



جامعة بجاية
Tasdawit n' Bgayet
Université de Béjaïa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire

Présenté par

GUETTAF Wahid

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

**Analyse numérique des EDP linéaires et applications en
contrôle optimal**

Soutenu le : 25/06/2014

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mr Radjef Mohammed Said	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr Bibi Mohand Ouamer	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr Aidène Mohamed	Professeur	Univ. de Tizi-Ouzou	Examineur
Mme Tas Saadia	Professeur	Univ. de Bejaia	Examinatrice

Année Universitaire : 2013/2014

Remerciements

Au terme de ce mémoire, il m'est agréable d'exprimer, en premier lieu, ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire le professeur BIBI Mohand Ouamer pour m'avoir confié ce sujet. Il n'a ménagé ni son temps ni sa peine pour me conseiller et m'ouvrir des perspectives nouvelles. Je lui en suis très reconnaissant et je lui adresse mes remerciements les plus sincères.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr RADJEF Mohammed Said, Professeur au niveau de l'Université de Bejaia, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens également à remercier Mr AIDENE Mohamed professeur à l'Université de Tizi-Ouzou, et Mme le professeur TAS Saadia de l'université de Bejaia d'avoir acceptés de juger mon travail.

Mes remerciements de tout coeur vont aussi à Mr KHAMOUDJ Ammar de l'USTHB.

Enfin, je me dois de remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- ✓ Mes très chers parents.
- ✓ Tous mes soeurs.
- ✓ Mes deux grands parents
- ✓ Toute ma famille.
- ✓ Tous mes amis et amies.
- ✓ Tous mes enseignants: de primère, cem, lycee, ens de kouba et de l'université de Béjaia.

Table des matières

Introduction générale	4
1 Définitions et Préliminaires	8
1.1 Concepts de base et définitions	8
1.2 EDP linéaires du 1 ^{er} ordre	9
1.3 Classification des EDP linéaires du 2 ^{ème} ordre, à coefficients constants	10
1.4 Conditions aux frontières et problème "bien posé"	11
1.5 Rappel sur la dérivation d'une fonction à plusieurs variables	12
1.6 Solutions analytiques - classiques - des EDP linéaires	13
1.6.1 Les équations de transport	13
1.6.2 Equations à coefficients constants	14
1.6.3 Méthode des caractéristiques	15
1.6.4 Méthode du changement de variables	16
1.6.5 Equations à coefficients variables	17
1.6.6 Solutions de l'équation des ondes	19
1.6.7 La formule de D'Alembert	20
1.6.8 L'équation de la chaleur	21
1.6.9 Fonction de Green	23
1.6.10 Solution particulière	23
1.6.11 Solution de l'équation de Laplace	25
2 Solutions généralisées et approche variationnelle	32
2.1 Distributions et espaces de Sobolev	33
2.1.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$	33
2.1.2 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω	33
2.2 Dérivation des distributions	34
2.3 Convergence des distributions	36

2.4	Les espaces de Sobolev	36
2.4.1	Introduction	36
2.4.2	L'espace $H^1(\Omega)$	37
2.4.3	L'espace $H_0^1(\Omega)$	38
2.4.4	Traces sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$	39
2.5	Formulation variationnelle	40
2.5.1	Position du problème	41
2.5.2	Formulation variationnelle du problème	41
2.5.3	Exemples classiques	42
2.5.4	Le théorème de Lax-Milgram	44
2.5.5	Application du théorème de Lax-Milgram	47
2.5.6	Conclusion de la méthode variationnelle	52
3	Solutions approchées	54
3.1	La méthode des différences finies	54
3.1.1	Principe de la méthode	54
3.1.2	Résolution du problème de Dirichlet non homogène	57
3.1.3	La méthode des différences finies en dimension supérieure à 1	61
3.2	La méthode de Galerkin (Ritz)	62
3.2.1	Principe de la méthode	62
3.2.2	Forme explicite de la solution	63
3.2.3	Estimation de l'erreur	65
3.2.4	La méthode de Ritz	66
3.3	Méthode des éléments finis	67
3.3.1	Principe de la méthode	67
3.3.2	La méthode des éléments finis en dimension 1	68
4	Application en contrôle optimal	78
4.1	Problème de contrôle optimal stationnaire	78
4.1.1	Position du problème	78
4.1.2	Méthode de l'état adjoint	80
4.1.3	L'algorithme de résolution	81
4.1.4	Exemple d'application	82
4.2	Problème de contrôle optimal non stationnaire	83
4.2.1	Méthode de l'état adjoint	84

4.2.2	L'algorithme de résolution	85
4.2.3	Exemple d'application	85
4.3	Résultats numériques	87
	Conclusion générale	90
	Bibliographie	91

Introduction générale

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction vérifiant une certaine relation entre elle et ses dérivées partielles.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable) ; les problèmes incluent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrés par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme d'une fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en physique, dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes [18]). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDP appelé équations de Navier-Stokes. Ces équations servent énormément en mécanique des fluides.

La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre date de 1734 [9]. L'idée d'Euler est de ramener la dite intégration à celle des équations différentielles ordinaires. Euler montre qu'une famille de fonctions de deux variables dépendant de deux

paramètres a et b de la forme $z = f(x, y, a, b)$ vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre en éliminant a et b entre les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ et z .

D'Alembert de son côté [10] fonde ses procédés d'intégration sur deux principes :

- La valeur de la dérivée seconde d'une fonction de deux variables est indépendante de l'ordre de différentiation par rapport à ces variables (théorème dû à Euler mais auquel il faut rajouter des conditions).
- La formation d'une différentielle totale exacte moyennant les deux relations $dz = pdx + qdy$ et $F(x, y, z, p, q) = 0$ de sorte que l'intégration de cette dernière donne l'intégrale.

Vingt ans après, en 1768 – 1770, Euler a appliqué les principes indiqués à un assez grand nombre d'équations mais d'une forme particulière. Lagrange, dans un mémoire de 1785 [11], résume les connaissances de l'époque sur ces questions. Il ne sait intégrer que 11 types d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Les équations aux dérivées partielles d'ordre un n'ont que peu de rapport avec les applications de l'analyse. Il en va tout autrement avec les équations d'ordre supérieur qu'on rencontre dès le *XVIII*^e siècle dans la mécanique des corps déformables, dans l'hydrodynamique, et dans la théorie de l'élasticité. La difficulté est de traduire les lois de la mécanique newtonienne sur des corps non rigides. Les Bernoulli, Taylor, Euler, avant 1740, n'écrivent pas d'équations aux dérivées partielles mais utilisent des raisonnements géométriques particuliers à chaque cas. C'est seulement en 1743 que D'Alembert écrit la première équation aux dérivées partielles de la mécanique, à propos des oscillations d'une chaîne pesante au voisinage de sa position d'équilibre.

La formulation variationnelle d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles correspond à une formulation faible de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un espace de Hilbert. A l'aide du théorème de Lax-Milgram, elle permet de discuter de l'existence et de l'unicité de solutions.

Les espaces de Sobolev[20] se sont imposés comme l'outil moderne fournissant le cadre adéquat pour la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles. Sobolev a introduit des notions de nos jours fondamentales dans plusieurs champs des mathématiques. Les espaces de Sobolev, des espaces de fonctions caractérisées par des conditions sur leurs transformées de Fourier, sont devenus un point important de l'analyse fonctionnelle. Les fonctions généralisées (connues par la suite sous le nom de distributions) ont été introduites

pour la première fois par Sobolev en 1935 pour la recherche de solutions faibles, avant d'être repris par Laurent Schwartz. Sobolev a donné une version abstraite de la notion classique de différentiation, étendant ainsi les champs d'application de la théorie de Newton et Leibniz. La théorie des distributions fut formalisée par le mathématicien français Laurent Schwartz[19] et lui valut la médaille Fields en 1950. Son introduction utilise des notions d'algèbre linéaire et de topologie centrées autour de l'idée de dualité. Il faut chercher l'origine de cette théorie dans le calcul symbolique de Heaviside 1894 et Poincaré 1912, et dans l'introduction par les physiciens de la fonction de Dirac en 1926. L'objectif a été alors de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématique correct à des objets manipulés par les physiciens. Il fallait en plus garder la possibilité de faire des opérations telles que des dérivations, convolutions, transformées de Fourier ou de Laplace.

Des méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont développées telles la méthodes des éléments finis et la méthode de Galerkin. Ces dernières se fondent sur la formulation variationnelle pour déterminer des solutions numériques approchées du problème d'origine.

Une importante application des différences finies est la résolution numérique des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles : l'idée est de remplacer les dérivées apparaissant dans l'équation par des différences finies qui les approximent. Les diverses méthodes qui en résultent sont appelées méthodes des différences finies.

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords. On parle couramment de conditions de type Dirichlet (valeurs aux bords) ou Neumann (gradients aux bords) ou conditions mixtes. Il s'agit donc avant tout de la résolution approchée d'un problème, où, grâce à la formulation variationnelle, les solutions du problème vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions du problème de départ et où une discrétisation permet de trouver une solution approchée. Comme de nombreuses autres méthodes numériques, outre l'algorithme de résolution en soi, se posent les questions de la qualité d'une discrétisation : l'existence de solutions, l'unicité de la solution, la stabilité et la convergence.

La théorie du contrôle étudie les systèmes et le moyen d'agir sur eux au moyen d'une commande (ou contrôle). Dans le cas du contrôle optimal, le but est en général d'optimiser

le fonctionnement d'un système en fonction d'un critère de coût pertinent, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations. un problème fondamental dans plusieurs champs d'applications des Mathématiques est le contrôle ou l'amortissement des vibrations de grandes structures. C'est ainsi que, dans les trente dernières années, s'est développée, sous l'impulsion de J.-L. Lions et de son école, une théorie mathématique du contrôle optimal pour les solutions de l'équation des ondes dans un milieu non homogène[13].

Notre contribution essentielle dans cette thèse est d'appliquer des méthodes numériques aux problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Ce travail est constitué d'une introduction, de quatre chapitres et d'une conclusion. Le premier chapitre est consacré à des rappels et définitions, et aux solutions analytiques des EDP linéaires.

Le deuxième chapitre traite de des solutions généralisées et de la formulation variationnelle, ainsi que des concepts de base sur les distributions et les espaces de Sobolev. Le théorème fondamental dans ce concept est celui de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes numériques de résolution des EDP linéaires : Par La méthode de différences finies, la méthode de Galerkin et la méthode des éléments finis.

Le dernier chapitre est consacré à la résolution de deux exemples critique en contrôle optimal des EDP. Le premier exemple est un problème stationnaire, et le deuxième est l'équation de la chaleur avec un contrôle au bord du domaine.

Enfin, nous clôturons cette thèse par une conclusion générale, ainsi que quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

Définitions et Préliminaires

1.1 Concepts de base et définitions

Définition 1.1.1. Une équation différentielle aux dérivées partielles ou **EDP**, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , les variables x, y, \dots , ses dérivées partielles, $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$. Elle s'écrit de façon générale :

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) est considérée dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n .

Les solutions de l'équation (1.1) sont des fonctions qui vérifient cette équation dans Ω .

Exemples :

$$u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x, \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.5)$$

Définition 1.1.2. L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation.

Dans l'exemple précédent, l'équation (1.4) est d'ordre 1, les équations (1.2), (1.3) et (1.5) sont d'ordre 2.

Définition 1.1.3. Une équation aux dérivées partielles est dite **linéaire** si F est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. Autrement dit, si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et à la puissance 1 dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.

Les équations (1.3) et (1.5) sont linéaires, les équations (1.2) et (1.4) sont non linéaires.

Définition 1.1.4. Une équation aux dérivées partielles est dite **homogène** si elle est vérifiée pour $u = 0$ (tous les termes de l'équation contiennent la fonction u ou l'une de ses dérivées partielles).

1.2 EDP linéaires du 1^{er} ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du 1^{er} ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y),$$

où A, B, C et D sont des fonctions.

Exemple 1 : Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

L'EDP (1.6) est du 1^{er} ordre, linéaire et homogène. On a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial y} (dy - dx).$$

Si dx et dy sont reliés par $dx - dy = 0$, alors $du = 0$, la fonction u est constante sur chacune des courbes de la famille $y - x = \xi (\xi \in \mathbb{R})$, et u ne dépend que de ξ .

Donc $u(x, y) = f(\xi) = f(x - y)$, où f est une fonction arbitraire d'une seule variable, de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Les droites $y - x = \xi$ sont appelées **les caractéristiques** de l'EDP (1.6).

Exemple 2 : Considérons l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1.7)$$

L'EDP (1.7) est du 1^{er} ordre, linéaire et homogène. On a

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (-y dx + dy) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Si dx et dy sont reliés par $-y dx + dy = 0$, alors $du = 0$, et u est constante sur chacune des courbes $y = \xi e^x$. Donc la solution générale de l'équation (1.7) est de la forme

$$u(x, y) = f(ye^{-x}),$$

où f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Exemple 3 : Considérons l'EDP :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0. \quad (1.8)$$

On a

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(2u - x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(dx - \frac{1}{2} x dy \right) + u dy. \end{aligned}$$

Si dx et dy sont reliés par $dx - \frac{1}{2}x dy = 0$, alors $du = u dy$, $x = \xi e^{\frac{y}{2}}$. Sur chacune de ces courbes, $u = cste \cdot e^y$.

Donc la solution générale de l'EDP (1.8) est de la forme : $u(x, y) = e^y f(xe^{-\frac{y}{2}})$.

1.3 Classification des EDP linéaires du 2^{ème} ordre, à coefficients constants

Une EDP linéaire du 2^{ème} ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0.$$

Les trois premiers termes correspondent à la **partie principale**. A, B, \dots, G sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est dite **hyperbolique**.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est dite **parabolique**.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est dite **elliptique**.

Il est plus important d'avoir en tête des exemples d'équations aux dérivées partielles appartenant à chacune de ces classes, plutôt que d'essayer de formaliser dans le détail cette classification. Donnons donc quelques exemples :

- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. On a $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$, cette équation est hyperbolique est elle s'appelle : *l'équation des ondes*.

- $\frac{\partial u}{\partial y} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, avec $d > 0$. On a $B^2 - 4AC = 0$, donc cette équation est parabolique, appelée *l'équation de la diffusion*.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. On a $B^2 - 4AC = -4 < 0$, donc cette équation est elliptique, appelée *l'équation de Laplace*.
- $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (équation de *Tricomi*). Le discriminant vaut $B^2 - 4AC = 4y$. Selon le signe de y , on a
 - Si $y > 0$ l'EDP est hyperbolique ;
 - Si $y = 0$ l'EDP est parabolique ;
 - Si $y < 0$ l'EDP est elliptique.

1.4 Conditions aux frontières et problème "bien posé"

Considérons une EDP sur un domaine Ω . Trois types de conditions aux frontières existent :

- On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$. C'est la condition de *Dirichlet*.
- On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$ sur $\partial\Omega$. C'est la condition de *Neumann*.
- On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.

Remarque : Si l'EDP est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière. On impose alors souvent des conditions à l'infini.

Définition 1.4.1. (problème "bien posé")

Soit une EDP valide dans un domaine Ω , munie de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

- il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions aux frontières (*existence*).
- la solution doit être unique (*unicité*).
- la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (*stabilité*).

1.5 Rappel sur la dérivation d'une fonction à plusieurs variables

On se limite dans ce rappel au cas de fonctions de deux variables, mais on peut facilement généraliser ces notions aux fonctions de plusieurs variables. dans cette section, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 . Commençons par les définitions suivants :

Définition 1.5.1. (application partielle) Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle applications partielles associées à f en (x_0, y_0) , les deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} obtenues en figeant l'une des variables :

$$f_1 : x \mapsto f_1(x) = f(x, y_0) \text{ et } f_2 : y \mapsto f_2(y) = f(x_0, y).$$

La notion de dérivée partielle de f en un point (x_0, y_0) s'agit des dérivées des applications partielles associées à f en (x_0, y_0) .

Définition 1.5.2. (dérivée partielle) Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$, et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit (x_0, y_0) un point de Ω et $f_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_1(x) = f(x, y_0).$$

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) lorsque f_1 est dérivable en x_0 . On note $\partial_x f(x_0, y_0)$ le nombre $f_1'(x_0)$.

De la même manière, si elle existe, on note $\partial_y f(x_0, y_0)$ la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) .

Définition 1.5.3. (continuité) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

On dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en chaque point de Ω .

Définition 1.5.4. (Dérivées directionnelles) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application, (x_0, y_0) un point de Ω et v un vecteur de \mathbb{R}^2 . On appelle dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction de v la dérivée en $t = 0$, si elle existe, de la fonction d'une variable

$$f_v : t \mapsto f((x_0, y_0) + tv).$$

On la note alors $\partial_v f(x_0, y_0)$.

Remarque : Les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne sont autre que les dérivées directionnelles de f dans les directions des deux vecteurs de la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

Proposition 1.5.1. Soit $f :]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors f admet des dérivées directionnelles en (x_0, y_0) dans toutes les directions v , et

$$\partial_v f(x_0, y_0) = d_{(x_0, y_0)} f(v).$$

Mais la réciproque est fautive dans le cas générale.

Proposition 1.5.2. Soit $f :]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ dans $]a, b[\times]c, d[$ et que ces dérivées partielles sont continues, alors f est différentiable dans $]a, b[\times]c, d[$.

Définition 1.5.5. Lorsque f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ continues dans Ω , on dit que f est de classe C^1 dans Ω .

Proposition 1.5.3. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Alors f admet en tout point (x, y) une dérivée directionnelle dans toute direction $v = (v_1, v_2)$, et on a :

$$\partial_v f(x, y) = v_1(\partial_x f)(x, y) + v_2(\partial_y f)(x, y).$$

On présente maintenant l'extension au cas de dérivées d'ordre supérieure.

Définition 1.5.6. Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω . f est de classe C^2 si ces dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont de classe C^1 .

Lemme 1.5.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux applications dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t))$$

est dérivable, et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(t) = d_{(\phi_1(t), \phi_2(t))} f(\phi_1'(t), \phi_2'(t)).$$

Théorème 1.5.1. (De Schwarz)[27] Si f est de classe C^2 dans Ω , alors on a

$$\partial_{xy}^2 f = \partial_{yx}^2 f.$$

1.6 Solutions analytiques - classiques - des EDP linéaires

1.6.1 Les équations de transport

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c . Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau.

On note $u(t, x)$ la concentration de polluant à l'instant t et à l'abscisse x .

La fonction u vérifie l'EDP suivante :

$$\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0. \quad (1.9)$$

En effet, à l'instant t , la quantité de polluant entre les points d'abscisse 0 et x est

$$Q(t) = \int_0^x u(t, y) dy.$$

A l'instant $t + h$, le polluant s'est déplacé de ch mètres. La quantité de polluant entre les points d'abscisse ch et $x + ch$ est donc celle qui se trouvait à l'instant t entre 0 et x . On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+h, y) dy.$$

On va dériver l'égalité obtenue par rapport à x . Pour ce faire, on pose $y' = y - ch$ et on obtient

$$Q(t) = \int_0^x u(t+h, y' + ch) dy',$$

et donc

$$u(t+h, x+ch) = u(t, x). \quad (1.10)$$

En dérivant maintenant l'expression (1.10) par rapport à h , on obtient

$$\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0,$$

ce qui est bien l'EDP (1.9).

