

Républ ique Al gérienne Démocratique et Popul aire  
Ministère de l 'Enseignement Supérieur  
et de l a recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA  
Facul té de Technol ogie  
Dépar tement de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l 'obtention du dipl ôme de

**MASTER**

Fil ière : Génie Mécanique

Spécial ité : énergétique

Par :

**Kedjar Fayçal**

**Abdel kader fateh**

## Thème

---

Contrôle d'écoulement d'un film mince sur une paroi cylindrique  
vertical

---

Soutenu le .....2020 devant le jury composé de:

Mr. BENSLIMANE Abdelhakim	Président
Mr. DJEMA Amar	Rapporteur
Mr. NAIT BOUDA Fayçal	Examineur
Mr. MOUHEMEDI Tarek	Examineur

Année Universitaire 2019-2020

# *Dédicace*

*Je dédie se modeste travaille ; a celle qui ma insérer le goût de la vie et le sens de l'implication ..... merci mère ; celui qui a été toujours la source d'inspiration Et de courage ..... merci père ; mon frère Akli, mon neveu Hélios et ma belle-sœur ; mon jumeau Khair-Eddine et ma sœur et a mon épouse. Mes très cher amis Syphax et Zilacen, mon binôme Fayçal et sa famille. Les étudiants avec qui j'ai passé mes années d'études. Et tous ceux qui me son cher. Et tous ceux qui m'ont aide de près ou de loin.*

***Fateh***

## **Dédicaces**

*Je dédie ce travail à ceux qui sont dans mon cœur, qui ont veillé pour notre confort et sacrifié beaucoup pour notre réussite, Ma chère mère (que dieu me la garde).*

*A celui qui m'a toujours appris comment réfléchir avant d'agir, à celui qui m'a soutenu tout au long de ma vie scolaire, à celui qui n'a jamais épargné un effort pour mon bien, Mon cher père (dieu me le garde).*

*A mes chers frères, mes chères sœurs, à tout ma familles, mes chers amis. Et à tous ceux qui me connaissent.*

***Fayçal***

## Remerciements

*Avant tout, nous tenons à remercier Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la force et la patience pour finir ce modeste travail.*

*Nous remercions nos familles qui nous ont toujours encouragé et soutenu durant toutes nos études.*

*Nous adressons notre reconnaissance et nos remerciements à notre promoteur monsieur Djema Amar. Nous tenons aussi à remercier également l'ensemble des enseignants de département génie mécanique pour leurs rôles importants dans notre formation.*

*Nous remercions les membres de jury qui nous font l'honneur de juger ce travail.*

*Notre sincère gratitude va vers tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ce travail.*

# Table des matières

## Remerciements

Introduction générales.....	1
Chapitre 1 : <b>Généralités et Synthèse bibliographique</b> .....	3
1.1 Présentation d'un film liquide mince.....	3
1.2 Le nombre de Reynolds .....	3
1.3 Le nombre de Weber .....	3
1.4 La méthode des résidus pondérés.....	3
1.5 La stabilité linéaire .....	4
1.6 La synthèse bibliographique.....	5
Chapitre 2 : L'écoulement de base.....	8
2.1 Présentation du problème .....	8
2.2.1 Les équations de conservation .....	9
2.1.2 Condition aux limites .....	10
2.1.3 Écoulement de base .....	11
Chapitre 3 : solution approches aux résidus pondérer.....	15

3.1 Équations adimensionnées.....	15
3.2 Introduction des débits locaux .....	18
3.3 Élimination de la pression.....	19
3.4 Méthode des résidus pondérés.....	20
3.5 modèle d'ordre un .....	21
Chapitre 4 : Analyse de stabilité linéaire .....	26
4.1 Choix du contrôle .....	26
4.2 Modes normaux .....	27
4.3 Etude de la stabilité marginale temporelle .....	28
4.4 courbes de stabilités (résultats sur la stabilités ) .....	28
4.4.1 Stabilités neutre (Marginale).....	28
4.4.2 taux d'amplifications .....	32
5 Conclusion générale.....	34

## Liste des figures :

Figure1 : Ecoulement d'un film sur une paroi flexible.....4

Figure2 : Effet de  $\gamma_0$  sur l'instabilité en fixons  $W=1$ , pour  $h_0 = \frac{2}{100}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m]....27

Figure 3 : Effet de  $\gamma_0$  sur l'instabilité en fixons  $W=1$ , pour  $h_0 = \frac{2}{1000}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m]..27

Figure 4 : Effet de  $W$  en fixant  $\gamma_0 = 0.1$  ;  $h_0 = \frac{2}{100}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m].....28

Figure 5 : Taux d'amplification.....29

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Le revêtement de films liquides sur des cylindres se produit largement dans la nature, les sciences des matériaux et les processus industriels. Un exemple typique est la fabrication de films solides minces, qui pourrait être obtenue en tirant le cylindre chauffé du pool de liquide et suivi d'un processus de séchage. Cependant, dans certains cas, la surface du cylindre revêtu n'est en fait pas lisse et présente une hydrophobie où l'effet de glissement peut entrer en jeu.

On s'intéresse dans ce travail à l'étude de stabilité d'un film s'écoulant sur une paroi cylindrique vertical, La déstabilisation de ces écoulements est souvent décrite à l'aide d'une équation d'évolution de l'épaisseur du film basée sur une approximation aux faibles nombres d'ondes de l'équation de Navier Stokes. Comme la linéarisation avec des équations de Navier Stokes Est très grande donc on a fait une modélisation à l'aide de la méthode des résidus pondérés, Un modèle à deux équations résultait, et deux inconnues, l'épaisseur du film  $h$  et le débit  $q$ .

Ce travail se compose en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous décrivons l'écoulement d'un film mince d'un liquide newtonien incompressible et visqueux s'écoulant sur un plan cylindrique vertical en présence d'actionneurs. On présente les équations régissant le problème, qui constituent d'équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites associé. Par suite on déterminant la solution de NUSSELT et les équations adimensionnés.

Dans le deuxième chapitre une modélisation à l'aide de la méthode des résidus pondérés associé à la théorie des grandes ondes a été effectuée. Un modèle à deux équations résultait d'une simplification ultérieure mais au prix d'une baisse le degré d'approximation à l'ordre  $\varepsilon$  seulement. Ce modèle, formulé en termes d'équations d'évolution couplées pour l'épaisseur du film  $h$  et le débit  $q$ , tient compte des effets d'inertie dus aux écarts du profil de vitesse par rapport à la forme parabolique, et suit de près l'expansion asymptotique des ondes longues dans la limite appropriée.

