P^m(x, B) \geq \delta\nu(B), \quad x \in C, B \in \mathcal{B}. \quad (3.8)$$

L'expression en (3.1) de délimitation  $R$  et  $\rho$  sera en termes de quantités  $\delta$  et  $m$  dans (3.8) et avec les constantes  $\lambda, b$  et une fonction  $V \geq 1$  satisfaisant l'inégalité de dérive donnée par (3.2).

Sous l'hypothèse que l'espace entier est small, alors il existe un  $m, \nu$  et  $\delta$  tels que pour tout  $x$

$$P^m(x, \cdot) \geq \delta\nu(\cdot), \quad x \in \mathcal{X},$$

et d'après [47] nous avons alors

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi\| \leq (1 - \delta)^{n/m}, \quad x \in \mathcal{X},$$

où, nous pouvons choisir  $R = 1$  et  $\rho = (1 - \delta)^{1/m}$ . Ce résultat a été exploité par plusieurs auteurs, citons [71, 81, 58, 46]. Cependant, la condition que  $\mathcal{X}$  soit small est extrêmement restrictive, et ne satisfait pas la plupart des modèles de nature infini.

L'existence de la solution pour l'inégalité dérive est équivalente à l'ergodicité géométrique. Pour les chaînes à espaces d'états dénombrables, ce problème a été étudié par Popov [59] et dans [56, 82] pour le cas général. La vérification de l'ergodicité géométrique est le plus souvent fait par le biais de ces limites, voir [47] ou des exemples tels que [17, 18, 16].

D'après [48, 30], la  $V$ -ergodicité uniforme est pour une classe spécifique de fonctions  $V$ , réellement cela est équivalent à la  $V$ -ergodicité géométrique d'après [57, 55]. Effectivement, nous l'observons bien d'après le théorème 3.3.1.

Il découle de [47], et de fait que  $P^n - \Pi = (P - \Pi)^n$  que la convergence devrait être géométriquement plus rapide afin que (1) devrait impliquer (2) dans le théorème 3.3.1.

La détermination des bornes supérieures pour le taux de convergence  $\rho$  et la constante  $R$  pour les chaînes à espaces d'états finis est un problème qui a été bien étudié [73] et dans quelques cas particuliers, les meilleures bornes ont été obtenues explicitement : pour un exemple voir [45].

Pour les chaînes à espaces d'états dénombrables, ce problème a été étudié juste après le travail original sur l'ergodicité géométrique [85], sur cet espace ou pour un espace d'états plus général tel que  $\mathbb{R}^n$ , le problème a attiré une attention considérable récemment, une grande partie en raison de l'utilisation des techniques de Monte Carlo Chaîne de Markov (MCMC). Dans ce contexte, pour mettre un arrêt aux règles des simulations, on doit connaître la précision des approximations des  $n$  étapes, et ceci motive le calcul des limites en (3.1).

### 3.4.1 Bornes calculables

Nous considérons le cas où la condition (3.2) est vérifiée pour un small set  $\alpha$  qui est un atome, c'est à dire  $P(x, \cdot) \equiv P(\alpha, \cdot)$  pour tout  $x \in \alpha$ .

**Théorème 3.4.1** [49] *Supposons que pour un certain atome  $\alpha \in \mathcal{B}$ , il existe une fonction  $V \geq 1$ , et des constantes  $\lambda < 1$  et  $b < \infty$ , tels que la condition suivante soit vérifiée :*

$$PV \leq \lambda V + b\mathbf{1}_\alpha. \quad (3.9)$$

Soit  $\vartheta = 1 - M_\alpha^{-1}$ , où

$$M_\alpha = \frac{1}{(1 - \lambda)^2} [1 - \lambda + b + b^2 + \zeta_\alpha(b(1 - \lambda) + b^2)] \quad (3.10)$$

et

$$\zeta_\alpha = \sup_{|z| \leq 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} [P^n(\alpha, \alpha) - P^{n-1}(\alpha, \alpha)] z^n \right|. \quad (3.11)$$

Alors  $X$  est  $V$ -uniformément ergodique, et pour un certain  $\rho > \vartheta$ , nous avons

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq \frac{\rho}{\rho - \vartheta} \rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.12)$$

Ce théorème, donne une borne explicite pour la constante  $R = \rho/(\rho - \vartheta)$  et le taux de convergence  $\rho > \vartheta$  avec  $\vartheta = 1 - M_\alpha^{-1}$ , à condition que nous pouvons aussi trouver une borne pour  $\zeta_\alpha$ . Bien que dans des cas spécifiques  $\zeta_\alpha$  peut être estimée avec précision, c'est pourquoi la borne  $M_\alpha$  a été donnée sous la forme de (3.10).

**Théorème 3.4.2** [49] *Supposons que la chaîne de Markov  $X$  vérifie la condition (3.9) pour un atome  $\alpha \in \mathcal{B}$ , et que cet atome est fortement apériodique, c'est à dire, pour un certain  $\delta$*

$$P(\alpha, \alpha) > \delta. \quad (3.13)$$

Alors

$$\zeta_\alpha \leq \frac{32 - 8\delta^2}{\delta^3} \left( \frac{b}{1 - \lambda} \right)^2. \quad (3.14)$$

Dans le cas d'une chaîne fortement apériodique, la situation est plus complexe, et le résultat est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.4.3** [49] *Supposons que pour un certain ensemble  $C \in \mathcal{B}$ , nous avons*

$$P(x, \cdot) \geq \delta \nu(\cdot), \quad x \in C \quad (3.15)$$

pour un certain  $\delta > 0$  et une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $C$  qui vérifie  $\nu(C^c) = 0$  et  $\nu(C) = 1$ , tels que pour un certain  $\lambda_C < 1$ ,  $b_C < \infty$  et une fonction  $V \geq 1$ ,

$$PV \leq \lambda_C V + b_C \mathbf{1}_C \quad (3.16)$$

pour un certain  $v_C$ , nous avons

$$V(x) \leq v_C < \infty, \quad x \in C. \quad (3.17)$$

Alors la chaîne  $X$  est  $V$ -fortement ergodique, et

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq (1 + \gamma_C) \frac{\rho}{\rho - \vartheta} \rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.18)$$

pour chaque  $\rho > \vartheta = 1 - M_C^{-1}$ , où

$$M_C = \frac{1}{(1 - \check{\lambda})^2} [1 - \check{\lambda} + \check{b} + \check{b}^2 + \bar{\zeta}_C (\check{b}(1 - \check{\lambda}) + \check{b}^2)]. \quad (3.19)$$

tels que

$$\gamma_C = \delta^{-2} [4b_C + 2\delta\lambda_C v_C]; \quad (3.20)$$

$$\check{\lambda} = [\lambda_C + \gamma_C] / [1 + \gamma_C] < 1; \quad (3.21)$$

$$\check{b} = v_C + \gamma_C < \infty; \quad (3.22)$$

et la borne

$$\bar{\zeta}_C \leq \frac{4 - \delta^2}{\delta^5} \left( \frac{b_C}{1 - \lambda_C} \right)^2; \quad (3.23)$$

ou, dans le cas où

$$\eta = \inf_{x \in C} P(x, C) - \delta > 0 \quad (3.24)$$

(3.19) s'écrit en fonction des constantes suivantes

$$b_C^* = [1 - \delta]^{-1} [b_C + \delta(\lambda_C \nu_C - \nu(V))]; \quad (3.25)$$

$$\gamma_C = [\delta\eta]^{-1} [1 - \delta] b_C^*; \quad b_\alpha^* = \nu(V) - \lambda_C; \quad (3.26)$$

$$\check{\lambda} = [\lambda_C + \gamma_C] / [1 + \gamma_C] < 1; \quad \check{b} = b_\alpha^* + \gamma_C < \infty; \quad (3.27)$$

et

$$\bar{\zeta}_C = \frac{1 - \eta^2}{2\delta^4\eta} \left( \frac{b_C}{1 - \lambda_C} \right)^2. \quad (3.28)$$

### 3.4.2 Bornes pour l'opérateur inverse

Le théorème 3.4.1 est une conséquence de deux ensembles d'observations, le premier utilise la théorie spectral des opérateurs et le deuxième utilise les bornes probabilistes.

D'après le théorème 3.4.1, la condition (3.9) implique la convergence  $V$ -uniforme de l'opérateur  $\bar{P} = P - \Pi$  à un taux géométrique. En conséquence, il découle que la norme de l'inverse  $(I - z\bar{P})^{-1}$  est borné pour  $|z|$  appartient à une région contenue dans un cercle unité. Pour utiliser ce fait, les auteurs de [49] ont généralisé un résultat de [70], qui permet de déplacer explicitement d'une borne  $M$  sur le cercle unité à une borne dans un plus grand cercle, comme il est donné dans l'inégalité (3.12), qui est la théorie des opérateurs. D'autre part la théorie probabiliste vient alors comme générateur de bornes sur le cercle unité, qui donne la forme de  $M_\alpha$  dans (3.10).

Soit  $D(r) \subset \mathbb{C}$  désigne un disque ouvert centré de rayon  $r$ , lorsque  $r = 1$  alors  $D = D(r)$ .

**Théorème 3.4.4** [49] *Supposons que  $\mathcal{A} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  est un opérateur borné, alors l'inverse  $(I - z\mathcal{A})^{-1}$  existe pour chaque  $z$  appartenant au disque unité fermé  $\bar{D}$ , et pour un certain  $M$ , on a*

$$\|(I - z\mathcal{A})^{-1}\|_V \leq M, \quad z \in \bar{D}. \quad (3.29)$$

puis  $(I - z\mathcal{A})^{-1}$  existe sur un disque ouvert  $D(\frac{M}{M-1})$ , et pour tout  $1 < r < \frac{M}{M-1}$ ,

(i)  $\|(I - z\mathcal{A})^{-1}\|_V \leq \frac{M}{r - (r-1)M}, \quad |z| = r;$

(ii)  $\|\mathcal{A}^n\|_V \leq \frac{M}{r - (r-1)M} r^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$

### 3.4.3 Bornes pour l'opérateur inverse sur $|z| \leq 1$

Pour appliquer le théorème 3.4.4 pour l'opérateur  $\bar{P} = P - \Pi$ , Meyn et Tweedie ont obtenu une borne supérieure  $M_\alpha$  sur la norme de l'inverse  $(I - z\bar{P})^{-1}$  pour  $|z| \leq 1$ , et cela dans le cas où la condition (3.9) est vérifiée.

Cette borne découle de la décomposition de régénération indiquée dans le théorème 13.2.5 de [47]. Nous avons dans la notation de convolution

$$P^n(x, f) = {}_\alpha P^n(x, f) + a_x * u * t_f(n)$$

pour  $n \geq 1$ , soit  $\tau_\alpha$  le temps de retour à  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} {}_\alpha P^n(x, f) &= E_x[f(X_n)\mathbb{1}(\tau_\alpha \geq n)] \\ a_x(n) &= P_x(\tau_\alpha = n) \\ u(n) &= P_x(X_n = \alpha) \\ t_f(n) &= E_\alpha[f(X_n)\mathbb{1}(\tau_\alpha \geq n)] \end{aligned}$$

Et posons  $t_f(0) = 0$  et  $\bar{f} = f - \pi(f)$ . Donc la borne de la  $V$ -norme  $\|(I - z\bar{P})^{-1}\|_V$  sera donnée en fonction de ces quantités.

**Proposition 3.4.1** [49] *Si un atome  $\alpha \in \mathcal{X}$  existe alors pour  $|z| \leq 1$ ,*

$$\|(I - z\bar{P})^{-1}\|_V \leq 1 + \sup_{|f| \leq V} \left\{ E_x \left[ \sum_{n=1}^{\tau_\alpha} |\bar{f}(X_n)| \right] + \zeta_\alpha E_\alpha \left[ \sum_{n=1}^{\tau_\alpha} n |\bar{f}(X_n)| \right] \right\}, \quad x \in \mathcal{X}$$

où  $\zeta_\alpha = \sup_{z \in \bar{D}} \left| \sum (u(n) - u(n-1))z^n \right|$  comme dans (3.11).