1.6.2 Equations à coefficients constants

On va résoudre les EDP de la forme (1.9), ou de manière un peu plus générale, les équations

$$a \partial_t u(t, x) + b \partial_x u(t, x) = 0, \quad (1.11)$$

où a et b sont deux constantes réelles, dont l'une au moins n'est pas nulle. On cherche ici toutes les fonctions u définies sur \mathbb{R}^2 de classe C^1 et telles que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ l'EDP (1.11) soit vérifiée.

Commençons par le cas particulier $a = 1$ et $b = 0$. L'équation (1.11) devient alors $\partial_t u(t, x) = 0$.

On voit immédiatement que u est solution si et seulement si u ne dépend pas de t . Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent

$$u(t, x) = f(x),$$

où f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et de classe C^1 .

Remarque : La première remarque qui s'impose, c'est qu'il y a beaucoup de solutions.

- On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique : les solutions $(t, x) \mapsto u(t, x)$ sont exactement les fonctions constantes le long des droites horizontales, c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a, b) = (1, 0)$.

Ce phénomène a également lieu pour toutes les équations (1.11).

1.6.3 Méthode des caractéristiques

On reprend l'équation (1.11). Supposons que $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , soit solution. En terme de différentielle, (1.11) se traduit par

$$d_{(t,x)}u(a, b) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.12)$$

Autrement dit, la dérivée directionnelle $\partial_{(a,b)}u(t, x)$ de u dans la direction du vecteur (a, b) est nulle en tout point (t, x) de \mathbb{R}^2 . On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.6.1. Si u est solution de (1.11), alors u est constante le long de chaque droite de direction (a, b) .

Preuve : Soit (t, x) un point de \mathbb{R}^2 . Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(k) = u((t, x) + k(a, b)) = u(t + ka, x + kb).$$

La fonction φ donne les valeurs de u en chaque point $(t', x') = (t, x) + k(a, b)$ de la droite \mathcal{D} de vecteur de direction (a, b) passant par (t, x) . On dérive φ

$$\varphi'(k) = d_{((t,x)+k(a,b))}u(a, b) = d_{(t',x')}u(a, b) = 0.$$

Donc φ est constante, et u l'est sur la droite \mathcal{D} .

Définition 1.6.1. On appelle caractéristiques de l'équation (1.11) les droites de vecteur directeur (a, b) . Ce sont toutes les droites \mathcal{D}_c d'équation $bt - ax = c$, où c parcourt l'ensemble des réels.

On note maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui a un réel c associe la valeur de u sur la droite \mathcal{D}_c . Soit (t_0, x_0) un point de \mathbb{R}^2 . Il existe une et une seule caractéristique qui passe par (t_0, x_0) : c'est la droite \mathcal{D}_{c_0} , où $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0, x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0).$$

Ce raisonnement étant valable pour tout (t_0, x_0) de \mathbb{R}^2 , on a finalement

$$u(t, x) = f(bt - ax), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.13)$$

Puisque $u \in C^1$, Alors f est aussi de classe C^1 .

On a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire. Il reste à prouver que toute fonction u de la forme (1.13) avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et de classe C^1 est bien solution de (1.11). En effet, on a

$$\partial_t u(t, x) = \partial_t f(bt - ax) = bf(bt - ax),$$

et

$$\partial_x u(t, x) = \partial_x f(bt - ax) = -af(bt - ax).$$

Donc

$$a\partial_t u(t, x) + b\partial_x u(t, x) = a[bf(bt - ax)] + b[-af(bt - ax)] = 0.$$

On alors démontré le résultat suivant :

Théorème 1.6.1. Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation (1.11) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(t, x) = f(bt - ax),$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque de classe C^1 .

1.6.4 Méthode du changement de variables

Nous allons retrouver le résultat précédent à l'aide d'une autre méthode, qui s'avère être très pratique. Plutôt que d'une méthode totalement différente, il s'agit d'une autre formulation de la même idée. On a vu que les solutions de l'équation (1.11) ne dépendent que de la variable $bt - ax$. On pose donc $t' = bt - ax$ et on choisit une autre coordonnée x' qui soit indépendante. On prend par exemple

$$\begin{cases} t' = bt - ax, \\ x' = at + bx, \end{cases}$$

On pose alors $v : (t', x') \mapsto v(t', x') = u(t, x)$, et l'on examine l'équation vérifiée par v lorsque u est solution de (1.11). On calcule d'abord les dérivées partielles de u en fonction de celles de v . On a

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_t (v(bt - ax, at + bx)) \\ &= b(\partial_{t'} v)(bt - ax, at + bx) + a(\partial_{x'} v)(bt - ax, at + bx), \\ \partial_x u(t, x) &= \partial_x (v(bt - ax, at + bx)) \\ &= -a(\partial_{t'} v)(bt - ax, at + bx) + b(\partial_{x'} v)(bt - ax, at + bx). \end{aligned}$$

Donc u , de classe C^1 , est solution de l'équation (1.11) si et seulement si v vérifie l'équation

$$(a^2 + b^2)(\partial_{x'}v)(t', x') = 0.$$

Autrement dit, puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, u est solution de l'équation (1.11) si et seulement si v ne dépend pas de x' : $v(t', x') = f(t')$ pour une certaine fonction f , de classe C^1 puisque v l'est. Revenant à u , on retrouve le théorème 1.6.1

$$u(t, x) = f(bt - ax). \quad (1.14)$$

1.6.5 Equations à coefficients variables

Considérons par exemple l'équation

$$\partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0. \quad (1.15)$$

On cherche à appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation. Lisons l'équation : la dérivée directionnelle de u dans la direction du vecteur $X = (1, x)$ doit être nulle :

$$\partial_{(1,x)} u(x, y) = 0. \quad (1.16)$$

Evidemment, la difficulté qui apparaît est que le vecteur en question dépend du point (x, y) où l'on se trouve. On doit adapter un peu la notion de caractéristique.

Définition 1.6.2. On appelle champ de vecteurs une application X , de classe C^1 , de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considéré comme sous-ensemble des points du plan, dans \mathbb{R}^2 considéré comme ensemble des vecteurs du plan (l'espace vectoriel \mathbb{R}^2).

Exemple : l'équation (1.15) amène naturellement à considérer le champ de vecteurs $X(x, y) = (1, x)$.

Définition 1.6.3. Soit $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs régulier (de classe C^1). Une courbe intégrale de X est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in I.$$

On appelle caractéristiques de l'équation (1.15) chacune des courbes intégrales du champ de vecteurs $X(x, y) = (1, x)$.

Proposition 1.6.2. Si u est une solution de l'équation (1.15), u est constante le long des courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t)$ du champ X :

$$\partial_t(u(\gamma(t))) = 0.$$

Preuve : Soit (x, y) un point de \mathbb{R}^2 , et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(k) = u((x, y) + k(1, x)) = u(x + k, y + kx).$$

La fonction φ donne les valeurs de u en chaque point $(x', y') = (x + k, y + kx)$ de la courbe $\gamma(t)$. En dérivant φ on obtient

$$\varphi'(k) = d_{(x+k, y+kx)} = d_{(x', y')}u(1, x) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_t(u(\gamma(t))) &= \gamma'(t)\partial_t u(\gamma(t)), \\ &= X(\gamma(t))\partial_t u(\gamma(t)), \\ &= (1, x)\partial_t u(\gamma(t)), \\ &= \partial_t u(\gamma(t)) + x\partial_x u(\gamma(t)), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette proposition généralise ce que l'on a vu dans le cas des équations à coefficients constants : dans ce cas-là, le champ de vecteurs X associé à l'équation est le champ constant $X(x, y) = (a, b)$, dont les courbes intégrales sont les droites de direction (a, b) .

Exemple : - Problème de Cauchy -

On va résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation (1.15) :

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = \phi(y). \end{cases} \quad (1.17)$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 donnée.

On commence par chercher les courbes caractéristiques de l'équation. Ce sont les courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ du champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Par définition, on a donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = x(t), \end{cases}$$

ce qui donne $x(t) = t + x_0$ et $y(t) = \frac{t^2}{2} + x_0 t + y_0$, où l'on a noté (x_0, y_0) le point de γ correspondant à $t = 0$. Si l'on préfère une équation cartésienne, on voit que la courbe γ qui passe par (x_0, y_0) , a pour équation

$$y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

On veut maintenant déterminer la valeur de la solution du problème de Cauchy (1.17) au point (x_0, y_0) . On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par le

point (x_0, y_0) . Cette courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(x_1 = 0, y_1 = y_0 - \frac{x_0^2}{2})$, et l'on sait que

$$u(x_1, y_1) = u(0, y_1) = \phi(y_1) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

On obtient alors, pour n'importe quel (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 ,

$$u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

En raisonnant par condition nécessaire, on obtient donc $u(x, y) = \phi(y - \frac{x^2}{2})$. Il est très simple de vérifier que cette fonction est effectivement solution de (1.17), et la méthode des caractéristiques nous a encore permis de construire l'unique solution de ce problème.

1.6.6 Solutions de l'équation des ondes

On considère une corde de longueur L , et de densité ρ constante, cette corde est élastique et tendue entre deux points A et B . On s'intéresse aux petites vibrations transversales de la corde. Penser par exemple aux vibrations d'une corde de guitare. On supposera que les effets de la gravité et des autres éventuelles forces extérieures peuvent être négligées. On choisit comme axe des abscisses la droite (AB) , l'origine de l'axe étant le point A , et on note x les abscisses. On désigne alors par $u(t, x)$ le déplacement vertical de la corde à l'instant t et au point d'abscisse x .

On va résoudre l'équation des ondes

$$c^2 \partial_{xx}^2 u(t, x) = \partial_{tt}^2 u(t, x), \quad (1.18)$$

où $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, et τ est une constante désigne la norme des forces extérieures exercées par la corde au point M quelconque.

c'est à dire trouver les fonctions $u(t, x)$, définies sur \mathbb{R}^2 et de classe C^2 qui vérifient cette égalité. On reprend la méthode du changement de coordonnées. Soit

$$\begin{cases} t' = x + ct, \\ x' = x - ct, \end{cases}$$

et $v : (t', x') \mapsto u(t, x)$. On vérifie facilement que

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = c \partial_{t'} v(t', x') - c \partial_{x'} v(t', x'), \\ \partial_x u(t, x) = \partial_{t'} v(t', x') + \partial_{x'} v(t', x'). \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t, x) = c^2 \partial_{t't'}^2 v(t', x') + c^2 \partial_{x'x'}^2 v(t', x') - 2c^2 \partial_{t'x'}^2 v(t', x'), \\ \partial_{xx}^2 u(t, x) = \partial_{t't'}^2 v(t', x') + \partial_{x'x'}^2 v(t', x') + 2\partial_{t'x'}^2 v(t', x'). \end{cases}$$

Donc u est solution de l'équation des ondes si et seulement si v vérifie

$$\partial_{t'x'}^2 v(t', x') = 0,$$

et les solutions sont toutes les fonctions v qui s'écrivent

$$v(t', x') = f(t') + g(x'),$$

où f et g sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R} . Revenant à u , on obtient que

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (1.19)$$

Rappelons que la solution générale d'une équation de transport à coefficients constants est une fonction arbitraire de la variable $x - ct$. On voit ici que la solution est la somme de deux fonctions arbitraires, l'une de la variable $x + ct$ et l'autre de la variable $x - ct$.

On comprend mieux l'analogie avec les équations de transport si l'on remarque que

$$\partial_{tt}^2 u(t, x) - c^2 \partial_{xx}^2 u(t, x) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u(t, x).$$

Autrement dit, pour résoudre l'équation des ondes, on doit chercher u et v telles que

$$\begin{cases} v = \partial_t u + c\partial_x u, \\ \partial_t v - c\partial_x v = 0. \end{cases}$$

1.6.7 La formule de D'Alembert

On vient de voir que l'équation des ondes sur l'axe réel a de nombreuses solutions. Pour cela on a le résultat suivant, qui remonte à D'Alembert au milieu du 18^{ème} siècle.

Théorème 1.6.2.[28] Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , avec ϕ de classe C^2 et ψ de classe C^1 . Alors le problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t, x) - c^2 \partial_{xx}^2 u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = \phi(x), \\ \partial_t u(0, x) = \psi(x), \end{cases} \quad (1.20)$$

admet une unique solution u de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

1.6.8 L'équation de la chaleur

On décrit maintenant le phénomène de la diffusion, par exemple de la chaleur au travers d'un corps, ou bien d'un colorant dans un liquide au repos. Dans les deux cas, le principe physique est le même, et porte le nom de Loi de Fourier (ou Loi de Fick) : le flot de chaleur est dirigé de la région chaude à la région froide, et son intensité est proportionnelle au gradient de température. On se limite encore une fois à la diffusion de la chaleur le long d'un axe. Notons $u(t, x)$ la température à l'instant t au point d'abscisse x . La quantité totale de chaleur (en joules par exemple) sur l'axe entre les points x_0 et x_1 ($x_0 < x_1$) à l'instant t est

$$H(t) = c\rho \int_{x_0}^{x_1} u(t, x) dx.$$

où c et ρ sont des constantes physiques : c est la chaleur spécifique du matériau et ρ sa densité.

On suppose que la chaleur décroît de la gauche vers la droite le long de l'axe, au moins au voisinage du segment $[x_0, x_1]$. On sait que la quantité de chaleur $H(t)$ entre x_0 et x_1 ne peut changer au cours du temps qu'à cause d'entrées en x_0 ou de sorties en x_1 . Or, d'après la Loi de Fourier, le flot de chaleur entrant en x_0 est $\kappa \partial_x u(t, x_0)$ et celui sortant de x_1 est $\kappa \partial_x u(t, x_1)$, où κ est une certaine constante positive, appelée conductivité calorifique. On obtient donc

$$H'(t) = \kappa \partial_x u(t, x_1) - \kappa \partial_x u(t, x_0).$$

c'est à dire

$$c\rho \int_{x_0}^{x_1} \partial_t u(t, x) dx = \kappa \partial_x u(t, x_1) - \kappa \partial_x u(t, x_0).$$

En dérivant cette égalité par rapport à x_1 , et en posant $k = \frac{\kappa}{c\rho}$, on obtient l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t, x) = k \partial_{xx}^2 u(t, x). \quad (1.21)$$

Théorème 1.6.3. -Principe de maximum-[28] Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t, x) = k \partial_{xx}^2 u(t, x),$$

dans le rectangle $[0, T] \times [0, L]$. Alors u atteint son maximum sur l'un des bords $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$ du rectangle.

Remarque : Dans ce théorème, la fonction u est continue dans le rectangle $[0, T] \times [0, L]$, donc est bornée et atteint sa borne supérieure dans $[0, T] \times [0, L]$. Ce qu'affirme le théorème,

c'est qu'il existe un point de l'un des côtés $t = 0, x = 0$ ou $x = L$ du rectangle où ce maximum est atteint. En fait on peut démontrer, (mais c'est beaucoup plus difficile) un principe du maximum fort : le maximum n'est pas atteint ailleurs que sur l'un de ces côtés.

Proposition 1.6.3. Soient ϕ, g et h trois fonctions régulières. Il existe au plus une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ qui vérifie le problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k\partial_{xx}^2 u(t, x) = f(t, x), \\ u(0, x) = \phi(x), \\ u(t, 0) = g(t), u(t, L) = h(t). \end{cases} \quad (1.22)$$

Preuve : Supposons que u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières vérifiant (1.22), et notons $w = u_1 - u_2$. La fonction w est régulière et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) - k\partial_{xx}^2 w(t, x) = 0, \\ w(0, x) = 0, \\ w(t, 0) = 0, w(t, L) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Soit $T > 0$, on sait que le maximum de w sur $[0, T] \times [0, L]$ est atteint sur l'un des côtés $t = 0, x = 0$ ou $x = L$. Mais w y est nulle, donc $w(t, x) \leq 0$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$. Le même raisonnement vaut pour $-w$: on a donc aussi $w(t, x) \geq 0$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$, et finalement $w = 0$ sur $[0, T] \times [0, L]$. Ceci étant vrai pour tout T , on a bien $u_1 = u_2$.

Revenons à l'équation de la chaleur sur toute la droite réelle. Dans ce cas, le résultat d'unicité que nous venons d'obtenir peut s'étendre modulo certaines conditions supplémentaires à l'infini. Par exemple, on peut s'intéresser aux solutions qui tendent vers 0 quand $|x| \rightarrow +\infty$ uniformément par rapport à t .

Proposition 1.6.4.[28] Soit ϕ une fonction régulière. Il existe au plus une fonction u de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, telle que

$$\sup_{t>0} |u(t, x)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } |x| \rightarrow +\infty, \quad (1.24)$$

et qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k\partial_{xx}^2 u(t, x) = f(t, x), \\ u(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (1.25)$$

1.6.9 Fonction de Green

On veut résoudre explicitement le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k \partial_{xx}^2 u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = \phi(x), \end{cases} \quad (1.26)$$

c'est à dire établir un résultat similaire au théorème de D'Alembert pour l'équation des ondes. Les choses sont notablement plus compliquées ici, et l'on va examiner de près les propriétés d'invariance de l'équation, notre objectif étant d'obtenir un maximum de conditions nécessaires pour qu'une fonction u soit solution.

Proposition 1.6.5. - Invariances de l'équation - Supposons que la fonction u soit une solution de l'équation de la chaleur (1.26). Alors

1. N'importe quelle dérivée partielle de u , dès qu'elle existe et est suffisamment régulière, vérifie (1.26).
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $u_y : (t, x) \rightarrow u(t, x - y)$ vérifie (1.26).
3. Si l'intégrale converge et que l'on peut "dérivée sous le signe d'intégration", alors la fonction $U : (t, x) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) u(t, x - y) dy$ vérifie (1.26) pour n'importe quelle fonction ϕ .
4. Pour tout $a > 0$, la fonction $u_a : (t, x) \rightarrow u(at, \sqrt{a}x)$ vérifie (1.26).

1.6.10 Solution particulière

On va résoudre le problème (1.26) avec comme donnée initiale

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction ϕ est souvent appelée fonction de Heaviside et notée H . On notera qu'elle n'est pas continue à l'origine. L'intérêt immédiat de cette donnée initiale particulière est qu'elle vérifie la propriété $\phi_a = \phi$ pour tout $a > 0$. Sous réserve d'unicité, la solution de (1.26) doit donc s'écrire

$$u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \quad (1.27)$$

pour une certaine fonction f . Par rapport à la discussion précédente, on a changé de fonction f pour faire apparaître le facteur $\sqrt{4t}$ et faciliter les calculs qui vont suivre. En calculant

ses dérivées partielles, on voit que la fonction u donnée par (1.27) est solution de l'équation de la chaleur si et seulement si

$$-\frac{1}{2} \frac{4kx}{(4kt)^{3/2}} f' \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) - k \frac{1}{4kt} f'' \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) = 0.$$

On multiplie cette équation par $4t$, puis on pose $z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$ et on obtient

$$2zf'(z) + f''(z) = 0.$$

Les solutions de l'équation différentielle ordinaire $y' + 2zy = 0$ sont les fonctions

$$y(z) = C_1 \exp(-z^2),$$

ce qui donne

$$f(z) = C_1 \int_0^z e^{-s^2} ds + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles. En revenant à la fonction u on obtient donc nécessairement

$$u(t, x) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} ds + C_2.$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 en faisant tendre $t \rightarrow 0$ dans l'expression ci-dessus. En prenant $x > 0$, puis $x < 0$, et en supposant que la solution est continue par rapport à $t \in [0, +\infty[$, on obtient

$$\begin{cases} C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 1, \\ -C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0. \end{cases}$$

On a finalement obtenu comme solution la fonction

$$S(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} ds + \frac{1}{2}. \quad (1.28)$$

Remarque : Il faut noter que l'on n'a aucun résultat à notre disposition permettant d'affirmer que cette fonction est la seule solution du problème.