Le dernier chapitre consiste à l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement soumis à des perturbations de petite amplitude. Le but de cette analyse est de déterminer le seuil du déclenchement des instabilités ( $Rc$ ) et d'examiner l'influence de différents paramètres sur la stabilité de la surface libre. L'effet du contrôle sur la stabilité du film sera analysé par la suit

# Introduction générale

---

à travers le tracé des courbes de stabilité neutre (marginale). Son influence sur le taux d'amplification des perturbations sera également analysée. L'étude a été réalisée grâce au logiciel Maple.

## Généralités et Synthèse bibliographique

### 1.1 Présentation d'un film liquide mince

On appelle film liquide mince une lamelle de liquide dont l'épaisseur, typiquement micrométrique, peut aller de quelques nanomètres à quelques millimètres pour des films d'extension métrique.

En effet, un film ondulatoire avec la formation d'ondes de grandes longueurs par rapport à l'épaisseur du film. Une réduction de la complexité du problème peut être obtenue dans le cadre d'une asymptotique "ondes longues" avec l'introduction liquide c'est-à-dire un écoulement laminaire à surface libre et de faible épaisseur, est sujet à une dynamique de  $\varepsilon = h/\lambda$ ,  $h$  étant l'épaisseur du film et  $\lambda$  la longueur des ondes typiques. Cette asymptotique est semblable à l'approximation "eau peu profonde".

### 1.2 Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre qui lie entre les fluides de déférente échelle, la viscosité, la masse volumique, et une longueur de référence comme l'étude de la trainée des corps géométrique, la traines de friction des surfaces planes ,et il permet de déterminer le régime découlement ,laminaire ,transitoire ou turbulente.

### 1.3 Le nombre de Weber

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique. Il correspond au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle. Le nombre porte le nom de MORTIZ WEBER ingénieur en dynamique des fluides allemand

### 1.4La méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés est une méthode générale de recherche de solutions approchées d'équations différentielles ou aux dérivées partielles. Afin de résoudre les problèmes rencontrés avec les modèles déjà existants, un effort de modélisation a été entrepris. Nous avons développé une méthode combinée d'approximation en série de Taylor et

# Généralités et Synthèse bibliographique

---

des résidus pondérées. Celle-ci a abouti à la formulation d'un système de trois équations d'évolution couplées pour deux inconnues, l'épaisseur du film  $h$ , le débit instantané local  $q$ .

## 1.5 La stabilité linéaire

La stabilité linéaire c'est la capacité de l'écoulement d'un fluide à retrouver sa stabilité après lui avoir introduit une perturbation dans ces fluides la viscosité et l'élasticité suivent une loi de Carreau-Yasuda. et cela consiste à regarder la stabilité de Poiseuille pour des fluides qui suivent les lois de White Metzner.

Un système est stable si il revient à sa position d'équilibre chaque fois qu'il est écarté de cette position car si les conditions initiales sont perturbées cela engendre des perturbations de la trajectoire.

Donc un système est linéairement stable si les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négatives.

## 1.6 Synthèse bibliographique.

Les écoulements auxquels nous nous intéressons dans ce travail font intervenir un film liquide laminaire en écoulement sur un cylindre vertical [1 ; 2].

L'écoulement par gravité d'un film mince dans un plan vertical a attiré beaucoup d'attention en raison de son importance dans de nombreuses applications industrielles. Tandis que le modèle d'un film liquide en écoulement le long d'un plan incliné a été largement étudié dans la littérature aussi bien théoriquement depuis les travaux de Kapitza [3] et Yih [4].

Yih [5] et Benjamin[6] ont d'abord étudié la théorie linéaire du film tombant isotherme. Yih[7] a formulé le problème en termes d'asymptotique à ondes longues et a déterminé le nombre de Reynolds critique au-dessus duquel l'instabilité se produirait. Benney[8] a étendu la théorie au régime non linéaire en dérivant une équation d'évolution non linéaire. Il y a eu un certain nombre d'extensions de ce travail comme discuté par Chang et Demekhin[9] dans leur monographie.

En 1961 Benjamin[6] et Yih[5] ont résolu le problème de la stabilité linéaire et donné la valeur exacte du nombre de Reynolds critique. Par la suite Benney[8] a trouvé une équation donnant l'évolution de la hauteur du film qui permet de retrouver formellement le critère de stabilité de Benjamin[6] et Yih[5]. Mais cette équation est fortement non-linéaire et ne décrit pas le comportement du film au-delà du seuil de stabilité.

Suite à cela, de nombreux auteurs ont proposé des modèles issus des équations de Navier-Stokes et basés sur la généralisation de la méthode intégrale de Karmann-Polhausen introduite par Shkadov[9] (modèles à deux équations). Ces modèles sont toutefois non cohérents à l'ordre 1 de l'approximation. Ruyer-Quil et Manneville[10] ont pu développer des modèles à deux équations cohérents grâce à la combinaison d'une méthode aux résidus pondérés et des développements ondes longues des champs de vitesses.

## Généralités et Synthèse bibliographique

---

Gerbeau et Perthame ont fait dans leur article, une dérivation formelle des équations de Navier-Stokes ainsi que des simulations numériques sur le système de Saint-Venant résultant, mais avec des hypothèses de glissement au fond.

Ces méthodes permettent de retrouver les équations de Saint-Venant, à un coefficient correcteur près. De nombreux modèles ont été établis pour diverses situations (films en rotation, film vertical...) qu'Oron et al. ont parfaitement synthétisé. Néanmoins il ne s'agit que de modèles d'écoulements sur fond plat. Bouchut et Westdickenberg[11] ont alors introduit un système de coordonnées curvilignes quelconques (non-forcément orthogonal) apte à décrire un écoulement sur une topographie quelconque. Toutefois ils se sont limités au cas non-visqueux.

Le contrôle de rétroaction nécessite des observations en temps réel d'au moins certains composants de l'état du système, et nous allons construire nos stratégies de contrôle autour des observations de la hauteur du film.

Liu et Gollub[12] ont étudié expérimentalement la dynamique des couches minces dans le contexte de l'apparition du chaos; ils utilisent un processus d'imagerie par fluorescence pour mesurer l'épaisseur du film bidimensionnel en temps réel, et a également utilisé la déviation du faisceau laser pour obtenir des mesures locales de la pente d'interface.

