



FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité : Dynamique des fluides et énergétique

Thème :

**Oscillations d'un liquide pesant engendrées dans un bassin  
Parallélépipédique**

Présentée par  
Melle : Mellahi Betitra

Soutenu le :

Devant le Jury composé de :

NOM & PRENOM	DEPARTEMENT D'AFFILIATION	QUALITE
AMATOUSSE NAWEL	PROFESSEUR	PRESIDENT
DJEMA AMAR	MCB	EXAMINATEUR
MEZIANI BACHIR	PROFESSEUR	ENCADREUR

ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018

## Résumé

Dans ce travail nous avons étudié les phénomènes des seiches qui se manifestent de diverses manières dans des zones des bassins portuaires. L'essentiel de cette étude concerne l'élaboration d'une équation de dispersion et les conditions aux limites associées obtenus à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Résoudre le problème des seiches qui surviennent

Dans les bassins portuaires sous l'action de la houle qui arrive de large revient à résoudre l'ensemble de ces équations. Nous avons résolu analytiquement ce problème à l'aide d'une méthode de résolution basé sur la décomposition du problème en deux parties. Ces parties correspondent à des géométries simples.

Mots clés : seiche, onde de seiche, houle, batteur, équation de dispersion, interface, décomposition.

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mon cher père qui la source de mes éducations, et mon savoir.*

*À mes chers frères et sœurs.*

*À la mémoire de ma mère.*

*À mon cher adorable abdelhedi mes grands \_parents maternels et paternels, mes tantes, mes oncles maternels, mes cousins et mes cousines.*

*À mes chères amies Lamia, Nono, Zineb, Kahina, Baya, Lila Sihem,*

*Hanina, Hakima, Samia, Horiya, Rosa, Naima*

*À tous ceux qui ils m'aiment et que j'aime.*

## *Remerciements*

*Je remercie Allah Tout -puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terminer ce modeste travail.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à mon promoteur monsieur Meziani Bachir pour son aide précieux, sa confiance, ces encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'élaboration de ce modeste travail.*

*Que le président et les membres du jury trouvent ici mes vifs remerciements pour avoir accepté d'évaluer mon travail.*

*Mes remerciements vont également à tous qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	7
CHAPITRE-I-GENERALITES SUR LES ONDES DANS LES BASSIN «SEICHES ».....	8
I.1 – PROPRIETES ET CARACTERISTIQUES DES SEICHES.....	9
I-2- DEFINITION D’UNE SEICHE :	
I.3-LES SEICHES DANS LA GRANDE FAMILLE DES ONDES DE GRAVITE.....	11
I.3.1-DEFINITION.....	12
I.4- ORIGINE DES SEICHES.....	12
I.4.1- CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES.....	12
I.4.2- CIRCONSTANCES DANS LESQUELLES PEUVENT SE PRODUIRE DES SEICHES S’AMPLITUDE NOTABLE.....	13
I.4.3- CAUSES INITIALES DES SEICHES.....	15
I.5- PROPRIETES PHYSIQUES.....	17
I.5.1- CARACTERISATION DES ONDES DE SEICHES.....	17
I.5.2- LONGEVITE.....	17
I.6-CONCLUSION.....	17
CHAPITRE II-FORMULATION DU PROBLEME	
II.1-INTRODUCTION .....	19
II.2-EQUATIONS DU PROBLEME.....	19
II.2.1-EQUATIONS DE LA SURFACE LIBRE .....	20
II.2.2-LES CONDITIONS AUX LIMITES .....	20
II.3-CONCLUSION .....	21

## CHAPITRE III-METHODE DE RESOLUTION

III.1-INTRODUCTION.....	23
III.2-PRINCIPE DE LA METHODE :.....	23
III.3-THEORIE LINEAIRE .....	25
III.4-Développement en série de fonctions propres :.....	26
III.4.1-Développement dans le domaine $D_I$ (Bassin).....	26
III.4.2-Nature des Singularités :.....	27
III.4.3-Valeur des Coefficients $D_{1j mnp}$ .....	29
III.4.4-Développement dans le domaine $D_{II}$ .....	30
III.5- Forme de la solution $\Phi_{1j}(x, y, z)$ .....	31
III.6-Conclusion .....	32
CONCLUSION GENERALE.....	33
REFERENCES.....	34

## Introduction Générale

Les seiches ou mode de bassin posent parfois problème pour la sécurité de la navigation, et peuvent entraver le bon fonctionnement des portes, elles sont des ondes stationnaires dans un bassin fermé ou semi-fermé.

Les seiches se manifestent par des oscillations de la hauteur d'eau, dont l'amplitude et la période varient selon la configuration du bassin. Leur amplitude est très variable dans le temps.

Tous les lacs et ports ont des mouvements de seiche, dont les périodes sont caractéristiques de la forme des bassins (étendu et profondeur) [1]. Il est montré que la hauteur de la seiche pouvait atteindre 20 à 30 fois l'amplitude des ondes longues à l'entrée du port.

Les ondes de seiche font partie de la famille des ondes de gravité. Toutefois la seiche passe généralement inaperçue du fait de sa faible amplitude. Les grands ports ont des périodes de résonance de plusieurs dizaines de minutes, périodes aux quelles le forçage est généralement associé aux variations de pression atmosphérique.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est de mettre en évidence le phénomène des seiches et de décrire éventuellement les causes possibles de ces oscillations anormales du niveau de l'eau. Là on s'intéresse à l'étude de houle et cette étude doit traiter les trois éléments suivants :

L'étude menée dans le cadre de ce travail est organisée en trois chapitres, une introduction et une conclusion.

Le chapitre I, est consacré à différentes généralités sur les ondes dans les bassins (seiche). Le chapitre II, présente les équations relatives au problème étudié et précise les hypothèses simplificatrices de ces équations. Cela permet de déterminer l'équation de dispersion.

Dans le chapitre III, on expose la méthode de résolution basé sur la décomposition du problème en deux parties. Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale où sont mis en évidence les résultats obtenus.

*CHAPITRE I*  
*GENERALITES SUR LES ONDES*  
*DANS LES BASSIN « SEICHES »*



## **I.1 – PROPRIETES ET CARACTERISTIQUES DES SEICHES :**

Les seiches sont souvent observées dans les ports, les lacs, les baies et dans presque tout bassin de taille moyenne. Les seiches sont des événements ponctuels et relativement brefs dans le temps, de l'ordre de quelques heures à quelques jours.

Celles qui sont souvent observées dans les ports ou les baies peuvent provoquer des dégâts importants à cause des forces horizontales importantes qui sont appliquées sur les bateaux et des inondations qui affectent les structures côtières.

L'objectif de ce projet est de mettre en évidence le phénomène des seiches sur les côtes françaises méditerranéennes du Golfe du Lion et de décrire, éventuellement, les causes possibles de ces oscillations anormales du niveau de l'eau. On s'intéressera plus particulièrement au port de Toulon. Par ailleurs, cette étude reposera sur une triple démarche.

La première étape consiste à la recherche et l'utilisation de données adaptées aux objectifs de ce projet, à savoir des études antérieures, cartes bathymétriques, météorologie de la région, réseaux de bouées dans le Golfe du Lion, etc...

La seconde aura pour but de déterminer les modes propres du port de Toulon à partir de l'analyse fréquentielle de données marégraphiques.

Enfin, on essaiera de développer un modèle numérique simplifié permettant de calculer les caractéristiques des seiches dans un bassin fermé. Ces résultats seront comparés à une analyse fréquentielle.