La solution $S(t, x)$ que nous venons d'obtenir est C^∞ en dehors de $t = 0$. Conformément à la propriété 1 de la Proposition 1.5.4, la fonction $Q(t, x) = \partial_x S(t, x)$ est encore une solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$.

Définition 1.6.4. La fonction

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4kt}$$

est appelée fonction de Green pour l'équation de la chaleur.

Théorème 1.6.4.[28] Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact. La fonction u définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x - y) \phi(y) dy,$$

est solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur (1.26).

1.6.11 Solution de l'équation de Laplace

On s'intéresse dans cette section à l'équation de Laplace

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (1.29)$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$, appelé *Laplacien*, et f est une fonction continue donnée.

Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques. Du côté de la physique, la solution de l'équation (1.29) est par exemple le potentiel électrique engendré dans le plan par la répartition de charges $\rho = -\frac{1}{4\pi}f$. L'équation de la chaleur et celle des ondes dans un espace à deux variables s'écrivent :

$$\partial_t u = k(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u) \quad \text{et} \quad \partial_{tt}^2 u = c^2(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u).$$

On est donc aussi en présence de l'équation de Laplace lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps, pour lesquels $\partial_t u = 0$ et $\partial_{tt}^2 u = 0$. Du point de vue des mathématiques, le Laplacien est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie. Les solutions de (1.29) pour $f = 0$ sont par exemple appelées fonctions harmoniques.

Théorème 1.6.5. - Principe de maximum - [28] Soit D un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^2 . Soit u une fonction de classe C^2 dans D , continue dans $\bar{D} = D \cup \partial D$. Si u est solution dans D de l'équation

$$\Delta u(x, y) = 0,$$

alors le maximum de u dans \bar{D} est atteint sur le bord de D .

Proposition 1.6.6. Soit D un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^2 . Soit f une fonction continue sur \bar{D} , et g une fonction continue sur ∂D . Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (1.30)$$

admet au plus une solution de classe C^2 .

Comme pour l'équation de la chaleur, il est très important de noter les propriétés d'invariance de l'équation de Laplace. Nous allons montrer que cette équation est invariante sous l'action des translations et des rotations du plan. De manière plus explicite, on a le résultat suivant :

Proposition 1.6.7. Si $u(x, y)$ est une solution de (1.29) dans un domaine D , alors $v(x, y) = u(\tau(x, y)) = u(x - a, y - b)$ et $w(x, y) = u(\rho(x, y)) = u(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ sont

encore solutions de (1.29) dans $\tau^{-1}(D)$ et $\rho^{-1}(D)$ respectivement.

a- Le Laplacien en coordonnées polaires

Le fait que le Laplacien possède cette invariance par rotation suggère que son expression en coordonnées polaires doit être relativement simple.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique couple (r, θ) dans $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Notons g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ par

$$g(r, \theta) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On voit d'abord que

$$\begin{cases} \partial_r g(r, \theta) = \cos \theta \partial_x f(x, y) + \sin \theta \partial_y f(x, y), \\ \partial_\theta g(r, \theta) = -r \sin \theta \partial_x f(x, y) + r \cos \theta \partial_y f(x, y). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = \cos \theta \partial_r g(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta g(r, \theta), \\ \partial_y f(x, y) = \sin \theta \partial_r g(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta g(r, \theta). \end{cases}$$

Lemme 1.6.1. Soit u une fonction de classe C^2 , et $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a

$$\Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 v(r, \theta).$$

On peut par exemple utiliser cette expression pour déterminer toutes les fonctions harmoniques qui sont invariantes par rotation. Il s'agit des fonctions u de classe C^2 telles que $\Delta u(x, y) = 0$, et pour lesquelles, notant $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a $\partial_\theta v(r, \theta) = 0$ (v ne dépend pas de θ).

Avec le lemme précédent, on doit alors avoir

$$\Delta u(x, y) = \partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \theta) = 0.$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\partial_r (r \partial_r v(r, \theta)) = 0,$$

et finalement ses solutions sont

$$v(r, \theta) = C_1 \log(r) + C_2. \tag{1.31}$$

Remarque On notera que l'on a pas précisé dans quel domaine on cherche de telles solutions invariantes par rotation. Ce domaine doit être lui-même invariant par rotation, et ne pas contenir $(0, 0)$.

b- Le problème de Dirichlet dans un disque

On a le problème suivant : Déterminer toutes les fonctions $u(x, y)$ telles que

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{pour } x^2 + y^2 < \delta, \\ u(x, y) = h(\theta), & \text{pour } x^2 + y^2 = \delta, \end{cases} \quad (1.32)$$

où $\delta > 0$ est un réel donné, et h une fonction de classe C^2 , périodique de période 2π .

On commence par écrire ce problème en coordonnées polaires. Si u est solution du problème ci-dessus, la fonction $v(r, \theta) = u(x, y)$, doit vérifier

$$\begin{cases} \partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 v(r, \theta) = 0, & \text{pour } 0 < r < \delta, \\ v(\delta, \theta) = h(\theta), & \text{pour } \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases} \quad (1.33)$$

On doit insister ici sur le fait que le problème (1.33) ne permet pas de récupérer à priori la valeur de la solution u de (1.32) au point $(0, 0)$. Cependant, puisque u doit être de classe C^2 , donc au moins continue en $(0, 0)$, on ne retiendra que les solutions de (1.33) qui ont une limite quand $r \rightarrow 0$.

c- Séparation des variables

On commence par chercher des solutions $v(r, \theta)$ de l'équation

$$\partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 v(r, \theta) = 0, \quad (1.34)$$

qui sont à variables séparées, c'est-à-dire qui s'écrivent

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (1.35)$$

pour certaines fonctions R et Θ .

Pour ce type de fonctions v , l'équation (1.34) s'écrit

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

On cherche maintenant des solutions du type (1.35) pour lesquelles R ne s'annule jamais. En divisant l'équation ci-dessus par $\frac{R(r)}{r^2}$, on obtient

$$\left[r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} \right] \Theta(\theta) = -\Theta''(\theta).$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r , le membre de gauche non plus : la fonction $r \mapsto r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)}$ est constante. Si une telle fonction v est solution, il existe donc un réel λ tel que

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

On s'intéresse à la première de ces équations, on cherche les fonctions Θ qui sont périodiques de période 2π . Or les solutions de l'équation

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad (1.37)$$

sont des combinaisons linéaires d'exponentielles pour $\lambda < 0$: de telles fonctions ne sont pas périodiques, donc nécessairement $\lambda \geq 0$ et dans ce cas les solutions de (1.37) sont

$$\Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

Encore une fois la condition $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ne peut être satisfaite que lorsque $\lambda = n^2$ pour un certain entier naturel n .

On obtient finalement une famille de solutions

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta). \quad (1.38)$$

On reprend maintenant la deuxième équation de (1.36), sachant que λ doit être un entier naturel :

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Cette équation différentielle ordinaire porte le nom d'équation d'Euler, et présente la particularité que ses coefficients possèdent une singularité en $r = 0$. Il faut pour le voir ne pas oublier d'isoler le terme d'ordre le plus élevé, et écrire l'équation sous la forme

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0.$$

On peut étudier ce type d'équations de manière systématique. On peut se contenter ici de chercher des solutions sous la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors l'équation indiciale

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0,$$

et donc nécessairement $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$. Dans le cas où $\lambda = n^2 \neq 0$, on obtient deux solutions indépendantes $r \mapsto r^n$ et $r \mapsto r^{-n}$, et la solution générale s'écrit

$$R(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

Le cas où $\lambda = 0$ est déjà vu (la relation (1.31)) : les solutions s'écrivent alors

$$R(r) = C_0 \log(r) + D_0. \tag{1.39}$$

Récapitulons : toutes les fonctions

$$v_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)),$$

sont solutions de (1.34) pour $n \in \mathbb{N}^*$; c'est aussi le cas de

$$v_0(r, \theta) = C_0 \log(r) + D_0.$$

Revenons au problème initial (1.32). Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe C^2 dans tout le disque $\{x^2 + y^2 < \delta\}$, en particulier à l'origine. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \rightarrow 0$. Il reste les fonctions

$$v_n(r, \theta) = (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))r^n, \tag{1.40}$$

où n est un entier positif ou nul.

d- Solution du problème de Dirichlet

Il s'agit maintenant de montrer que la famille (1.40) de solutions de l'équation de Laplace permet de résoudre le problème de Dirichlet (1.32) pour n'importe quelle donnée au bord h . Puisque l'équation est linéaire, n'importe quelle somme de fonctions de la famille (v_n) est encore une solution. Mieux : sous réserve de convergence et de dérivabilité, la série

$$S(r, \theta) = C_0 + \sum_{n \geq 1} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))r^n,$$

est solution de l'équation de Laplace. Or pour n'importe quelle fonction 2π -périodique h de classe C^1 , le Théorème de Dirichlet permet d'écrire

$$h(\theta) = a_0 + \sum_{n \geq 0} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta),$$

où les a_n et les b_n (les coefficients de Fourier de h) sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) d\omega, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \cos(n\omega) d\omega, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \sin(n\omega) d\omega. \end{array} \right. \tag{1.41}$$

Il est alors très simple de choisir les coefficients C_0 , A_n et B_n pour que la fonction S vérifie la condition au bord

$$S(\delta, \theta) = h(\theta).$$

Il suffit en effet de prendre

$$C_0 = a_0, \quad A_n = \frac{a_n}{\delta^n} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{b_n}{\delta^n},$$

et donc

$$S(r, \theta) = C_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \frac{r^n}{\delta^n}. \quad (1.42)$$

Avec ce choix pour les coefficients, la série (1.42) converge pour $r = \delta$ puisqu'il s'agit alors de la série de Fourier de h . Cette série converge aussi normalement dans tout compact de $[0, \delta[\times [0, 2\pi[$. En effet, puisque les coefficients de Fourier de h sont bornés (ils tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout n

$$|(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \frac{r^n}{\delta^n}| \leq C \frac{r^n}{\delta^n}.$$

Donc pour tout $\gamma < \delta$, on a dans $[0, \gamma[\times \mathbb{R}$,

$$|(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \frac{r^n}{\delta^n}| \leq C \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^n,$$

et le membre de droite est bien le terme général d'une série numérique convergente. On va maintenant donner une expression plus simple de la fonction S , qui permettra d'étudier sa différentiabilité : c'est la très importante Formule de Poisson.

Proposition 1.6.8. Soit S la fonction définie sur $[0, \delta] \times \mathbb{R}$ par

$$S(r, \theta) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{\delta^n} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)),$$

où les a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction h . Alors on, pour tout $(r, \theta) \in [0, \delta[\times [0, 2\pi[$, on a

$$S(r, \theta) = \frac{\delta^2 - r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\omega)}{\delta^2 - 2\delta r \cos(\theta - \omega) + r^2} d\omega.$$

Remarque : La formule de Poisson n'a pas de sens sur le bord du disque $r = \delta$. Par contre elle permet de voir immédiatement que la fonction S que l'on a construite est de classe C^∞ dans le disque $r < \delta$, y compris à l'origine. On a donc trouvé une solution du problème (1.32). Puisque le Principe du Maximum nous a déjà permis de conclure à l'unicité d'une

éventuelle solution, on a finalement démontré le théorème suivant :

Théorème 1.6.6.[28] la fonction u définie

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\delta^2 - r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\omega)}{\delta^2 - 2\delta r \cos(\theta - \omega) + r^2} d\omega, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) d\omega, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, est l'unique solution du problème (1.32).

Chapitre 2

Solutions généralisées et approche variationnelle

La théorie des distributions a été introduite pour élargir la notion de fonction et pour étendre la notion de dérivation dans le cas de fonctions discontinues. Elle permet d'unifier l'étude des phénomènes discrets et des phénomènes continus, entre autre en mécanique, en électronique et en probabilité.

Pour modéliser des impulsions, le physicien Paul Dirac a l'idée dans les années 20 d'utiliser une pseudo-fonction, déjà introduite par Oliver Heaviside, connue maintenant sous le nom de distribution de Dirac et supposée vérifier :

$$\delta_a = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x = a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour toute fonction continue φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

Mais δ_a n'est pas une fonction, les travaux de Laurent Schwartz dans les années 1945 – 1950 donnent un sens mathématique précis à ce concept. L'idée fondamentale consiste à remarquer que pour connaître une fonction f , il suffit de connaître les valeurs de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$, pour un ensemble bien choisi et assez grand de fonctions φ . Cet ensemble de fonctions φ est appelé l'ensemble des fonctions tests. Pour pouvoir intégrer par parties sans problème, les fonction φ sont supposées indéfiniment dérivables. Pour que l'intégrale existe pour toute fonction f localement sommable, on supposera qu'il existe, pour chaque fonction φ , un intervalle borné en dehors duquel φ s'annule.

les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergei Lvovich Sobolev. Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

2.1 Distributions et espaces de Sobolev

2.1.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^n .

Définition 2.1. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω , à valeurs réelles, qui sont de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω et à support compact inclus dans Ω . Ces fonctions sont souvent appelées "fonctions-tests".

Définition 2.2. On dit qu'une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

1. Il existe un compact fixe K de Ω contenant le support de toutes les fonctions φ_p et le support de φ ;
2. Sur ce compact K , chacune des suites de dérivées $(D^\alpha \varphi_p)$ ($\alpha \in \mathbb{N}^n$ étant un multi-indice quelconque de dérivation) converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$; en d'autres termes, on a pour tout α :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |(D^\alpha \varphi_p)(x) - (D^\alpha \varphi)(x)| = 0.$$

Remarque : Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont a fortiori dans tous les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Par ailleurs, la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ entraîne la convergence dans tous les espaces $L^p(\Omega)$.

Lemme 2.1. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Lemme 2.2. Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on ait : $\int_{\Omega} (f\varphi)(x) dx = 0$. Alors, f est nulle presque partout sur Ω .

2.1.2 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω

Définition 1.3 Soit T une application linéaire définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et à valeurs réelles. On dit que T est une distribution sur Ω si T est "séquentiellement continue", i.e, si pour toute suite

$(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T(\varphi_p) \rightarrow T(\varphi).$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω .

Dans la suite, on utilisera la notation $T(\varphi)$ ou $\langle T, \varphi \rangle$.

Remarque : La forme T étant linéaire, il suffit, pour établir que T est une distribution, de montrer que pour toute suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers l'application nulle, on a : $T(\varphi_p) \rightarrow 0$.

Exemple 2.1 :

1. La distribution de Dirac en un point a de Ω , notée δ_a est définie par : $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
2. Soit f un élément de l'espace $L^2(\Omega)$, l'application T_f définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (f\varphi)(x) dx,$$

est une distribution.

Une propriété fondamentale des distributions est qu'il est possible de les dériver, mais dans un sens (faible) que nous allons maintenant définir.

2.2 Dérivation des distributions

Considérons d'abord le cas d'une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , Ω étant un ouvert borné de frontière lipschitzienne. Soit φ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$; grâce à la formule de Green, on a, pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right) (x) dx = - \int_{\Omega} \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (x) dx.$$

puisque φ est nulle sur $\partial\Omega$. Comme f et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont localement intégrables sur Ω , ce sont des distributions, de sorte que l'égalité ci-dessus peut s'interpréter au sens des distributions de la manière suivante :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

On va généraliser cette écriture à toutes les distributions et également aux dérivées de tout ordre.

Définition 2.4. Soit T une distribution sur Ω et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice

quelconque de dérivation. On appelle dérivée α -ième de T , la distribution, notées $D^\alpha T$, définie par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

avec : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Vérifions que la dérivée $D^\alpha T$ ainsi définie est bien une distribution, elle est clairement linéaire. Soit maintenant $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers l'application nulle dans $\mathcal{D}(\Omega)$; a fortiori, chacune des dérivées $D^\alpha \varphi_p$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et T étant une distribution, on en déduit que : $\langle T, D^\alpha \varphi_p \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha T, \varphi_p \rangle$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$: la forme linéaire $D^\alpha T$ est donc séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Remarque : Cette nouvelle notion de dérivation n'est qu'une généralisation de la notion de dérivation usuelle pour les fonctions. En d'autres termes, si une fonction est dérivable au sens classique, est-ce que sa dérivée au sens des distributions coïncide avec cette dérivée usuelle ? La réponse utilise essentiellement la formule de Green ; celle-ci permet en effet de vérifier le résultat suivant :

Lemme 2.3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f coïncide avec la dérivée α -ième de la distribution T_f , où le multi-indice de dérivation $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est définie par $\alpha_i = 1$ et $\alpha_j = 0$ pour $i \neq j$.

Remarque : Si une fonction est dérivable presque partout, cette dérivée ne coïncide pas nécessairement avec sa dérivée au sens de distributions.

Exemple 2.2. Considérons la fonction de Heaviside définie sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en 0, donc à fortiori non dérivable en ce point. Mais c'est une distribution, car c'est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} . Nous pouvons donc la dériver au sens des distributions. Notons H' cette dérivée. Par définition, pour tout fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous avons :

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} (H\varphi')(x) dx.$$

la deuxième égalité résulte de l'identification entre la distribution T_H et la fonction localement intégrable H ; on en déduit alors que :

$$\langle H', \varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

On a donc, pour tout fonction test φ , $\langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$, d'où on déduit l'égalité suivante, au sens de distributions : $H' = \delta$, distribution de Dirac au point 0.

2.3 Convergence des distributions

Définition 2.5. Soient T_p , pour $p \in \mathbb{N}$, et T des distributions sur Ω . On dit que la suite $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle T_p, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

On en déduit le résultat suivant :

Lemme 2.4. La dérivation des distributions est une application linéaire continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque : Toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ associée à la distribution T_f est continue, de sorte que l'identification de $L^2(\Omega)$ comme sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est aussi une identification topologique. Plus précisément nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.1. Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ convergeant vers f dans $L^2(\Omega)$. Alors la suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice de dérivation, la suite $(D^\alpha f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $D^\alpha f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.4 Les espaces de Sobolev

2.4.1 Introduction

Notre but est de résoudre des problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω , et $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Si u est suffisamment régulière ($u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$), on peut multiplier l'équation (2.1) par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et intégrer par parties (puisque φ est nulle sur $\partial\Omega$) :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx.$$

C'est en fait à partir de cette formule qu'on va tenter de résoudre le problème. On remarque alors que pour donner un sens aux intégrales ci-dessus, il n'est pas nécessaire de supposer trop de régularité sur u : si u est de carré intégrable sur Ω ainsi que toutes ses dérivées partielles premières (au sens des distributions, bien entendu), ces intégrales ont un sens. Ceci nous amène naturellement à la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

2.4.2 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 2.6. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dont chacune des dérivées partielles premières (au sens des distributions) est de carré intégrable, i.e :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}.$$

La norme correspondante est :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1.[2] L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque : On a les propriétés suivantes :

1. Si Ω est borné, alors $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.
2. L'espace $H^1(\Omega)$ est strictement inclus dans l'espace $L^2(\Omega)$.
3. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

On peut généraliser la définition précédente en faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieur.