Vlachogiannis et Bontozoglou[13] ont examiné l'écoulement de couches minces sur une paroi ondulée et ont utilisé une interférométrie calibrée par rapport aux mesures à l'aiguille pour obtenir la hauteur de l'interface.

Heining, Pollak et Sellier[14] ont montré que la forme de la surface libre et le profil de topographie peuvent être obtenus à partir de mesures de la vitesse de surface, et l'a mis en œuvre à la fois dans des simulations et des expériences Navier – Stokes.

Schörner, Reck et Aksel[15] ont utilisé des expériences de visualisation par réflexion laser pour étudier l'effet de configurations topographiques de formes différentes avec la même amplitude de base et la même longueur d'onde sur l'écoulement dans un plan incliné; ils ont pu déduire le taux de croissance dans le sens des courants de faible amplitude perturbations en comparant l'ampleur des fluctuations interfaciales à deux endroits dans le sens des cours d'eau.

Thompson, Tseluiko et Papageorgiou[16] ont utilisé des modèles à ondes longues pour étudier l'effet des aspiration / injection régulière et spatialement périodique sur un écoulement en couche mince dans un plan incliné. Ils ont trouvé que l'aspiration imposée conduit toujours à des états non uniformes, permet une structure de bifurcation non triviale et un comportement

## Généralités et Synthèse bibliographique

---

complexe dépendant du temps, et modifie considérablement les trajectoires des particules dans le l'écoulement, mais a un effet relativement faible sur la stabilité de l'écoulement.

L'injection de fluide à travers les fentes a également été considéré théoriquement pour son effet sur l'étalement des films; [17] aspiration conduit à des arêtes sur la surface libre, et injection aux indentations, mais il n'y a pas d'état d'équilibre car la masse totale n'est pas conservée. Injection présente certaines similitudes avec l'écoulement sur une paroi poreuse, qui a tendance à évacuer le fluide dans des pores étroits; cette l'écoulement est particulièrement pertinent pour l'impression d'encre sur du papier, pour lequel la porosité du substrat affecte le durée de vie et propagation des gouttes.

Davis et Hocking [17] ont considéré l'écoulement de fines gouttes et de films avec mouillant des fronts le long d'un substrat poreux qui est mouillé par le fluide et qui est initialement sec, et on constate que pour les films et les gouttes, le fluide est finalement entièrement aspiré dans le substrat.

Thiele, Goyeau et Velarde[18] a utilisé une équation de Benney pour étudier l'écoulement sur un substrat poreux incliné, chauffé et rempli de fluide, délimitée en dessous par une paroi solide de sorte que la masse totale du film liquide soit conservée. Ils ont trouvé que l'ajout d'un substrat poreux a typiquement un petit effet déstabilisant sur l'état uniforme du film, et dans le régime non linéaire, le film développe des gouttes et des crêtes qui glissent dans le plan. Flux de films avec des sources ponctuelles et en forme de fente ont également été étudiées comme modèle pour l'épandage de lave, [19] si le fluide ne forme pas un film continu, mais contenant plusieurs fronts mouillants.

## Chapitre 2: l'écoulement de base

Dans ce chapitre nous présentons les équations de Navier-Stokes d'un film mince sur une paroi cylindrique verticale. Nous allons introduire les équations de conservation de masse et les conditions aux limites.

### 2.1 Présentation du problème:

On s'intéresse à l'étude de la stabilité d'un film mince de fluide visqueux incompressible de viscosité dynamique  $\mu$  et de densité  $\rho$ . La surface libre d'un fluide newtonien s'écoulant sous l'effet de la pesanteur  $\mathbf{g}$  sur une paroi cylindrique vertical de rayon  $Rc$ , La surface libre entre le liquide et le gaz inerte est définie par  $z = Rc + h(z, t)$  et de tension superficielle  $\sigma$ , est caractérisée par une pression uniforme qui est égale à la pression atmosphérique. Nous nous plaçons dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , la dépendance en  $\theta$  de l'écoulement sera négligé. Les coordonnées radiale et axiale sont  $r$  et  $z$ , tel que  $r = 0$  définit l'axe central du cylindre illustrer dans la figure 1. on met aussi des pompes dans le cylindre pour l'aspiration et l'injection de meme fluide tel que l'aspiration est plus important que l'injection.

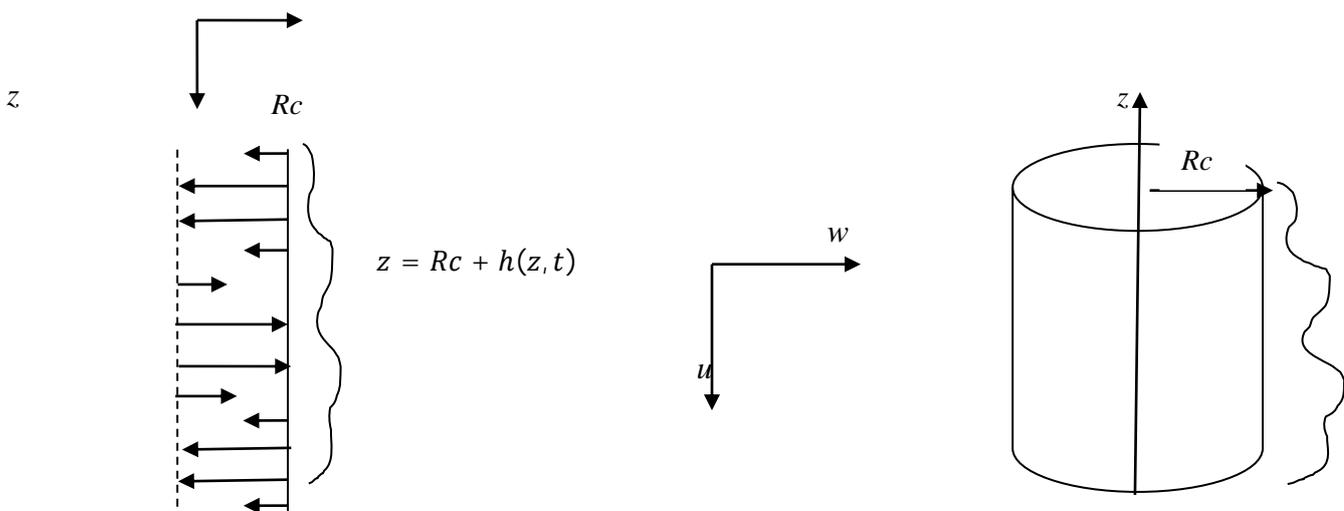


Figure 1: Ecoulement d'un film sur une paroi flexible

# L'écoulement de base

## 2.2.1 Les équations de conservation :

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations différentielles non linéaires partielles qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (et donc des gaz et de la plupart des fluides). Ces équations permettent souvent une précision approximative pour suggérer la modélisation de nombreux phénomènes.