**Proposition 3.4.2** [49] *Pour toute fonction positive  $h$  et tout ensemble  $B \in \mathcal{B}$ , on a*

$$\int_B E_x \left[ \sum_{n=1}^{\tau_B} nh(X_n) \right] \pi(dx) = \int_{\mathcal{X}} E_x \left[ \sum_{n=1}^{\tau_B} h(X_n) \right] \pi(dx)$$

**Proposition 3.4.3** [49] *Si la condition (3.9) est vérifiée, alors les bornes suivantes sont vérifiées pour tout  $x \in \mathcal{X}$  :*

- (i)  $\frac{\pi(V)}{\pi(\alpha)} \leq \frac{b}{1 - \lambda}$  ;
- (ii)  $E_x \left[ \sum_{n=1}^{\tau_\alpha} V(X_n) \right] \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} V(x) + \frac{b}{1 - \lambda} \mathbb{1}_\alpha(x)$  ;
- (iii)  $E_\alpha \left[ \sum_{n=1}^{\tau_\alpha} nV(X_n) \right] \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\pi(V)}{\pi(\alpha)} + \frac{b}{1 - \lambda}$  ;

- (iv)  $E_x[\tau_\alpha] \leq \frac{1}{\log(1/\lambda)} \left\{ \log V(x) + \frac{b}{\lambda} \mathbf{1}_\alpha(x) \right\};$
- (v)  $E_\alpha \left[ \sum_{n=1}^{\tau_\alpha} n \right] \leq \frac{1}{\log(1/\lambda)} \left\{ \frac{\pi(\log(V))}{\pi(\alpha)} + \frac{b}{\lambda} \right\}.$

### 3.4.4 Bornes pour les chaînes fortement apériodiques

Nous avons du théorème 3.4.1 et du théorème 3.4.2 une borne calculable sous les conditions que :

- (i) il existe un atome avec  $P(\alpha, \alpha) \geq \delta$ ; et
- (ii) cet atome possède une solution connue pour l'inégalité de dérive (3.9).

Dans cette partie, nous allons donner des bornes pour des conditions plus générales. Pour un certain  $\lambda < 1$ ,  $b < \infty$  et une fonction  $V \geq 1$ ,

$$PV \leq \lambda_C V + b_C \mathbf{1}_C \tag{3.30}$$

Pour un certain ensemble  $C$  (pas nécessairement un atome) satisfaisant

$$P(x, \cdot) \geq \delta \nu(\cdot), \quad x \in C \tag{3.31}$$

pour un certain  $\delta > 0$  et une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $C$  qui vérifiée  $\nu(C^c) = 0$  et  $\nu(C) = 1$ , et

$$\sup_{x \in C} V(x) = v_C < \infty. \tag{3.32}$$

Donc à travers (3.31), nous admettons que la chaîne est fortement apériodique, et supposons aussi que les conditions du théorème 3.4.3 sont toutes vérifiées.

Considérons maintenant que la chaîne possède un atome  $\alpha$  et un small set  $C$  tels que  $\alpha \subseteq C$ , et pour un certain  $\delta > 0$ ,

$$P(x, \alpha) \geq \delta, \quad x \in C; \tag{3.33}$$

qui est un cas spécial de (3.31), où  $\alpha$  est un singleton et  $\nu$  une mesure de Dirac, le théorème ci-dessous nous montre une façon d'analyse d'une chaîne fortement apériodique, en utilisant la décomposition de Nummelin.

**Théorème 3.4.5** [49] *Sous les conditions (3.33) et (3.30), il existe une fonction  $V'$  où  $V \leq V' \leq V + b_C^*/\delta$  tels que*

$$PV' \leq \lambda V' + b \mathbf{1}_\alpha$$

où

$$\lambda = [\lambda_C + b_C^*/\delta]/[1 + b_C^*/\delta] < 1$$

et

$$b = b_\alpha^* + b_C^*/\delta < \infty.$$

ainsi les théorèmes (3.4.1) et (3.4.2) sont vérifiés pour ce même choix de  $\lambda$ ,  $b$  et  $V'$  à la place de  $V$ , et pour  $\rho > \vartheta$

$$\|P^n - \Pi\|_V \leq [1 + b_C^*/\delta] \frac{\rho}{\vartheta - \rho} \rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.34)$$

**Remarque 3.1** Meyn et Tweedie présentent dans la même référence [47] différentes (meilleurs) bornes pour le taux de convergence  $\rho$  et la constante  $R$  en considérant à chaque fois des conditions supplémentaires.

### 3.5 Stabilité des chaînes $V$ -géométriquement ergodiques

Nous supposons, maintenant, que l'opérateur de transition  $P$  soit perturbé en  $Q$ , de sorte que  $Q$  soit l'opérateur de transition d'une autre chaîne de Markov  $X'$  ayant une distribution stationnaire  $\nu$ . Considérons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3.1** La chaîne de Markov  $X$  d'opérateur de transition  $P$  est  $\psi$ -irréductible.

**Hypothèse 3.2** La chaîne de Markov  $X$  vérifie la condition (3.2) pour un certain atome  $\alpha$ , une constante  $\delta < 1$ , une constante  $b < \infty$  et une fonction de Lyapunov  $V$ ,  $V(x) \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ .

**Hypothèse 3.3** L'opérateur  $\Delta = Q - P$  est  $V$ -borné, i.e.,  $\|\Delta\|_V \leq g_1$ , où  $g_1 \geq 0$  est une constante.

Nous supposons par la suite que la chaîne de Markov  $X$  ayant l'opérateur de transition  $P$  vérifie  $\|P\|_V < \infty$ .

**Théorème 3.5.1** *Si la chaîne de Markov  $X$  est  $V$ -géométriquement ergodique, alors elle est fortement  $V$ -stable.*

**Théorème 3.5.2** *Si la chaîne de Markov  $X$  est  $V$ -géométriquement ergodique alors pour tout noyau stochastique  $Q$  au voisinage de  $P$ , nous avons pour un certain  $R < \infty$  et un certain  $\rho < 1$  :*

$$\|\nu - \pi\|_V \leq \|\nu\|_V \|\Delta\|_V \frac{R}{1 - \rho},$$

En particulier, si  $V \equiv 1$ , alors :

$$\|\nu - \pi\|_1 \leq \|\Delta\|_1 \frac{R}{1 - \rho}.$$

**Théorème 3.5.3** *Si la chaîne de Markov  $X$  est  $V$ -géométriquement ergodique, alors pour tout noyau stochastique  $Q$  au voisinage de  $P$  nous avons pour un certain  $R < \infty$  et un certain  $\rho < 1$  :*

$$\|\nu - \pi\|_V \leq \frac{R\|\pi\|_V\|\Delta\|_V}{1 - \rho - R\|\Delta\|_V},$$

*En particulier, si  $V \equiv 1$ , alors :*

$$\|\nu - \pi\|_1 \leq \frac{R\|\Delta\|_1}{1 - \rho - R\|\Delta\|_1}.$$

**Théorème 3.5.4** *Si les hypothèses (3.1) et (3.2) sont vérifiées pour la chaîne de Markov  $X$ , alors,  $X$  est fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|_V$ .*

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons clarifié la relation entre l'ergodicité géométrique et la stabilité forte des chaînes de Markov. Des bornes de perturbation sont obtenues sous la condition de l'ergodicité géométrique. En particulier, nous avons montré qu'il est possible d'utiliser les fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité forte et pour l'obtention des inégalités de stabilité.

# SUR L'APPROXIMATION DE LA DISTRIBUTION STATIONNAIRE D'UNE CHAÎNE DE MARKOV

Soit  $P = (P(i, j))_{i, j \geq 1}$ , une matrice stochastique infinie, irréductible et récurrente positive. Elle admet donc une distribution stationnaire unique  $\pi = (\pi(j))_{j \geq 1}$ . Le calcul de cette distribution étant en général difficile sinon impossible, il est souhaitable de disposer d'approximations simples et convergeant rapidement vers cette distribution. Pour cela, une solution consiste à approcher  $P$  par une matrice stochastique finie  ${}_{(n)}P$ . Considérons le coin Nord-Ouest d'ordre  $n$  de la matrice  $P : {}_{(n)}T = (P(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .  $P$  étant irréductible, il existe au moins une ligne  $i$  pour laquelle  $\sum_{j=1}^n P(i, j) < 1$  si bien que la matrice tronquée  ${}_{(n)}T$  n'est pas stochastique.

A partir de  ${}_{(n)}T$ , on construit une matrice stochastique  ${}_{(n)}P = ({}_{(n)}P(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$  vérifiant  ${}_{(n)}P \geq {}_{(n)}T$ , c'est à dire  ${}_{(n)}P(i, j) \geq P(i, j)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Cela peut se faire de plusieurs façons, citons les principales.

## 4.1 Les différents types d'augmentation

### 4.1.1 L'augmentation linéaire

La masse de probabilité perdue lors de la troncature de  $P$  est redistribuée sur les colonnes de  ${}_{(n)}T$ , plus précisément.

Soit  ${}_{(n)}A = ({}_{(n)}\alpha(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice stochastique quelconque, on pose pour  $1 \leq i, j \leq n$

$${}_{(n)}P(i, j) = P(i, j) + {}_{(n)}\alpha(i, j) \sum_{k>n} P(i, k) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n.$$

En particulier, on obtient :

- L'augmentation de la première colonne seulement si  ${}_{(n)}\alpha(i, 1) = 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .
- L'augmentation de la dernière colonne seulement si  ${}_{(n)}\alpha(i, n) = 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

- L'augmentation uniforme si  ${}_{(n)}\alpha(i, j) = n^{-1}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ .
- On peut aussi prendre pour  ${}_{(n)}A$  une matrice dont toutes les lignes sont identiques. C'est un cas examiné par Gibson et Seneta (1987) [25].
- Encore plus simplement, on peut comme Van Dijk (1991) [21] choisir  ${}_{(n)}A$ . booléenne.

### 4.1.2 Renormalisation

Posons  $S(i, n) = \sum_{j=1}^n P(i, j)$ , on choisit alors pour  $1 \leq i, j \leq n$  :

$${}_{(n)}P(i, j) = \frac{P(i, j)}{S(i, n)}$$

en prenant  $n$  assez grand afin que  $S(i, n) > 0$ .

Notons que les deux conditions  ${}_{(n)}P$  stochastique et  ${}_{(n)}P > {}_{(n)}T$  impliquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(n)}P(i, j) = P(i, j)$ . Par conséquent, si  $n$  est grand  ${}_{(n)}P$  et  $P$  sont voisines. ce qui amène aux questions suivantes :

**(Q1)**  ${}_{(n)}P$  admet-elle une distribution stationnaire  ${}_{(n)}\pi$  ?

**(Q2)**  ${}_{(n)}\pi$  converge-t-elle, en un sens à préciser, vers  $\pi$  ?

En ce qui concerne (Q1), l'existence d'une ou de la distribution stationnaire  ${}_{(n)}\pi$  a été étudiée pour divers types de matrices  ${}_{(n)}P$ , en particulier par Seneta (1980, 1981) [74, 75]. Nous ne développerons pas cette question, nous contentant de noter que d'après [78], si l'état 1 est récurrent positif pour  ${}_{(n)}P$ , il existe au moins une distribution stationnaire  ${}_{(n)}\pi$ . En effet, la chaîne réduite à la classe de l'état récurrent 1 admet une distribution stationnaire qu'on peut compléter par 0 sur les autres états.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de (Q2), parmi les plus intéressants, citons :

(1) Wolf 1980 [86], qui s'est intéressé, en particulier, à l'approximation de la distribution stationnaire d'une matrice infinie  $P$ , irréductible, récurrente positive, par ailleurs quelconque, par les distributions stationnaires de matrices finies  ${}_{(n)}P$ . Il examine quatre types de matrices  ${}_{(n)}P$ , obtenues par :

- augmentation de la première colonne
- augmentation de la dernière colonne
- augmentation uniforme des colonnes
- renormalisation

et établit la convergence en variation de  ${}_{(n)}\pi$  vers  $\pi$ , sous des conditions analogues au critère de Foster.

(2) Seneta (1980) [74] a prouvé que  ${}_{(n)}\pi$ , converge faiblement vers  $\pi$  si et seulement si la suite  $({}_{(n)}\pi)$  est uniformément tendue. Cet argument a été repris dans Gibson et Seneta (1987) [25] pour établir la convergence faible de  ${}_{(n)}\pi$  vers  $\pi$  quand  $P$  est stochastiquement

monotone et  ${}_{(n)}P$  construite par augmentation.

(3) Kalashnikov et Rachev (1990) [32] ont aussi étudié le problème de l'approximation d'une chaîne de Markov infinie. L'essentiel de leurs travaux est orienté vers l'approximation uniforme de la chaîne initiale par des chaînes finies construites par augmentation de la première colonne.

## 4.2 Approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov

Dans cette partie, nous traitons l'approximation de la distribution stationnaire pour une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable en utilisant la troncature de la matrice de transition.

Spécifiquement, soit  $P = \{P(i, j)\}$  une matrice de transition pour une chaîne de Markov définie sur l'espace des entiers positifs  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , et  $\pi$  sa distribution invariante, Supposons que  $P$  est irréductible et positive récurrente, donc  $\pi$  existe toujours et elle est unique, avec  $\pi(j) > 0$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$  et  $\sum \pi(j) = 1$ . Considérons le coin Nord-Ouest d'ordre  $n$  de la matrice  $P : {}_{(n)}P = (P(i, j))_{i, j \leq n}$ .