De manière générale, on a :

Proposition 2.2. Soit m un entier positif. L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée est :

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

On peut utiliser la notation $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ ou tout simplement $\|\cdot\|_m$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ouvert. On fera aussi parfois intervenir la semi-norme $|\cdot|_{m,\Omega}$ définie par :

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

D'autre part, il est possible de généraliser ces définitions dans un cadre autre que celui de Hilbert. On a alors :

Proposition 2.3. Soit m un entier positif et $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

2.4.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.7. On appelle $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$; en d'autres termes :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0\}.$$

Cet espace est un sous-espace fermé de l'espace $H^1(\Omega)$: c'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$. En effet, si l'ouvert Ω est borné, on peut définir un autre produit scalaire plus simple sur cet espace, c'est une conséquence du résultat suivant.

Théorème 2.2. (Inégalité de Poincaré)[2]. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante positive $C(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2} \leq C(\Omega) |v|_{1,\Omega}.$$

Remarque :

1. Si Ω est borné, on remarque que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est strictement inclus dans $H^1(\Omega)$. En effet, la fonction définie par $v(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$ est clairement dans $H^1(\Omega)$; en revanche, elle ne peut-être dans $H_0^1(\Omega)$, car elle ne vérifie pas l'inégalité de Poincaré (puisque $|v|_{1,\Omega} = 0$).
2. Si Ω est borné, l'inégalité de Poincaré est fautive dans l'espace $H^1(\Omega)$.

3. L'espace $H_0^1(\Omega)$ peut aussi être défini comme étant le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Une conséquence importante de cette inégalité est donnée par :

Corollaire 2.1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, alors la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n},$$

et qu'on notera parfois $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$ ou tout simplement $(\cdot, \cdot)_1$.

Ces notions se généralisent de la manière suivante :

Proposition 2.4. On désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. Sur cet espace, la semi-norme $|\cdot|_{m,\Omega}$ est une norme équivalente à la norme induite par l'espace $H^m(\Omega)$, et l'espace $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour cette norme.

Lemme 2.5. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$, en d'autre terme, on a :

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n).$$

Lemme 2.6. On suppose que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière lipschitzienne. L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Remarque : Dans le cas de l'espace tout entier, bien que l'on ait $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité de Poincaré n'est pas valable et la semi-norme $|\cdot|_{1,\mathbb{R}^n}$ n'est pas une norme sur l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$.

2.4.4 Traces sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$

Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, on peut définir la restriction de f au bord Γ de l'ouvert Ω . Donc, on va généraliser la notions de restriction sur Γ à des fonctions a priori moins régulières, typiquement à des fonctions de l'espace $H^1(\Omega)$. On a le résultat suivant qui est vrai pour des ouverts suffisamment réguliers.

Théorème 2.3.[7] On suppose l'ouvert Ω à frontière lipschitzienne. Il existe une application linéaire et continue γ_0 définie sur l'espace $H^1(\Omega)$ à valeur dans l'espace $L^2(\Gamma)$ telle que, pour tout fonction régulière $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on ait : $\gamma_0 v = v|_\Gamma$. De plus, on a :

1. $\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$,
2. l'application γ_0 n'est pas surjective (en général), mais son image, notée $H^{1/2}(\Gamma)$, est un sous-espace dense dans $L^2(\Gamma)$.

Définition 2.8. On va énoncer quelques compléments sur la notion de traces :

1. Si $v \in H^2(\Omega)$, on peut définir sa trace $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$, mais on peut aussi faire de même pour chacune des dérivées premières $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut aussi définir :

$$\gamma_1 v = \sum_{i=1}^n \nu_i \cdot \gamma_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

où $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ désigne le vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω . Si l'ouvert Ω est de frontière de classe \mathcal{C}^1 , l'application (γ_0, γ_1) ainsi définie sur l'espace $H^2(\Omega)$ et à valeurs dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ est linéaire et continue et que son noyau est l'espace $H_0^2(\Omega)$.

2. De manière plus générale, supposons la frontière de l'ouvert Ω suffisamment régulière et soit $m \geq 1$ un entier, pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m - 1$, il existe une application linéaire et continue de l'espace $H^m(\Omega)$ à valeurs dans $L^2(\Gamma)$: l'application $(v \rightarrow \gamma_0(D^\alpha v))$. On a :

$$H_0^m(\Omega) = \{v \in H^m(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m - 1, \gamma_0(D^\alpha v) = 0\}.$$

3. Dans les cas de dimension deux ou trois qui sont les cas plus courants, on a le résultat suivant : tout fonctions v de l'espace $H^2(\Omega)$ est continue sur $\bar{\Omega}$ et l'application identité ainsi définie de l'espace $H^2(\Omega)$ à valeurs dans l'espace $C^0(\bar{\Omega})$ est continue.

. **Proposition 2.5. (Formule de Green)** [2] Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} [\Delta u v](x) dx = - \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v](x) dx + \int_{\Gamma} [\gamma_1 u \gamma_0 v](x) d\Gamma(x), \quad (2.2)$$

où $d\Gamma(x)$ désigne la mesure superficielle sur la frontière Γ de Ω .

2.5 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, on va montrer comment transformer un problème aux limites en problème variationnel, puis énoncer un théorème permettant d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel obtenu, ainsi que et l'équivalence entre les deux formulations.

2.5.1 Position du problème

On se propose de résoudre le problème :

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$u(x) = 0, x \in \Gamma, \quad (2.4)$$

où l'ouvert Ω est bornée, avec une de frontière lipschitzienne, et où $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. La condition (2.4) s'appelle condition de Dirichlet homogène. Tout d'abord, on veut répondre aux questions suivantes :

1. Ce problème admet-il une solution ? Si oui, dans quel espace ?
2. Si une telle solution existe, est-elle unique ?
3. Si oui, dépend-elle continûment de la donnée f ?

S'il est possible de répondre à toutes ces questions, on dit que le problème est bien posé. Pour traiter à ces questions, nous allons utiliser une stratégie qui consiste à transformer le problème afin de l'écrire sous forme variationnelle.

2.5.2 Formulation variationnelle du problème

Soit u une solution du problème (2.3) – (2.4) ayant la régularité suivante : $u \in H^2(\Omega)$. Soit $v \in H^2(\Omega)$ quelconque. On multiplie l'équation (2.3) par $v(x)$ et intégrons la sur Ω ; cette intégration est bien définie, compte tenu des hypothèses qui assurent que les produits $\Delta u \cdot v$, $c u \cdot v$ et $f \cdot v$ sont intégrables sur Ω . On a donc :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

D'après la formule de Green (2.2) on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\Gamma} \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Supposons maintenant que $\gamma_0 v = 0$ (ou bien $v \in H_0^1(\Omega)$, cette propriété est satisfaite par u), il reste alors :

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.5)$$

avec la notation :

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx, \quad (2.6)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad (2.7)$$

$$V = H_0^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Définition 2.9. Le problème qui consiste à trouver $u \in V$ tel que l'équation (2.5) soit satisfaite est appelé *formulation variationnelle du problème* (2.3) – (2.4).

Remarque : Dans cette formulation, on remarque que V est un espace de Hilbert appelé l'espace variationnel, la forme \mathcal{A} est bilinéaire, la forme L est linéaire, et ces propriétés sont importantes pour l'étude du problème variationnel.

Nous avons le résultat d'équivalence suivant entre les deux problèmes :

Proposition 2.6. Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors u est solution du problème aux limites (2.3) – (2.4) si et seulement si elle est solution du problème variationnel de l'équation (2.5)

Remarque : La méthode variationnelle a permis de transformer un problème du seconde ordre en un problème du premier ordre, mais qu'on a aussi transformé un problème linéaire en un problème quadratique (la forme \mathcal{A} étant bilinéaire).

2.5.3 Exemples classiques

Exemple 2.3.- Problème de Dirichlet non homogène -

Sous les mêmes hypothèses précédentes sur Ω, c et f , on se propose de résoudre le problème suivant : trouver $u : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$u(x) = g(x), x \in \Gamma, \quad (2.10)$$

où g est une fonction donnée, à priori non nulle, définie sur Γ .

Pour que l'écriture $\gamma_0 u = g$ ait un sens, avec u ayant la régularité de type $H^1(\Omega)$, il est nécessaire de supposer que $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, en d'autres termes, il existe une fonction $G \in H^2(\Omega)$ telle que $\gamma_0 G = g$.

Donc il est facile de montrer qu'on peut se ramener à l'étude d'un problème de Dirichlet homogène. En effet, on pose $U = u - G$, la condition (2.10) est équivalente à $U = 0$, et l'équation (2.9) devient

$$-\Delta U(x) + c(x)U(x) = F(x), \quad x \in \Omega,$$

où $F = f + \Delta G - cG \in L^2(\Omega)$. Le problème de Dirichlet non homogène (2.9) – (2.10) se ramène donc, par le changement de fonction $U = u - G$, au problème de Dirichlet homogène d'inconnue U suivant :

$$-\Delta U(x) + c(x)U(x) = F(x), x \in \Omega \quad (2.11)$$

$$U(x) = 0, x \in \Gamma, \quad (2.12)$$

qui est le même problème que (2.3) – (2.4), avec $F \in L^2(\Omega)$

Exemple 2.4. - Problème de Neumann non homogène -

Dans cet exemple, on cherche à trouver $u : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x), x \in \Gamma, \quad (2.14)$$

où $g \in L^2(\Gamma)$ est une fonction donnée, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$, ν étant la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω qui est un domaine régulier.

La condition de Neumann (2.14) porte sur la trace d'ordre un de u (sur $\gamma_1 u$). Sous les mêmes hypothèses précédentes sur Ω, c et f , déterminons la forme variationnelle de ce problème. Pour cela, supposons que $u \in H^2(\Omega)$ est une solution du problème (2.13) – (2.14) et prenons $v \in H^1(\Omega)$. On multiplie l'équation (2.13) par $v(x)$, puis on intègre sur Ω et on vertu de la formule de Green (2.2), on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Puisque u est solution du problème (2.13) – (2.14), elle vérifie à fortiori la condition à la limite (2.14), ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\Gamma} g(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x).$$

Finalement, on peut écrire le problème (2.13) – (2.14) sous la forme :

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v), \forall v \in V, \quad (2.15)$$

où

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x) dx, \quad (2.16)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\Gamma} g(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x), \quad (2.17)$$

$$V = H^1(\Omega). \quad (2.18)$$

Alors, la forme variationnelle du problème (2.13) – (2.14) est la suivante : trouver $u \in V$ solution de (2.15).

Remarque : La condition à la limite de Neumann (2.14) apparaît sous forme d'un terme intégral sur Γ dans la forme linéaire L . Elle n'apparaît pas dans l'espace variationnel V , par contre au cas de problème de Dirichlet. Pour cela, on a les remarques suivantes :

1. Dans l'espace V , on ne peut pas imposer de condition portant sur la trace d'ordre un ; en effet, $u \in V$ ayant la régularité de type H^1 et non H^2 , $\gamma_1 u$ n'est pas à priori bien définie, dans le sens où $\gamma_1 u$ n'est pas dans l'espace $L^2(\Gamma)$.
2. Pour le problème de Dirichlet, la condition à la limite était imposée sur la fonction test v et non sur u et si on ne l'avait pas imposé, le terme intégral $\int_{\Gamma} \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x)$ n'aurait pas été défini pour un u ayant seulement une régularité de type H^1 puisque $\gamma_1 u \notin L^2(\Gamma)$; la condition à la limite $\gamma_1 u = g$ et l'hypothèse $g \in L^2(\Gamma)$, le terme intégral qui en résulte $\int_{\Gamma} g(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x)$ est alors parfaitement défini.

2.5.4 Le théorème de Lax-Milgram

On va monter dans ce paragraphe que les problèmes variationnels admettent effectivement une solution et une seule, Pour cela, nous allons utiliser un théorème important dans des espaces de Hilbert.

Rappelons le théorème des projections qui généralise au cadre hilbertien la notion de projection en dimension finie, si H désigne un espace de Hilbert réel, (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur cet espace et $\|\cdot\|$ la norme associée, on a alors le théorème :

Théorème 2.4. (Théorème des projections) [2]. Soit C une partie convexe fermée non vide de H et $x \in H$. Alors

1. il existe un unique élément $p_C(x)$ de C tel que

$$\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in C.$$

De plus on a :

$$(x - p_C(x), y - p_C(x)) \leq 0, \forall y \in C$$

et $p_C(x)$ est l'unique élément de C vérifiant cette inégalité.

2. si C est un sous-espace vectoriel de H , alors :

$$(x - p_C(x), y) = 0, \forall y \in C,$$

et $p_C(x)$ est l'unique élément de C vérifiant cette égalité ; en d'autres termes, on a : $p_C(x) \in C^\perp$, donc l'espace H se décompose en somme directe orthogonale :

$$H = C \oplus C^\perp.$$

En particulier, on a le théorème suivant :

Théorème 2.5. (Théorème de Riesz) [2]. Soit L une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique élément u de H tel que

$$L(v) = \mathcal{A}(u, v), \forall v \in H. \quad (2.19)$$

Dans la suite, on cite quelques outils utiles pour l'énoncé du théorème de Lax-Milgram.

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de norme associée $\|\cdot\|_V$. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que pour tout } v \in V \text{ on ait } : \mathcal{A}(u, v) = L(v), \quad (2.20)$$

où

1. L est une application définie sur V , à valeur dans \mathbb{R} vérifiant :

(i) L est linéaire,

(ii) L est continue, *i.e.*, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V, \forall v \in V \quad (2.21)$$

2. \mathcal{A} est une application définie sur $V \times V$, à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant :

(i) \mathcal{A} est bilinéaire,

(ii) \mathcal{A} est continue, *i.e.*, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \forall (u, v) \in V^2 \quad (2.22)$$

(iii) \mathcal{A} est coercive (V -elliptique), *i.e.*, il existe une constante α telle que

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \forall v \in V \quad (2.23)$$

Remarque On désigne souvent par C, M, α les constantes de la continuité de L , de la continuité de \mathcal{A} et d'ellipticité de \mathcal{A} , mêmes si ces constantes ne sont pas définies de manière unique.

Théorème 2.6. (Théorème de Lax-Milgram)[2]. Soit V un espace de Hilbert réel, \mathcal{A} une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur V . Alors il existe une unique élément u de V solution du problème variationnel (2.20).

Remarque : Si la forme bilinéaire \mathcal{A} est symétrique ($\forall u, v \in V : \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(v, u)$), le théorème de Lax-Milgram se réduit au théorème de Riesz. Nous pouvons montrer dans ce cas que le problème variationnel est équivalent à un problème de minimisation pour la fonctionnelle quadratique E définie par :

$$\forall v \in V, \quad E(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v, v) - L(v). \quad (2.24)$$

Donc, le problème variationnel devient :

$$\text{trouver } u \in V \quad \text{tel que pour tout } v \in V, E(u) \leq E(v). \quad (2.25)$$

La proposition suivante précise le lien existant entre les deux formulations :

Proposition 2.7. Le problème variationnel (2.20) est équivalent au problème (2.24)–(2.25).

Remarque :

1. Quand la forme bilinéaire est symétrique, le problème variationnel se réduit à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique, qui est la formulation abstraite de problèmes intervenant en calcul des variations : c'est ce qui explique la terminologie "problème variationnel".
2. Le problème variationnel (2.20) correspond à l'équation d'Euler ($E'(u) = 0$) associée au problème de minimisation (2.24) – (2.25).
3. Pour calculer une approximation de la solution u du problème variationnel, on peut utiliser des algorithmes classiques de minimisation de fonctionnelles quadratiques.
4. On a l'inégalité suivante, résultant de (2.21) et de (2.23) :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq \mathcal{A}(u, u) = L(v) \leq C \|u\|_V,$$

d'où

$$\|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha}, \quad (2.26)$$

où α est la constante d'ellipticité de \mathcal{A} et C la constante de continuité de L .

Toujours dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique, on a le théorème suivant :

Théorème 2.7.[2] Soit V un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de V . Supposons la forme bilinéaire \mathcal{A} symétrique, continue et coercive sur V et la forme linéaire L continue sur V . Alors il existe un unique élément de C tel que :

$$\mathcal{A}(u, v - u) \geq L(v - u), \forall v \in C. \quad (2.27)$$

Cette solution u est aussi l'unique élément de C qui minimise dans C la fonctionnelle E définie par :

$$E(v) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(v, v) - L(v).$$

2.5.5 Application du théorème de Lax-Milgram

a- Le problème de Dirichlet homogène

Reprenons l'exemple du problème aux limites (2.3) – (2.4) et sa forme variationnelle (2.5). On va vérifier si les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

L'espace $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ induite par l'espace $H^1(\Omega)$, mais aussi, d'après l'inégalité de Poincaré, pour la norme réduite $|\cdot|_{1,\Omega}$: donc c'est une deuxième norme, plus simple, que nous choisissons.

La forme linéaire L est continue, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons donc :

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{1,\Omega}, \quad (2.28)$$

où $C(\Omega)$ désigne la constante de l'inégalité de Poincaré (Théorème 2.2).

Étudions la continuité de la forme bilinéaire \mathcal{A} , et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'abord dans $L^2(\Omega)$ puis dans \mathbb{R}^n . Nous obtenons :

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}.$$

Nous avons également :

$$\left| \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \right| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq [C(\Omega)]^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega},$$

d'où

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq M |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega},$$

avec : $M = 1 + [C(\Omega)]^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Étudions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire \mathcal{A} ; donc nous avons :

$$\mathcal{A}(v, v) = |v|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} c(x) v^2(x) dx.$$

Nous remarquons que si $c \geq 0$ presque partout, on a $\mathcal{A} \geq |v|_{1,\Omega}^2$ et la forme bilinéaire \mathcal{A} est coercive. Si c prend des valeurs négatives, notons c^- la partie négative de c définie par

$$\begin{cases} c^-(x) = c(x), & \text{si } c(x) \leq 0, \\ c^-(x) = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\mathcal{A}(v, v) \geq (1 - [C(\Omega)]^2 \|c^-\|_{L^\infty(\Omega)}) |v|_{1,\Omega}^2.$$

si $(1 - [C(\Omega)]^2 \|c^-\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$, la forme \mathcal{A} est coercive.

Finalement, le théorème de Lax-Milgram peut s'appliquer, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.8.[7] Supposons que $f \in L^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$. Alors l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) $c \geq 0$ presque partout sur Ω ,

(ii) $\|c^-\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{[C(\Omega)]^2}$.

Alors le problème variationnel (2.5) a une unique solution u dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Cette solution vérifie le résultat de régularité suivant : $\Delta u \in L^2(\Omega)$. De plus, u vérifie l'équation (2.3) presque partout dans Ω et la condition à la limite (2.4) presque partout sur la frontière Γ . Par ailleurs, il existe une constante positive C_0 telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.29)$$

et le problème dépend continûment de la donnée f .