Les équations de continuité et du mouvement pour un écoulement axisymétrique et incompressible sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \quad (1.3)$$

Où  $\rho$  et  $g$  sont la densité et accélération gravitationnel,  $(u, w)$  sont les composantes du vecteur vitesse correspondant aux coordonnées cylindriques  $(r, z)$ .

Et

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij} \quad (1.4)$$

Avec

$$\tau'_{rr} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau'_{zz} = 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad T'_{rz} = T'_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad T'_{\theta\theta} = \frac{u}{r}.$$

Tel que  $\tau_{ij}$  est le tenseur des contraintes,  $p$  est la pression,  $\delta_{ij}$  est la tenseur identité, le paramètre  $\mu_0$  est la viscosité dynamique du liquide.

# L'écoulement de base

---

## 2.1.2 Conditions aux limites :

En  $r = R_c$  **Condition de non glissement à la paroi :**

La condition de non glissement est liée à la présence d'une couche limite à la paroi entre le fluide et le plan.

La vitesse d'un fluide au voisinage immédiat d'une paroi solide est nulle. la nullité de la composante normale à la paroi est simplement due au fait que le fluide ne pénètre pas dans le solide. la nullité de la composante de la vitesse tangente à la paroi est elle liée l'existence de la viscosité : une discontinuité de la vitesse conduit à une contrainte de cisaillement infinie et donc, à une divergence de l'énergie dissipé dans l'écoulement.

En  $z = 0$ , on écrit donc :

$$\omega = 0 \quad (1.5)$$

La condition de perméabilité sous les effets des actionneurs s'écrit

$$u = F(z, t) \quad (1.6)$$

En  $r = R_c + h(z, t)$

### **Condition cinématique :**

La relation qui décrit l'imperméabilité de l'interface

On considère l'interface comme une surface matérielle.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \omega \frac{\partial h}{\partial z} = u \quad (1.7)$$

### **Condition tangentielle :**

$$\frac{\partial h}{\partial z} (T'_{rr} - T'_{zz}) - \left[ 1 - \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] \tau'_{rz} = 0 \quad (1.8)$$

## L'écoulement de base

---

**Condition normale :**

$$p + \frac{1}{1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2} \left( -2 \frac{\partial h}{\partial z} \tau'_{rz} - \tau'_{rr} - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \tau'_{zz} \right) = p_a + \sigma \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{R_c + h} \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right)}{\left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Ecoulement de base :

Afin de calculer la solution de base de l'écoulement d'un film mince sur une paroi cylindrique vertical, on va considérer les hypothèses suivantes :

-Ecoulement est stationnaire,

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

- le film liquide admet un écoulement parallèle (la surface libre  $h = h_0 = \text{constante}$  est aussi plate),

C'est-à-dire:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

Pas de variation par rapport à  $t$  par conséquent à  $z$ . Les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites (1.1)..(1.9) se résume à

$$\tau'_{rr} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \tau'_{zz} = 0, \tau'_{rz} = \tau'_{zr} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial r}, \tau'_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u}{r}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \quad (1.12)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau'_{rz})}{\partial r} + \rho g \quad (1.13)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau'_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau'_{\theta\theta}}{\partial r} \quad (1.14)$$

## L'écoulement de base

---

En  $r = R_c$

$$u = w = 0 \quad (1.15)$$

En  $r = R_c + h_0$

Condition cinématique:

$$u = 0 \quad (1.16)$$

Condition tangentielle:

$$\tau'_{rz} = 0 \quad (1.17)$$

Condition normal:

$$p - \tau'_{rr} = p_a + \frac{\sigma}{R_c + h_0} \quad (1.18)$$

**Calcul de la vitesse de base :**

$$r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = -\frac{\rho g}{\mu} r$$

$$r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = -\frac{\rho g}{\mu} r$$

En intégrant :

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{\rho g}{2\mu} r^2 + C_1$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{\rho g}{2\mu} r + \frac{C_1}{r}$$

En intégrant pour la deuxième fois :

$$\omega(r) = -\frac{\rho g}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

## L'écoulement de base

On détermine les constantes d'intégration  $c_1$  et  $c_2$  en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{\rho g}{2\mu} r + \frac{C_1}{r} = 0$$

$$-\frac{\rho g}{2\mu} R_c + \frac{C_1}{R_c} = 0$$

Qui Donne:

$$C_1 = \frac{\rho g}{2\mu} R_c^2$$

On va déduire  $C_2$  :

$$\omega(r) = -\frac{\rho g}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2 = 0$$

$$-\frac{\rho g}{4\mu} (R_c + h_0)^2 + C_1 \ln(R_c + h_0)^2 + C_2 = 0$$

Ce qui donne :

$$C_2 = \frac{\rho g}{4\mu} (R_c + h_0)^2 - C_1 \ln(R_c + h_0)^2$$

La résolution des équations de Navier-stokes et de conservation de l'énergie associées aux conditions aux limites admettent une solution stationnaire (qu'on désignera par solution de Nusselt

$$h = h_0, u = 0, \quad \omega(r) = \frac{\rho g h_0^2}{4\mu} \left( \frac{R_c^2}{h_0^2} - \frac{r^2}{h_0^2} \right) + 2 \left( 1 + \frac{R_c}{h_c} \right)^2 \ln \frac{r}{R_c} \quad (1.19)$$

**Calcul de la pression de base :**

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

## L'écoulement de base

On peut dire donc que la pression est une constante qui ne dépend ni de  $x$  ni de  $r$ .

Condition à la limite sur la contrainte normale nous permet d'écrire :

$$p(r) = p_a + \frac{\sigma}{R_c + h_0} \quad (1.20)$$

Où  $p_a$  est la pression atmosphérique, supposée constante. Le système est fermé par la limite cinématique état à la surface libre.