Beaucoup de procédures que nous pouvons trouver dans [76, 77, 83] conduisent à approximer  ${}_{(n)}\hat{\pi}$  avec la propriété que

$${}_{(n)}\hat{\pi}(j)/{}_{(n)}\hat{\pi}(k) \rightarrow \pi(j)/\pi(k), \quad j, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nous allons considérer comme dans [84] que

$${}_{(n)}\hat{\pi}(j)/\sum_k {}_{(n)}\hat{\pi}(k) \rightarrow \pi(j), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1)$$

et nous allons prouver que la relation 4.1 est toujours satisfaite pour les deux classes suivantes :

(a) pour les matrices "géométriquement ergodique", où il existe  $\rho < 1$  tel que pour tout  $i, j$ , on a

$$|P^n(i, j) - \pi(j)| \rightarrow M(i)\rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

où  $P^n$  est la  $n^{\text{ième}}$  puissance de  $P$ .

(b) pour les matrices dominés par des matrices stochastiquement monotones, où il existe une matrice positive récurrente  $Q$  tel que pour tout  $i, j$  avec  $i < j$ , nous avons  $\sum_{k>m} Q(i, k) \leq \sum_{k>m} Q(j, k) \forall m$ , et

$$\sum_{k>m} Q(i, k) \geq \sum_{k>m} P(i, k), \quad i, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Nous considérons dans la suite le cas où l'approximation est donnée en prenant  ${}_{(n)}\widehat{\pi}(j)/\sum_k {}_{(n)}\widehat{\pi}(k) = {}_{(n)}\pi_h(j)$ , où  ${}_{(n)}\pi_h$  est la mesure invariante de la matrice stochastique  ${}_{(n)}P_h$  construite par augmentation de la troncature  ${}_{(n)}P$  sur la  $h^{\text{ième}}$  colonne seulement.

### 4.2.1 Les chaînes uniformément ergodiques

Considérons la forme de l'ergodicité géométrique où la chaîne est "uniformément ergodique", c'est à dire pour un certain  $M$  indépendant de  $i$  et un certain  $\rho < 1$ , on a

$$\sup_i \|P^n(i, \cdot) - \pi\| \leq M\rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2)$$

D'après [84], puisque  $\pi(0) > 0$ , alors pour un certain  $r$  et  $\delta > 0$ , on a

$$P^r(i, 0) \geq \delta, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.3)$$

effectivement, d'après le théorème 16.0.2 de [47], cette condition est réellement équivalente à l'ergodicité uniforme.

Définissons maintenant la matrice stochastique  ${}_{(n)}P_0$  par augmentation de la première colonne de  ${}_{(n)}P$ , alors  ${}_{(n)}P$  et  ${}_{(n)}P_0$  s'accordent dans toutes les autres colonnes et  ${}_{(n)}P_0(i, 0) = P(i, 0) + \Delta_n(i)$ , où

$$\Delta_n(i) = \sum_{j>n} P(i, j). \quad (4.4)$$

D'après [84], nous avons,

$$P^m(i, 0) \leq \sum_{s=1}^m {}_{(n)}P_0^s(i, 0), \quad i \leq n \quad (4.5)$$

Clairement, d'après l'augmentation elle est vraie pour  $m = 1$ , et

$$\begin{aligned} P^m(i, 0) &= \sum_{k>n} P(i, k)P^{m-1}(k, 0) + \sum_{k \leq n} P(i, k)P^{m-1}(k, 0) \\ &\leq \sum_{k>n} P(i, k) + \sum_{k \leq n} P(i, k) \sum_{s=1}^{m-1} {}_{(n)}P_0^s(k, 0) \\ &\leq \sum_{s=1}^m {}_{(n)}P_0^s(i, 0). \end{aligned}$$

Ainsi d'après (4.3), pour chaque troncature  $n$ , les matrices stochastiques

$$\bar{P} = r^{-1} \sum_{s=1}^r P^s, \quad {}_{(n)}\bar{P}_0 = r^{-1} \sum_{s=1}^r {}_{(n)}P_0^s$$

satisfont

$$\bar{P}(i, 0) \geq \delta/r, \quad {}_{(n)}\bar{P}_0(i, 0) \geq \delta/r. \quad (4.6)$$

Puisque  $\pi$  est invariante pour  $P$ , alors elle est invariante pour  $\bar{P}$ , d'après (4.6) et le théorème 16.0.2 de [47], nous avons,

$$\|\bar{P}^m(i, \cdot) - \pi\| \leq (1 - \delta/r)^m. \quad (4.7)$$

Pour tout  $n$ , il découle aussi d'après (4.6) que  ${}_{(n)}\bar{P}_0$  possède une mesure invariante unique, qui est la mesure invariante de  ${}_{(n)}P_0$ . Nous avons alors

$$\|{}_{(n)}\bar{P}_0^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\pi_0\| \leq (1 - \delta/r)^m. \quad (4.8)$$

Avec cette analyse, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1** [84] *Supposons que  $P$  est uniformément ergodique et soit  $\pi$  et  ${}_{(n)}\pi_0$  les mesures invariantes respectivement de  $P$  et  ${}_{(n)}P_0$ . Alors, pour tout  $n$  nous avons*

$$\|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\| \leq 2(1 - \delta/r)^m + 2 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_h {}_{(n)}P_0^{j+s}(i, h) \Delta_n(h) \quad (4.9)$$

D'où

$$\|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

**Preuve 1** Nous utilisons l'inégalité triangle sur la norme de variation totale. Pour tout  $n$  et  $m$ , et pour tout état  $i \leq n$ , nous avons de (4.7) et (4.8) que

$$\begin{aligned} \|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\| &\leq \|{}_{(n)}\bar{P}_0^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\pi_0\| + \|\bar{P}^m(i, \cdot) - \pi\| \\ &\quad + \|\bar{P}^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\bar{P}_0^m(i, \cdot)\| \\ &\leq 2(1 - \delta/r)^m + \|\bar{P}^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\bar{P}_0^m(i, \cdot)\| \end{aligned} \quad (4.11)$$

Maintenant, pour toute matrice  $A$  et  $B$ , on a la relation suivante

$$\|A^m(i, \cdot) - B^m(i, \cdot)\| \leq \sum_{s=0}^{m-1} \sum_k A^s(i, k) \|A(k, \cdot) - B(k, \cdot)\|. \quad (4.12)$$

Soit  $\bar{d}(i) = \|\bar{P}(i, \cdot) - {}_{(n)}\bar{P}_0(i, \cdot)\|$ , et appliquant la relation (4.12) pour (4.11), alors

$$\|\bar{P}^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\bar{P}_0^m(i, \cdot)\| \leq \sum_{s=0}^{m-1} \sum_k {}_{(n)}\bar{P}_0^s(i, k) \bar{d}(k). \quad (4.13)$$

on appliquant la relation (4.12) une deuxième fois, et du fait que  $\|P(h, \cdot) - {}_{(n)}P_0(h, \cdot)\| \leq 2\Delta_n(h)$ , nous aurons,

$$\begin{aligned} \bar{d}(k) &= \|\bar{P}(k, \cdot) - {}_{(n)}\bar{P}_0(k, \cdot)\| \\ &\leq 2r^{-1} \sum_{j=1}^r \sum_{s=0}^{j-1} \sum_h {}_{(n)}\bar{P}_0^s(k, h) \Delta_n(h) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Supposons que pour la relation (4.9)  $n \rightarrow \infty$ , nous avons alors pour tout  $m$  fixé  $\|_{(n)}\pi_0 - \pi\| \leq 2(1 - \delta/r)^m$ , comme  $m$  peut être grand, alors la relation (4.10) est démontré.

Aussi un cas spécial de ce résultat est donné lorsque  $r = 1$ , nous retrouvons le résultat de [74]

$$\|_{(n)}\pi_0 - \pi\| \leq 2(1 - \delta)^m + 2 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_h (n)P_0^j(i, h) \Delta_n(h) \quad (4.15)$$

Dans le cas où  $\Delta_n = \max_k \Delta_n(k) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors l'une des bornes les plus simples est donnée par

$$\|_{(n)}\pi_0 - \pi\| \leq 2(1 - \delta)^m + 2m\Delta_n$$

## 4.2.2 Les chaînes géométriquement ergodiques

L'outil principal pour notre analyse est la norme poids, aussi appelée  $V$ -norme. Rappelons que pour une matrice non négative  $K$ , la  $V$ -norme de  $K$  est donnée par

$$\|K\|_V = \sup_i \frac{\|K(i, \cdot)\|_V}{V(i)}$$

Hordijk et Spieksma [30] ont montré que lorsque une chaîne est géométriquement ergodique, alors pour une certain  $V$ , avec  $V(i) \geq 1$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$  nous avons

$$\|P^m - \Pi\|_V \leq M\rho^m, \quad (4.16)$$

où  $\Pi$  est le projecteur stationnaire, et  $0 < M < \infty$  et  $\rho < 1$  sont des constantes.

Soit  $C = \{0, \dots, m\}$  un ensemble fini, d'après [47] si la chaîne est géométriquement ergodique, alors il existe toujours une fonction de Lyapunov  $V \geq 1$  telle que

$$\sum_j P(i, j)V(j) \leq \lambda V(i) + b\mathbf{1}_C(i) \quad (4.17)$$

où  $\lambda < 1$  et  $b < \infty$ .

**Théorème 4.2.2** [84] *Supposons que (4.17) est vérifiée pour une certaine  $V$  avec  $V(i) \geq 1$  et  $\max_{i \in C} V(i) = v_C$ , et pour un certain  $N < \infty$ ,  $\delta_C > 0$  et pour tout  $i \in C$ ,*

$$\sum_{r=1}^N P^r(i, 0) \geq \delta_C. \quad (4.18)$$

*Alors (4.16) est vérifiée pour la même fonction  $V$ , et les constantes  $M < \infty$ ,  $\rho < 1$  dépend seulement de  $N$ ,  $\delta_C$ ,  $\lambda$ ,  $b$  et  $v_C$ .*

Supposons (4.17) est vérifiée pour une certaine fonction  $V$  et un ensemble fini  $C$ , comme il est illustré dans [47], que  $V$  existe toujours telle que  $V(0) = 1$ ,  $V(j) > 1$  pour  $j > 0$ , et

avec  $C = \{0\}$ .

Notons qu'il existe un ensemble fini  $C_N = \{0, \dots, N\}$  (par réordination des indices si nécessaire) tel que la matrice finie  ${}_{(N)}P$  est irréductible et qui contient  $C$ . Nous avons alors pour tout  $n \geq N$

$$\sum_{r=1}^N {}_{(n)}P^r(i, 0) \geq \delta_C, \quad i \in C. \quad (4.19)$$

Définissons encore la matrice stochastique  ${}_{(n)}P_0$  par augmentation de la première colonne de  ${}_{(n)}P$ . Cette augmentation assure que l'état zéro peut être atteint par n'importe quel autre état, donc  ${}_{(n)}P_0$  est bien irréductible, et donc il existe une mesure invariante unique  ${}_{(n)}\pi_0$  pour chaque  ${}_{(n)}P_0$ .

Une conséquence directe de (4.17) est

$$\sum_j {}_{(n)}P_0(i, j)V(j) \leq \lambda V(i) + b\mathbf{1}_C(i) \quad (4.20)$$

et d'après (4.19), il découle que (4.18) est aussi vérifiée pour chaque  ${}_{(n)}P_0$  où  $n \geq N$ , et d'après le théorème 4.2.2 il existe alors un  $M$  et  $\rho$  indépendants de  $n$  tel que pour tout  $m$ , on a

$$\|{}_{(n)}P_0^m - {}_{(n)}\Pi_0\|_V \leq M\rho^m \quad (4.21)$$

où  ${}_{(n)}\Pi_0$  est une matrice avec des lignes identiques à  ${}_{(n)}\pi_0$ . Nous pouvons maintenant étendre le théorème 4.2.1 en utilisant la  $V$ -norme.

**Théorème 4.2.3** [84] *Supposons que  $P$  est géométriquement ergodique et soit  $\pi$  et  ${}_{(n)}\pi_0$  les mesures invariantes respectivement pour  $P$  et  ${}_{(n)}P_0$ . Alors*

$$\|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\|_V \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.22)$$

où  $V$  est une fonction qui satisfait (4.17).