Corollaire 2.2. Sous les hypothèses du théorème (2.8) de sorte que le problème variationnel (2.5) admet une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$, alors, si $u \in H^2(\Omega)$, le problème aux limites (2.3) – (2.4) admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

b- Le problème de Dirichlet non homogène

On a le problème de Dirichlet non homogène (dit aussi général) (2.9) – (2.10), où $c \in L^\infty(\Omega)$, $g = \gamma_0 G$, $G \in H^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ et $G \in H^2(\Omega)$. On a trouvé la formulation du problème grâce au changement d'inconnue $U = u - G$ et la formulation variationnelle du nouveau problème (2.11) – (2.12) ainsi obtenu s'écrit :

$$\text{trouver } U \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que } \mathcal{A}(U, v) = \tilde{L}(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.30)$$

où la forme bilinéaire \mathcal{A} est définie par (2.7) et la forme linéaire \tilde{L} définie par :

$$\tilde{L}(v) = \int_{\Omega} F(x)v(x)dx, \quad \text{avec } F = f + \Delta G - cG. \quad (2.31)$$

En appliquant maintenant le théorème de Lax-Milgram à ce problème homogène, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.9.[7] Supposons que $f \in L^2(\Omega)$, $G \in H^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$, Si l'une des deux conditions (i) ou (ii) est satisfaite, alors le problème :

$$\text{trouver } u \in G + H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que } \mathcal{A}(u, v) = L(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.32)$$

où \mathcal{A} et L sont définis par (2.7) et (2.8) respectivement, a une unique solution. De plus, il existe une constante $C'_0 \geq 0$ telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C'_0 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{H^2(\Omega)}), \quad (2.33)$$

et le problème dépend continûment des données f et G .

c- Le problème de Neumann

Soit le problème de Neumann non homogène (2.13) – (2.14), avec $c \in L^\infty(\Omega)$ et sa forme variationnelle (2.15) – (2.18).

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.10.[7] Supposons que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$. Alors, sous l'hypothèse suivante :

$$\text{il existe } c_0 > 0, \quad \text{telle que } c(x) \geq c_0 \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \quad (2.34)$$

le problème variationnel (2.15) – (2.18) admet une unique solution ; de plus, il existe une constante positive C_0 telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \quad (2.35)$$

qui montre que la solution u dépend continûment des données f et g . On a de plus le résultat de régularité suivant : $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Par ailleurs, u est solution de (2.13) presque partout sur Ω et, si $u \in H^2(\Omega)$, elle vérifie (2.13) presque partout sur Γ ; c'est alors l'unique solution du problème aux limites (2.13) – (2.14) dans l'espace $H^2(\Omega)$.

d- Un problème avec conditions aux limites mixtes en dimension un

Considérons un problème où les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur une partie du bord, et de type Neumann sur l'autre partie. Le problème à étudier est le suivant : trouver u solution de :

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]a, b[\quad (b > a) \quad (2.36)$$

$$u(a) = u_a, u'(b) = \beta, \quad (2.37)$$

où $c \in L^2(]a, b[)$, $f \in L^2(]a, b[)$ et u_a et β sont deux constantes données. pour . Commençons par rendre la condition à la limite homogène en a , et soit la fonction : $U = u - u_a$.

Le problème devient : trouver U solution de :

$$-U''(x) + c(x)U(x) = F(x), \quad x \in]a, b[\quad (b > a), \quad (2.38)$$

$$U(a) = 0, U'(b) = \beta, \quad (2.39)$$

avec $F = f - cu_a \in L^2(]a, b[)$. Soit $U \in H^1(]a, b[)$ solution du problème (2.40) – (2.41) et soit $v \in H^1(]a, b[)$ quelconque. Multiplions l'équation (2.38) par $v(x)$ et intégrons sur $]a, b[$;

par une intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b U'(x)v'(x)dx + U'(a)v(a) - \beta v(b) = \int_a^b F(x)v(x)dx.$$

Supposons maintenant $v(a) = 0$ (cette condition est satisfaite par U), il reste :

$$\int_a^b U'(x)v'(x)dx = \int_a^b F(x)v(x)dx + \beta v(b),$$

Donc U est solution de :

$$\mathcal{A}(U, v) = \tilde{L}(v), \forall v \in V, \tag{2.40}$$

avec :

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx, \tag{2.41}$$

$$\tilde{L}(v) = \int_a^b F(x)v(x)dx + \beta v(b), \tag{2.42}$$

$$V = \{v \in H^1(]a, b[), v(a) = 0\}. \tag{2.43}$$

Pour résoudre le problème variationnel (2.40), on va vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

L'espace V est bien défini. En effet, si $v \in H^1(]a, b[)$, alors $v \in \mathcal{C}^0([a, b])$, de sorte que l'écriture $v(a)$ a un sens, il existe une constante positive $C(a, b)$ telle que

$$|v(a)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |v(x)| \leq C(a, b) \|v\|_{H^1(]a, b[)};$$

donc l'application $v \in H^1(]a, b[) \mapsto v(a)$ est continue. L'espace V qui est le noyau de cette application est alors un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1(]a, b[)$: c'est donc aussi un espace de Hilbert, pour le produit scalaire induit par l'espace $H^1(]a, b[)$. Puisque $v(a) = 0$, on a

$$v(x) = \int_a^x v'(t)dt, \forall x \in [a, b].$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|v(x)| \leq \sqrt{b-a} |v|_{1,]a, b[}, \forall x \in [a, b]. \tag{2.44}$$

Par intégration sur $]a, b[$, on obtient :

$$\|v\|_{L^2(]a, b[)} \leq (b-a) |v|_{1,]a, b[}.$$

On déduit que la semi-norme $|\cdot|_{1,]a, b[}$ est une norme sur l'espace V équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,]a, b[}$ et l'espace V est un espace de Hilbert pour cette norme réduite.

La forme bilinéaire \mathcal{A} étant la même que pour le problème de Dirichlet, on a les mêmes résultats : elle est continue et V -elliptique sous l'une des deux conditions (i) ou (ii), et la constante de V -ellipticité α est la même.

Étudions la continuité de la forme linéaire \tilde{L} . On a d'une part :

$$\left| \int_a^b F(x)v(x)dx \right| \leq \|F\|_{L^2(]a,b[)} \|v\|_{L^2(]a,b[)} \leq (b-a)\|F\|_{L^2(]a,b[)} |v|_{1,]a,b[}.$$

D'autre part, d'après (2.44), on a :

$$|\beta v(b)| \leq |\beta| \sup_{x \in [a,b]} |v(x)| \leq |\beta| \sqrt{b-a} |v|_{1,]a,b[}.$$

D'ici résulte la continuité de \tilde{L} , puisque l'on a :

$$|\tilde{L}(v)| \leq C |v|_{1,]a,b[},$$

avec $C = (b-a)\|F\|_{L^2(]a,b[)} + |\beta|\sqrt{b-a}$.

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, on en déduit que le problème (2.40) admet une unique solution U dans V .

D'après (2.26), on a

$$|U|_{1,]a,b[} \leq \frac{C}{\alpha} \leq C'_0 (\|F\|_{L^2(]a,b[)} + |\beta|),$$

où $C'_0 = \frac{\max(b-a, \sqrt{b-a})}{\alpha}$, ce qui montre la continuité de U par rapport aux données F et β .

La solution U du problème variationnel (2.40) est aussi solution du problème aux limites. En effet, de l'équation (2.42) pour des fonctions tests $v \in \mathcal{D}(]a,b[)$, on obtient l'équation : $-U'' + cU = F$ au sens des distributions sur $]a,b[$. On a aussi le résultat de régularité suivant : $U'' = cU - F \in L^2(]a,b[)$, d'où on déduit que $U \in H^2(]a,b[)$. On retrouve l'équation (2.36) pour presque tout $x \in]a,b[$.

La condition à la limite $U(a) = 0$ est satisfaite, du fait que $U \in V$. Pour la deuxième condition, on multiplie l'équation (2.36) par $v(x)$, avec $v \in V$ et en intégrant par parties sur $]a,b[$ on obtient

$$\int_a^b U'(x)v'(x)dx - U'(b)v(b) = \int_a^b F(x)v(x)dx.$$

Donc

$$U'(b)v(b) = \beta v(b), \forall v \in V$$

et on déduit : $U'(b) = \beta$. En reprenons le problème d'inconnue u , nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 2.11.[7] Supposons que $f \in L^2(]a, b[)$ et $c \in L^\infty(]a, b[)$. Si l'une des deux conditions (i) ou (ii) (avec $C(]a, b[) = b - a$) est satisfaite. Alors le problème

$$\text{trouver } u \in u_a + V \quad \text{tel que } \mathcal{A}(u, v) = L(v), \forall v \in V, \quad (2.45)$$

avec

$$L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + \beta v(b),$$

où \mathcal{A} et V sont définis par (2.44) et (2.43) respectivement, a une unique solution. De plus, il existe une constante C_0 positive telle que

$$\|u\|_{H^1(]a, b[)} \leq C_0 (\|f\|_{L^2(]a, b[)} + |u_a| + |\beta|), \quad (2.46)$$

montrons ainsi que le problème dépend continûment des données f, u_a et β .

De plus, $u \in H^2(]a, b[)$ et c 'est l'unique solution, dans l'espace $H^2(]a, b[) \cap V$, du problème aux limites (2.36) – (2.37)

Remarque : Si f et c sont continues sur $]a, b[$, alors on a : $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$. On dit aussi que u est une solution au sens usuel du problème aux limites (2.36) – (2.37).

2.5.6 Conclusion de la méthode variationnelle

Pour résoudre un problème aux limites, on suit les étapes suivants :

Etape 1 : Détermination de la forme variationnelle du problème. On suppose la solution u du problème aux limites dans l'espace $H^{2m}(\Omega)$, on multiplie l'équation satisfaite par u dans Ω par $v(x)$, avec $v \in H^m(\Omega)$ (l'espace variationnel V sera un sous-espace de $H^m(\Omega)$), on intègre sur Ω , on utilise autant d'intégrations par parties (ou formules de Green) qu'il est nécessaire pour obtenir à la fin un problème où les dérivées de u et de v sont au plus d'ordre m . On est éventuellement amené à imposer un certain nombre de conditions aux limites sur v , en respectant les règles suivantes :

- (i) ces conditions aux limites doivent être satisfaites par la solution u du problème aux limites de départ.
- (ii) elles ne peuvent porter que sur des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $m - 1$, et inversement, toute condition à la limite homogène portant sur des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $m - 1$ de u doit figurer dans l'espace variationnel V .

Etape 2 : Une fois le problème variationnel clairement identifié (espace V , forme bilinéaire \mathcal{A} et forme linéaire L), il faut vérifier toutes les hypothèses du théorème de Lax-

Milgram, en commençant par l'espace V dont il faut s'assurer qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et dont il est préférable de réduire au maximum la norme (cette réduction éventuelle est directement liée à la présence de certaines conditions aux limites dans l'espace V). Ensuite, il faut vérifier les propriétés de continuité de \mathcal{A} et L , ainsi que les propriétés de V -ellipticité de \mathcal{A} .

Etape 3 : Appliquer le théorème de Lax-Milgram pour en déduire l'existence et l'unicité d'une solution $u \in V$ au problème variationnel.

Etape 4 : Interprétation du problème variationnel. En prenant des fonctions $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans la formulation variationnelle, on montre d'abord que u satisfait l'EDP au sens des distributions sur Ω . Les conditions aux limites résultent en partie de l'appartenance de u à V ; les conditions aux limites manquantes sont déduites d'un résultat de régularité de u .

Remarque : Un problème variationnel ne s'interprète pas toujours nécessairement en terme de problème aux limites classique.

Chapitre 3

Solutions approchées

Ce chapitre est consacré à l'approximation numérique des EDP, ces dernières ne peuvent en général être résolues de façon exacte. Elles sont résolues de façon *approchée*, à l'aide des méthodes numériques. Les méthodes numériques ne donnent pas la solution véritable du problème que l'on cherche à résoudre. Des méthodes numériques mal utilisées peuvent conduire à des résultats totalement faux.

Le but est de savoir comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable tout en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte ? Plusieurs méthodes existent pour cette approche citons : la méthode de Galerkin(Ritz), la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies, etc.

3.1 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies pour la résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle aux dérivées partielles par une approximation appropriée en termes de rapport aux différences.

3.1.1 Principe de la méthode

On décrit la méthode en trois parties : choix du maillage, choix du schéma numérique et détermination du problème discret.

Nous choisissons comme modèle, le problème aux limites homogène suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & \text{si } x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

La solution unique de ce problème est donnée par :

$$u(x) = x \int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds, x \in [0, 1].$$

Commençons par choisir un entier $N \geq 1$ et divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $(N + 1)$ sous-intervalles dont les extrémités sont les points du maillage

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1 \text{ avec } h = \frac{1}{N + 1}.$$

Le pas h est choisi constant pour faciliter l'utilisation des algorithmes servant à résoudre les systèmes linéaires qui résultent de l'approximation et qui font intervenir une matrice de dimension $N \times N$.

La méthode des différences finies appliquée au problème (3.1) exige que l'on remplace la dérivée seconde $u''(x_i)$ par un rapport aux différences en chacun des points intérieurs x_i , pour $i = 1, 2, \dots, N$.

En utilisant un développement de Taylor au point x_i , on peut voir que si u est de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, 1]$, on a l'approximation :

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

qui est dite *formule de différences centrées* pour $u''(x_i)$.

Négligeons le terme contenant ξ_i dans la formule précédente et notons u_i une approximation de u au point x_i . Tenant compte des conditions aux limites, nous obtenons la méthode des différences finies suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_{N+1} = 0, \\ -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i), & i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.2)$$

Vu le terme négligé, l'erreur de troncature est d'ordre $o(h^2)$.

Le schéma numérique précédent peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$AU_h = b_h, \quad (3.3)$$

où A est la matrice $N \times N$ tridiagonale symétrique donnée par :

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

tandis que U_h et b_h sont les vecteurs de \mathbb{R}^N :

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \quad b_h = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.1 Considérons le problème (3.1) pour $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$. Ce problème admet une solution exacte unique : $u(x) = \sin(\pi x)$.

La discrétisation par la méthode des différences finies (3.2) avec, par exemple, le pas de décomposition $h = \frac{1}{8}$ utilise les points suivants :

$$x_0 = 0, x_1 = 0.125, x_2 = 0.250, x_3 = 0.375, x_4 = 0.500, x_5 = 0.625, x_6 = 0.750, x_7 = 0.875, x_8 = 1.$$

et conduit au système des équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} f(0.125) \\ f(0.250) \\ f(0.375) \\ f(0.500) \\ f(0.625) \\ f(0.750) \\ f(0.875) \end{pmatrix}.$$

Les calculs donnent pour le vecteur second membre b_h :

$b_h = (0.0590146, 0.109045, 0.142474, 0.154213, 0.142474, 0.109045, 0.0590146)^T$. Nous obtenons pour solution du système tridiagonal $AU_h = b_h$, le vecteur

$$U_h = (0.3876401, 0.7162656, 0.9358461, 1.0129526, 0.9358461, 0.7162656, 0.3876401)^T.$$

La figure suivante montre le graphe de la solution exacte $u(x) = \sin(\pi x)$ et la solution approchée représentée par les aux points $(0, 0), (x_1, u_1), \dots, (x_7, u_7), (1, 0)$.

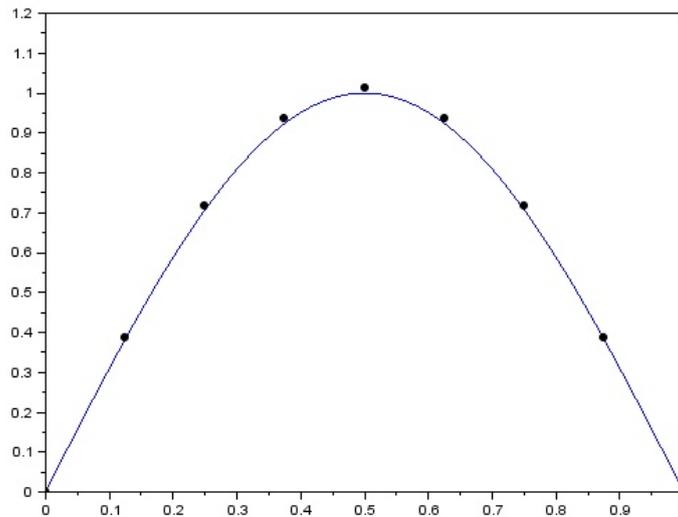


Fig.3.1 la solution exacte u et la solution approchée u_h .

3.1.2 Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Soit le problème aux limites linéaire du second ordre :

$$\begin{cases} u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x), & \text{si } x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases} \quad (3.4)$$

où p , q et r sont des fonctions données, continues sur $[0, 1]$, et α et β deux nombres réels connus.

Pour approcher la solution de ce problème par la méthode des différences finies, nous commençons comme ci-dessus par diviser l'intervalle $[0, 1]$ en $(N + 1)$ sous-intervalles égaux. Cela donne les points

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1 \quad \text{où } h = \frac{1}{N + 1}.$$

Aux points intérieurs x_i pour $i = 1, 2, \dots, N$, le problème à approcher est

$$u''(x_i) = p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) + r(x_i).$$

Supposons que $u \in \mathcal{C}^4([x_{i-1}, x_{i+1}])$. En développant u suivant un polynôme de Taylor d'ordre trois autour du point x_i et évalué aux points x_{i+1} et x_{i-1} , nous obtenons

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + h'u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^+),$$

pour un certain ξ_i^+ dans $]x_i, x_{i+1}[$, et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - h'u(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^-)$$

pour un certain ξ_i^- dans $]x_{i-1}, x_i[$.

En sommant ces relations, on trouve :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{24} [u^{(4)}(\xi_i^+) + u^{(4)}(\xi_i^-)],$$

ce qui donne

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24} [u^{(4)}(\xi_i^+) + u^{(4)}(\xi_i^-)].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'écrire l'expression simplifiée

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[,$$

dite *formule de différences centrées* pour $u''(x_i)$.

Une formule de différences centrées pour $u'(x_i)$ est obtenue de la même manière :

$$u'(x_i) = \frac{1}{2h} [u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}u'''(\kappa_i), \quad \kappa_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[.$$

L'utilisation des formules de différences centrées dans l'équation (3.4) conduit à la relation

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i)u(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p(x_i)u'''(\kappa_i) - u^{(4)}(\xi_i)].$$

En négligeant dans la relation précédente les termes contenant les dérivées de u aux points inconnus ξ_i et κ_i et tenant compte des conditions aux limites $u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$, nous obtenons la méthode aux différences finies suivantes avec une erreur de troncature d'ordre $o(h^2)$:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta, \\ \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q(x_i)u_i = -r(x_i), & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)u_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))u_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)u_{i+1} = -h^2r(x_i),$$

que l'on peut écrire sous la forme d'un système linéaire avec une matrice $N \times N$ tridiagonale :

$$AU_h = b_h,$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 + \frac{h}{2} p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p_2 & 2 + h^2 q_2 & -1 + \frac{h}{2} p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{h}{2} p_3 & 2 + h^2 q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + h^2 q_{N-1} & -1 + \frac{h}{2} p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \frac{h}{2} p_N & 2 + h^2 q_N \end{pmatrix},$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \quad b_h = \begin{pmatrix} -h^2 r_1 + (1 + \frac{h}{2} p_1) \alpha \\ -h^2 r_2 \\ \vdots \\ -h^2 r_{N-1} \\ -h^2 r_N + (1 - \frac{h}{2} p_N) \beta \end{pmatrix},$$

avec $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ et $r_i = r(x_i)$, $i = 1, \dots, N$.

La diagonale principale de la matrice A est formée des éléments

$$a_{ii} = 2 + h^2 q(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Sous la diagonale principale, on a

$$a_{i,i-1} = -1 - \frac{h}{2} p(x_i), \quad i = 2, \dots, N.$$

et au dessus de cette diagonale, on a les éléments

$$a_{i,i+1} = -1 + \frac{h}{2} p(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Tous les autres éléments de A sont nuls.