Cette solution donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement défini par :

$$q_0 = 2\pi \int_{R_c}^{R_c+h_0} r\omega dr = \frac{R_c^4 \rho g \pi}{8\mu} (4l_0^4 \ln(l_0) - (1 - l_0^2)(1 - 3l_0^2))$$

Où  $l_0 = \left(1 + \frac{h_0}{R_c}\right)$ .

**La vitesse débitante :**

$$\omega_m = \frac{1}{\pi (R_c + h_0)^2 - R_c^2} q_0 = \frac{q_0}{\pi R_c^2 (l_0^2 - 1)} = \frac{R_c^2 \rho g}{8\mu} \frac{4l_0^4 \ln(l_0) - (1 - l_0^2)(1 - 3l_0^2)}{1 - l_0^2}$$

L'épaisseur  $h_0$  du film est solution de l'équation

$$8\mu^2 R_e (1 + l_0) + \rho^2 g R_c^3 (4l_0^4 \ln(l_0) - (1 - l_0^2)(1 - 3l_0^2)) = 0. \quad (1.21)$$

Où  $R_e = \frac{\rho h_0 u_m}{\mu}$  ;  $R_e$  : est le nombre de Reynolds

# Solution approchée aux résidus pondérés

## Chapitre 3: Solution approchée aux résidus pondérés

### 3.1 Equations adimensionnées :

La mise sous forme adimensionnelle des équations du mouvement et les conditions aux limites est obtenue à l'aide des variables sans dimension exprimées plus haut. On choisie comme vitesse caractéristique la vitesse moyennée  $u_m$ . On fait alors intervenir deux échelles d'espace: la longueur d'onde typique  $\lambda$ , pour les directions longitudinale, et la hauteur  $h_0 = \varepsilon\lambda$  pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre  $\varepsilon$  vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes.

La mise sous forme adimensionnelle du système (1.1)–(1.2) –(1.3) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

$$(r, z) = h_0 \left( r^*, \frac{z^*}{\varepsilon} \right), \quad (\omega, u) = w_m (\omega^*, \varepsilon u^*), \quad h = h_0 h^*, \quad t = \frac{h_0}{(\varepsilon \omega_m) t^*}, \quad p = \frac{(\mu \omega_m)}{(u h_0) p^*}.$$

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement et les conditions aux limites

(1.22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0 \\ R_e \varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} & \\ &= \frac{\varepsilon^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + G \end{aligned} \quad (1.23)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

$$\begin{aligned}
 R_e \varepsilon^3 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} & \quad (1.24) \\
 = \frac{2\varepsilon^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} \\
 - 2\varepsilon^2 \frac{u}{r^2}
 \end{aligned}$$

En  $r = \eta$ :

$$w = 0 \quad (1.25)$$

$$u = f(z, t) \quad (1.26)$$

À la surface libre  $r = \eta + h(z, t)$

Condition cinématique :

$$u = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \omega \quad (1.27)$$

Condition tangentielle :

$$2\varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \left[ 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right] \left( \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.28)$$

Condition normal:

$$\begin{aligned}
 p + \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2} \left( -\frac{\partial h}{\partial z} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) & \quad (1.29) \\
 = W \frac{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + C}{\left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \frac{1}{\eta+h} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)$$

Les paramètres adimensionnels du problème sont :

$$\eta = Rc/h_0$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

$$Re = (\rho w_m h_0) / \mu$$

$$W = \varepsilon$$

$$WeRe \text{ avec } We = \sigma / (\rho h_0 \omega_m^2)$$

$$G = - \frac{8(1 - l_0)^2(1 - l_0^2)}{4l_0^4 \ln(l_0) - (1 - l_0^2)(1 - 3l_0^2)}$$

### La méthode des résidus pondérés

En appliquant différentes méthodes de résidus pondérées et comparant leurs résultats, l'espoir est de résoudre ces difficultés à la fois conceptuelles et pratiques. Par souci de simplicité, nous nous contenterons dans un premier temps de la formulation de modèle au premier ordre en  $\varepsilon$  vis-à-vis du développement en gradient. Enfin, les modèles seront étendus au deuxième ordre. On applique ensuite une méthode des résidus pondérés à accompagnée des conditions aux limites. La condition cinématique ou, sous sa forme intégrale.

Le système à l'ordre deux par rapport à  $\varepsilon$  s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$Re \varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varepsilon^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + G \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} \quad (2.3)$$

En  $r = \eta$ :

$$w = 0 \quad (2.4)$$

$$u = f(z, t) \quad (2.5)$$

En  $r = \eta + h(z, t)$

$$u = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \omega \quad (2.6)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

Et l'équation (31) devient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \epsilon^2 \left( 2 \frac{\partial h}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

Et l'équation (32) devient :

$$p = 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial r} - \epsilon W \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - C \right) \quad (2.8)$$

Avec  $C = \frac{1}{\eta+h} \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right)$

### 3.2 Introduction des débits locaux

On définit le débit local dans la direction de l'écoulement

$$q(z, t) = 2\pi \int_{\eta}^{\eta+h} r \omega \, dr.$$

En intégrant l'équation de continuité par rapport à  $r$  sur l'intervalle  $[\eta, \eta + h]$ ,

On aura

$$\begin{aligned} & \int_{\eta}^{\eta+h} r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) dr = ru \Big|_{\eta}^{\eta+h} + \int_{\eta}^{\eta+h} \frac{\partial (r\omega)}{\partial z} dr \\ & = (\eta + h)u(\eta + h) - \eta u(\eta) + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\eta}^{\eta+h} r \omega dr - (\eta + h)w(\eta + h) \frac{\partial h}{\partial z} \\ & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial z} + (\eta + h) \frac{\partial h}{\partial t} - \eta f = 0 \end{aligned}$$

Où  $q$  est le débit local

En utilisant la condition cinématique à la surface libre ( $u = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \omega$ ) et la condition à la paroi ( $u = w = 0$ ), l'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial z} + (\eta + h) \frac{\partial h}{\partial t} = \eta f \quad (2.9)$$

### 3.3 Elimination de la pression

En intégrant l'équation (2.3) entre  $y$  et  $\eta + h$ , l'expression de la pression s'écrit

$$p = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\eta+h} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + p|_{\eta+h} \quad (2.10)$$