## **I.2- DEFINITION D'UNE SEICHE :**

Les seiches sont un phénomène connu depuis bien longtemps, notamment pour le Lac de Genève. En effet les bateliers du Lac Lemman, désignaient par le mot « seiche » les oscillations lentes du niveau de l'eau. De remarquables seiches ont d'ailleurs été observées dans le lac dont la variation de niveau d'eau au début de la seiche dépassait 1.5m. En 1730, l'ingénieur suisse DUILLER souligna que certaines causes de ses phénomènes pouvaient être météorologiques.

En 1755, le tremblement de Lisbonne fut à l'origine d'impressionnantes seiches dans les lacs d'Ecosse. En effet, dans le Loch Lomond le niveau de l'eau s'éleva rapidement de 76

centimètres avant de redescendre, après 5 minutes, en dessous des plus bas niveaux observés en été. 5 minutes plus tard l'eau remonta jusqu'au niveau maximum et ainsi de suite. L'oscillation dura près de deux heures en décroissance d'amplitude.

Ce n'est qu'en 1869, grâce au docteur FOREL, que sont faites les premières observations systématiques sur le Lac Lemman. En effet celui-ci applique, sur le Lac, et ceci moyennant certaines approximations, la formule de MERIAN, établie en 1828, pour les ondes stationnaires en profondeur constante :

Avec :

T la période d'oscillation, h la profondeur moyenne du lac, l sa longueur.

Cette formule fut par la suite affinée et exploitée par CHRYSTAL. En effet en 1907, celui-ci résolvait mathématiquement de nombreux cas de mouvements des seiches contenus dans des bassins à profondeur variable, de formes géométriques simples.

Enfin, c'est en 1915 que STERNECK utilisa les premières méthodes de calcul numériques dans les études des seiches.

Ainsi par analogie on a désigné par « seiches » certaines oscillations lentes du niveau de la mer dans les ports ou les baies. Généralement d'autres phénomènes tels que la marée ou la houle viennent masquer ces

« seiches marines » et celles-ci n'ont été l'objet d'observations systématiques que bien après les seiches observées dans les lacs. Toutefois, on retrouve dans le récit de faits très antérieurs des observations de seiche en mer.

En 1818, AIRY étudie un balancement de 21 minutes à Malte. Puis en 1908, l'école japonaise de HONDA applique aux baies les théories inventées par WEIERSTRASS en 1858 et mises au point par Lord RAYLEIGH en 1880, basées sur les principes élémentaires de la mécanique. Elle réalise ainsi les premiers modèles réduits permettant la reconstitution de seiches marines en étudiant systématiquement toutes les baies du Japon, la baie de San Francisco, etc.

Les études des seiches dans les ports sont encore plus récentes. En effet, c'est seulement en 1864 que Thomas STEVENSON fait une étude sur la rupture des amarres causée par les seiches.

On peut également citer les études approfondies faites par le grand spécialiste des seiches WILSON, sur le port de Table Bay et l'examen du mouvement d'un navire amarre soumis à une seiche.

### I.3-LES SEICHES DANS LA GRANDE FAMILLE DES ONDES DE GRAVITE :

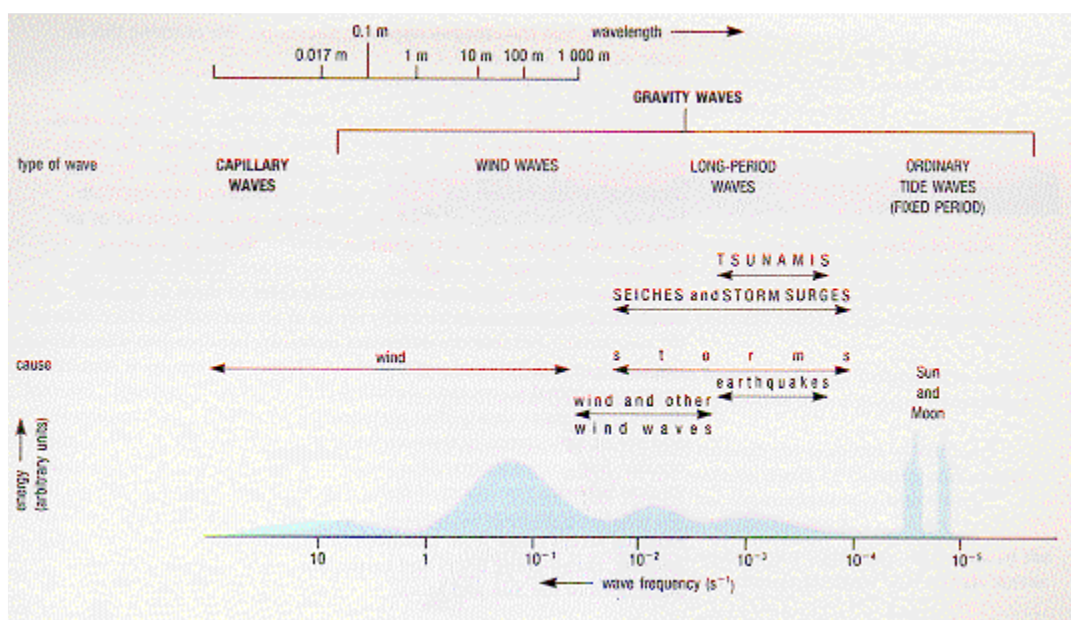
Comme nous venons de le voir il existe divers types de seiches. Nous allons donc voir quelles caractéristiques communes peuvent nous permettre de mettre en évidence leur parente. Tout d'abord nous pouvons remarquer le caractère oscillatoire de l'eau. En effet le niveau de l'eau monte et baisse de façon alternative ou alors ce sont les courants qui vont dans un sens puis dans l'autre. Mais cette variation remarquable du niveau de l'eau n'est pas une caractéristique suffisante du phénomène de seiche car on le retrouve également dans d'autres phénomènes tels que les vagues ou encore les marées.

Ainsi le critère qui nous permet de distinguer les seiches à travers tous ces phénomènes est la fréquence.

La figure ci-dessus représente l'énergie oscillatoire de l'océan en fonction des différents types d'ondes qui le parcourent :

Ainsi on retrouve :

- Les ondes de capillarite, petites rides générées par le vent, de période inférieure à 1 seconde, se dissipant rapidement par frottement interne à la masse d'eau,
- Les ondes de gravite, regroupant :
  - la houle et la mer du vent, générant une énergie importante. Leur principale source d'amortissement est la pesanteur;
  - les ondes longues, de période supérieure à 30 secondes, générées principalement par des variations à grande échelle et sensibles à la force de Coriolis.



La figure : représente les seiches dans la grande famille des ondes de gravité

### **I.3.1-DEFINITION :**

Sur la figure ci-dessus, on observe deux groupes dont l'amplitude est normalement importante : les vagues de tempête, dont la période est comprise entre quelques secondes et une demi-minute, et les ondes de marée dont la période est de l'ordre de la demi-journée. On place alors, par définition, les seiches entre ces deux types d'onde. Il faudra toutefois aussi faire une distinction entre les seiches à caractère stationnaire, telles que celles que l'on a retrouvées dans les lacs, les ports et les baies fermées, que l'on appellera « seiches » et les oscillations ayant un caractère d'onde progressive mais dont les fréquences sont du même ordre de grandeur, que l'on appellera « ondes de seiches ».