Exemple 3.2 Pour illustrer l'approximation de ce type de problème par les différences finies, nous prenons dans ce problème $q \equiv 1$ et $r(x) = x$, avec $\alpha = \beta = 0$. Cela donne le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) = u(x) + x, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

dont la solution exacte est

$$u(x) = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh(x) - x.$$

la matrice A et le second membre du système linéaire sont

$$A = \begin{pmatrix} 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix},$$

$$b_h = -h^3(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)^T.$$

En prenant par exemple $h = \frac{1}{8}$, alors la matrice tridiagonale A est définie par :

$A = \text{tridiag}(-1, 2.015625, -1)$, et b_h est le vecteur

$$b_h = -(0.001953125, 0.00390625, 0.005859375, 0.0078125, 0.009765625, 0.01171875, 0.013671875)^T.$$

Cela donne la solution

$$U_h = (-0.0183367, -0.0350068, -0.0483176, -0.0565240, -0.0578011, -0.0502157, -0.0316961)^T.$$

Le graphe suivant illustre les résultats :

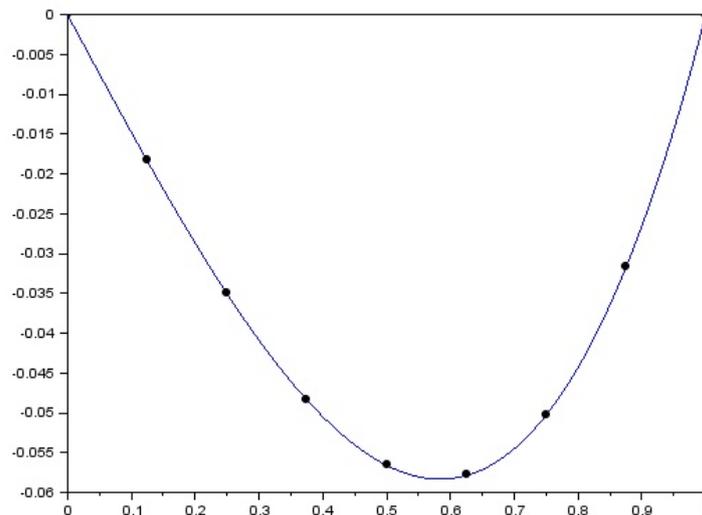


Fig.3.2 la solution exacte u et la solution approchée u_h .

3.1.3 La méthode des différences finies en dimension supérieure à 1

Le principe est exactement le même que celui de la dimension 1, la seule différence réside dans l'écriture. On va étudier seulement le cas de la dimension 2, le cas de dimension supérieure étant complètement analogue.

On cherche à résoudre numériquement le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega =]0, 1[^2, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

où $u = u(x, y)$, $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ et $\partial\Omega$ est le bord de Ω .

On commence par définir un maillage de Ω . On pose

$$x_i = ih \quad \text{et} \quad y_j = jh,$$

où $0 \leq i, j \leq N + 1$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $N \in \mathbb{N}$.

On va déterminer $u_{i,j}$ qui approche $u(x_i, y_j)$. Par le développement de Taylor, on a

$$\partial_{xx}^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + o(h^3),$$

et

$$\partial_{yy}^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} + o(h^3),$$

Un schéma numérique possible est alors de considérer l'approximation suivante de $\Delta u(x_i, y_j)$

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}.$$

Avec cette notation, le problème discrétisé est : trouver $u_{i,j}$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f(x_i, y_j), & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N, \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0, & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour écrire (3.6) sous forme matricielle, on pose

$$U_h = (u_{11}, \dots, u_{1N}, u_{21}, \dots, u_{2N}, \dots, u_{NN})^T.$$

Alors le problème (3.6) s'écrit sous la forme

$$A_h U_h = b_h,$$

où $A_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ et $b_h \in \mathbb{R}^{N^2}$ sont donnés par

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B & C \\ 0 & \cdots & 0 & C & B \end{pmatrix}, b_h = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ f(x_1, y_N) \\ f(x_2, y_1) \\ \vdots \\ f(x_N, y_N) \end{pmatrix},$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ et } C = I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Le système linéaire étant bien défini, on peut donc le résoudre.

Remarque 3.1 On peut choisir un pas h en x et un autre pas k différent pour y . Dans ce cas, $A_h \in \mathbb{R}^{NM \times NM}$, où $h = \frac{1}{N+1}$ et $k = \frac{1}{M+1}$.

3.2 La méthode de Galerkin (Ritz)

3.2.1 Principe de la méthode

L'idée de base consiste à résoudre le problème variationnel dans un espace de dimension finie V_h inclus dans V , approchant l'espace V : c'est le principe de méthode la de *Galerkin*. En outre, la construction de l'espace V_h repose sur la notion géométrique de *maillage*. Dans ce contexte, le paramètre h correspond à la taille maximale des *mailles* ou cellules qui composent le maillage ; il est strictement positif et destiné à tendre vers 0, l'espace V_h sera de plus en plus grand et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier.

Cherchons à résoudre le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \mathcal{A}(u, v) = L(v). \end{cases} \quad (3.7)$$

Notre but est la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v \in V_h, \mathcal{A}(u_h, v) = L(v). \end{cases} \quad (3.8)$$

Le problème (3.8) s'appelle le problème *discret (approché)* du problème *continu* (3.7).

Remarque 3.2

1. L'espace V_h doit être de dimension finie pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues ou *degrés de liberté* qui seront les composantes de la solution approchée dans une base de V_h ; ces composantes pourront facilement être calculées en résolvant un système linéaire qui est la version matricielle du problème (3.8).
2. il est nécessaire que ce nombre de degrés de liberté puisse être aussi grand que l'on veut, de manière à approcher la solution exacte de façon la plus précise possible.
3. On note par N_h la dimension de l'espace V_h , il faut que $N_h \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Définition 3.1 On dit que les espaces $(V_h)_h$ forment une approximation interne de V si

1. $\forall h > 0, V_h \subset V$.
2. $\forall v \in V, \forall h > 0, \exists v_h \in V_h$ tel que $\|v - v_h\|_V \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

La construction de l'espace V_h doit satisfaire deux exigences :

1. V_h doit être facile à construire : on pourra choisir un espace dont la base sera formée de fonctions polynomiales par morceaux.
2. la matrice du système sera creuse, c'est à dire, elle aura beaucoup d'éléments nuls : plus elle sera creuse moins elle occupera de place mémoire. Pour cela, on choisira une base dont les fonctions ont un support dans quelques mailles.

3.2.2 Forme explicite de la solution

Pour résoudre le problème approché (3.2) explicitement, on a besoin de

- (i) un espace de Hilbert V sur \mathbb{R} , muni d'une norme notée $\|\cdot\|_V$,
- (ii) une forme bilinéaire $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ continue sur $V \times V$ et V -elliptique,
- (iii) une forme linéaire L continue sur V .

Sous les hypothèse (i),(ii) et (iii) on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 [2] Le problème approché (3.8) admet une unique solution u_h dans V_h .

Preuve :

Ce résultat peut s'obtenir par l'application directe du théorème *Lax-Milgram* cité dans le chapitre précédent.

L'espace V_h est un espace de Hilbert, de dimension finie N_h , et il admet une base formée des

fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$. La solution u_h est donc de la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i,$$

où (u_i) , $i = 1, \dots, N_h$ sont les inconnues du problème (3.8).

Pour que la relation ait lieu $\forall v_h \in V_h$, il suffit que cette relation (3.8) le soit pour chacune des fonctions de base de l'espace V_h . En utilisant la décomposition de u_h et la linéarité de \mathcal{A} par rapport à son premier argument, cela donne

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N_h\}, \quad \sum_{j=1}^{N_h} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i).$$

La résolution du problème (3.8) revient donc à résoudre le système linéaire

$$AU = b, \tag{3.9}$$

où la matrice A est définie par les coefficients A_{ij} tels que :

$$A_{ij} = \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N_h\},$$

et les vecteurs b , $U \in \mathbb{R}^{N_h}$ définis par

$$b_i = L(\varphi_i), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_h\}, \quad U = (u_1, u_2, \dots, u_{N_h})^T$$

Le système (3.9) a une unique solution car la matrice A est définie positive donc inversible.

En effet, on a

$$\begin{aligned} U^t AU &= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} U_i U_j \\ &= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) U_i U_j \\ &= \sum_{i=1}^{N_h} \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^{N_h} U_j \varphi_j, \varphi_i \right) U_i \\ &= \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^{N_h} U_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i \right) \\ &= \mathcal{A}(y, y) \\ &\geq \alpha \|y\|^2. \end{aligned}$$

car \mathcal{A} est V -elliptique et on a $y = \sum_{j=1}^{N_h} U_j \varphi_j$.

D'où la matrice A est définie positive (i.e $\forall U \in \mathbb{R}^{N_h}, U^t AU \geq 0$, et $U^t AU = 0$ implique

$U = 0$).

Finalement, la solution du système (3.9) est

$$U = A^{-1}b.$$

■

3.2.3 Estimation de l'erreur

Lemme 3.1 (de Céa)[2] On se place sous les hypothèses du théorème (3.1) précédent, si u est la solution de problème (3.7) et u_h la solution du problème (3.8), on a alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

où M est la constante de continuité de \mathcal{A} et α la constante d'ellipticité.

Preuve :

Comme la relation (3.7) est vrai quel que soit $v \in V$, elle reste vraie pour tout $v_h \in V_h$, i.e.,

$$\mathcal{A}(u, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

De la relation (3.8), on obtient :

$$\mathcal{A}(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.10)$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u - u_h, u - u_h) &= \mathcal{A}(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \\ &= \mathcal{A}(u - u_h, u - v_h) + \mathcal{A}(u - u_h, v_h - u_h), \\ &= \mathcal{A}(u - u_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

où l'égalité $\mathcal{A}(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ découle de $v_h - u_h \in V_h$ et la relation (3.10).

En appliquant maintenant la V -ellipticité de \mathcal{A} et sa continuité, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq \mathcal{A}(u - u_h, u - u_h) \\ &= \mathcal{A}(u - u_h, u - v_h), \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \end{aligned}$$

donc

$$\alpha \|u - u_h\|_V \leq M \|u - v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Cette dernière inégalité prouve le lemme. ■

Définition 3.2 On dit que la méthode d'approximation variationnelle est convergente si est seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

On dit que la convergence est d'ordre k si est seulement si il existe une constante réelle C (indépendante de h) telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^k.$$

Lemme 3.2 Sous les hypothèse du théorème 3.1, on suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V (*i.e.*, $\overline{\mathcal{V}} = V$) et une application r_h de \mathcal{V} dans V_h tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge.

Si la forme bilinéaire est symétrique, on a la méthode suivante :

3.2.4 La méthode de Ritz

On cherche à calculer $u \in V$ telle que

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v), \forall v \in V, \tag{3.11}$$

où :

- V est un espace de Hilbert ;
- \mathcal{A} est une forme bilinéaire continue, V -elliptique et *symétrique* ;
- L est une forme linéaire continue sur V .

Résoudre ce problème revient à calculer $u \in V$, solution du problème de minimisation de la fonctionnelle quadratique définie par :

$$E(v) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(v, v) - L(v), \forall v \in V.$$

Donc le problème variationnel devient : trouver $u \in V$ tel que

$$E(v) \geq E(u), \forall v \in V.$$

L'idée de la méthode de Ritz est la même que celle de Galerkin, *i.e.*, remplacer l'espace V par un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension finie N_h et résoudre le problème approché : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$E(v) \geq E(u_h), \forall v \in V_h \tag{3.12}$$

Théorème 3.2[2] Sous les hypothèses du théorème 3.1 et \mathcal{A} symétrique, le problème (3.12) admet une unique solution u_h dans V_h .

Preuve : Puisque V_h est un espace de dimension finie inclus dans V , c'est donc aussi un espace de Hilbert. On peut donc appliquer le théorème de *Lax-Milgram*, et on déduit l'existence et l'unicité de $u_h \in V_h$ solution de (3.12). ■.

Remarque 3.3 On peut démontrer ce théorème en utilisant la méthode constructive comme la démonstration du théorème 3.1.

Lemme 3.3 (cas symétrique)[2] On se place sous les mêmes hypothèses du théorème 3.1 et en plus la forme bilinéaire \mathcal{A} est supposée symétrique. Si u et u_h sont les solutions des problèmes (3.11) et (3.12) respectivement, on a alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Remarque 3.4 Si la forme bilinéaire \mathcal{A} est symétrique, la méthode de Galerkin est équivalente à celle de Ritz, donc la méthode de Ritz est un cas particulier de la méthode de Galerkin.

3.3 Méthode des éléments finis

3.3.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h , des espaces fonctionnels usuels tels que $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, etc, dont la définition est basée sur la notion géométrique de maillage du domaine Ω . Un maillage est un pavage de l'espace en volumes élémentaires très simples : intervalles, triangles, tétraèdres, parallélépipèdes.

Dans cette section, le paramètre h de V_h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage.

Typiquement, une base de V_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes :

- lorsque h tend vers 0, l'espace V_h tendra vers l'espace V tout entier.
- La matrice du système linéaire sera symétrique et définie positive, de plus elle sera creuse, *i.e* la plupart de ses coefficients seront nuls.

La méthode des éléments finis est une des méthodes les plus efficaces, ce qui limitera le coût de la résolution numérique, elle est la plus utilisée pour résoudre numériquement des problèmes aux limites et elle est à la base de beaucoup de logiciels dans les calculs industriels.

Enfin, la méthode des éléments finis repose une façon particulière de choisir les bases des espaces d'approximation pour les méthodes de Galerkin (Ritz).

3.3.2 La méthode des éléments finis en dimension 1

Pour simplifier la présentation de cette méthode, nous commençons par la présenter en dimension 1. Sans perte de généralité, nous choisissons le domaine $\Omega =]0, 1[$. Le maillage de ce domaine repose sur la décomposition de l'intervalle $[0, 1]$ en $n + 2$ points de coordonnées $x_j, 0 \leq j \leq n + 1$ tels que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

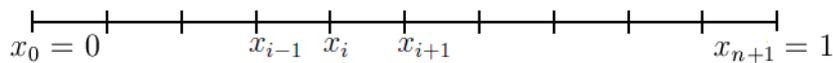


Fig.3.3 Maillage de l'intervalle $[0, 1]$.

Le maillage est dit uniforme si le pas de décomposition h est constant, c'est-à-dire que

$$x_j = jh, 0 \leq j \leq n + 1. \text{ avec, } h = \frac{1}{n + 1},$$

Les points x_j sont appelés les sommets ou les nuds du maillage.

Remarque 3.4 si on considère le cas général $\Omega =]a, b[$, alors le maillage est de la forme

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b,$$

et le pas de décomposition est

$$h_j = x_{j+1} - x_j, 0 \leq j \leq n.$$

Exemple 3.5 On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

La présentation très succincte faite sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une première introduction à la méthode des éléments finis.

Si $f \in L^2(\Omega)$, le problème admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans tout ce qui suit, on notera \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels, d'une variable réelle et de degré inférieur ou égal à k , *i.e.*,

$$\mathbb{P}_k = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = \sum_{l=0}^k \alpha_l x^l; (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}\}.$$

a -La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 se base sur l'espace discret des fonctions continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}([0, 1]); v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq n\}, \quad (3.14)$$

et sur son sous-espace

$$V_h^0 = \{v \in V_h, v(0) = v(1) = 0\}. \quad (3.15)$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est alors la méthode de Galerkin appliquée aux espaces définis par (3.14) et (3.15).

Maintenant, on va choisir des fonctions qui forment une base de l'espace, les fonctions de base $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 (affines) définies par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_j - x}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si le pas de décomposition de l'intervalle est uniforme, les fonctions des base sont :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.16)$$

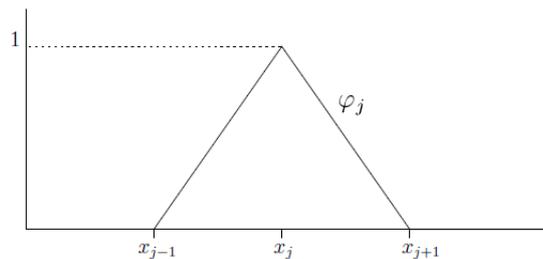


Fig.3.4 Fonctions de base - fonctions chapeau -

Lemme 3.4 L'espace V_h défini par (3.14), est un sous-espace de $H^1(]0, 1[)$ de dimension $n + 2$, et tout fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$:

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

De même, V_h^0 défini par (3.15) est un sous-espace de $H_0^1(]0, 1[)$ de dimension n , et toute fonction $v_h \in V_h^0$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$:

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Remarque 3.5 La base (φ_j) définie par (3.10) permet de caractériser une fonction de V_h par ses valeurs aux nuds du maillage. Dans ce cas, on parle d'éléments finis de *Lagrange*. On peut introduire d'autres espaces V_h pour lesquels une fonction sera caractérisée, non seulement par ses valeurs, mais aussi par les valeurs de sa dérivée, on parle alors d'éléments finis d'*Hermite*. Ici, comme les fonctions sont localement \mathbb{P}_1 , on dit que l'espace V_h défini par (3.14) est l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre 1.

Remarquons aussi que, $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Cet exemple d'éléments finis \mathbb{P}_1 permet à nouveau de comprendre l'intérêt de la formulation variationnelle. En effet, les fonctions de V_h ne sont pas deux fois dérivables sur le segment $[0, 1]$ et cela n'a pas de sens de résoudre, même de manière approchée, le problème (3.13). Au contraire, il est parfaitement légitime d'utiliser des fonctions de V_h dans la formulation variationnelle qui ne requiert qu'une seule dérivée.

Maintenant, on va résoudre le problème (3.13) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . La formulation variationnelle de ce problème s'énonce comme suit : trouver $u \in V$ tel que

$$\mathcal{A}(u, v) = L(v), \forall v \in V,$$

avec

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(]0, 1[), \\ \mathcal{A}(u, v) &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \\ L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Donc, le problème devient : Trouver $u_h \in V_h^0$ tel que

$$\forall v \in V_h^0, \mathcal{A}(u_h, v) = L(v), \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u_h, v) &= \int_0^1 u'_h(x)v'(x)dx, \\ L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

La combinaison linéaire de u_h sur la base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ de l'espace V_h^0 , avec $v = \varphi_i$ nous donne

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx.$$

La formulation variationnelle dans l'espace V_h^0 revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire

$$A_h X_h = b_h, \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned}A_h &= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\int_0^1 \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ X_h &= (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}, \\ b_h &= (b_i)_{1 \leq i \leq n} = \left(\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \right)_{1 \leq i \leq n}.\end{aligned}$$

La matrice A_h s'appelle la matrice de *rigidité*.

Comme les fonctions de base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ ont un petit support, alors l'intersection des supports de φ_i et φ_j est souvent vide et la plupart des coefficients de la matrice A_h sont nuls.