En vertu de la condition (2.8)

$$p = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\eta+h} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\eta+h} + \varepsilon W \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - C \right) \quad (2.11)$$

En remplaçant cette expression dans (2.4), on aboutit à l'élimination de la pression du problème initial:

$$\begin{aligned} R_e \varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ = G - \varepsilon W \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\ + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\eta+h} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\eta+h} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donc le système bidimensionnel à l'ordre deux est:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

$$\begin{aligned}
 R_e \varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) & \quad (2.14) \\
 & = G - \varepsilon W \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\
 & + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{\eta+h} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{\eta+h} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$w(\eta) = 0, u(\eta) = f(z, t) \quad (2.15)$$

En  $r = \eta + h(z, t)$

$$(\eta + h) \frac{\partial h}{\partial t} = \eta f - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \varepsilon^2 \left( 2 \frac{\partial h}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.17)$$

### 3.4 Méthode des résidus pondérés

La technique utilisée combine une méthode aux résidus pondérés à un développement en gradient. Pour ce faire, on considère une projection des champs de vitesse axiale sur un ensemble de fonctions tests qui satisfont les conditions aux limites : adhérence à la paroi en

$r = R_c$ :

$$\omega(r, z, t) = u_0^* + \varepsilon \omega_1^* \dots + \varepsilon^M \omega_M^* + o(\varepsilon^M) = \sum_{i=0}^{i=M} \varepsilon^i \omega_i^* + o(\varepsilon^M) \quad (2.18)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

Où  $\omega_i^*$  est la solution de notre problème au  $i^{m\epsilon}$  ordre, tel que

$$\omega_i^*(r, z, t) = \sum_{m=0}^{M_i} a_m(z, t) f_m(R) \quad (2.19)$$

Avec  $\{f_m, m = 0..M_i\}$  est la famille génératrice du  $i^{m\epsilon}$  espace de solution où  $M_i$  entier fini (C'est-à-dire, l'espace de solution à tout ordre est de dimension fini suivant la direction normale  $r$ ),  $R = \dots\dots\dots$  est une coordonnée réduite de la variable normale  $r$  et  $a_m(z, t)$  sont des amplitudes à déterminer.

### 3.5 Modèle d'ordre un

Suivant la démarche initiée par Ruyer-Quil et Manneville dans le cas des films liquides tombants et étendue aux cas de deux couches de fluides avec interface dans le cas plan, les champs de vitesse

Jusqu'à l'ordre  $o(\epsilon)$ , l'expression de  $w$  est donnée par

$$\omega(r, z, t) = \omega_0^* + \epsilon\omega_1^* + o(\epsilon) \quad (2.20)$$

Où  $\omega_1^*$  est la correction au premier ordre du terme principal  $\omega_0^*$  (d'ordre zéro). Afin de construire le modèle aux résidus pondérés à l'ordre un, premièrement on cherche la base de l'espace des solutions d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (2.20) dans le système (2.13) – (2.17), et en collectant ordre par ordre, et en remarquant que  $u$  est d'ordre un, l'ordre zéro est donné par

$$G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_0^*}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.21)$$

$$\omega_0^*(\eta) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \omega_0^*}{\partial r}(\eta + h) = 0 \quad (2.23)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

L'intégration de l'équation (2.21), permet de retrouver la famille génératrice  $\{1, r^2, \ln r\}$  de l'espace de solution d'ordre zéro. Donc  $\omega_0^*$  est de la forme.

$$\omega_0^* = a_0(z, t) + a_1(z, t)r^2 + a_2(z, t) \ln r$$

En utilisant les conditions aux limites  $\omega_0^*(\eta) = 0$

$$\text{Et } \frac{\partial \omega_0^*}{\partial r}(\eta + h) = 0$$

On aura les relations entre les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  comme suite

$$a_0 + a_1\eta^2 + a_2 \ln \eta = 0 \quad (2.24)$$

On dérivent  $w_0^*$  par rapport à  $r$  et avec la condition aux limite (2.23) ; on aura

$$2a_1(\eta + h) + a_2 \frac{1}{\eta + h} = 0 \quad (2.25)$$

Ce qui donne

$$a_2 = -2a_1(\eta + h)^2 \quad (2.26)$$

$$a_0 = -a_1(\eta^2 - 2(\eta + h)^2 \ln \eta) \quad (2.27)$$

Et par suit

$$\omega_0^* = a_1(z, t)(r^2 - \eta^2 - 2(\eta + h)^2 \ln r/\eta)$$

D'où le profil de vitesse est donné par

$$\omega = a_1(z, t)(r^2 - \eta^2 - 2(\eta + h)^2 \ln r/\eta) + \varepsilon \omega_1^* \quad (2.28)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

Du moment que le débit local  $q$  apparaît dans l'équation (2.9) comme variable principale de la même façon que l'épaisseur du film, on peut prendre, alors, le couple  $(h, q)$  comme inconnue de notre modèle. Donc, on transforme le coefficient  $a_1$  en fonction de  $q$  et on réécrit l'équation (2.28) comme suit:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 \quad (2.29)$$

Où,

$$q = 2\pi \int_{\eta}^{\eta_0} r\omega_0 dr$$

Avec  $\eta_0 = \eta + h$

C'est-à-dire

$$\omega_0 = \frac{2q}{\pi\eta_0^4} \frac{f_0(r, h)}{\left(\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 - 1\right)\left(\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 - 3\right) + 4 \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)}$$

Où,

$$f_0(r, h) = (r^2 - \eta^2 - 2(\eta + h)^2 \ln r/\eta)$$

Et  $\omega_1$  telle que

$$2\pi \int_{\eta}^{\eta_0} r\omega_1 dr = 0.$$

Rappelons que l'équation de la couche limite (2.14) jusqu'à l'ordre un est donné par

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + G - \varepsilon W \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \text{Re} \varepsilon \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.30)$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

En multipliant l'équation de couche limite (2.30) par une fonction poids, notée  $F$ , et en intégrant entre  $\eta$  et  $\eta_0$ , on obtient.

$$\int_{\eta}^{\eta_0} F(r) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + G - \varepsilon W \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - \frac{\partial C}{\partial z} \right) - R_e \varepsilon \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + w_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \right) \right\} r dr = 0 \quad (2.31)$$

En remarque que le terme visqueux est le seul où la correction doit être tenue en compte. Pour pouvoir simplifier la correction d'ordre un dans (2.31), deux intégrations par parties sont nécessaires. Ce qui donne.