**Preuve 2** Nous avons d'après (4.19) et (4.21) que pour chaque  $i$  et  $m$

$$\begin{aligned} \|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\|_V &\leq \|{}_{(n)}P_0^m(i, \cdot) - {}_{(n)}\pi_0\|_V + \|P^m(i, \cdot) - \pi\|_V \\ &\quad + \|P^m(i, \cdot) - {}_{(n)}P_0^m(i, \cdot)\|_V \\ &\leq 2M\rho^m V(i) + \|P^m(i, \cdot) - {}_{(n)}P_0^m(i, \cdot)\|_V. \end{aligned} \quad (4.23)$$

et par (4.20) et (4.17), alors  $\|{}_{(n)}P_0\|_V \leq [\lambda + b]$  et  $\|P\|_V \leq [\lambda + b]$ , par itérations, nous avons alors pour chaque  $k$

$$\|{}_{(n)}P_0^k\|_V \leq [\lambda + b]^k, \quad \|P^k\|_V \leq [\lambda + b]^k. \quad (4.24)$$

Par prolongement de (4.12), alors si  $V$  satisfait (4.17), nous aurons

$$\|P^m(i, \cdot) - {}_{(n)}P_0^m(i, \cdot)\|_V \leq \sum_{s=0}^{m-1} \sum_w P^s(i, w)[\lambda + b]^{m-1-s} \Delta_n(w, V). \quad (4.25)$$

où

$$\Delta_n(w, V) = \|P(w, \cdot) - {}_{(n)}P_0(w, \cdot)\|_V = \sum_{j>n} P(w, j)[1 + V(j)]. \quad (4.26)$$

De (4.26), il découle que si  $n \rightarrow \infty$  alors  $\Delta_n(w, V) \rightarrow 0$ , ainsi prenant la limite dans (4.25) et utilisant la convergence par dominance, alors le troisième terme de (4.23) tend vers zéro. Ainsi nous obtiendrons

$$\lim_n \|{}_{(n)}\pi_0 - \pi\|_V \leq 2M\rho^m V(i).$$

### 4.2.3 Les chaînes stochastiquement monotones

Dans cette partie, nous allons considérer une classe des chaînes où nous pouvons encore établir les convergences vers  $\pi$ , et beaucoup de bornes d'approximation (dans le cas d'ergodicité géométrique) peuvent être calculée plus explicitement.

Pour chaque deux distributions  $p$  et  $q$  sur  $\mathbb{Z}_+$ , nous dirons que  $p$  est stochastiquement dominante à  $q$  si, pour chaque  $j$ , nous avons  $p(j, j+1, \dots) \geq q(j, j+1, \dots)$ . Nous dirons aussi que  $P$  est stochastiquement monotone si,  $P(i, \cdot)$  domine  $P(k, \cdot)$  lorsque  $i \geq k$ .

Nous étendons cette définition. Nous dirons alors que si  $P$  et  $Q$  sont deux matrices stochastiques, alors  $Q$  domine  $P$  si, pour chaque  $i, j$ , nous avons  $Q(i, \{j, j+1, \dots\}) \geq P(i, \{j, j+1, \dots\})$ . En conséquence, si  $Q$  domine stochastiquement  $P$  et  $Q$  est monotone, alors pour chaque  $m$  nous avons aussi  $Q^m$  domine  $P^m$ , et même en limite, c'est à dire que si  $Q$  est récurrente positive, alors la mesure invariante de  $Q$  domine la mesure invariante de  $P$ .

Supposons que  $P$  est monotone, avec  $\pi$  sa mesure invariante, et soit  ${}_{(n)}P_n$  la matrice stochastique définie par augmentation de la dernière ( $n^{\text{ième}}$ ) colonne de  ${}_{(n)}P$ . Par construction il s'avère que  ${}_{(n)}P_n$  est aussi monotone, et clairement  $P$  domine  ${}_{(n)}P_n$ .

Soit  $V$  une fonction croissante avec  $V \geq 1$  tel que

$$PV \leq \lambda V + b\mathbf{1}_0 \quad (4.27)$$

Nous avons d'après la forme discrète du théorème 2.2 de [60], que pour  $i \geq 0$

$$\|P^n(i, \cdot) - \pi\|_V \leq 2\lambda^n [V(i)[1 - \mathbf{1}_0(i)] + b/(1 - \lambda)]. \quad (4.28)$$

D'autre part  ${}_{(n)}P_n$  satisfait aussi (4.27), et comme dans (4.23), utilisant le cas  $i = 0$

$$\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V \leq 4\lambda^m b/(1 - \lambda) + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_w {}_{(n)}P_n^s(0, w)[\lambda + b]^{m-1-s} \Delta_n(w, V) \quad (4.29)$$

où

$$\Delta_n(w, V) = \|P(w, \cdot) - {}_{(n)}P_n(w, \cdot)\|_V = \sum_{j>n} P(w, j)[V(n) + V(j)].$$

utilisant le fait que  $\sum_w (n)P_n^s(0, w)g(w) \uparrow \sum_w (n)\pi(w)g(w)$  pour  $g$  monotone croissante, et puisque  $V$  est monotone, alors il en est de même pour  $\Delta_n(w, V)$ . Soit  $D = \sum_{s=0}^{m-1} [\lambda + b]^s$ , alors

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=0}^{m-1} \sum_w (n)P_n^s(0, w) [\lambda + b]^{m-1-s} \Delta_n(w, V) \\
 &= \sum_{s=0}^{m-1} [\lambda + b]^{m-1-s} \sum_w (n)P_n^s(0, w) \Delta_n(w, V) \\
 &\leq \sum_{s=0}^{m-1} [\lambda + b]^{m-1-s} \sum_w (n)\pi(w) \Delta_n(w, V) \tag{4.30} \\
 &\leq D \left[ \sum_w (n)\pi(w) \sum_{j>n} P(w, j) V(n) + \sum_w (n)\pi(w) \sum_{j>n} P(w, j) V(j) \right] \\
 &\leq D \left[ (n)\pi(n) V(n) + \sum_w (n)\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j) V(j) - \sum_{j\leq n} P(w, j) V(j) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Si nous considérons  $V \equiv 1$ , alors

**Théorème 4.2.4** [84] *Supposons que  $P$  est monotone et géométriquement ergodique, et  $V$  satisfait (4.27) pour un certain  $\lambda < 1$  et  $b < \infty$ . Alors*

$$\| (n)\pi - \pi \| \leq 4\lambda^m b / (1 - \lambda) + 2m (n)\pi(n) \tag{4.31}$$

où  $(n)\pi$  est la mesure invariante de  $(n)P_n$ .

**Preuve 3** Avec  $i = 0$ , (4.30) et  $V \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \| (n)\pi - \pi \| &\leq 4\lambda^m b / (1 - \lambda) + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_w (n)P_n^s(i, w) \Delta_n(w, 1) \\
 &\leq 4\lambda^m b / (1 - \lambda) + 2m \sum_w (n)\pi(w) \sum_{j\geq n} P(w, j) \tag{4.32} \\
 &\leq 4\lambda^m b / (1 - \lambda) + 2m (n)\pi(n)
 \end{aligned}$$

### 4.3 Conclusion

Dans cette partie, nous avons traité l'approximation de la distribution stationnaire pour une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable en utilisant la troncature de la matrice de transition. Des bornes de perturbation sont obtenues dans le cas de l'ergodicité uniforme, l'ergodicité géométrique, ainsi dans le cas des matrices dominées par des matrices stochastiquement monotones.

# APPLICATION AUX SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE M/G/1

## 5.1 Système de files d'attente M/G/1 et sa troncature

Considérons un système de files d'attente M/G/1, le processus des arrivées est poissonien de paramètre  $\lambda$  et le temps de service est réparti suivant une loi quelconque  $B(t)$ , de moyenne  $E(Y) = 1/\mu$ .

Considérons le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  où  $X(t)$  est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . On définit ainsi un processus stochastique à temps discret :  $\{X_n = X(t_n), n = 1, 2, \dots\}$ , où  $t_n$  est l'instant de départ du n-ième client.

Pour vérifier que cette suite de variables aléatoires est une chaîne de Markov à temps discret, on considère le nombre  $A_n$  de clients qui entrent dans le système pendant que le n-ième client est servi. Les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est

$$\mathbf{P}(A_n = k) = a_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dB(t).$$

La suite de variables aléatoires  $\{X_n, n \geq 1\}$  s'appelle chaîne de Markov induite du processus  $X(t)$ . Ses probabilités de transition  $P(i, j) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$  se calculent par

$$P(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } j \geq 0, i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et la matrice des probabilités de transition prend la forme

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

Notons par  ${}_{(n)}P_0$  et  ${}_{(n)}P_n$  les matrices finies des chaînes de Markov induites  ${}_{(n)}X_0$  et  ${}_{(n)}X_n$  obtenues par augmentation de la troncature de  $P$  respectivement à la première et à la dernière colonne.

La matrice finie des probabilités de transition de  ${}_{(n)}P_0$  prend la forme

$${}_{(n)}P_0 = \begin{pmatrix} a_0 + \sum_{k \geq N} a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_0 + \sum_{k \geq N} a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ \sum_{k \geq N-1} a_k & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-3} & a_{N-2} \\ \sum_{k \geq N-2} a_k & 0 & a_0 & \cdots & a_{N-4} & a_{N-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \sum_{k \geq 2} a_k & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

pour  $1 \leq j \leq N-1$

$${}_{(n)}P_0(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour  $j = 0$

$${}_{(n)}P_0(i, j) = \begin{cases} a_j + \sum_{k \geq N} a_k & \text{si } i = \overline{0, 1}, \\ \sum_{k \geq N-i+1} a_k & \text{si } 2 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

De la même manière, on construit la matrice finie des probabilités de transition de  ${}_{(n)}P_n$ ,

$${}_{(n)}P_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & \sum_{k \geq N-1} a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & \sum_{k \geq N-1} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-3} & \sum_{k \geq N-2} a_k \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{N-4} & \sum_{k \geq N-3} a_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & \sum_{k \geq 1} a_k \end{pmatrix}$$

pour  $0 \leq j \leq N-2$

$${}_{(n)}P_n(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour  $j = N - 1$

$${}_{(n)}P_n(i, j) = \begin{cases} \sum_{k \geq N-1} a_k & \text{si } i = 0, \\ \sum_{k \geq N-i} a_k & \text{si } 1 \leq i \leq N - 1. \end{cases}$$

## 5.2 Application de la méthode de stabilité forte

Nous voulons savoir si le modèle M/G/1 définie par la matrice  $P$ , peut être estimé par les modèles tronqués définie par les matrices  ${}_{(n)}P_0$  et  ${}_{(n)}P_n$ .

À présent supposons que le temps de service est réparti suivant une loi exponentielle. Donc les probabilités de transition du système M/G/1 sont données par  $P = (P(i, j))_{i, j \in E}$ ,  $E = \{0, 1, \dots\}$ .

$$P(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } j \geq 0, i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où

$$a_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dB(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}},$$

Les probabilités de transition pour le système défini par la matrice  ${}_{(n)}P_0$  sont données par

${}_{(n)}P_0 = ({}_{(n)}P_0(i, j))_{i, j \in {}_{(n)}E}$ ,  ${}_{(n)}E = \{0, 1, \dots, N - 1\}$   
pour  $1 \leq j \leq N - 1$

$${}_{(n)}P_0(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour  $j = 0$

$${}_{(n)}P_0(i, j) = \begin{cases} a_j + \sum_{k \geq N} a_k & \text{si } i = \overline{0, 1}, \\ \sum_{k \geq N-i+1} a_k & \text{si } 2 \leq i \leq N - 1. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq N} a_k &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ &= 1 - \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq N-i+1} a_k &= 1 - \sum_{k=0}^{N-i} a_k \\
 &= 1 - \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \sum_{k=0}^{N-i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \\
 &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1}
 \end{aligned}$$

Les probabilités de transition pour le système défini par la matrice  ${}_{(n)}P_n$  sont données par  ${}_{(n)}P_n = ({}_{(n)}P_n(i, j))_{i, j \in {}_{(n)}E}$ ,  ${}_{(n)}E = \{0, 1, \dots, N-1\}$  pour  $0 \leq j \leq N-2$

$${}_{(n)}P_n(i, j) = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour  $j = N-1$

$${}_{(n)}P_n(i, j) = \begin{cases} \sum_{k \geq N-1} a_k & \text{si } i = 0, \\ \sum_{k \geq N-i} a_k & \text{si } 1 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq N-1} a_k &= 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k \\
 &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-1}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq N-i} a_k &= 1 - \sum_{k=0}^{N-i-1} a_k \\
 &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i}
 \end{aligned}$$

**Théorème 5.2.1** *Supposons que  $\lambda/\mu < 1$ , alors pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , la chaîne de Markov induite définie par la matrice  ${}_{(n)}P_0$  est fortement  $V$ -stable pour une fonction  $V(k) = \beta^k$ .*

**Preuve 4** Pour prouver la  $V$ -stabilité de la chaîne définie par la matrice  ${}_{(n)}P_0$  pour une fonction  $V(k) = \beta^k$ , vérifions les conditions du corollaire 2.5.1. Pour cela, choisissons

$h_i = (n)\mathbf{I}_{i=0}$  et  $\alpha_j = (n)P_0(0, j)$ , où  $(n)\mathbf{I}$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

Nous avons  $(n)\pi_0 h = (n)\pi_0(0) > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$  et  $\alpha h = (n)P_0(0, 0) > 0$ .

$$(n)T_0(i, j) = (n)P_0(i, j) - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ (n)P_0(i, j) & \text{si } 1 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

D'où, le noyau  $(n)T_0$  est non négatif.