Plus généralement nous retiendrons comme définition :

*Les seiches et ondes de seiches sont des mouvements oscillatoires des étendues d'eau rentrant dans la catégorie générale des ondes de gravité et dont la période est comprise entre celle des vagues de tempête les plus longues et celles des marées semi-diurnes. Les ondes de seiches sont la forme progressive de ces oscillations, et les seiches la forme stationnaire se produisant dans des étendues d'eau plus ou moins fermées.*

Nous considérons que la limite inférieure des périodes des ondulations considérées comme des seiches est, en mer, d'environ 30 secondes et beaucoup plus faible dans les lacs.

Nous pouvons aussi considérer que l'amplitude des seiches est, en général, très faible et n'atteint des valeurs un peu importantes que dans des cas exceptionnels (tremblement de terre, explosion atomique sous-marine) ou du fait de la disposition particulière d'une localité (phénomène de résonance).

### **I.4- ORIGINE DES SEICHES :**

#### **I.4.1- CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES :**

Les ondes de seiches qui sont généralement d'amplitude très faible, sont souvent marquées par des phénomènes de plus courtes périodes, en particulier par des vagues dues au vent. Par conséquent, les appareils conçus pour mesurer ces dernières ne peuvent, en général, permettre de déceler la présence des seiches et il est nécessaire d'utiliser des instruments spéciaux pour les mesurer. Cependant, chaque fois que des mesures de ce genre ont été tentées avec des instruments suffisamment sensibles, elles ont confirmé que la zone du spectre comprise entre les houles de tempête et les ondes de marées était généralement occupée par des oscillations de faible amplitude. On peut donc légitimement se demander

pourquoi l'amplitude des seiches est en général si faible par rapport à celles des houles de tempêtes ou de marées. On doit donc rechercher les éléments qui jouent en faveur de l'accroissement de ces deux derniers types d'onde et qui ne jouent pas pour les ondes de seiches.

#### **I.4.2- CIRCONSTANCES DANS LESQUELLES PEUVENT SE PRODUIRE DES SEICHES S'AMPLITUDE NOTABLE :**

Les seiches ne peuvent bénéficier du vent et des forces atmosphériques pour avoir une amplitude notable. Cependant, on a pu observer des mouvements de seiche importante et même dangereux dans certains endroits ou à certaines époques.

Les causes de ces comportements exceptionnels peuvent se diviser en deux catégories :

- Les causes qui forment des ondes de seiches d'amplitude importante dès l'origine
- Les causes provoquant, à partir d'ondes d'amplitude initialement très faible, des mouvements d'amplitude importante par suite de divers phénomènes de renforcement.

Nous allons donc étudier successivement ces deux types de causes à l'origine de seiches.

- des seiches de grande amplitude à l'origine, ne pourront être formées que par des phénomènes d'amplitude exceptionnelle ou exceptionnellement adaptés à la formation de ce genre d'onde. Ce type d'événement, apparaissant comme de vrai cataclysme, ont pour exemples typiques les tremblements de terre ou les éruptions volcaniques sous-marines qui peuvent mettre en jeu des puissances énormes.

A l'échelle des lacs ou des rades relativement limitées, des phénomènes moins grandioses peuvent cependant prendre une importance suffisante pour créer des seiches dangereuses. Par exemple des éboulements de terrain dans un lac ou des explosions de bombes atomiques dans des rades.

A une échelle encore plus réduite, telle que pour des bassins ou des darses, des effets importants peuvent être produits par des coups de vent violents, ou encore par des adductions d'eau brutales etc.

Ces phénomènes de grande puissance pourront produire des seiches qui seront sensibles dans des régions très étendues.

Quelques exemples impressionnants:

- Le tremblement de terre de Lisbonne en 1755 qui créa une onde longue majoritaire de période 15 minutes

-L'éruption du Krakatoa en 1883 qui créa des ondes longues très diverses. On observa dans la baie de San Francisco des ondes longues de période 24,34 et 47 minutes. A Honolulu, on observa principalement des ondes longues de période 30 minutes tandis qu'à Cap Town on observa des ondes de période 62 et 10 minutes.

- il peut aussi y avoir des circonstances qui peuvent provoquer le renforcement d'ondes de seiches initialement d'amplitude très faible.

Parmi ces phénomènes, le plus connu est celui de résonance. En effet il est connu que lorsqu'on soumet un système ayant une fréquence de résonance à une excitation de fréquence voisine, il peut y avoir une réponse d'amplitude particulièrement grande. Il y a donc de toute évidence, un mécanisme susceptible de multiplier par un facteur important l'effet des ondes de seiche.

On sait également que lorsque le coefficient de majoration du à la résonance est très élevé, les mouvements sont pratiquement identiques à ceux résultant des modes d'oscillation libre du système considéré. Cette dernière remarque a pour conséquence que l'étude des seiches se ramènera souvent à celle des modes de résonance propre d'étendues d'eau, au moins en ce qui concerne sa partie descriptive.

On peut aussi remarquer que les phénomènes d'amplification par résonance pourront jouer un rôle d'autant plus net que l'excitation aura elle-même une fréquence plus caractérisée, c'est-à-dire que son énergie se concentrera dans une zone plus étroite du spectre. Ainsi, une source d'ondes de seiches même particulièrement faible peut devenir relativement plus dangereuse si elle est approximativement périodique et si cette période est susceptible de coïncider avec une des périodes propres d'un port ou d'un lac.

Le phénomène de résonance n'est pas le seul qui soit susceptible d'amplifier l'effet des ondes de seiche. Il est également important de noter les causes d'amplification suivantes :

- La réflexion des ondes venant du large sur les côtes convenablement disposées peut conduire à une concentration analogue à celle qui se produit au foyer d'un miroir concave.

En fait un bon nombre de ports sujets à des seiches importantes se trouvent situés au voisinage de sections de côtes concaves qui pourraient jouer un tel rôle à leur égard.

- La réfraction auxquelles sont soumises toutes les ondes liquides circulant dans des profondeurs variables. Les ondes longues provenant de certaines sources de perturbation peuvent, en effet, se trouver concentrées sur un point de la côte par un phénomène analogue à celui concentrant les rayons lumineux au foyer d'une lentille convergente.

### **I.4.3- CAUSES INITIALES DES SEICHES :**

Des ondes de seiches de très faible amplitude sont créées par n'importe quelle perturbation de la surface de l'eau. Par conséquent, il est inutile de tenter une énumération, qui serait longue et certainement incomplète, de toutes les causes imaginables. C'est pourquoi nous allons juste donner une énumération restreinte des causes de seiche que l'expérience ou le raisonnement ont montrées comme étant particulièrement importantes. Ces principales causes seraient : les variations de pression atmosphérique, les vents et leurs variations d'intensité ou de direction, les

Variations éventuelles d'intensité de précipitations, les perturbations sismiques proches ou lointaines, provoquant ou non un tsunami, une adduction d'eau brutale ou une immersion d'un grand volume (éboulement, chute d'un iceberg...), les harmoniques supérieures des ondes de marées, l'irrégularité de la houle, les instabilités de certains écoulements marins et côtiers.

#### **a-Causes quasi périodiques**

Les phénomènes de résonance risquent d'être particulièrement importants pour les excitations ayant une périodicité marquée.

Notons tout d'abord les harmoniques des ondes de marée qui sont rigoureusement périodiques.

Il existe ensuite certains phénomènes d'instabilité de courants tels que les tourbillons alternes qui, non seulement peuvent être sensiblement périodiques, mais peuvent aussi adapter leurs périodes à celles d'un système résonnant placé au voisinage. Cette forme d'excitation ne saurait être surprenante étant donné qu'il suffit d'une énergie excessivement faible pour provoquer, à la résonance, un mouvement de seiche très violent.