Le calcul des coefficients de la matrice A_h fait intervenir les dérivées $\varphi'_j(x)$ simples à calculer :

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ -\frac{1}{h}, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A_h , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont :

$$\begin{aligned}a_{ii} &= \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_i(x)dx = \frac{2}{h}, \\ a_{i, i+1} &= \int_0^1 \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x)dx = -\frac{1}{h}, \\ a_{i-1, i} &= \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x)dx = -\frac{1}{h}.\end{aligned}$$

On déduit la matrice A_h :

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le second membre b_h est le résultat des intégrales pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Mais le calcul de ces intégrales de manière explicite peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliquée. Dans ce cas, on utilise des méthodes numériques pour les calculer, citons par exemple :

- La formule du point milieu : $\int_a^b \phi(x)dx = (b-a)\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- La formule des trapèzes : $\int_a^b \phi(x)dx = \frac{b-a}{2}(\phi(a) + \phi(b))$.
- La formule de Simpson : $\int_a^b \phi(x)dx = \frac{b-a}{6}(\phi(a) + 6\phi(\frac{a+b}{2}) + \phi(b))$.

Lorsque les composantes du vecteur b_h est calculé, il reste la résolution du système linéaire (3.18) qui admet une unique solution.

Exemple 3.6 Cherchons à résoudre le problème de Neumann avec la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , le problème étant le suivant :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (3.19)$$

On a vu dans le chapitre précédent que ce problème admet une unique solution dans $H^1(]0, 1[)$ sous les hypothèses suivantes :

- $f \in L^2(]0, 1[)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $c \in L^\infty(]0, 1[)$ tel que $\exists c_0 > 0, c(x) \geq c_0$ p.p dans $]0, 1[$.

Appliquons les mêmes procédures utilisées dans l'exemple précédent, et nous obtenons la formulation varitionnelle de l'approximation interne suivante : trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\mathcal{A}(u_h, v) = L(v), \forall v \in V_h,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_h, v) &= \int_0^1 [u_h'(x)v'(x) + c(x)u_h(x)v(x)] dx, \\ L(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx - \alpha v(0) + \beta v(1). \end{aligned}$$

En décomposant u_h sur la base $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$, la formulation variationnelle dans V_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^{n+2} le système linéaire

$$A_h X_h = b_h,$$

avec $X_h = (u_h(x_j))_{0 \leq j \leq n+1}$, et la matrice de rigidité A_h est définie par :

$$A_h = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n+1} = \left(\int_0^1 (\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + c(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)) dx \right)_{0 \leq i, j \leq n+1}.$$

Le second membre du système linéaire b_h est déterminé par :

$$b_h = (b_i)_{0 \leq i \leq n+1} = \begin{cases} \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) dx, & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ \int_0^1 f(x)\varphi_0(x) dx - \alpha, & \text{si } i = 0, \\ \int_0^1 f(x)\varphi_{n+1}(x) dx + \beta, & \text{si } i = n + 1. \end{cases}$$

Pratiquement, si c n'est pas une fonction constante, le calcul des coefficients de la matrice de rigidité A_h est compliqué, donc l'évaluation de ces coefficients repose sur des méthodes numériques pour les intégrales.

b - Convergence et estimation d'erreur

Après avoir calculé la solution par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , il faut démontrer la convergence de la solution obtenue vers la solution exacte du problème. Pour cela, définissons tout d'abord un *opérateur d'interpolation* r_h .

Définition 3.3 On appelle opérateur d'interpolation \mathbb{P}_1 l'application linéaire r_h de $H^1(]0, 1[)$ dans V_h définie, pour tout $v \in H^1(]0, 1[)$, par

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\varphi_j(x).$$

Cette définition a bien un sens, car les fonctions de $H^1(]0, 1[)$ sont continues et leurs valeurs ponctuelles sont donc bien définies. L'interpolée $r_h v$ d'une fonction v est simplement la fonction affine par morceaux qui coïncide avec v sur les sommets du maillage.

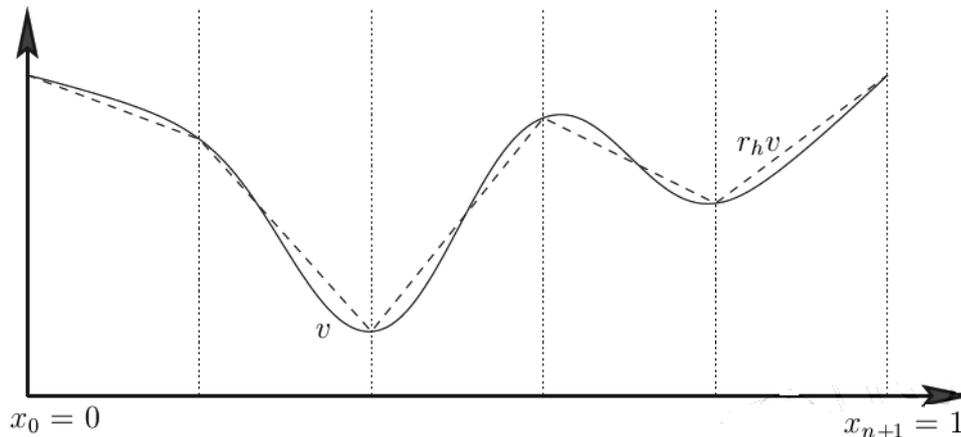


Fig.3.5 Interpolation \mathbb{P}_1 d'une fonction de $H^1(]0, 1[)$.

La convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.5 (lemme d'interpolation)[R] Soit r_h l'opérateur d'interpolation \mathbb{P}_1 . Pour tout $v \in H^1(]0, 1[)$, il vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(]0, 1[)} = 0.$$

De plus, si $v \in H^2(]0, 1[)$, alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(]0, 1[)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 3.3[2] Soient $u \in H_0^1(]0, 1[)$ et $u_h \in V_h^0$ les solutions de (3.7) et (3.11) respectivement. Alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge, *i.e.*,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(]0, 1[)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^2(]0, 1[)$, alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0, 1[)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(]0, 1[)} = Ch \|f\|_{L^2(]0, 1[)}. \quad (3.20)$$

Remarque 3.7

- L'estimation (3.20) indique la vitesse de convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , et comme cette majoration est proportionnelle à h , on dit que la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge linéairement.
- On peut généraliser le théorème 3.3 à des maillages non uniforme, dans ce cas h est défini par $h = \max_{0 \leq j \leq n} (x_{j+1} - x_j)$.

c -La méthode des éléments finis \mathbb{P}_2

Cette méthode repose sur les espaces de l'approximation suivants :

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}([0, 1]); v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2, 0 \leq j \leq n\}, \quad (3.21)$$

et sur son sous-espace

$$V_h^0 = \{v \in V_h, v(0) = v(1) = 0\}. \quad (3.22)$$

Les deux espaces sont composés de fonctions continues, paraboliques par morceaux et qu'on peut représenter à l'aide de fonctions de base très simples.

Comme dans le cas de la méthode \mathbb{P}_1 , il faut déterminer une base de V_h et un opérateur d'interpolation.

Dans la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , toute fonction v de V_h était linéaire sur $[x_j, x_{j+1}]$, il suffisait donc de connaître les valeurs de v en x_j et x_{j+1} pour déterminer v sur $[x_j, x_{j+1}]$.

Pour la méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 , il est nécessaire de connaître les valeurs de v en trois points de $[x_j, x_{j+1}]$. Pour cela, on définit le point milieu :

$$x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}, \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Par analogie avec la méthode \mathbb{P}_1 , on va prendre pour fonctions de base les fonctions ψ_j et $\psi_{j+1/2}$ appartenant à V_h telles que

$$\psi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \psi_{j+1/2}(x_{i+1/2}) = \delta_{ij}.$$

Les fonctions ψ_j et $\psi_{j+1/2}$ sont données par

$$\begin{cases} \psi_j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{h}\right), & 0 \leq j \leq n+1, \\ \psi_{j+1/2}(x) = \chi\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{h}\right), & 0 \leq j \leq n, \end{cases}$$

avec

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x), & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

et

$$\chi(x) = \begin{cases} (1-2x)(1+2x) & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Donc le support de ψ_i est l'intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ et celui de $\psi_{i+1/2}$ l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

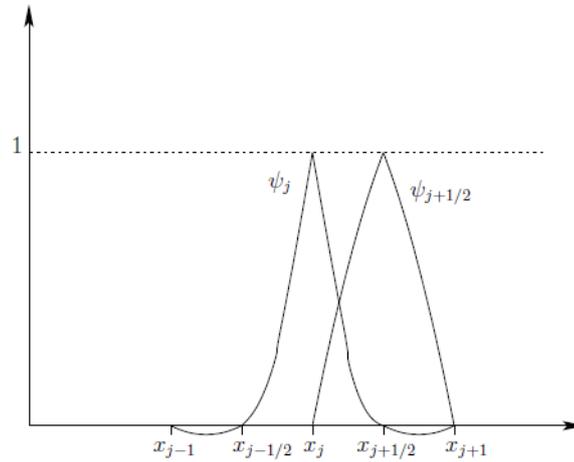


Fig.3.6 Graphes des fonctions ψ_j et $\psi_{j+1/2}$

Lemme 3.6 L'espace V_h défini par (3.21) est un sous-espace de $H^1(]0, 1[)$ de dimension $2n + 3$ et pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$v_h = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j)\psi_j + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+1/2})\psi_{j+1/2} = \sum_{j=0}^{2n+2} v_h(x_{j/2})\psi_{j/2}.$$

De même, l'espace V_h^0 défini par (3.22) est un sous-espace de $H_0^1(]0, 1[)$ de dimension $2n + 1$ et pour tout $v_h \in V_h^0$, on a

$$v_h = \sum_{j=1}^n v_h(x_j)\psi_j + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+1/2})\psi_{j+1/2} = \sum_{j=1}^{2n+1} v_h(x_{j/2})\psi_{j/2}.$$

La formulation variationnelle de l'approximation interne revient à résoudre dans \mathbb{R}^{2n+1} le système linéaire

$$A_h X_h = b_h, \tag{3.23}$$

avec

$$\begin{aligned} A_h &= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n+1} = \left(\int_0^1 \psi'_{i/2}(x)\psi'_{j/2}(x)dx \right)_{1 \leq i, j \leq 2n+1}, \\ X_h &= (u_h(x_{j/2}))_{1 \leq j \leq 2n+1}, \\ b_h &= (b_i)_{1 \leq i \leq 2n+1} = \left(\int_0^1 f(x)\psi_{i/2}(x)dx \right)_{1 \leq i \leq 2n+1}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Application en contrôle optimal

Dans ce dernier chapitre, on va étudier des problèmes pratiques de contrôle optimal gouvernés par des équations différentielles aux dérivées partielles. Dans le cadre de cette thèse, on va traiter un problème de contrôle optimal appliqué à l'équation de la chaleur. Ce problème a beaucoup d'applications dans le domaine de la physique et en automatique. La résolution de ce problème se fait en calculant numériquement le contrôle optimal par la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

4.1 Problème de contrôle optimal stationnaire

4.1.1 Position du problème

On considère notre problème dans un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$ dans la pratique), avec des conditions mixtes de Dirichlet et de Neumann au bord de ce domaine. Notons par $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$ le bord du domaine.

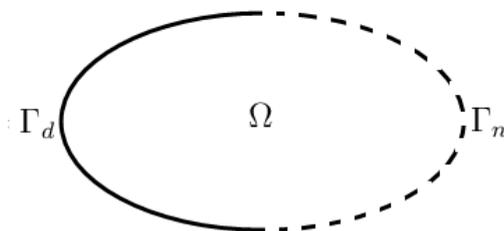


Fig.4.1 Le domaine Ω et le bord $\partial\Omega$.

Le problème à résoudre est l'équation de la chaleur stationnaire (ne dépendant pas de temps) :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_d, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \Gamma_n, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $u = u(g)$ et $g = g(x)$, où u désigne la température et g le contrôle.

Notre but est alors de trouver la température u telle que celle-ci soit égale à une température donnée u_0 , ou du moins très proche d'elle.

Pour ce faire, on définit la fonctionnelle de coût J suivante :

$$J(g) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} g^2, \quad (4.2)$$

où ε représente le compromis efficacité-coût.

La fonctionnelle (4.2) doit être minimisée, et notons par \bar{g} son unique minimum :

$$\bar{g} = \arg \min_g J(g), \quad J(\bar{g}) = \min_g J(g), \quad g \in L^2(\Gamma_n).$$

Le problème (4.1) revient à trouver $u \in H_0^1(\Gamma_d)$ tel que

$$\int_{\Omega} -\Delta u v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Gamma_d).$$

D'après la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma_n} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0.$$

On obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Gamma_n} g v.$$

D'autre part, pour minimiser la fonctionnelle J , il faut tout d'abord effectuer l'opération de dérivation sur celle-ci. On introduit pour cela la dérivée directionnelle définie comme suit :

$$J'(g, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(g + th) - J(g)}{t}.$$

En effet, on a

$$J(g + th) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g + th) - u_0|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} (g + th)^2.$$

Comme l'application $g \mapsto u(g)$ est linéaire, on a $u(g+th) = u(g) + tu(h)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} J(g+th) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0 + tu(h)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} (g^2 + t^2 h^2 + 2thg) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(g) - u_0|^2 + t^2 |u(h)|^2 + 2t(u(g) - u_0)u(h) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} (g^2 + t^2 h^2 + 2thg). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{J(g+th) - J(g)}{t} = \int_{\Omega} (u(g) - u_0)u(h) + \varepsilon \int_{\Gamma_n} gh + Kt,$$

où

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(h)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_n} h^2.$$

En passant à la limite lorsque t tend vers 0, on obtient alors la dérivée de J :

$$J'(g, h) = \int_{\Omega} (u(g) - u_0)u(h) + \varepsilon \int_{\Gamma_n} gh.$$

La résolution de ce problème de contrôle par la méthode itérative du gradient se fait selon l'itération suivante :

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} - \rho \nabla J(g^{(n)}),$$

où $\rho > 0$.

On a alors

$$J'(g, h) = \langle \nabla J(g), h \rangle = \int_{\Gamma_n} \nabla J(g)h.$$

4.1.2 Méthode de l'état adjoint

Pour que le gradient soit bien représenté, il faut transformer l'intégrale sur Ω vers l'intégrale sur Γ_n . Pour cela, on utilise la méthode de l'état adjoint, en introduisant la variable p vérifiant :

$$\begin{cases} -\Delta p = f, & \text{dans } \Omega, \\ p = \alpha, & \text{sur } \Gamma_d. \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \beta, & \text{sur } \Gamma_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Maintenant, on va déterminer les conditions au bord du domaine, en réécrivant la formulation variationnelle du problème, et en comparant avec les conditions au bord du problème initial. En effet, on a

$$\int_{\Omega} -\Delta p u(h) = \int_{\Omega} f u(h).$$

Par intégration par parties, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \nabla u(h) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} u(h) &= \int_{\Omega} f u(h), \\ - \int_{\Omega} p \Delta u(h) + \int_{\partial\Omega} \left(p \frac{\partial u(h)}{\partial n} - u(h) \frac{\partial p}{\partial n} \right) &= \int_{\Omega} f u(h), \\ \int_{\Gamma_n} p h + \int_{\Gamma_d} p \frac{\partial u(h)}{\partial n} - \int_{\Gamma_n} u(h) \frac{\partial p}{\partial n} &= \int_{\Omega} f u(h). \end{aligned}$$

La comparaison avec le problème (4.1) nous donne :

$$\begin{cases} -\Delta p = u(g) - u_0, & \text{dans } \Omega, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_d, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_n. \end{cases} \quad (4.4)$$

On obtient ainsi :

$$\int_{\Gamma_n} p h = \int_{\Omega} (u(g) - u_0) u(h),$$

où p désigne l'état adjoint.

La dérivée directionnelle de la fonctionnelle J est alors définie par :

$$J'(g, h) = \int_{\Gamma_n} \nabla J(g) h, \quad \text{où } \nabla J(g) = p + \varepsilon g. \quad (4.5)$$

4.1.3 L'algorithme de résolution

On se donne une valeur initiale $g^{(0)}$, puis on résout le problème direct et le problème adjoint pour $i = 0, 1, \dots$

Problème direct	Problème adjoint
$\begin{cases} -\Delta u^{(i)} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^{(i)} = 0, & \text{sur } \Gamma_d, \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n} = g^{(i)}, & \text{sur } \Gamma_n, \end{cases}$	$\begin{cases} -\Delta p^{(i)} = u^{(i)} - u_0, & \text{dans } \Omega, \\ p^{(i)} = 0, & \text{sur } \Gamma_d, \\ \frac{\partial p^{(i)}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_n. \end{cases} \quad (4.6)$

La méthode itérative du gradient nous donne

$$g^{(i+1)} = g^{(i)} - \rho \nabla J(g^{(i)}), \quad \text{avec } \nabla J(g^{(i)}) = p^{(i)} + \varepsilon g^{(i)}.$$

4.1.4 Exemple d'application

On considère en dimension 1 le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f, & \text{dans } \Omega, \\ u(1) = b, & \text{sur } \Gamma_d, \\ u'(0) = a, & \text{sur } \Gamma_n, \end{cases}$$

où $f(x) = \pi^2 \cos(\pi x)$, $\Omega =]0, 1[$, $\Gamma_d = \{1\}$, $\Gamma_n = \{0\}$, $a = 0$ et $b = -1$

Étape 01 : On subdivise le domaine en N parties, et on résout le problème au point $x_i = (i-1)h$, où h désigne le pas de la subdivision avec $h = \frac{1}{N}$.

On peut discrétiser le problème précédent en utilisant la méthode des différences finies :

$$u''(x_i) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \text{ où } u_i = u(x_i).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} &= -f(x_i), & 2 \leq i \leq N-1; \\ \frac{-u_i + u_{i+1}}{h^2} &= -f(x_i) + \frac{a}{h}, & i = 1; \\ \frac{u_{i-1} - 2u_i}{h^2} &= -f(x_i) - \frac{b}{h^2}, & i = N. \end{aligned}$$

Le problème revient donc à résoudre le système linéaire $AU = F$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix} \text{ et } F = h^2 \begin{pmatrix} -f(x_1) + \frac{a}{h} \\ -f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ -f(x_N) - \frac{b}{h^2} \end{pmatrix}.$$

La résolution du système linéaire nous donne un vecteur U à N composantes.

Étape 02 :

Après cette étape, par la même méthode on résout le problème adjoint

$$\begin{cases} -p'' = u - u_0, & \text{dans } \Omega, \\ p(1) = 0, & \text{sur } \Gamma_d, \\ p'(0) = 0, & \text{sur } \Gamma_n. \end{cases}$$

La méthode des différences finies permet d'écrire :

$$p''(x_i) = \frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{h^2}, \text{ où } p_i = p(x_i),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{h^2} &= -u_i + u_0, & 2 \leq i \leq N-1; \\ \frac{-p_i + p_{i+1}}{h^2} &= -u_i + u_0, & i = 1; \\ \frac{p_{i-1} - 2p_i}{h^2} &= -u_i + u_0, & i = N.\end{aligned}$$

Le système linéaire obtenu est $AP = G$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_N \end{pmatrix} \text{ et } G = h^2 \begin{pmatrix} -u_1 + u_0 \\ -u_2 + u_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ -u_N + u_0 \end{pmatrix}.$$

Étape 03 :

L'étape précédente a permis de calculer la solution p du problème adjoint, puis on calcule

$$\nabla J(g^{(i)}) = p^{(i)} + \varepsilon g^{(i)},$$

et

$$g^{(i+1)} = g^{(i)} - \rho \nabla J(g^{(i)}), \text{ où } g^{(0)} = a$$

On fixe une précision d'erreur et on arrête les calculs.