Nous avons,

$$(n)T_0 V(i) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j (n)T_0(i, j)$$

(a) Si  $i = 0$ , alors

$$(n)T_n V(0) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j (n)T_n(0, j) = 0$$

(b) Si  $1 \leq i \leq N-1$ , alors

$$\begin{aligned} (n)T_0 V(i) &= \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j (n)T_0(i, j) = \sum_{j=1}^{N-1} \beta^j (n)P_0(i, j) = \sum_{j \geq N-i+1} a_j + \sum_{j=i-1}^{N-1} \beta^j a_{j-i+1} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \sum_{j=0}^{N-i} \beta^j a_j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j=0}^{N-i} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta \lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) \\ &= \left[ \frac{1}{\beta^i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) \right] V(i) \\ &\leq \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \right] V(i) \end{aligned}$$

Pour montrer qu'il existe  $(n)\rho_0 < 1$  tel que  $(n)T_0 V(k) < (n)\rho_0 V(k)$ ,  $\forall k \in (n)E$ , il suffit de choisir les valeurs de  $\beta > 1$  tel que  $(n)\rho_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) < 1$ .

Nous avons,

$$(n)T_0 = (n)P_0 - h\alpha \Rightarrow (n)P_0 = (n)T_0 + h\alpha \Rightarrow \|(n)P_0\|_V \leq \|(n)T_0\|_V + \|h\|_V \|\alpha\|_V,$$

où,

$$\|h\|_V = \sup_{0 \leq i \leq N-1} \frac{1}{V(i)} |h_i| = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
 \|\alpha\|_V &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} V(i) |\alpha_j| = \sum_{0 \leq j \leq N-1} \beta^j {}_{(n)}P_0(0, j) \\
 &= \sum_{j \geq N} a_j + \sum_{0 \leq j \leq N-1} \beta^j a_j \\
 &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \\
 &= \beta_{(n)} \rho_0 \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

D'où,  $\|{}_{(n)}P_0\|_V < \infty$ .

**Théorème 5.2.2** *Supposons que  $\lambda/\mu < 1$ , alors pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , la chaîne de Markov induite définie par la matrice  ${}_{(n)}P_n$  est fortement  $V$ -stable pour une fonction  $V(k) = \beta^k$ .*

**Preuve 5** Pour prouver la  $V$ -stabilité de la chaîne définie par la matrice  ${}_{(n)}P_n$  pour une fonction  $V(k) = \beta^k$ , vérifions les conditions du corollaire 2.5.1. Pour cela, choisissons  $h_i = {}_{(n)}\mathbf{1}_{i=0}$  et  $\alpha_j = {}_{(n)}P_n(0, j)$ , où  ${}_{(n)}\mathbf{I}$  est la matrice identité d'ordre  $n$ . Nous avons  ${}_{(n)}\pi_n h = {}_{(n)}\pi_n(0) > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$  et  $\alpha h = \alpha_0 = {}_{(n)}P_n(0, 0) > 0$ .

$${}_{(n)}T_n(i, j) = {}_{(n)}P_n(i, j) - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ {}_{(n)}P_n(i, j) & \text{si } 1 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

D'où, le noyau  ${}_{(n)}T_n$  est non négatif.

Nous avons,

$${}_{(n)}T_n V(i) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j {}_{(n)}T_n(i, j)$$

(a) Si  $i = 0$ , alors

$${}_{(n)}T_n V(0) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j {}_{(n)}T_n(0, j) = 0$$

(b) Si  $1 \leq i \leq N-1$ , alors

$$\begin{aligned}
 {}_{(n)}T_n V(i) &= \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j {}_{(n)}T_n(i, j) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j {}_{(n)}P_n(i, j) \\
 &= \sum_{j=i-1}^{N-1} \beta^j a_{j-i+1} + \beta^{N-1} \sum_{j \geq N-i+1} a_j \\
 &= \beta^{i-1} \sum_{j=i-1}^{N-1} \beta^{j-i+1} a_{j-i+1} + \beta^{N-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \\
 &= \beta^{i-1} \sum_{j=0}^{N-i} \beta^j a_j + \beta^{i-2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \\
 &= \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) + \beta^{i-2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \\
 &= \beta^i \left[ \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) + \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right] \\
 &\leq \beta^i \left[ \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \right]
 \end{aligned}$$

Pour montrer qu'il existe  ${}_{(n)}\rho_n < 1$  tel que  ${}_{(n)}T_n V(k) < {}_{(n)}\rho_n V(k)$ ,  $\forall k \in {}_{(n)}E$ , il suffit de choisir les valeurs de  $\beta > 1$  tel que  ${}_{(n)}\rho_n = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) < 1$ . Nous avons,

$${}_{(n)}T_n = {}_{(n)}P_n - h\alpha \Rightarrow {}_{(n)}P_n = {}_{(n)}T_n + h\alpha \Rightarrow \|{}_{(n)}P_n\|_V \leq \|{}_{(n)}T_n\|_V + \|h\|_V \|\alpha\|_V,$$

où,

$$\|h\|_V = \sup_{0 \leq i \leq N-1} \frac{1}{V(i)} |h_i| = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
 \|\alpha\|_V &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} V(i) |\alpha_j| = \sum_{0 \leq j \leq N-1} \beta^j {}_{(n)}P_n(0, j) \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} \beta^j a_j + \beta^{N-1} \sum_{j \geq N} a_j \\
 &= \frac{1}{\beta} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \\
 &= \beta {}_{(n)}\rho_n \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

D'où,  $\|{}_{(n)}P_n\|_V < \infty$ .

### 5.2.1 Déviation du noyau de transition

**Lemme 5.2.1** Soit  ${}_{(n)}P_0$  et  $P$  les noyaux de transition des chaînes de Markov induites  ${}_{(n)}X_0$  et  $X$ . Alors, pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ , on a :

$$\|P - {}_{(n)}P_0\|_V \leq \left( \frac{1}{\beta^{N+1}} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2$$

**Preuve 6** Nous avons,

$$\|P - {}_{(n)}P_0\|_V = \sup_i \frac{\|P(i, \cdot) - {}_{(n)}P_0(i, \cdot)\|_V}{V(i)}$$

(a) Pour  $i = 0$ ,

$$\begin{aligned} \|P(0, \cdot) - {}_{(n)}P_0(0, \cdot)\|_V &= \sum_{j \geq N} P(0, j)(1 + V(j)) \\ &= \sum_{j \geq N} P(0, j) + \sum_{j \geq N} P(0, j)V(j) \\ &= \sum_{j \geq N} a_j + \sum_{j \geq N} \beta^j a_j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j \geq N} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \\ &= \varpi_0 \end{aligned}$$

(b) Pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$\begin{aligned} \|P(i, \cdot) - {}_{(n)}P_0(i, \cdot)\|_V &= \sum_{j \geq N} P(i, j)(1 + V(j)) \\ &= \sum_{j \geq N} P(i, j) + \sum_{j \geq N} P(i, j)V(j) \\ &= \sum_{j \geq N} a_{j-i+1} + \sum_{j \geq N} \beta^j a_{j-i+1} \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \sum_{j \geq N-i+1} \beta^j a_j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \sum_{j \geq 0} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \\ &= \varpi_1(i) \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
 \sup_i \left( \frac{\varpi_1(i)}{V(i)} \right) &= \sup_i \left( \frac{1}{\beta^i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta^{N-1}} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{\beta^{N+1}} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 \\
 &= \frac{\varpi_1(N-1)}{V(N-1)}.
 \end{aligned}$$

On conclut alors que,

$$\|P - {}_{(n)}P_0\|_V \leq \sup \left( \varpi_0, \frac{\varpi_1(N-1)}{V(N-1)} \right) = \frac{\varpi_1(N-1)}{V(N-1)} = {}_{(n)}\Delta_0.$$

**Lemme 5.2.2** Soit  ${}_{(n)}P_n$  et  $P$  les noyaux de transition des chaînes de Markov induites  ${}_{(n)}X_n$  et  $X$ . Alors, pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ , on a :

$$\|P - {}_{(n)}P_n\|_V \leq \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2$$

**Preuve 7** Nous avons,

$$\|P - {}_{(n)}P_n\|_V = \sup_i \frac{\|P(i, \cdot) - {}_{(n)}P_n(i, \cdot)\|_V}{V(i)}$$

(a) Pour  $i = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \|P(0, \cdot) - {}_{(n)}P_n(0, \cdot)\|_V &= \sum_{j \geq N} P(0, j)(V(N-1) + V(j)) \\
 &= V(N-1) \sum_{j \geq N} P(0, j) + \sum_{j \geq N} P(0, j)V(j) \\
 &= \sum_{j \geq N} a_j + \sum_{j \geq N} \beta^j a_j \\
 &= \beta^{N-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j \geq N} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\
 &= \beta^{N-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \\
 &= \bar{\varpi}_0
 \end{aligned}$$

(b) Pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \|P(i, \cdot) - {}_{(n)}P_n(i, \cdot)\|_V &= \sum_{j \geq N} P(i, j)(V(N-1) + V(j)) \\
 &= V(N-1) \sum_{j \geq N} P(i, j) + \sum_{j \geq N} P(i, j)V(j) \\
 &= \beta^{N-1} \sum_{j \geq N} a_{j-i+1} + \sum_{j \geq N} \beta^j a_{j-i+1} \\
 &= \beta^{N-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \frac{\mu \beta^{i-1}}{\lambda + \mu} \sum_{j \geq N} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{j-i+1} \\
 &= \beta^{i-2} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta \lambda} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \\
 &= \bar{\omega}_1(i)
 \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
 \sup_i \left( \frac{\bar{\omega}_1(i)}{V(i)} \right) &= \sup_i \left( \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i+1} \right) \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta \lambda)} \right) \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 \\
 &= \frac{\bar{\omega}_1(N-1)}{V(N-1)}.
 \end{aligned}$$

On conclut alors que,

$$\|P - {}_{(n)}P_n\|_V \leq \sup \left( \bar{\omega}_0, \frac{\bar{\omega}_1(N-1)}{V(N-1)} \right) = \frac{\bar{\omega}_1(N-1)}{V(N-1)} = {}_{(n)}\Delta_n.$$

## 5.2.2 Inégalités de stabilité

En se basant sur le conséquence 2.6.2, on a le résultat suivant

**Lemme 5.2.3** Soit  $\pi$  (resp.  ${}_{(n)}\pi_0$ ) la distribution stationnaire de la chaîne induite  $X$  (resp.  ${}_{(n)}X_0$ ). Alors, pour tout  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a

$$\|{}_{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0 = \frac{\beta {}_{(n)}\rho_0}{1 - {}_{(n)}\rho_0} {}_{(n)}\pi_0(0) \quad (5.1)$$

**Preuve 8** D'après la conséquence 2.6.2, on sait que

$$\|{}_{(n)}\pi_0\|_V \leq \frac{(\alpha V)}{1 - {}_{(n)}\rho_0} ({}_{(n)}\pi_0 h)$$

Or,

$$(\alpha V) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \\ = \beta_{(n)}\rho_0$$

Et

$${}_{(n)}\pi_0 h = {}_{(n)}\pi_0(0).$$

D'où le résultat.

**Théorème 5.2.3** Soit  ${}_{(n)}X_0$  (resp.  $X$ ) la chaîne de Markov induite du système définie par  ${}_{(n)}P_0$  (resp.  $P$ ), Soit  ${}_{(n)}\pi_0$  (resp.  $\pi$ ) sa mesure invariante. Alors, pour  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a l'inégalité :

$$\|\pi - {}_{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0 c_{(n)} \Delta_0 (1 - {}_{(n)}\rho_0 - c_{(n)} \Delta_0)$$

où  $c_0$  est donné par la formule 5.1,  $c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_0\|_V$ .

**Preuve 9** D'après la conséquence 2.6.2, on a

$$c = 1 + \|\mathbf{1}\|_V \|{}_{(n)}\pi_0\|_V,$$

où

$$\|\mathbf{1}\|_V = \sup_k \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

D'où

$$c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_0\|_V.$$

**Lemme 5.2.4** Soit  $\pi$  (resp.  ${}_{(n)}\pi_n$ ) la distribution stationnaire de la chaîne induite  $X$  (resp.  ${}_{(n)}X_0$ ). Alors, pour tout  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a

$$\|{}_{(n)}\pi_n\|_V \leq c_n = \frac{\beta_{(n)}\rho_n}{1 - {}_{(n)}\rho_n} {}_{(n)}\pi_n(0) \quad (5.2)$$

**Preuve 10** D'après la conséquence 2.6.2, on sait que

$$\|{}_{(n)}\pi_n\|_V \leq \frac{(\alpha V)}{1 - {}_{(n)}\rho_n} ({}_{(n)}\pi_n h)$$

Or,

$$(\alpha V) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right) \\ = \beta_{(n)}\rho_n$$

Et

$${}_{(n)}\pi_n h = {}_{(n)}\pi_n(0).$$

D'où le résultat.