On peut envisager cette excitation sous diverses formes :

-Des tourbillons alternes de périodes excessivement grandes sont provoqués par le courant de marées contournant une île au voisinage d'un port.

-La veine fluide passe alternativement de part et d'autre du musoir de la jetée limitant le port.

#### **b-Causes particulières fréquentes**

Les causes initiales ayant une périodicité moins marquée peuvent néanmoins être importantes si elles se manifestent relativement souvent. Dans cette catégorie il importe



essentiellement de mentionner les variations de pression atmosphérique, du vent et de la houle.

#### c-Les surf-beats

Le déferlement de la houle sur une plage produit ce que l'on appelle les surfs-beats. Ce sont des ondes longues qui ont la même période que les groupes de lames arrivant au rivage. En effet, chaque vague en déferlant envoie vers la rive une quantité d'eau autant plus importante que son amplitude est forte. En revenant vers la mer, ces paquets d'eau forment un débit saccadé. Ce débit est la somme d'un certain débit moyen et d'oscillations de diverses périodes, en particulier la période de la houle et aussi celle des groupes de lames. Cette dernière période se manifeste par suite de la non linéarité du phénomène de déferlement. Les ondes à longues périodes ainsi engendrées repartent vers le large, une partie pouvant être réfléchiée vers la cote à la lisière du plateau continental. Il y a de fortes chances pour que ces surfs-beats soient responsables des seiches qui se produisent dans les environs, lorsqu'on a pu remarquer, comme par exemple sur la côte nord d'Espagne, une corrélation entre les tempêtes locales et les seiches.

#### d-Les groupements de vagues

Des ondes de seiches peuvent aussi apparaître lorsqu'il y a des groupes de vagues fortes (cinq à dix vagues) et des groupes de petites vagues en alternance. Le creux de l'onde de seiche correspond au groupe de grosses vagues, la crête correspond au groupe de petites vagues. Ces ondes de seiche se propagent avec la célérité de groupe des ondes courtes auxquelles elles sont liées. Elles se trouvent libérées près de la cote lorsque les vagues courtes déferlent. Elles se propagent alors avec leur célérité propre, bien supérieure à celle des ondes courtes.

#### e-Les variations de pression atmosphérique et du vent

En ce qui concerne les variations de la pression atmosphérique et du vent, il est très difficile de faire des évaluations d'ordre de grandeur faute d'une connaissance suffisante des perturbations atmosphériques usuelles, il faudrait en effet avoir des enregistrements quasi continus des perturbations atmosphériques et ceci en de très nombreux points pour que l'on puisse en tirer une relation valable sur l'importance de cette source d'ondes de seiches.



## **I.5- PROPRIETES PHYSIQUES :**

### **I.5.1- CARACTERISATION DES ONDES DE SEICHES :**

On peut aisément faire l'analogie entre les ondes de seiches et les vagues de tempêtes qui font toutes deux parties de la famille des ondes de gravité.

Ces deux types d'onde ne diffèrent que par l'ordre de grandeur de leurs paramètres.

Les différents paramètres de ces ondes sont :

- la période
- la longueur d'onde
- la cambrure
- l'amplitude

Pour les seiches, il existe des grandeurs caractéristiques:

- La période  $T > 30s$ , comme  $L = M.V$  on en déduit que les seiches ont des longueurs d'onde beaucoup plus importantes que la houle.

- Leur cambrure est de l'ordre de  $10^{-6}$  au large.

- Leurs amplitudes sont faibles car elles ne bénéficient pas d'effets importants comme le vent. Cela les rendant plus difficiles à détecter puisqu'elles sont dissimulées parmi les houles et les marées

### **I.5.2- LONGEVITE :**

Les seiches ont une longévité importante. En effet, ce sont des ondes longues, donc très peu cambrées et qui ne déferlent pas. Elles sont réfléchies avec très peu de dissipation et modifiées par réfraction et diffraction.

Plus leur période est grande moins l'onde est dissipée.

Par théorie, on sait également que plus les ondes sont longues plus leur longévité est grande.

Les ondes de seiches une fois créées sont particulièrement durables et peuvent se réfléchir sur les côtes sans perte notable d'énergie.

## **I.6-CONCLUSION :**

Ce chapitre porte sur les généralités des seiches portuaires, là où nous avons donné leurs définitions et les types des seiches ainsi que leurs caractéristiques.

*CHAPITRE II*  
*FORMULATION DU PROBLEME*

## II.1-INTRODUCTION :

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des seiches qui apparaissent dans des bassins portuaires sous l'action de la houle qui arrive du large. La théorie linéaire permet de rendre compte de l'existence des seiches de période identique à celle des ondes excitatrices. Des travaux théoriques ont été réalisés à partir d'hypothèses restrictives qui seront précisées. Dans le but de présenter une analyse plus rigoureuse du phénomène physique et obtenir des formules explicites. Nous allons étudier uniquement le cas d'un bassin rectangulaire, de profondeur constante, associé à un canal à houle de même profondeur, de section constante et débouchant dans le bassin normalement à une paroi latérale.

On formule le problème en considérant comme connue à priori le mouvement de la houle schématisée par un batteur dont le mouvement admet un spectre de fréquences discontinu. Le fluide est considéré incompressible et le mouvement est irrotationnel.

## II.2-EQUATIONS DU PROBLEME :

On considère un système d'axes de référence constitué par le trièdre trirectangle direct  $Oxyz$ . L'axe  $oz$  est orienté dans la direction verticale ascendante.

$Ox$  Est contenu dans le plan d'eau au repos et le plan de la paroi où débouche le canal.

Le fond du bassin et du canal est constant et est donnée par :  $z = -h$ .

A partir de la condition sur l'incompressibilité du liquide, la conservation de la masse nous donne l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où  $\Phi(x, y, z, t)$  est le potentiel des vitesses tel que :  $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  et  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  qui sont

les composante du vecteur vitesse dans les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ .

La pression  $p$  est déduite, à une fonction arbitraire  $f(t)$  du temps près, de l'équation de BERNOULLI :

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.2})$$

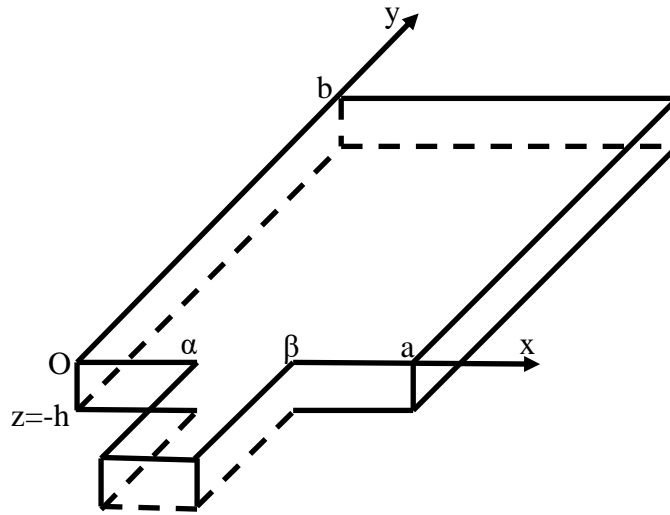
## II.2.1-EQUATIONS DE LA SURFACE LIBRE :

On suppose que la pression soit identiquement nulle à l'interface  $z = z_l(x, y, t)$ , on obtient :

$$gz_l + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad z = z_l(x, y, t) \quad (\text{II.3})$$

La forme de la surface libre  $z = z_l(x, y, t)$  se détermine par l'équation (II.3) et en exprimant que cette surface libre est une surface fluide, ce qui donne :

$$\frac{\partial z_l}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial z_l}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial z_l}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = z_l(x, y, t) \quad (\text{II.4})$$