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\eta_0} F(r) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right\} r dr &= F r \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{\eta}^{\eta_0} - \int_{\eta}^{\eta_0} r \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} dr \\ &= \left[ r F \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]_{\eta}^{\eta_0} - \left[ r w \frac{\partial F}{\partial r} \right]_{\eta}^{\eta_0} + \int_{\eta}^{\eta_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right\} w r dr \\ &= \eta_0 F(\eta_0) \frac{\partial \omega}{\partial r}(\eta_0) - \eta F(\eta) \frac{\partial \omega}{\partial r}(\eta) - \eta_0 w(\eta_0) \frac{\partial F}{\partial r}(\eta_0) + \eta w(\eta) \frac{\partial F}{\partial r}(\eta) \\ &\quad + \int_{\eta}^{\eta_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right\} w r dr \\ &= -\eta F(\eta) \frac{\partial \omega}{\partial r}(\eta) - \eta_0 w(\eta_0) \frac{\partial F}{\partial r}(\eta_0) + \int_{\eta}^{\eta_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right\} w r dr \end{aligned} \quad (2.32)$$

A présent, on peut montrer que la correction  $w_1$  peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction adéquate  $F$ , telle que

$$F|_{r=\eta} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r=\eta_0} = 0 \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = -c(z, t) \quad (2.33)$$

Où  $c(z, t)$  est une fonction indépendante de  $r$  qui sera précisée ultérieurement.

On remarque que  $F$  prend la forme de  $f_0$ , c'est-à-dire dans le cas où  $c = 1$ ,  $F$  prend forme

$$F(r, h) = \frac{1}{2} f_0(r, h) = \frac{1}{2} (r^2 - \eta^2) - \eta_0^2 \ln r / \eta$$

## Solution approchée aux résidus pondérés

---

On peut écrire alors

$$\int_{\eta}^{\eta_0} F(r) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right\} r dr = q(z, t) / (2\pi) \quad (2.34)$$

Car à l'ordre un,  $\frac{\partial \omega}{\partial r} |_{\eta_0} = 0$ ,  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$  est un terme d'ordre deux).

Ainsi, l'équation (2.31), avec (2.34), prend la forme finale (voir l'annexe1)

$$q_t = I1 + D0 + D1$$

Ajoutée à l'équation

$$\eta_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \eta f - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (2.35)$$

L'équation (2.35) complète notre modèle d'ordre un pour les deux inconnues  $h$  et  $q$ .

**Remarque 1.** En utilisant l'équation de continuité, on peut calculer facilement  $u_0$ , qui est donné par la formule suivante :

$$\int_{\eta}^r \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_0) + \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \right) \rho d\rho = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{\eta}{r} f - \frac{1}{r} \int_{\eta}^r \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \right) \rho d\rho$$

## Chapitre 4: Analyse de stabilité linéaire

Les analyses de stabilité sont très courantes dans le domaine de l'instabilité hydrodynamique. Elles consistent à perturber un état de référence d'un système physique et à étudier l'évolution temporelle des perturbations grâce à une relation dite relation de dispersion. Deux comportements sont alors possibles, soit ces perturbations sont amorties dans le temps et l'état de référence est dit stable, soit elles s'amplifient et l'état de référence est alors instable. Le but d'une étude de stabilité est donc d'examiner comment des instabilités peuvent apparaître pour éventuellement être suivies et même contrôlées.

On s'intéresse pour l'instant à l'étude d'instabilité temporelle, qui détecte la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de base et donne aussi le seuil d'instabilité en fonction des paramètres du problème.

### 4.1 Choix du contrôle

Comme première étape vers la conception d'un système plus efficace de contrôle de feedback, nous pouvons étudier l'effet du décalage des observations par rapport aux actionneurs, toujours en utilisant une analyse en mode normal. Le schéma est basé sur des observateurs décalés.

Notre choix d'un contrôle est inspiré du travail de Thompson et al [13].

L'objectif de cet article est l'application du soufflage et de l'aspiration comme mécanisme de contrôle linéaire en réponse aux observations de la hauteur de l'interface.

$$f(x, t) = -\gamma_0(h(x, t) - 1) \quad (3.1)$$

Où  $\gamma_0$  est une constante réelle à déterminer, appelée paramètre de contrôle.

En pratique, nous n'attendons aucune de ces hypothèses tenir. Au lieu de cela, le fluide est injecté via un certain nombre d'actionneurs localisés. Nous étudions les schémas de contrôle basés sur des actionneurs ponctuels et des observateurs localisés,.

# Analyse de stabilité linéaire

---

## 4-2 Modes normaux

Les analyses de stabilité sont très courantes dans le domaine de l'instabilité hydrodynamique. Elles consistent à perturber un état de référence d'un système physique et à étudier l'évolution temporelle des perturbations grâce à une relation dite relation de dispersion. Deux comportements sont alors possibles, soit ces perturbations sont amorties dans le temps et l'état de référence est dit stable, soit elles s'amplifient et l'état de référence est alors instable. Le but d'une étude de stabilité est donc d'examiner comment des instabilités peuvent apparaître pour éventuellement être suivies et même contrôlées.

Mathématiquement, perturber un état de référence  $(h_0, q_0)$  revient à considérer que l'épaisseur du film et le débit local sont constitués d'une partie correspondant à cet état de référence, à laquelle s'ajoutent les perturbations, ici supposées en modes normaux :

$$h = h_0 + He^{i(\alpha z - \omega t)}, q = q_0 + Qe^{i(\alpha z - \omega t)} \quad (3.2)$$

Avec,  $h_0 = q_0 = 1$

Où  $H$  et  $Q$  sont des amplitudes des perturbations initiales,  $\alpha \in \mathbb{R}$  est le nombre d'onde,  $\omega = c\alpha \in \mathbb{C}$  est la fréquence,  $c$  étant la célérité complexe. Sa partie réelle représente la vitesse de phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

En substituant ces perturbations (3.2) dans les équations du modèle et en collectant que les termes linéaires et après élimination des amplitudes on aura comme conséquence la relation de dispersion pour le modèle correspondant, notée par

$$D(\alpha, \omega) = 0. \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) présente la relation de dispersion des perturbations d'amplitude infinitésimale. Toute l'information sur la stabilité linéaire de l'écoulement considéré infinitésimale  $r$  est contenue. Notons également qu'elle a été obtenue sans qu'on ait eu besoin de préciser la nature réelle ou complexe de  $a$  et  $\omega$ .