**Théorème 5.2.4** Soit  ${}_{(n)}X_n$  (resp.  $X$ ) la chaîne de Markov induite du système définie par  ${}_{(n)}P_n$  (resp.  $P$ ), Soit  ${}_{(n)}\pi_n$  (resp.  $\pi$ ) sa mesure invariante. Alors, pour  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a l'inégalité :

$$\|\pi - {}_{(n)}\pi_n\|_V \leq c_0 c {}_{(n)}\Delta_n (1 - {}_{(n)}\rho_n - c {}_{(n)}\Delta_n)$$

où  $c_0$  est donné par la formule 5.2,  $c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_n\|_V$ .

**Preuve 11** D'après la conséquence 2.6.2, on a

$$c = 1 + \|\mathbf{1}\|_V \|{}_{(n)}\pi_n\|_V,$$

où

$$\|\mathbf{1}\|_V = \sup_k \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

D'où

$$c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_n\|_V.$$

### 5.2.3 Algorithme de stabilité forte

Dans cette partie, nous présentons l'application réalisée pour quantifier l'erreur due à l'approximation de la distribution stationnaire.

Le premier algorithme nous donne l'erreur d'approximation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $X$ , par la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  ${}_{(n)}X_0$ .

Le deuxième algorithme nous donne l'erreur d'approximation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $X$ , par la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  ${}_{(n)}X_n$ .

**Initialisation** : Choisir l'ordre de la troncature  $N$ ;  
 Introduire le taux d'arrivée  $\lambda$ ;  
 Introduire le taux de service  $\mu$ ;

**Début**

**étape 1**

Vérification de la stabilité;

**si**  $\lambda/\mu \geq 1$  **alors**

le système est instable;

Quitter l'algorithme;

**sinon**

Déterminer  $\beta_0 = \max\{\beta : 1 < \beta < \mu/\lambda \text{ et } {}_{(n)}\rho_0 < 1\}$ ;

Avec  ${}_{(n)}\rho_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right)$ ;

**fin**

**fin**

**étape 2**

Déterminer  $[\beta_{min}, \beta_{max}]$  dans lequel  ${}_{(n)}\Delta_0 \leq \frac{1 - {}_{(n)}\rho_0}{c}$ ;

Avec;

$${}_{(n)}\Delta_0 = \left( \frac{1}{\beta^{N+1}} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2;$$

$$c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_0\|_V;$$

$$c_0 = \frac{\beta {}_{(n)}\rho_0}{1 - {}_{(n)}\rho_0} {}_{(n)}\pi_0(0);$$

$$\|{}_{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0;$$

**fin**

**étape 3**

Déterminer  $\beta_{opt} \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$  qui correspond à une erreur d'approximation

$\|\pi - {}_{(n)}\pi_0\|_V$  minimale;

Avec;

$$\|\pi - {}_{(n)}\pi_0\|_V \leq \frac{c_0 c {}_{(n)}\Delta_0}{1 - {}_{(n)}\rho_0 - c {}_{(n)}\Delta_0};$$

**fin**

**Fin**

**Algorithme 1:** Erreur de  $\|\pi - {}_{(n)}\pi_0\|_V$

**Initialisation** : Choisir l'ordre de la troncature  $N$ ;  
 Introduire le taux d'arrivée  $\lambda$ ;  
 Introduire le taux de service  $\mu$ ;

**Début**

**étape 1**

Vérification de la stabilité;

**si**  $\lambda/\mu \geq 1$  **alors**

le système est instable;

Quitter l'algorithme;

**sinon**

Déterminer  $\beta_0 = \max\{\beta : 1 < \beta < \mu/\lambda \text{ et } (n)\rho_n < 1\}$ ;

Avec  $(n)\rho_n = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right)$ ;

**fin**

**fin**

**étape 2**

Déterminer  $[\beta_{min}, \beta_{max}]$  dans lequel  $(n)\Delta_n \leq \frac{1 - (n)\rho_n}{c}$ ;

Avec;

$$(n)\Delta_n = \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2;$$

$$c = 1 + \|(n)\pi_n\|_V;$$

$$c_0 = \frac{\beta(n)\rho_n}{1 - (n)\rho_n} (n)\pi_n(0);$$

$$\|(n)\pi_n\|_V \leq c_0;$$

**fin**

**étape 3**

Déterminer  $\beta_{opt} \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$  qui correspond à une erreur d'approximation

$\|\pi - (n)\pi_n\|_V$  minimale;

Avec;

$$\|\pi - (n)\pi_n\|_V \leq \frac{c_0 c(n)\Delta_n}{1 - (n)\rho_n - c(n)\Delta_n};$$

**fin**

**Fin**

**Algorithme 2:** Erreur de  $\|\pi - (n)\pi_n\|_V$

### 5.3 Application de l'approche sur les chaînes stochastiquement monotones

Dans cette partie, nous allons considérer la classe des chaînes décrites dans la section 4.3.3. Nous pouvons facilement remarquer que la chaîne de Markov induite définie par la matrice  $P$  est stochastiquement monotone. Soit  ${}_{(n)}P_n$  la matrice finie obtenue par augmentation de la troncature de  $P$  à la dernière colonne, donc  ${}_{(n)}P_n$  est aussi monotone.

Soit  $V(k) = \beta^k$ , où  $\beta \geq 1$ , et vérifions la condition de Lyapunov donnée par la formule 4.27, c'est à dire,

$$PV \leq \delta V + b\mathbf{1}_0, \quad \delta < 1, b < \infty. \quad (5.3)$$

Pour  $i \geq 1$

$$\begin{aligned} PV(i) &= \sum_{j \geq 0} \beta^j P(i, j) = \sum_{j \geq i-1} \beta^j a_{j-i+1} \\ &= \beta^{i-1} \sum_{j \geq i-1} \beta^{j-i+1} a_{j-i+1} = \beta^{i-1} \sum_{j \geq 0} \beta^j a_j \\ &= \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j \geq 0} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j = \beta^{i-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \\ &= \left\{ \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right\} \beta^i \\ &= \left\{ \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right\} V(i), \quad \beta \geq 1. \end{aligned}$$

Définissons la fonction  $\delta(\beta) = \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)}$  sur  $\beta \geq 1$ . Sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial \delta(\beta)}{\partial \beta} = \frac{-\mu(\lambda + \mu - 2\beta\lambda)}{(\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda))^2}, \quad \beta \geq 1$$

On obtient alors,

$$\frac{\partial \delta(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda}.$$

qui est un minimum pour la fonction  $\delta(\beta)$ .

Donc  $V(i) = \left( \frac{\lambda + \mu}{2\lambda} \right)^i$ , et  $\delta = \delta(\hat{\beta}) = \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2}$ , où  $\rho = \lambda/\mu$ .

Nous pouvons facilement vérifier que  $\delta < 1 \forall \rho$ . En effet, le graphe suivant le montre bien.

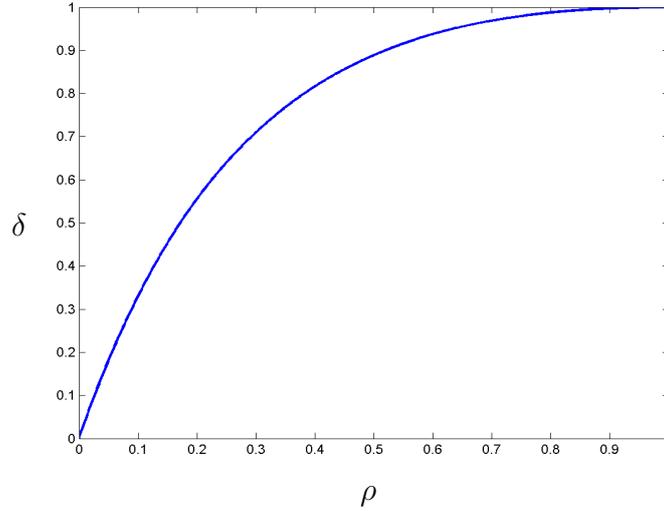


FIG. 5.1 – Graphe de  $\delta$  en fonction de  $\rho$ .

Pour  $i = 0$

$$\begin{aligned} PV(0) &= \sum_{j \geq 0} \beta^j P(0, j) = \sum_{j \geq 0} \beta^j a_j \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j \geq 0} \left( \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta \lambda}. \end{aligned}$$

Pour  $\beta = \hat{\beta} = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda}$  on a

$$PV(0) = \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \quad (5.4)$$

D'après 4.27, on a pour  $i = 0$  :  $PV(0) = \delta V(0) + b = \delta + b$ . Ainsi d'après 5.4, on obtient  $b = \frac{2\mu}{\lambda + \mu} - \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}$ .

La condition de Lyapunov est bien vérifiée. Donc, la chaîne est géométriquement ergodique.

D'après 4.29 et 4.30, on a

$$\begin{aligned} \|(n)\pi - \pi\|_V &\leq 4\delta^m b / (1 - \delta) \\ &+ D \left[ (n)\pi(n)V(n) + \sum_w (n)\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j)V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j)V(j) \right] \right] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 D &= \sum_{s=0}^{m-1} (\delta + b)^s \\
 &= \sum_{s=0}^{m-1} \left( \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \right)^s \\
 &= \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right) \left( 1 - \left( \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \right)^m \right).
 \end{aligned}$$

Et nous avons,

Pour  $w \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \leq n} P(w, j) V(j) &= \beta^{w-1} \sum_{j=w-1}^n \beta^{j-w+1} a_{j-w+1} = \beta^{w-1} \sum_{j=0}^{n-w+1} \beta^j a_j \\
 &= \beta^{w-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j=0}^{n-w+1} \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\
 &= \beta^{w-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n-w+2} \right] \\
 &= \beta^w \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left[ 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n-w+2} \right] \\
 &= V(w) \delta \left( 1 - \frac{1}{2^{n-w+2}} \right).
 \end{aligned}$$

Pour  $w = 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \leq n} P(0, j) V(j) &= \sum_{j=0}^n \beta^j a_j = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{j=0}^n \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu - \beta\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n+1} \right] \\
 &= \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\
 &= (\delta + b) \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{j \leq n} P(w, j) V(j) \leq \left( 1 - \frac{1}{2^{n-w+2}} \right) \delta V(w) + \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (\delta + b) \mathbf{1}_{\{w=0\}}.$$

Alors pour tout  $w$ , on a,

$$\begin{aligned}
 & \sum_j P(w, j)V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j)V(j) \\
 & \leq (\delta V(w) + b\mathbb{1}_{\{w=0\}}) - \left( \left(1 - \frac{1}{2^{n-w+2}}\right)\delta V(w) + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(\delta + b)\mathbb{1}_{\{w=0\}} \right) \\
 & \leq \frac{1}{2^{n-w+2}}\delta V(w) + \left(\frac{\delta + b}{2^{n+1}} - \delta\right)\mathbb{1}_{\{w=0\}}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \sum_w {}_{(n)}\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j)V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j)V(j) \right] \\
 & \leq \sum_w {}_{(n)}\pi(w) \left[ \frac{1}{2^{n-w+2}}\delta V(w) + \left(\frac{\delta + b}{2^{n+1}} - \delta\right)\mathbb{1}_{\{w=0\}} \right] \\
 & \leq \frac{\delta}{2^{n+2}} \sum_w {}_{(n)}\pi(w)V(w)2^w + \left(\frac{\delta + b}{2^{n+1}} - \delta\right){}_{(n)}\pi(0)
 \end{aligned}$$

où  $\delta = 4\lambda\mu/(\lambda + \mu)$ ,  $\delta + b = 2\mu/(\lambda + \mu)$ ,  $V(w) = ((\lambda + \mu)/\lambda)^w$  et  ${}_{(n)}\pi$  la distribution stationnaire de  ${}_{(n)}P_n$ .

### 5.3.1 Algorithme d'approximation

Nous avons alors le programme d'estimation suivant :

**Initialisation** : Trouver  $V$ ,  $\delta$ ,  $b$  pour que (4.27) soit vérifiée;

Choisir  $\varepsilon$ ;

**Début**

**étape 1**

        | Choisir  $m$  suffisamment grand tel que  $4\delta^m b/[1 - \delta] \leq \varepsilon/2$ ;

**fin**

**étape 2**

        | Avec  $m$  évaluer  $D = \sum_{s=0}^{m-1} [\delta + b]^s$ ;

**fin**

**étape 3**

        | Pour chaque  ${}_{(n)}P_n$ , calculer  ${}_{(n)}\pi$  et évaluer;

$${}_{(n)}\pi(n)V(n) + \sum_w {}_{(n)}\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j)V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j)V(j) \right] \leq \varepsilon/2D.$$

**fin**

**Fin**

**Algorithme 3:** Erreur de  $\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V$

## 5.4 Simulation de l'erreur due à l'approximation par rapport à une norme donnée

Afin de simuler l'écart entre les distributions stationnaires du système idéal et perturbé par rapport à une norme donnée, notre simulateur comportera deux procédures dont l'une permettra de simuler la distribution stationnaire du système idéal et l'autre celle du système perturbé. Après obtention des deux distributions stationnaires, il ne reste qu'à utiliser les paramètres de la norme donnée pour calculer la somme des écarts par rapport à cette dernière.