## II.2.2-LES CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions aux limites sont pour les parois fixes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0 \quad \text{pour } 0 \leq x < \alpha, \quad \beta < x \leq a; \quad y = 0; \quad -h \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0 \quad \text{pour } 0 \leq x < \alpha, \quad \beta < x \leq a; \quad y = b; \quad -h \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = 0, a, \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = \alpha, \beta, \quad -L \leq y \leq 0; \quad -h \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Au niveau du batteur, qui est toujours considéré comme une surface fluide, on a :

$$\frac{\partial y_b}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial y_b}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial y_b}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad y + L = y_b(x, z, t) \quad (\text{II.6})$$

On suppose un mouvement du batteur périodique où résultant de la superposition de plusieurs mouvements périodiques. Il est représenté sous la forme :

$$y_b(x, z, t) = \sum_{i=1}^N (A_{1i}(x, z)\cos\omega_i t + B_{1i}(x, z)\sin\omega_i t) \quad (\text{II.7})$$

Qui s'écrit aussi sous la forme :

$$y_b(x, z, t) = \sum_{i=1}^N C_{1i}(x, z)\cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (\text{II.8})$$

Où  $T_i = 2\pi/\omega_i$  est la période des harmoniques de ces mouvements périodiques superposés.

L'inconnue  $z = z_l(x, y, t)$  peut être éliminée des équations (II.3) et (II.4), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + 2 \sum_n \frac{\partial \Phi}{\partial n} * \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} + \sum_n \sum_q \frac{\partial \Phi}{\partial n} * \frac{\partial \Phi}{\partial q} * \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial q} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Avec :  $n = x, y, z$  ;  $q = x, y, z$ ,  $z = z_l(x, y, t)$

Cette équation est l'équation de dispersion de notre système.

### II.3-CONCLUSION :

Nous avons posé le problème des seiches qui surviennent dans des bassins portuaires sous l'action de la houle qui arrive du large. Nous avons schématisé la houle sous forme d'un batteur et on a spécifié le mouvement de cette houle.

Dans le chapitre III, on expose la méthode de résolution du problème basé sur la décomposition du problème en deux parties. Ces parties correspondent à des géométries simples.

*CHAPITRE III*  
*METHODE DE RESOLUTION*

### III.1-INTRODUCTION :

Après avoir exposé le problème des seiches portuaires dans le deuxième chapitre, nous allons développer, dans ce chapitre, une méthode de résolution du problème.

### III.2-PRINCIPE DE LA METHODE :

La méthode de résolution basée sur le calcul approché dont le principe est le suivant :

Le domaine global est divisé en deux parties de forme géométrique simple. Il s'agit de deux parallélépipèdes rectangles  $D_I$  (bassin du port) et  $D_{II}$  (canal) qui sont définis comme :

$$D_I = \{0 \leq x \leq a; \quad 0 < y \leq b ; \quad -h \leq z \leq 0\}$$

Et

$$D_{II} = \{\alpha \leq x \leq \beta; \quad -L < y \leq 0 ; \quad -h \leq z \leq 0\}$$

Sur la frontière entre les domaines  $D_I$  et  $D_{II}$ , on définit une fonction inconnue auxiliaire  $Y(x, z, t)$  telle que :

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y} = G(x, z, t) \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta, \quad y = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.1)$$

Dans le cas où la fonction  $G(x, z, t)$  est donnée, les deux fonctions  $\Phi_I(x, y, z, t)$  et  $\Phi_{II}(x, y, z, t)$  seront définies dans les deux domaines  $D_I$  et  $D_{II}$  et seront solutions du problème posé au chapitre précédent avec les conditions aux limites associées. Dans ce cas, on considère  $\Phi_I(x, y, z, t)$  et  $\Phi_{II}(x, y, z, t)$  comme des prolongements analytiques l'un de l'autre, à travers une partie de la frontière commune aux deux domaines.

La fonction  $G(x, z, t)$  sera déterminée complètement en écrivant :

$$\Phi_I(x, y, z, t) = \Phi_{II}(x, y, z, t) \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta, \quad y = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.2)$$

#### PROPRIETES DE LA FONCTION $\Phi(x, y, z, t)$

En première approximation,  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=0}$  représente la dénivellation de la surface libre. Dans les applications pratiques, on se borne à la classe des fonctions  $\Phi(x, y, z, t)$  pour lesquelles cette dénivellation est finie. Il en résulte que les fonctions  $\Phi(x, y, z, t)$  sont bornées et continues pour tout  $t$ , dans l'ensemble du domaine occupé par le liquide en mouvement, y compris ses frontières.

La fonction  $\Phi(x, y, z, t)$  de  $x, y, z$  analytique et régulière en tout point à l'intérieur du domaine. Il en est de même pour  $G(x, z, t)$  sur l'ouvert  $F_0(\alpha \leq x \leq \beta, y = 0, -h \leq z \leq 0)$ .  $\Phi(x, y, z, t)$  Ne peut de ce fait présenter de singularité qu'à la frontière du domaine. Or, cette frontière est prolongeable analytiquement à travers toute portion plane de frontière où elle est continue et où elle admet une dérivée normale nulle. On montre (Référence APTE) que  $\Phi(x, y, z, t)$  n'est pas une fonction uniforme autour des arêtes verticales communes aux parois du canal et du bassin, mais qu'elle est analytique et régulière suivant les autres arêtes du parallélépipède rectangle  $D_I$ . La nature des singularités de  $\Phi(x, y, z, t)$  et  $G(x, z, t)$  sont précisées pour un type particulier de solutions.

Le problème est traité sous réserve que le potentiel  $\Phi(x, y, z, t)$  admette des dérivées partielles du premier ordre en  $x, y, z$  de carrée intégrable. En particulier,  $G(x, z, t)$  sera supposée de carrée intégrable sur  $F_0(\alpha \leq x \leq \beta, y = 0, -h \leq z \leq 0)$  qui correspond, sur le plan physique, à une classe de mouvements qui possèdent une énergie finie.

La difficulté du problème provient, d'une part, de la non linéarité des équations régissant le problème et, d'autre part, du fait que la frontière du domaine qui est la surface libre est une inconnue.

La méthode des petits paramètres de POINCARÉ, exploitée à l'aide des variables au repos dans la première partie, est également applicable à l'aide des variables d'Euler. L'hypothèse physique sur laquelle elle repose est celle-ci : Le mouvement du batteur à houle, et en conséquence la dénivellation de la surface libre, est supposé être de très faible amplitude, comparativement à la longueur d'onde des ondes de gravité étudiées. Corrélativement, le champ des vitesses est supposé faible vis-à-vis de la célérité de ces ondes. En termes mathématique, les fonctions  $\Phi, u, v, w, z_L$  et  $P = p + \rho gz$  des variables  $x, y, z, t$  ainsi que la donnée  $y_b(x, z, t)$  seront supposés être des fonctions analytiques de paramètre  $W_{jmp}$  qui sera défini ultérieurement, régulière au voisinage de :

$$W_{jmp} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, j_n \quad (3.3)$$

Et nulles pour cette valeur de l'ensemble des paramètres



### III.3-THEORIE LINEAIRE :

Les équations du problème sont données au premier ordre d'approximation par :

$$\frac{p_1}{\rho} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$z_{,11} = -\frac{1}{g} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial y_b}{\partial t} \quad y = L \quad (3.7)$$

La forme du second membre de la condition (3.4) au droit du batteur ajoutée à la linéarité des équations précédentes en fonction de  $\Phi_1(x, y, z, t)$  permet de chercher une solution du type :

$$\Phi_1(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{2j_n} \Phi_{1j}(x, y, z) \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad (3.8)$$

Nous allons expliciter la solution  $\Phi_{1j}(x, y, z)$  dans les domaines I et II. C'est-à-dire les solutions  $\Phi_{Ij}(x, y, z)$  et  $\Phi_{IIj}(x, y, z)$  respectivement. On définit les fonctions auxiliaires :

$$G_1(x, z, t) = \sum_{j=1}^{2j_n} G_{1j}(x, z) \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad (3.9)$$

$\Phi_{Ij}(x, y, z)$  et  $\Phi_{IIj}(x, y, z)$  apparaissent comme solutions d'un problème mixte posé relativement à l'équation de LAPLACE, dans des domaines parallélépipédiques.