4.2 Problème de contrôle optimal non stationnaire

On introduit maintenant le temps dans la résolution de l'équation de la chaleur, donc la température u dépend de deux variables : $u = u(x, t)$, avec $x \in]0, 1[$ et $t \in]0, T[$, $T > 0$.

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t), \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}, \quad (4.7)$$

où $g \in L^2(]0, T[)$.

La fonctionnelle à minimiser est donnée par :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |u(g) - u_0|^2 dx dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T g^2(t) dt, \quad (4.8)$$

et la dérivée directionnelle de la fonctionnelle (4.8) est égale à :

$$J'(g, h) = \int_0^T \int_0^1 (u(g) - u_0) u(h) dx dt + \varepsilon \int_0^T g h dt.$$

4.2.1 Méthode de l'état adjoint

De la même façon que pour le problème stationnaire (4.1), on écrit le problème adjoint, puis on détermine les conditions aux limites et la condition initiale :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u(g) - u_0, & \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = \alpha, \\ p(1, t) = \beta, \\ u(x, 0) = \gamma. \end{cases} \quad (4.9)$$

L'écriture de la formulation variationnelle de problème (4.9) nous donne :

$$\int_x \int_t \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) u(h) = \int_{t,x} (u(g) - u_0) u(h),$$

ceci donne après intégration par parties :

$$\int_x \int_t p \frac{\partial u(h)}{\partial t} - \int_{x,t=T} p u(h) + \int_{x,t=0} p u(h) + \int_t \int_x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u(h)}{\partial x} - \int_{t,x=1} \frac{\partial p}{\partial x} u(h) + \int_{t,x=0} \frac{\partial p}{\partial x} u(h) = \int_{t,x} (u(g) - u_0) u(h)$$

d'où

$$\int_t \int_x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u(h)}{\partial x} = - \int_t \int_x p \frac{\partial^2 u(h)}{\partial x^2} + \int_{t,x=1} p \frac{\partial u(h)}{\partial x} - \int_{t,x=0} p \frac{\partial u(h)}{\partial x}.$$

On obtient alors

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u(g) - u_0, & \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = 0, \\ p(1, t) = 0, \\ p(x, T) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Et $\lambda = - \int_0^T p(0, t) g(t) dt$.

Si on pose $\hat{p}(x, t) = p(x, T - t)$, notre problème adjoint s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} = u(g)(x, T - t) - u_0, & \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \hat{p}(1, t) = 0, \\ \hat{p}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

4.2.2 L'algorithme de résolution

La méthode de résolution du problème non stationnaire est la même que celle du problème stationnaire, elle consiste donc à résoudre le problème direct ainsi que le problème adjoint :

Problème direct	Problème adjoint
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = 0, \quad \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}(0, t) = g^{(i)}(t), \\ u^{(i)}(1, t) = 0, \\ u^{(i)}(x, 0) = 0. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial x^2} = u^{(i)}(x, T - t) - u_0, \quad \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x}(0, t) = 0, \\ p^{(i)}(1, t) = 0, \\ p^{(i)}(x, 0) = 0. \end{array} \right.$

(4.12)

4.2.3 Exemple d'application

On considère en dimension 1 le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t), \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right. , \quad (4.13)$$

où $g \in L^2(]0, T[)$.

Étape 01 :

On définit les pas de décompositions de l'espace et du temps :

$x_i = (i - 1)h$ et $t_n = n\tau$, avec $h = \frac{1}{N}$ et $\tau = \frac{T}{k}$ pour $i = \overline{1, N}$ et $n = \overline{0, k}$.

Le second membre du problème le contrôle sont définis respectivement par :

$f(x, t) = (1 + \pi^2 t) \sin(\pi x)$ et $g(t) = \pi t$.

La discrétisation du problème en espace et en temps avec la condition $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ pour un schéma explicite, nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2},$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau},$$

où $u_i^n = u(x_i, t_n)$.

On obtient

$$\begin{cases} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n), & \text{pour } 2 \leq i \leq N-1, \\ \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h^2} = f(x_i, t_n) - \frac{g(t_n)}{h}, & \text{pour } i = 1, \\ \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n}{h^2} = f(x_i, t_n) & \text{pour, } i = N. \end{cases}$$

Donc le problème peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{\tau}U^n - \frac{1}{\tau}U^{n-1} - \frac{1}{h^2}AU^n = F^n,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N^n \end{pmatrix} \text{ et } F^n = \begin{pmatrix} f(x_1, t_n) - \frac{g(t_n)}{h} \\ f(x_2, t_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N, t_n) \end{pmatrix}.$$

Le système matriciel peut encore s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{1}{\tau}I - \frac{1}{h^2}A \right) U^n = F^n + \frac{1}{\tau}U^{n-1}, \quad \text{où } I \text{ est la matrice unitaire.}$$

Étape 02 :

L'étape précédente nous donne la solution du problème direct, donc le second membre du problème adjoint est calculé. Par la même méthode, on va résoudre ce dernier :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u(x, T-t) - u_0, & \text{dans }]0, 1[, \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = 0, \\ p(1, t) = 0, \\ p(x, 0) = 0, \end{cases}$$

avec

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n}{h^2},$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau}.$$

où $p_i^n = p(x_i, t_n)$.

On obtient

$$\begin{cases} \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau} - \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n}{h^2} = u(x_i, T - t_n) - u_0, & \text{pour } 2 \leq i \leq N - 1, \\ \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau} - \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} = u(x_i, T - t_n) - u_0, & \text{pour } i = 1, \\ \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau} - \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n}{h^2} = u(x_i, T - t_n) - u_0, & \text{pour } i = N. \end{cases}$$

Donc le problème peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{\tau}P^n - \frac{1}{\tau}P^{n-1} - \frac{1}{h^2}AP^n = G^n,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P^n = \begin{pmatrix} p_1^n \\ \vdots \\ p_N^n \end{pmatrix} \text{ et } G^n = \begin{pmatrix} u(x_1, T - t_n) - u_0 \\ \vdots \\ u(x_N, T - t_n) - u_0 \end{pmatrix}.$$

Le système matriciel peut encore écrire sous la forme :

$$\left(\frac{1}{\tau}I - \frac{1}{h^2}A \right) P^n = G^n + \frac{1}{\tau}P^{n-1}, \quad \text{où } I \text{ est la matrice unitaire.}$$

Étape 03 :

Une fois que les deux problèmes direct et adjoint sont résolus, on calcule alors dans cette étape la prochaine approximation du contrôle :

$$\nabla J(g^{(i)}) = p^{(i)}(0, T - t) + \varepsilon g^{(i)}(t),$$

et

$$g^{(i+1)}(t) = g^{(i)}(t) - \rho \nabla J(g^{(i)}), \quad \text{où } g^{(0)}(t) = \pi t$$

4.3 Résultats numériques

Exemple 1 :

Pour tester le programme, on va modifier plusieurs paramètres.

N : le pas de décomposition d'espace.

$\rho > 0$ et $\varepsilon > 0$ interviens dans le calcul de contrôle optimal.

Premièrement : on fixe le paramètre $\rho = 1$ et on va varier ε , on obtient les résultats suivants :

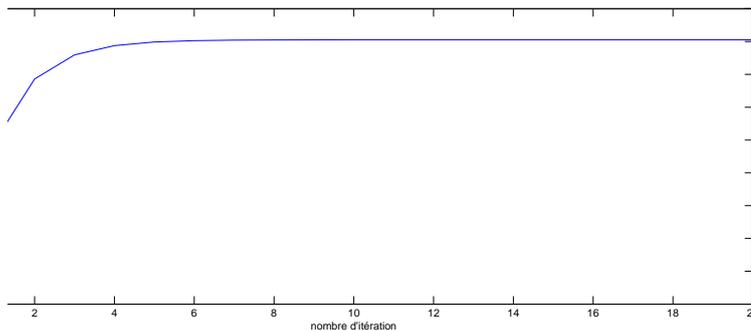


Fig.4.2 Le contrôle g , $\rho = 1$ et $\varepsilon = 1$.

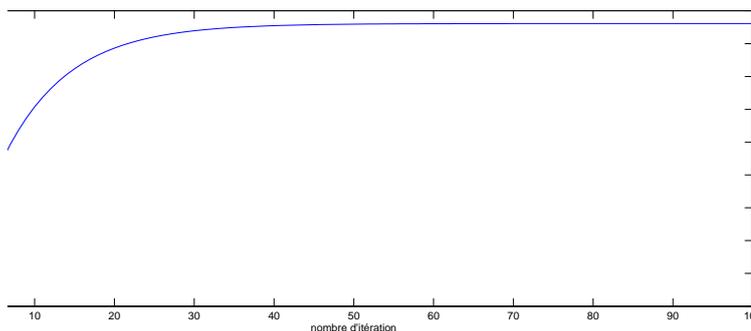


Fig.4.3 Le contrôle g , $\rho = 1$ et $\varepsilon = 0.5$.

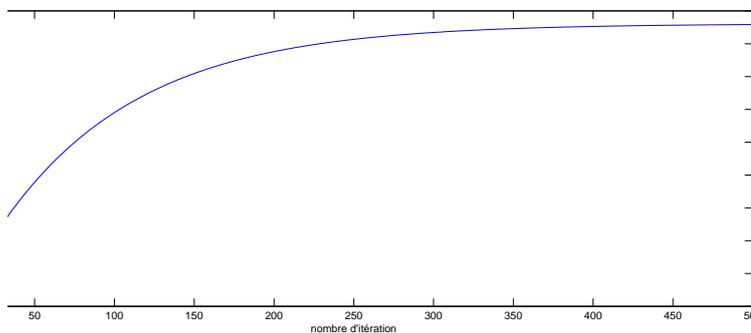


Fig.4.4 Le contrôle g , $\rho = 1$ et $\varepsilon = 0.1$.

On peut remarquer que pour une valeur de ρ fixée, lorsque le paramètre ε tend vers 0, la vitesse de convergence de l'algorithme diminue.

Si on fixe la valeur du paramètre ε à 0.5, et on varie la valeur de, on aura les résultats suivants :

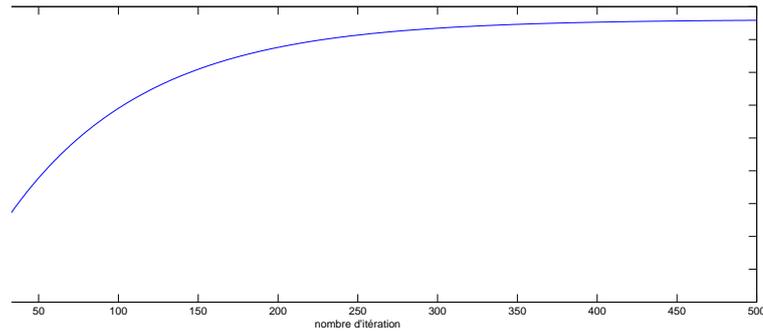


Fig.4.5 Le contrôle g , $\rho = 0.1$ et $\varepsilon = 0.5$.

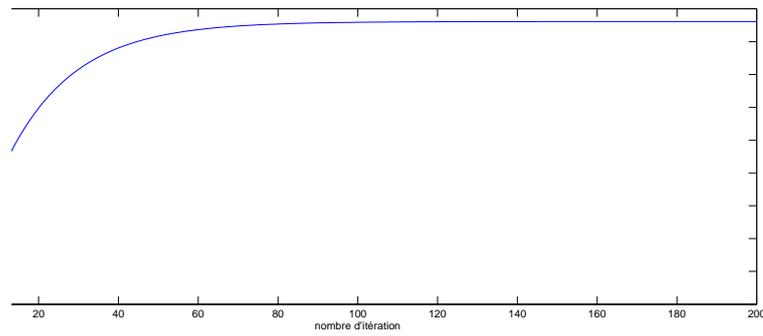


Fig.4.6 Le contrôle g , $\rho = 0.5$ et $\varepsilon = 0.5$.

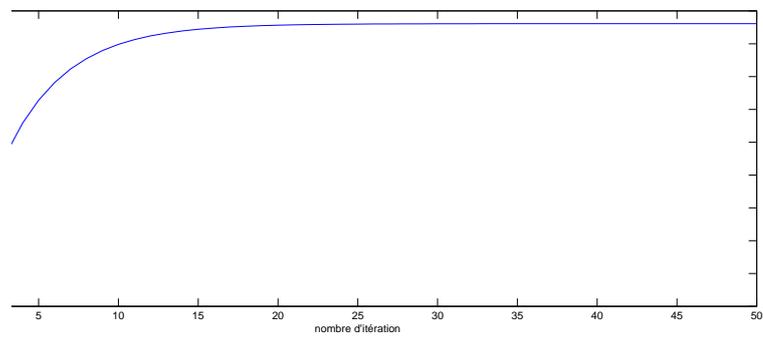


Fig.4.7 Le contrôle g , $\rho = 2$ et $\varepsilon = 0.5$.

On retient que lorsque ρ augmente, l'algorithme converge plus vite.

Conclusion générale

Notre contribution dans cette thèse est l'analyse numérique des équations différentielles aux dérivées partielles, et l'application de ce dernier en contrôle optimal.

Pour cela, dans le premier chapitre nous avons d'abord rappelé les concepts de base et les définitions sur les équations aux dérivées partielles, tels que l'ordre, le type linéaire et non linéaire, ainsi que le concept d'un problème bien posé, tout en donnant des rappels sur la dérivation d'une fonction à plusieurs variables. Nous avons aussi présenté les méthodes analytique de résolution des EDP, telles la méthode des caractéristiques et la méthode de changement de variables. On a terminé ce chapitre en résolvant des équations modèles, comme les équations de transport, des ondes et de la chaleur.

Dans le deuxième chapitre on a décrit la formulation variationnelle des problèmes, ainsi que le théorème de Lax-Milgram qui prouve l'existence et l'unicité de la solution.

Le troisième chapitre est réservé aux méthodes numériques pour calculer la solution approchée d'une EDP, à savoir la méthode des différences finies, la méthode Galarkin et la méthode des éléments finis. Nous avons terminé notre travail par deux applications pratiques en contrôle optimal, la première application porte sur un problème stationnaire et la deuxième sur le cas non stationnaire.

En guise de perspectives, nous proposons les directions de recherche suivantes :

- Traiter un problème de contrôle optimal en élaborant une méthode constructive basé sur un critère d'optimalité et des méthodes numériques de résolution des EDP ;
- Traiter des problèmes linéaires quadratiques de contrôle optimal en dimension supérieur à un ;
- Application aux problèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Bibliographie

- [1] P.A. Raviart, J.M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, 1983.
- [2] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation. Edition de l'École polytechnique, Paris, 2005.
- [3] B. Lucquin, O. Pironneau. Introduction au calcul scientifique. Masson, Paris, 1996.
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. Numerical Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [5] F. Jędrzejewski. Introduction aux méthodes numériques. Springer, Paris 2005.
- [6] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. J.L. Lions, G. Papanicolaou, R.T. Rockafellar Editors, 4, Netherlands, 1979.
- [7] B. Lucquin. Équations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses, Paris 2004.
- [8] F. Hubert, J. Hubbard. Calcul scientifique, Vuibert, Paris 2006.
- [9] L. Euler. De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis. Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae, tome 7, p. 174-193, 1740.
- [10] J. D'Alembert. Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Histoire de l'Académie de Berlin, tome 3, p. 14-49, 1747.
- [11] J.L. Lagrange. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires. Nouveaux mémoires de l'académie des sciences et belles-lettres de Berlin, 1785.
- [12] J.L. Lions. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume 2, Dunod, Paris, 1968.
- [13] J.L. Lions. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris 1968

- [14] I. Ekeland. Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations elliptiques. *Journal of functional analysis* 9, 1-62, 1972.
- [15] J.L. Lions, O.Pironneau. Sur le contrôle parallèle des systèmes distribués. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série1, p 993-998, 1998.
- [16] S. Micu. I. Roventa. M. Tucsnak. Time optimal boundary controls for the heat equation. *Journal of functional analysis* 263, 25-49, 2012.
- [17] J.D. Benamou. Décomposition de domaine pour le contrôle de systèmes gouvernés par des équations d'évolution. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.324, Série1, p. 1065-1070, 1997.
- [18] Black, Fischer, Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3) : 637-654, Chicago, 1973.
- [19] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [20] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, New York, 1975.
- [21] BIBI. M.O, MEDJDOUB. S, Optimal control of a linear-quadratic problem with free initial condition. 26th European Conference on Operational Research, Rome, Italy, July 01-04,2013, Book of Abstract , p.362.
- [22] MEDJDOUB. S, Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec coût quadratique et état initial libre. Mémoire de magister, Bejaia 2012.
- [23] AZI. M, Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière. Mémoire de magister, Bejaia 2010.
- [24] BIBI. M.O, Optimal control of a quadratic problem with a piecewise linear entry. Acte de la *v^{ème}* conférence internationale en recherche opérationnelle (CIRO 10), du 24 au 27 mai 2010, Université de Marrakech, Maroc, p.1-4.
- [25] AZI. M, BIBI. M.O, Méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal avec une application financière. Actes de COSI 2011, 24-27, Avril 2011, Université de Guelma, Algérie, pp. 172-183.
- [26] BIBI. M.O, KHIMOUM. N, Solving a linear quadratic multivariate optimal control problem. Proceedings of the second international symposium on operational research (ISOR 11), May 30th June 02nd, 2011, USTHB, Algiers, Algeria, pp.86-88.
- [27] QUINET.J, *Cours élémentaire de mathématiques supérieurs*. Tome 4, Dunod, Paris, 1977.

- [28] Thierry.R, Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles. Université Paris-Sud, 2002.

Résumé

Ce mémoire traite de l'analyse numérique des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) et d'applications en contrôle optimal. Nous avons d'abord rappelé les concepts fondamentaux sur les EDP linéaires et la formulation variationnelle de ces problèmes.

Dans ce travail, on a présenté trois méthodes numériques pour calculer la solution approchée, à savoir la méthode des différences finies, la méthode de Galerkin et la méthode des éléments finis. Les expérimentations numériques sont utilisées pour résoudre deux problèmes de contrôle optimal concernant l'équation de la chaleur, et ce en utilisant la méthode des différences finies.

Mots clés : EDP , solutions analytiques, analyse numérique des EDP, contrôle optimal.

Abstract

This memory is devoted to numerical analysis of partial differential equations (PDE) with applications in optimal control. We first recalled the basic concepts of linear PDEs and the variational formulation of these problems.

In this work, three numerical methods to calculate the approximate solution are presented, namely the finite differences method, Galerkin and finite elements method. Numerical experiments are used to solve two optimal control problems which deal with the heat equation, and that by using the method of finite differences.

Key word : PDE, analytical solutions, numerical analysis of PDE, optimal control.

ملخص

عالجنا في هذه المذكرة التحليل العددي للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية، وتطبيقاتها في التحكم الأمثل. في البداية قمنا بالتذكير بالمفاهيم الأساسية الخاصة بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات مشتقات جزئية و الشكل التغييري لهذه المسائل.

في هذا العمل، قدمنا ثلاث طرق عددية لحساب الحل التقريبي، منها طريقة الفروق المنتهية، طريقة فلاركين و طريقة العناصر المنتهية. استعملنا طريقة الفروق المنتهية لحل مسألة في التحكم الأمثل مطبقة على معادلة الحرارة.

الكلمات الدلالية : المعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية، الحلول التحليلية، التحليل العددي للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية، التحكم الأمثل