### 5.4.1 Algorithme de simulateur

**Initialisation** : Choisir l'ordre de la troncature  $N$ ;

Introduire le taux d'arrivée  $\lambda$ ;

Introduire le taux de service  $\mu$ ;

Vérifier que  $\lambda < \mu$  pour que le système soit stable;

Définir les valeurs de la norme associée  $\beta$ ;

**Début**

**étape 1**

        Simulation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $X$ ;

**fin**

**étape 2**

        Simulation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  
         $(n)X_0$  (resp.  $(n)X_n$ );

**fin**

**étape 3**

        Calcul de l'écart entre les distributions stationnaires par rapport à la norme  
        donnée

$$\text{Erreur Simulée} \leftarrow \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j |\pi(j) - (n)\pi_0(j)| \quad \text{resp.} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j |\pi(j) - (n)\pi_n(j)|$$

**fin**

**Fin**

**Algorithme 4:** Erreur Simulée

## 5.5 Application numérique

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'application des algorithmes présentés dans la partie précédente. En faisant varier les valeurs de  $\rho = \lambda/\mu$ , et  $N$  qui est l'ordre de la troncature.

L'algorithme 3 nous permet de calculer la valeur de  $N$  et  $m$  pour chaque précision  $\varepsilon$ .

### Application de l'algorithme 1

L'implémentation de l'algorithme 1 et du simulateur pour les mêmes valeurs de  $V$  ont permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

pour  $N = 5$

| $\rho = \lambda/\mu$ | $\beta_0$ | $\beta_{min}$ | $\beta_{max}$ | $\beta_{opt}$ | $\ \pi - (n)\pi_0\ _V$ | Erreur Simulée |
|----------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|------------------------|----------------|
| 0.1                  | 9.9900    | 1.0400        | 7.2300        | 1.7800        | 0.1082                 | 3.8774e-004    |
| 0.2                  | 4.9900    | 1.1500        | 3.1000        | 1.6200        | 0.8166                 | 0.0073         |
| 0.28                 | 3.5614    | 1.3800        | 1.8314        | 1.5600        | 12.3145                | 0.0290         |
| 0.29                 | 3.4383    | 1.4900        | 1.6383        | 1.5600        | 116.7656               | 0.0339         |
| $\geq 0.3$           | —         | —             | —             | —             | —                      |                |

**TAB. 5.1** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 1 et du simulateur pour  $N = 5$ .

pour  $N = 50$

| $\rho = \lambda/\mu$ | $\beta_0$ | $\beta_{min}$ | $\beta_{max}$ | $\beta_{opt}$ | $\ \pi - (n)\pi_0\ _V$ | Erreur Simulée |
|----------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|------------------------|----------------|
| 0.1                  | 9.9900    | 1.0300        | 7.1400        | 1.6700        | 0.1016                 | 3.0669e-039    |
| 0.2                  | 4.9900    | 1.0900        | 3.0600        | 1.5200        | 0.7079                 | 3.2552e-026    |
| 0.28                 | 3.5614    | 1.2400        | 1.8514        | 1.4600        | 6.0248                 | 8.5993e-020    |
| 0.29                 | 3.4383    | 1.2900        | 1.7083        | 1.4500        | 11.9039                | 3.5294e-019    |
| 0.3                  | 3.3233    | 1.3800        | 1.5333        | 1.4500        | 87.1995                | 1.8954e-018    |
| $\geq 0.31$          | —         | —             | —             | —             | —                      |                |

**TAB. 5.2** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 1 et du simulateur pour  $N = 50$ .

D'après le tableau, nous pouvons remarquer que la condition de stabilité n'est pas vérifiée pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .3$  lorsque  $N = 5$  (ainsi pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .31$  lorsque  $N = 50$ ). D'où l'impossibilité d'obtenir la borne d'approximation.

De plus, on peut remarquer que l'erreur devient importante lorsque  $\rho$  croît.

De même, on remarque que l'augmentation de la capacité  $N$  du système, n'apporte pas une grande amélioration sur la borne d'approximation.

On constate aussi, que les erreurs obtenues par le simulateur sont toujours inférieures aux erreurs algorithmiques. Ceci signifie que l'erreur numérique est réellement le seuil de l'erreur qu'on peut faire lors de la perturbation de la capacité du système.

### Application de l'algorithme 2

L'implémentation de l'algorithme 2 et du simulateur pour les mêmes valeurs de  $V$  ont permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

pour  $N = 5$

| $\rho = \lambda/\mu$ | $\beta_0$ | $\beta_{min}$ | $\beta_{max}$ | $\beta_{opt}$ | $\ \pi - {}_{(n)}\pi_n\ _V$ | Erreur Simulée |
|----------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------|----------------|
| 0.1                  | 9.9900    | 1.0400        | 7.0700        | 1.8700        | 0.1627                      | 2.0697e-005    |
| 0.2                  | 4.9900    | 1.2000        | 2.8600        | 1.6600        | 1.6610                      | 6.3380e-004    |
| 0.25                 | 3.9900    | 1.5100        | 1.7800        | 1.6300        | 57.7339                     | 0.0020         |
| $\geq 0.26$          | —         | —             | —             | —             | —                           |                |

**TAB. 5.3** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 2 et du simulateur pour  $N = 5$ .

pour  $N = 50$

| $\rho = \lambda/\mu$ | $\beta_0$ | $\beta_{min}$ | $\beta_{max}$ | $\beta_{opt}$ | $\ \pi - {}_{(n)}\pi_n\ _V$ | Erreur Simulée |
|----------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------|----------------|
| 0.1                  | 9.9900    | 1.0400        | 7.1500        | 1.8700        | 0.1627                      | 2.1271e-037    |
| 0.2                  | 4.9900    | 1.2000        | 2.8900        | 1.6700        | 1.6539                      | 7.3216e-008    |
| 0.25                 | 3.9900    | 1.5000        | 1.8000        | 1.6400        | 47.1720                     | 8.3804e-005    |
| $\geq 0.26$          | —         | —             | —             | —             | —                           |                |

**TAB. 5.4** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 2 et du simulateur pour  $N = 50$ .

D'après le tableau, nous pouvons constater que la condition de stabilité n'est pas vérifiée pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .26$  pour les deux cas  $N = 5$  et  $N = 50$ . En plus, les résultats obtenus par simulateur sont inférieurs à ceux obtenus par l'algorithme 2. Comme nous pouvons remarquer sur les deux tableaux que l'erreur augmente avec l'augmentation de la valeur de  $\rho$ . De même, on remarque que l'augmentation de la capacité  $N$  du système, n'apporte pas une grande amélioration sur la borne d'approximation. Ceci s'explique par le fait que la déviation du noyau de transition est indépendant du paramètre  $N$ . De plus, on remarque que les résultats obtenus par l'algorithme 1 sont meilleurs que ceux obtenus par l'algorithme 2. Cela explique que la méthode d'augmentation de la première colonne est meilleure que celle d'augmentation de la dernière colonne.

### Application de l'algorithme 3

L'implémentation de l'algorithme 3 et du simulateur pour la même fonction  $V$  et le même ordre  $n$  a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

| $\rho = \lambda/\mu$ | $n$ | $m$ | $\varepsilon$ | $\ \pi - {}_{(n)}\pi_n\ _V$ | Erreur Simulée |
|----------------------|-----|-----|---------------|-----------------------------|----------------|
| 0.1                  | 7   | 4   | 0.5           | 0.4306                      | 1.0833e-006    |
| 0.2                  | 11  | 7   | 0.5           | 0.4433                      | 1.2242e-007    |
| 0.3                  | 17  | 11  | 0.5           | 0.4365                      | 5.6723e-009    |
| 0.4                  | 26  | 19  | 0.5           | 0.4795                      | 5.2518e-010    |
| 0.5                  | 43  | 33  | 0.5           | 0.4703                      | 2.9741e-011    |
| 0.6                  | 76  | 62  | 0.5           | 0.4802                      | 5.9735e-015    |
| 0.7                  | 153 | 131 | 0.5           | 0.4983                      | 6.5757e-018    |
| 0.8                  | 366 | 362 | 0.5           | 0.4953                      | 1.2443e-019    |
| 0.9                  | 721 | 486 | 0.5           | 0.4942                      | 3.2575e-020    |

**TAB. 5.5** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 3 et du simulateur.

D'après le tableau, nous constatons que pour chaque précision  $\varepsilon$ , nous pouvons trouver un certain  $n$  et  $m$  tel que l'erreur d'approximation soit inférieure à cet  $\varepsilon$ . On remarque aussi qu'à la différence de la méthode de stabilité forte, l'erreur d'approximation est calculable quel que soit la valeur de  $\rho < 1$ , ce qui montre l'avantage de cette approche.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté des algorithmes et des simulateurs nous permettant de déterminer le domaine d'approximation des caractéristiques stationnaires des systèmes relatifs aux bornes obtenues, tout en utilisant les conditions imposées dans la partie théorique. Les erreurs d'approximation ont été comparées à celles obtenues par simulation, ce qui nous a permis de valider l'applicabilité de la méthode de stabilité forte ainsi de l'approche sur les chaînes stochastiquement monotones.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Le calcul de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov à espace d'états infini étant en général difficile sinon impossible, il est souhaitable de disposer d'approximations simples et convergeant rapidement vers cette distribution. Pour résoudre ce problème, on fait souvent recours à des méthodes d'approximation qui consistent à assimiler le système complexe à un système plus simple, analytiquement exploitable, qui lui est proche dans un certain sens. Si l'approximation est possible, il est également important d'avoir une idée de l'erreur commise sur les caractéristiques du système.

Dans ce mémoire, nous prouvons pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux problèmes de troncatures. Pour cela, nous avons considéré le cas de la troncature d'une chaîne de Markov induite associée au système  $M/M/1$ .

Dans un premier temps, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte pour déterminer les conditions pour lesquelles la chaîne de Markov induite associée au système tronqué est fortement  $V$ -stable et cela dans les deux cas d'augmentation première colonne et dernière colonne. Ceci nous permet de constater la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires du système  $M/M/1$  par celles des systèmes tronqués augmentés, tout en obtenant les estimations quantitatives de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Dans un deuxième temps, nous avons appliqué l'approche sur les chaînes  $V$ -géométriquement ergodiques et stochastiquement monotones au modèle tronqué et augmenté à la dernière colonne dans le but d'effectuer une étude comparative entre les résultats obtenus via les deux méthodes.

Nous avons présenté les résultats d'application des deux méthodes (stabilité forte et l'approche sur les chaînes  $V$ -géométriquement ergodiques et stochastiquement monotones), en faisant varier les valeurs de  $\rho = \lambda/\mu$ , et  $N$  qui est l'ordre de la troncature. Nous avons constaté que les résultats obtenus par application de la méthode de stabilité forte dans le cas d'augmentation de la première colonne sont meilleurs que ceux obtenus dans le cas d'augmentation de la dernière colonne. Dans ce cas, on peut affirmer que la méthode d'augmentation de la première colonne est meilleure que celle d'augmentation de la dernière colonne. Par contre, l'application de l'approche sur les chaînes  $V$ -géométriquement ergodiques et stochastiquement monotones, nous permet d'évaluer l'erreur d'approximation quel que soit la valeur de  $\rho < 1$ , ce qui montre l'avantage de cette approche.

L'obtention de ces résultats ouvre de nombreuses perspectives de recherche. Parmi les directions les plus significatives :

- ◇ Estimation de l'erreur de la troncature par la méthode de stabilité forte aux cas des réseaux de files d'attente.
- ◇ Envisager une autre méthode à appliquer pour le problème de troncature.
- ◇ Etude comparative entre quelques méthodes d'approximation dans le cas du problème de troncature.
- ◇ Estimation de l'erreur de la troncature par la méthode de stabilité forte aux autres modèles de files d'attente.