On cherche le potentiel des vitesses inconnu  $\Phi_{1j}(x, y, z)$  sous la forme particulière classique en canal indéfini de profondeur constante :

$$\Phi_{1j}(x, y, z) = F_{j0} \frac{\text{Cosh}(k_j(z+h))}{\text{Cosh}(k_j h)} \quad (3.10)$$

Le nombre d'onde  $k_j$  est solution de l'équation de dispersion

$$\omega_j^2 = g k_j \tanh(k_j h) \quad (3.11)$$

Le problème mixte posé dans les domaines parallélépipédiques  $D_I$  et  $D_{II}$  est ramené au problème de type Neumann posé relativement à l'équation de la membrane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F_{j0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{j0}}{\partial y^2} + k_j^2 F_{j0} = 0 \\ \frac{dF_{j0}}{dn} = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } y = -L \\ 0 & \text{aux parois et sur le fond} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Où  $f_0(x)$  est définie par :

$$\omega_j C_{1j} = f_0(x) \frac{\cosh(k_j(z+h))}{\cosh(k_j h)} \quad (3.13)$$

Cette condition signifie que le batteur doit avoir une forme qui va épouser le profil des déplacements des particules sous l'effet de la houle en canal de longueur indéfinie. Ce qui n'est pas réalisable pour un générateur de houle disposant d'une partie rigide.

### III.4-Développement en série de fonctions propres :

#### III.4.1-Développement dans le domaine $D_I$ (Bassin) :

On considère les suites infinies des valeurs propres  $K_{1j mnp}$  et des fonctions propres  $\Psi_{1j mnp}(m, n, p = 0, 1, 2, \dots)$  de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{1j}}{\partial z^2} + K_{1j} \Psi_{1j} = 0 \quad (3.14)$$

Dans le domaine  $D_I$  avec les conditions aux frontières

$$\frac{d\Psi_{1j}}{dn} = 0 \quad \text{Le long des parois et sur le fond} \quad (3.15)$$

$$g \frac{\partial \Psi_{1j}}{\partial z} - \omega_j^2 \Psi_{1j} = 0 \quad \text{à la surface libre } z = 0 \quad (3.16)$$

On obtient alors :

$$K_{1j mnp} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + k_{jp}^2 ; p \geq 0 \quad (3.17)$$

$$\Psi_{1j mnp} = C_{j mnp} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b} \cos k_{jp}(z+h); p \geq 0 \quad (3.18)$$

Avec

$$C_{j mnp}^2 = \frac{l_m l_n}{ab K_{jp}} ; p \geq 0, l_i = \begin{cases} 2 & \text{si } i \geq 1 \\ 1 & \text{si } i = 0 \end{cases}, i = m, n \quad (3.19)$$

$$K_{jp} = \frac{2k_{jp} h + \sin 2k_{jp} h}{4k_{jp}} \quad (3.20)$$

Les nombres d'ondes  $k_{jp}; p \geq 0$  sont les racines réelles positives de l'équation :

$$\omega_j^2 = -gk_{jp} \tan(k_{jp}h) \quad (3.21)$$

Cette équation admet des racines négatives  $-k_{jp}$  également et ces racines correspondent aux mêmes fonctions propres  $\Psi_{1jmn p}$  que les racines positives.

On désigne par  $k_{j0} = iK_j$  ( $i = \sqrt{-1}, K_j \geq 0$ ) la racine imaginaire pure de l'équation précédente. Cette convention nous évitera d'expliciter en fonction de  $K_j$  l'expression de  $\Psi_{1jmn p}$  pour  $p = 0$

La suite  $\Psi_{1jmn p} = C_{jmn p} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b} \cos k_{jp}(z+h)$  constituée des produits de fonctions appartenant aux suites complètes est elle-même complète dans le domaine  $D_I$ . Il résulte que toute fonction assez régulière dans  $D_I$ , en particulier la solution  $\Phi_{1j}$  si elle remplit les conditions admet un développement du type :

$$\Phi_{1j}(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} D_{1jmn p} \Psi_{1jmn p} \quad (3.22)$$

Dont les coefficients  $D_{1jmn p}$  sont donnés par :

$$D_{1jmn p} = \int \int \int_{D_p} \Psi_{1jmn p} \Phi_{p1j}(x, y, z) dV \quad (3.23)$$

$dV$  est l'élément de volume de  $D_p$

Sachant que les dérivées partielles premières de  $\Phi_{1j}$  sont de carré intégrable sur  $F_0$ , on peut utiliser l'identité de Green aux fonctions  $\Phi_{1j}$  et  $\Psi_{1jmn p}$  dans le domaine  $D_I$ .

$$\int \int \int_{D_p} (\Psi_{1jmn p} \Delta \Phi_{p1j} - \Phi_{p1j} \Delta \Psi_{1jmn p}) dV = \int \int_{S_p} \left( \Psi_{1jmn p} \frac{d\Phi_{p1j}}{dn} - \Phi_{p1j} \frac{d\Psi_{1jmn p}}{dn} \right) dV \quad (3.24)$$

Qui s'écrit :

$$K_{1jmn p} D_{1jmn p} = - \int_{-h}^0 dz \int_{\alpha}^{\beta} G_{1j}(x, z) \Psi_{1jmn p}(x, y, z) dx \quad \text{pour } y = 0 \quad (3.25)$$

### III.4.2-Nature des Singularités :

On précisera, dans la suite, la nature des singularités de  $\Phi_{1j}(x, y, z)$  au voisinage des arêtes verticales communes au bassin et au canal. Il s'agit des frontières  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $y = 0$  et  $-h \leq z \leq 0$ .

La fonction  $G_{1j}(x, z)$  est de carrée intégrable, on peut l'écrire sous la forme

$$G_{1j}(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\pi \frac{x}{a} \sum_{p=0}^{\infty} U_{jmp} \cos k_{jp}(z+h) \quad (3.26)$$

Avec

$$U_{jmp} = \frac{\int \int_{V_0} G_{1j}(x, z) \cos m\pi \frac{x}{a} \cos k_{jp}(z+h) dx dz}{\int \int_{V_0} \cos^2 m\pi \frac{x}{a} \cos^2 k_{jp}(z+h) dx dz} \quad (3.27)$$

Sachant que la fonction  $G_{1j}(x, z)$  est de carrée intégrable, on a

$$\sum U_{jmp}^2 < \infty \quad (3.28)$$

L'allure asymptotique des  $U_{jmp}$  est donné par

$$U_{jmp} \approx \frac{M}{m^\chi p^\sigma} \text{ avec } \chi > \frac{1}{2} \text{ et } \sigma > \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

D'où

$$|D_{1j m n p}| \leq \frac{M}{m^\chi p^\sigma [m^2 + n^2 + (p-1)^2]} \quad (3.30)$$

Si on exprime  $\Phi_{1j}(x, y, z)$  sous la forme :

$$\Phi_{1j}(x, y, z) = \sum_{p=0}^{\infty} F_{jp}(x, y) \cos k_{jp}(z+h) \quad (3.31)$$

Où les fonctions  $F_{jp}(x, y)$  sont solution de :

$$\frac{\partial^2 F_{jp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{jp}}{\partial y^2} - k_{jp}^2 F_{jp} = 0 ; p \geq 0 \quad (3.32)$$

Qui vérifie à la frontière du domaine plan ( $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$ ) les mêmes conditions que  $\Phi_{1j}(x, y, z)$ . Il en résulte qu'au voisinage de la ligne singulière

$$(x = \alpha; y = 0; -h \leq z \leq 0)$$

$F_{jp}(x, y)$  admet une solution de la forme

$$F_{jp}(\rho_s, \theta) = F_{jp}(0,0) + \rho_s^{2/3} \overline{F_{jp}}(\rho_s, \theta) \text{ avec } \begin{cases} x - \alpha = \rho_s \cos \theta \\ y = \rho_s \sin \theta \end{cases} \quad (3.33)$$

Où  $F_{jp}(\rho_s, \theta)$  est une fonction continue au point  $x = \alpha; y = 0; -h \leq z \leq 0$

Il s'ensuit que

$$\Phi_{1j}(\rho_s, \theta, z) = \Phi_{1j}(0,0, z) + \rho_s^{2/3} \overline{\Phi_{1j}}(\rho_s, \theta, z) \quad (3.34)$$

$\overline{\Phi}_{1j}(\rho_s, \theta, z)$  étant une fonction continue et dérivable au point  $x = \alpha; y = 0; -h \leq z \leq 0$ .

On voit que :

$$\frac{\Phi_{1j}(\rho_s, \theta, z) - \Phi_{1j}(0, 0, z)}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_s^{1/3}} \overline{\Phi}_{1j}(\rho_s, \theta, z) \quad (3.35)$$

Au voisinage de  $(x = \alpha, \beta; y = 0; -h \leq z \leq 0)$   $\Phi_{1j}(x, y, z)$  et ses dérivées premières en  $x$  et  $y$  se comportent respectivement comme  $\rho_s^{2/3}$  et  $\rho_s^{-1/3}$

### III.4.3-Valeur des Coefficients $D_{1j m p}$

On peut, à présent, donner les valeurs de  $D_{1j m p}$  en fonction de  $U_{j m p}$ . La relation (3.25) donne :

$$\frac{b}{l_n} C_{j m p} D_{1j m p} \left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \omega_{j p}^2 \right] = -U_{j m p}; \quad p \geq 0 \quad (3.36)$$

Les mouvements non résonants sont ceux pour lesquels les  $\Omega_j$  a une valeur telle qu'il n'existe aucun couple de nombre entiers  $(m_0, n_0)$  qui vérifient la relation :

$$\Omega_j^2 = \left( \frac{m_0^2}{a^2} + \frac{n_0^2}{b^2} \right) \pi^2 \quad (3.37)$$

La relation (3.21) s'écrit alors

$$\Phi_{11j}(x, y, z) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{l_n U_{j m p}}{b \left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \omega_{j p}^2 \right]} \cos \left( m \pi \frac{x}{a} \right) \cos \left( n \pi \frac{y}{b} \right) \cos \{ \omega_{j p} (z + h) \} \quad (3.38)$$

Les mouvements résonants sont obtenus lorsqu'il existe un couple  $(m_0, n_0)$  de nombres entiers satisfaisant à la relation (3.37). L'équation (3.36) montre que la solution ne peut être acceptable du point de vue physique que si  $U_{j m 0}$  est nul.

On appelle période résonante pour le port celle d'une seiche qui se produirait dans un bassin rectangulaire, supposé fermé. Il est clair que cette période est différente si le bassin portuaire est prolongé par une portion arbitraire du canal. Ainsi, le domaine auquel se rapporte la définition de la résonance est défini arbitrairement.

Les périodes résonantes ne sont connues que pour des seiches qui correspondent à des domaines simples, tel que les parallélépipèdes.

Le domaine est justement partagé en deux domaines parallélépipèdes afin d'expliciter les expressions de toutes les caractéristiques des seiches propres. Il est clair qu'on s'attendait

à des difficultés analytiques, en écrivant la condition de raccordement dans les potentiels de vitesse, pour les périodes propres des domaines partiels. Les cas résonnants s'introduisent comme artifices de calculs.

La définition correcte d'une période résonante devrait mettre en jeu l'ensemble du domaine occupé par le liquide. Ce domaine comprend le bassin portuaire et le canal fermé par le batteur.

#### III.4.4-Développement dans le domaine $D_{II}$ :

On développe le même processus de calcul dans le domaine  $D_{II}$ . On définit une suite complète de fonctions orthonormée

$$\Psi_{1jmn}^* = C_{jmn}^* \cos\left(m\pi \frac{(x-\alpha)}{e}\right) \cos\left(n\pi \frac{(y+L)}{L}\right) \cos\{\omega_{jp}(z+h)\} \quad (3.39)$$

Où

$$C_{jmn}^{*2} = \frac{l_m l_n}{e L K_{jp}} ; e = (\beta - \alpha) ; K_{1jmn}^* = \pi^2 \left( \frac{m^2}{e^2} + \frac{n^2}{L^2} \right) + \omega_{jp}^2$$

Ces fonctions propres sont déduites de (3.18) par une transposition.

Le développement des fonctions  $G_{1j}(x, z)$  est donné par :

$$G_{1j}(x, z) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} V_{jmp} \cos\left(m\pi \frac{(x-\alpha)}{e}\right) \cos\{\omega_{jp}(z+h)\}, \quad y=0 \quad (3.40)$$

Et les fonctions  $Y_{bj}(x, z)$  par

$$Y_{bj}(x, z) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W_{jmp} \cos\left(m\pi \frac{(x-\alpha)}{e}\right) \cos\{\omega_{jp}(z+h)\}, \quad y=-L \quad (3.41)$$

Les coefficients  $W_{jmp}$  sont des données du problème.

L'identité de Green (3.25) appliqué aux fonctions  $\Phi_{II1j}$  et  $\Psi_{1jmn}^*$  dans le domaine  $D_{II}$  donne la relation

$$K_{1jmn}^* D_{1jmn}^* = - \int_{-h}^0 dz \int_{\alpha}^{\beta} \Psi_{1jmn}^* Y_{bj}(x, -L, z) dx + \int_{-h}^0 dz \int_{\alpha}^{\beta} \Psi_{1jmn}^* G_{1j}(x, 0, z) dx \quad (3.42)$$

Qui donne :

$$C_{jmn}^* D_{1jmn}^* \left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{e^2} + \frac{n^2}{L^2} \right) + \omega_{jp}^2 \right] \frac{L}{l_n} = (-1)^n V_{jmp} + W_{jmp}; \quad p \geq 0 \quad (3.43)$$

On obtient, par ce procédé, le développement de  $\Phi_{IIj}(x, y, z)$  pour les mouvements non résonants pour lesquels il n'existe aucun couple de nombres entiers  $(m_1, n_1)$  qui vérifient la relation :

$$\Omega_j^2 = \left( \frac{m_1^2}{e^2} + \frac{n_1^2}{L^2} \right) \pi^2 \quad (3.44)$$

On obtient alors :

$$\Phi_{IIj}(x, y, z) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[(-1)^n V_{jmp} - W_{jmp}] l_n}{\left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{e^2} + \frac{n^2}{L^2} \right) + \omega_{jp}^2 \right] L} \cos\left(m\pi \frac{(x-\alpha)}{e}\right) \cos\left(n\pi \frac{(y+L)}{L}\right) \cos\{\omega_{jp}(z+h)\} \quad (3.45)$$

### III.5- Forme de la solution $\Phi_{Ij}(x, y, z)$ :

Le développement en série (3.22) étant uniformément et absolument convergent en tout point de  $D_I$  et  $D_{II}$ . Il est possible de transformer les relations (3.38) et (3.45) en séries doubles.