# Bibliographie

- [1] K. Abbas. Approximation dans les systèmes de files d'attente à serveur non fiable. *Thèse de Doctorat, Université de Bejaia, 2010.*
- [2] D. Aïssani. Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de Markov. *Cahiers Mathématiques, fascicule N1, (04) : 07-12, Avril 1988.*
- [3] D. Aïssani. Ergodicité uniforme et stabilité des chaînes de Markov. Application aux files d'attente. *Séminaire Mathématiques de Rouen N167, Edition. C.N.R.S, 115-121, 1990.*
- [4] D. Aïssani. Strong stability of an imbedded Markov chain in an  $G/M/\infty$  system. *International Journal "Technologies Avancées", 2(1) : 33-38, 1992.*
- [5] D. Aïssani. Application of The operator methods to obtain inequalities of stability in an  $M_2/G_2/1$  system with a relative priority. *Annales Maghrébines de l'Ingénieur, Numéro Hors Série, Vol. II, 790-795, 1991.*
- [6] D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R, ser.A, (11) : 3-5, 1983.*
- [7] D. Aïssani and N. V. Kartashov. Strong Stability of Imbedded Markov Chains in an  $M/G/1$  System. *Theory. Probab. Math. Statist, American Mathematical Society, 29 :1-5, 1984.*
- [8] M. Benaouicha and D. Aïssani. Strong Stability in  $G/M/1$  Queueing System. *Theory. Probab. Math. Statist, American Mathematical Society, (71) :25-36, 2005.*
- [9] Z. Benouaret and D. Aïssani. Stabilité forte d'un modèle de risque classique modifié. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine : 18-19 Octobre ; pp. 71-74, 2008.*
- [10] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong Stability in Retrial Queues. *Theory. Probab. Math. Statist, American Mathematical Society, (68) :11-17, 2004.*
- [11] U. N. Bhat. An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications. *Birkhäuser Verlag Basel . Boston . Berlin, 272, 2008.*

- [12] A. A. Borovkov. Ergodicity and stability theorems for a class of stochastic equations and their applications. *Theory of Probability and their Applications*, 23(2) : 227-247, 1978.
- [13] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Measurement and performance of the strong stability method. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics*, (72) : 1-9, 2005.
- [14] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Performance analysis approximation in a queueing system of type M/G/1. *International Journal Mathematical Methods of Operation Research*, 63(2) : 341-356, 2006.
- [15] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Quantitative estimates in an  $M^2/G^2/1$  priority queue with non-preemptive priority : The method of strong stability. *Stochastic Models*, (24) : 1-21, 2008.
- [16] K. S. Chan. Asymptotic behaviour of the Gibbs sampler. *J. Amer. Statist. Assoc*, 320-326, 1993.
- [17] R. Chen and R. S. Tsay. On the ergodicity of TAR(1) process. *Ann. Appl. Probab*, 613-634, 1991.
- [18] R. Chen and R. S. Tsay. Functional-coefficient autoregressive models. *J. Amer. Statist. Assoc*, 298-308, 1993.
- [19] J. F. Delmas and B. Jourdain. Modèles aléatoires, Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 439, 2006.
- [20] P. J. Denning and F. P. Buzen. The operational analysis of queueing network model. *Computing Surveys*, (10) : 225-261, 1978.
- [21] V. Dijk. Truncation of Markov chains with applications to queueing. *Oper. Res*, (39) : 1018-1026, 1991.
- [22] M. Duflo. Méthodes Récursives Aléatoires. *Masson*, 1990.
- [23] R. R. Muntz F. Baskett, K. M. Chandy and F. Palacios. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the ACM*, 22(2) : 248-260, 1975.
- [24] P. Franken. Ein stetigkeitssatz für verlustsysteme. *Operations-forschung und Math. Stat*, (11) : 1-23, 1970.
- [25] D. Gibson and E. Seneta. Monotone infinite stochastic matrices and their augmented truncations. *Stochastic Process Appl*, (24) : 287-292, 1987.
- [26] B. V. Gnedenko. On some non resolvable problems of the queueing theory. *Proceedings of the Six Internationnal Telegraphic Congress, Munich*, 1970.

- [27] N. Hamadouche and D. Aïssani. Stabilité forte d'un système d'attente  $M^2/G^2/1$  avec priorité absolue. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine : 18-19 Octobre, pp. 63-66, 2008.*
- [28] N. Hamadouche and D. Aïssani. Performance Evaluation in a Queueing System  $M_2/G_2/1$ . In Springer, editor, *Modelling Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences, pages 230-239. Berlin Heidelberg, 2008.*
- [29] O. Hernández-Lerma and J. B. Lasserre. Markov Chains and Invariant Probabilities. *Birkhäuser Verlag Basel . Boston . Berlin, 219, 2003.*
- [30] A. Hordijk and F. M. Spieksma. On ergodicity and recurrence properties of a Markov chain with an application. *Adv. Appl. Probab, (24) : 343-376, 1992.*
- [31] C. F. Ipsen and D. Meyer. Uniform stability of Markov chains. *SIAM J. Matrix Anal. Appl, 15(4) : 1061-1074, 1994.*
- [32] V. V. Kalashnikov and S. T. Rachev. Mathematical Methods for Construction of Queueing models. *Wadsworth and Brooks Cole, 1990.*
- [33] V. V. Kalashnikov and G. S. Tsitsiashvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Engrg. Cybernetics, (10) : 211-217, 1972.*
- [34] V. V. Kalashnikov and G. S. Tsitsiashvili. Sur la stabilité des systèmes de files d'attente relativement à leurs fonctions de répartition perturbées. *Journal Izv AN USSR Technique Cybernétique, (2) : 41-49, 1972.*
- [35] N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *Edition VSP, Utrecht TBIMC Scientific Publishers, Kiev, 1996.*
- [36] N. V. Kartashov. Criteria for uniform ergodicity and strong stability of Markov chains with a common phase space. *Theory. Probab. Math. Statist, American Mathematical Society, (30) : 71-89, 1985.*
- [37] N. V. Kartashov. On ergodicity and stability properties of Markov chains with respect to various norms in the measure space. *Theor. Prob. and its. Appl, 29 (01) : 195-196, 1981.*
- [38] N. V. Kartashov. Stabilité forte des chaînes de Markov, in "problèmes de stabilité des modèles stochastiques". *Seminaire VNISSI, 54-59, 1981.*
- [39] D. Kennedy. The continuity of the single server queue. *J. Appl. Probab, 9(3) : 370-381, 1972.*
- [40] L. B. Klebanov. Quelques résultats liés à la caractérisation de la distribution exponentielle. *Journal Theory of Probability and their Applications, 25(3) : 628-633, 1980.*

- [41] V. S. Koroliok and A. F. Tourbine. Processus semi-Markovien et applications. *Edition Naukovo Doumka, 1976.*
- [42] C. Lacour. Estimation non paramétrique adaptative pour les chaînes de Markov et les chaînes de Markov cachées. *Thèse de Doctorat, Université Paris Descartes, Octobre 2007.*
- [43] O. Lekadir and D. Aïssani. Approximation de deux files d'attente en série avec blocage et priorité relative. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine : 18-19 Octobre, pp. 67-70, 2008.*
- [44] O. Lekadir and D. Aïssani. Strong stability in a Jackson queueing network. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics, (77) : 86-98, 2007.*
- [45] J. Liu. Eigenanalysis for a Metropolis sampling scheme with comparisons to rejection sampling and importance resampling. *Research Report R-427, Department of Statistics, Harvard University, 1992.*
- [46] K. L. Mengersen and R. L. Tweedie. Rates of convergence of the Hastings and Metropolis algorithms. *Ann. Statist, (24) : 101-121, 1996.*
- [47] S. Meyn and R. L. Tweedie. Markov Chains And Stochastic Stability. *Cambridge University Press, 624, 2009.*
- [48] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of Markovian processes, Discrete time chains. *Adv. Appl. Probab, 542-574, 1992.*
- [49] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. Computable bounds for geometric convergence rates of Markov chains. *Ann. Probab, (4) : 981-1011, 1994.*
- [50] Z. Mouhoubi. Sur les estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité dans les chaînes de Markov. *Thèse de Magister, Université de Béjaïa, 2001.*
- [51] Z. Mouhoubi. Bornes de perturbation des caractéristiques transitoires et stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états général. Application aux systèmes avec impatience et aux modèles de production et de gestion des stocks. *Thèse de Doctorat, Université de Bejaia, Décembre 2010.*
- [52] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. Quantitative estimates of the uniform ergodicity for Markov chains. *Proceedings of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, 2002.*
- [53] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. Some inequalities of uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica, (17) : 171-186, 2005.*
- [54] J. Neveu. Base Mathématiques du calcul des probabilités. *Edition Masson et C<sup>ie</sup>, 1970.*

- [55] E. Nummelin. General irreducible Markov chains and non-negative operators. *Cambridge University Press*, 2004.
- [56] E. Nummelin and P. Tuominen. Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applications to renewal theory. *Stoch. Proc. Applns*, 187-202, 1982.
- [57] E. Nummelin and R. L. Tweedie. Geometric ergodicity and  $R$ -positivity for general Markov chains. *Ann. Probab*, 404-420, 1978.
- [58] P. D. Feigin P. Diaconis and R. L. Tweedie. Rates of convergence in successive substitution sampling schemes. 1993.
- [59] N. Popov. Conditions for geometric ergodicity of countable Markov chains. *Soviet Math. Dokl*, 676-679, 1977.
- [60] S. P. Meyn R. B. Lund and R. L. Tweedie. Computable exponential convergence rates for stochastically ordered Markov processes. *Ann. Appl. Probab*, (6) : 218-237, 1996.
- [61] B. Rabta. Nouvelles Conditions et Nouvelles Estimations de la Stabilité des Chaînes de Markov avec Application aux Modèles Stochastiques de Gestion des Stocks. *PhD thesis, Université de Béjaia, Avril 2006*.
- [62] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *International Journal of Production Economics*, (97) : 159-171, 2005.
- [63] B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26) : 129-135, 2004.
- [64] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, (428) : 1921-1927, 2008.
- [65] S. T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, (4) : 287-318, 1989.
- [66] F. Rahmoune and D. Aïssani. Strong stability of queues with multiple vacation of the server. *Stochastic Analysis and Applications*, (26) : 1-14, 2008.
- [67] F. Rahmoune and D. Aïssani. Quantitative Stability Estimates in Queues with Server Vacation. *In XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models Maiori (Salerno), pages 226-233, Italy, 20-24 September 2005*.
- [68] M. Reiser and H. Kobayashi. Accuracy of the diffusion approximation for some queueing systems. *IBM J. Res. Devl*, (18) : 110-124, 1974.
- [69] D. Revuz. Markov Chains. *North-Holland . Amsterdam . New York . Oxford*, 389, 2005.
- [70] F. Riesz and B. S. Nagy. Functional Analysis. *Ungar, New York, NY*, 1955.

- [71] J. S. Rosenthal. Rates of Convergence for Gibbs Sampler and Other Markov Chains. *PhD thesis, Harvard University, 1992.*
- [72] H. J. Rossberg. Über die verteilung von wartereiten. *Mathematische Nachrichten, (30) : 1-16, 1965.*
- [73] E. Seneta. Non-negative Matrices and Markov Chains. *Springer-Verlag, New York, Second edition, 1980.*
- [74] E. Seneta. Computing the stationary distribution for infinite Markov chains. *Linear Algebra Appl, (34) : 29-267, 1980.*
- [75] E. Seneta. Nonnegative Matrices and Markov Chains. *Springer, Berlin, 2nd edition, 1981.*
- [76] E. Seneta. Finite approximations to infinite non-negative matrices. *Proc. Camb. Phil. Soc, (63) : 983-992, 1967.*
- [77] E. Seneta. Finite approximations to infinite non-negative matrices II : refinements and applications. *Proc. Camb. Phil. Soc, (64) : 46-470, 1968.*
- [78] F. Simonot. Sur l'approximation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov stochastiquement monotone. *Stochastic Processes and their Application, (56) : 133-149, 1995.*
- [79] D. Stoyan. Ein stetigkeitssatz für einlinge watermodelle der bedienugstheorie. *Math. Operations forshu. Statist, 3(2) : 103-111, 1977.*
- [80] D. Stoyan. Comparaison Methods For Queueing Models and Others Stochastic Models. *Wiley edition, 1983.*
- [81] L. Tierney. Exploring posterior distributions using Markov chains. *Technical Report 560, University of Minnesota, 1991.*
- [82] R. L. Tweedie. Criteria for rates of convergence of Markov chains with application to queueing and storage theory. *London Mathematics Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.*
- [83] R. L. Tweedie. Truncation procedures for non-negative matrices. *J. Appl. Probab, (8) : 311-320, 1971.*
- [84] R. L. Tweedie. Truncation approximations of invariant measures for Markov chains. *J. Appl. Probab, (35) : 517-536, 1998.*
- [85] D. Vere-Jones. On the spectra of some linear operators associated with queueing systems. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Geb, 12-21, 1963.*
- [86] D. Wolf. Approximation of the invariant probability distribution of an infinite stochastic matrix. *Adv. Appl. Probab, (12) : 710-726, 1980.*
- [87] V. M. Zolotarev. Qualitative estimate for continuity property of queueing systems. *Theor. Prob. Appl, (20) : 211-213, 1975.*