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{b} \frac{\cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right)}{\left[ \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \omega_{jp}^2 \right] b} = \frac{\text{Cosh}\{\mu_{jmp}(y-b)\}}{\mu_{jmp} \text{Sinh}\{\mu_{jmp}h\}} \quad (3.46)$$

avec

$$\mu_{jmp}^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \omega_{jp}^2 \quad ; \quad m \geq 0; \quad p \geq 0$$

Pour pouvoir comparer les solutions avec celles donnée dans la littérature, on explicitera les solutions  $\Phi_{I1j}$  et  $\Phi_{II1j}$  en fonction de  $\omega_{jp}$ ;  $p \geq 1$  et  $\Omega_j$ . On pose alors :

$$\mu_{jm0} = \begin{cases} \Lambda_{jm} & \text{si } m > \frac{a\Omega_j}{\pi} \\ i\bar{\Lambda}_{jm} & \text{si } m < \frac{a\Omega_j}{\pi} \end{cases} \quad (3.47)$$

Le potentiel  $\Phi_{I1j}(x, y, z)$  a pour nouvelle présentation dans le cas des mouvements non résonants l'expression :

$$\begin{aligned}
\Phi_{IIj}(x, y, z) = & - \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{U_{jmp} \text{Cosh} \mu_{jmp} (y-b)}{\mu_{jmp} \text{Sinh}(\mu_{jmp} b)} \text{Cosh}\{\omega_{jp} (z+h)\} \\
& + \sum_{m=0}^{\frac{a\Omega_j}{\pi}} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \frac{U_{jm0} \text{Cos} \bar{\Lambda}_{jm} (y-b)}{\bar{\Lambda}_{jm} \text{Sin}(\bar{\Lambda}_{jm} b)} \text{Cosh}\{\Omega_j (z+h)\} \\
& - \sum_{m > \frac{a\Omega_j}{\pi}}^{\infty} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \frac{U_{jm0} \text{Cos} \Lambda_{jm} (y-b)}{\Lambda_{jm} \text{Sin}(\Lambda_{jm} b)} \text{Cosh}\{\Omega_j (z+h)\}
\end{aligned} \quad (3.48)$$

Dans le canal, le potentiel  $\Phi_{IIIj}(x, y, z)$  a pour expression, dans le cas des mouvements non résonants :

$$\begin{aligned}
\Phi_{IIIj}(x, y, z) = & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_{jmp} \text{Cosh} \mu_{jmp} (y+L) + W_{jmp} \text{Cosh} \mu_{jmp}^* y}{\mu_{jmp}^* \text{Sinh}(\mu_{jmp}^* L)} \cos\left(m\pi \frac{x-\alpha}{e}\right) \text{Cosh}\{\omega_{jp} (z+h)\} \\
& - \sum_{m=0}^{\frac{a\Omega_j}{\pi}} \frac{V_{jm0} \text{Cos} \bar{\Lambda}_{jm}^* (y+L) + W_{jm0} \text{Cos} \bar{\Lambda}_{jm}^* y}{\bar{\Lambda}_{jm}^* \text{Sin}(\bar{\Lambda}_{jm}^* L)} \cos\left(m\pi \frac{x-\alpha}{e}\right) \text{Cosh}\{\Omega_j (z+h)\} \\
& + \sum_{m > \frac{a\Omega_j}{\pi}}^{\infty} \frac{V_{jm0} \text{Cosh} \Lambda_{jm}^* (y+L) + W_{jm0} \text{Cosh} \Lambda_{jm}^* y}{\Lambda_{jm}^* \text{Sinh}(\Lambda_{jm}^* L)} \cos\left(m\pi \frac{x-\alpha}{e}\right) \text{Cosh}\{\Omega_j (z+h)\}
\end{aligned} \quad (3.49)$$

Où

$$\mu_{jm0}^* = \begin{cases} \Lambda_{jm}^* & \text{si } m > \frac{e\Omega_j}{\pi} \\ i\bar{\Lambda}_{jm}^* & \text{si } m < \frac{e\Omega_j}{\pi} \end{cases}$$

Et

$$\mu_{jmp}^{*2} = \left(\frac{m\pi}{e}\right)^2 + \omega_{jp}^2; \quad m \geq 0; \quad p \geq 0$$

### III.6-Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons développé le principe de la méthode de résolution. Le domaine physique est subdivisé en deux sous domaines parallélépipédiques. Après avoir explicité le problème linéaire, les solutions dans les deux domaines sont développées en série de fonctions propres. Les solutions dans les deux domaines sont déduites dans les cas non résonants.



## *CONCLUSION GENERALE*

Notre travail présente une analyse plus rigoureuse des seiches qui apparaissent dans des bassins portuaires sous l'action de la houle qui arrive du large et obtenir des formules explicites.

On a étudié uniquement le cas d'un bassin rectangulaires, de profondeur constante, associée à un canal à houle de même profondeur, en considèrent le mouvement de la houle schématisée par un batteur dont le mouvement admet un spectre de fréquences discontinu et le fluide considère incompressible et le mouvement est irrotationnel. Cette analyse a été effectuée à l'aide de la théorie linéaire et cela nous permis d'établir l'équation de dispersion et les résolutions du système aux valeurs propres ainsi obtenu et réalisée à l'aide d'une méthode de résolutions basée le calcul approché dont le domaine physique est subdivisé en deux domaines parallélépipédique. Les solutions sont développées en série de fonction propre. Les solutions dans les deux domaines sont déduites dans les cas non résonants.

## REFERENCES BIOGRAPHIQUES:

[1] DE JONG M.P.C, HOLTHUIJSEN L, H, BATTJES J.A (2003). Generation of seiches by cold fronts over the southern North Sea. Journal of Geophysical Research, vol. 108, 3117,10.doi:10.1029/2002JC001422 DEVAUX.

[2] BIESEL et MEHAUX.- Aperçus sur la similitude des modèles réduits de seiches. La Houille Blanche, mai-juin 1955.

[3] BIESEL (F). « Equation générales de la houle irrégulière. » La Houille Blanche, mai-juin1952.

[4] NORMANDIN (M). « Sur la théorie du second ordre des phénomènes parasites dans un canal à houle ». C.R.A.S. du 25-11-57, t.245, p.1880-1882.

[5] GAILLARD (P.). Thèse à paraître.

[6] MOXISSEEV (N.N.). « Sur la théorie des oscillations non linéaires des liquides de masse bornée. » Prikladnaia Matematika i Mehcanika,, t. XXII ,fasc V, 1958, p. 612-621 (en russe).

[7] RIESZ (F). « Système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. » Gauthier-Villars, 1913.

[8] LAMBERT A. (2006). Protection durable du littoral varois : fonctionnement hydro sédimentaire de plages micro tidales équipées des systèmes de drainage. Thèse, Université Aix-Marseille I – Université de Provence, U.F.R des Sciences Géographiques et de l'Aménagement,379 p.