Dans le cadre d'une analyse dite temporelle, nous supposons le nombre d'onde  $a$  réel et chercherons des solutions pour  $\omega$  complexe.

# Analyse de stabilité linéaire

---

## 4.3 Étude de stabilité marginale temporelle :

On pose :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (3.4)$$

On remarque que le terme  $e^{-\omega_i t}$  définit la nature de stable ou instable temporelle de.

En effet

$e^{i(\alpha z - \omega t)} = e^{i\alpha z} e^{-i\omega t} = e^{i\alpha z} e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} = e^{i\alpha z} e^{-i\omega_r t} e^{-\omega_i t}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  si  $\omega > 0$  et tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  quand  $\omega < 0$ .

La stabilité du système vis-à-vis de perturbation infinitésimales est garantie dès lors qu'à  $R$  fixé, la partie imaginaire  $w_i$  de leur taux de croissance complexe  $w$  est négative pour tout  $a$ . Les modes  $a$  qui rendent le système marginale se déduisent de la condition  $w_i = 0$ .

## 4.4 Courbes de stabilité (résultats sur la stabilité)

### 4.4.1 Stabilité Neutre (Marginale)

Les courbes de stabilité marginale sont telles que

$$\omega_i = 0$$

On étudie la stabilité temporelle vis-à-vis d'une perturbation d'un nombre d'onde réel et complexe. Les résultats sont présentés sous forme de diagramme de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde  $a$ .

Le domaine stable concerne tous les modes à gauche de la courbe  $w_i < 0$ , et pour les modes qui se trouvent à droite de la courbe est le domaine instable.

# Analyse de stabilité linéaire

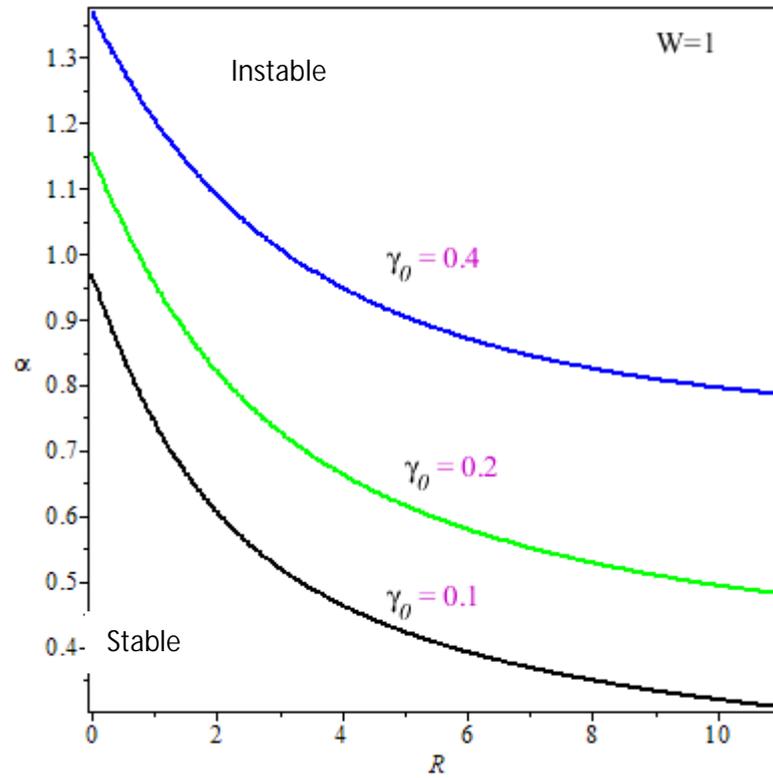


Figure 1 : Effet de  $\gamma_0$  sur l'instabilité en fixons  $W=1$ , pour  $h_0 = \frac{2}{100}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m]

## Analyse de stabilité linéaire

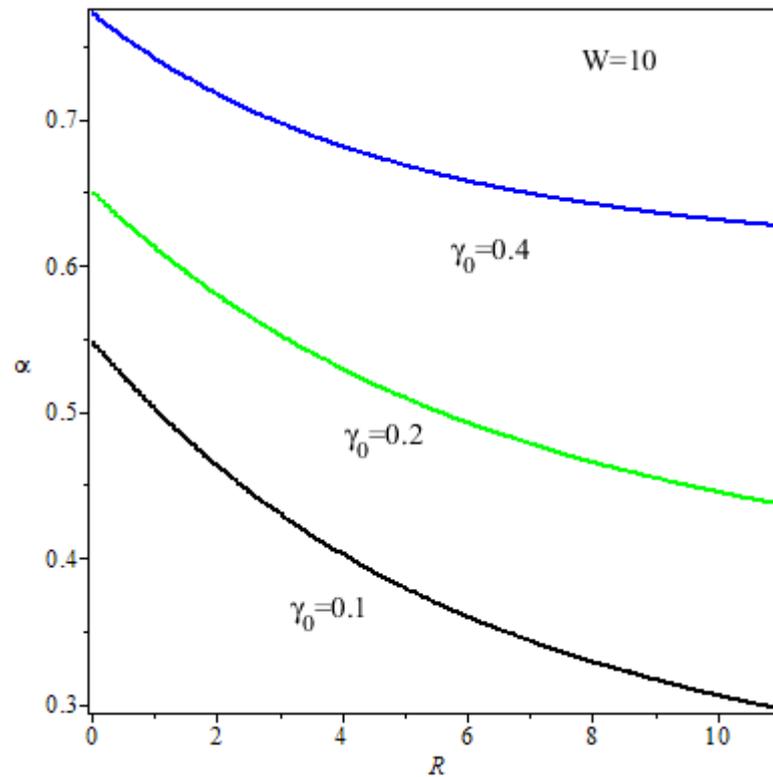


Figure 2 : Effet de  $\gamma_0$  sur l'instabilité en fixons  $W=1$ , pour  $h_0 = \frac{2}{1000}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m]

L'influence du contrôle est représentée sur la figure (1).

Une première constatation concerne l'écoulement sur un plan cylindrique vertical, l'écoulement se déstabilise à partir d'une valeur du Reynolds différente du zéro.

De plus, on observe dans ce diagramme que la zone instable rétrécit quand le paramètre de contrôle augmente.

## Analyse de stabilité linéaire

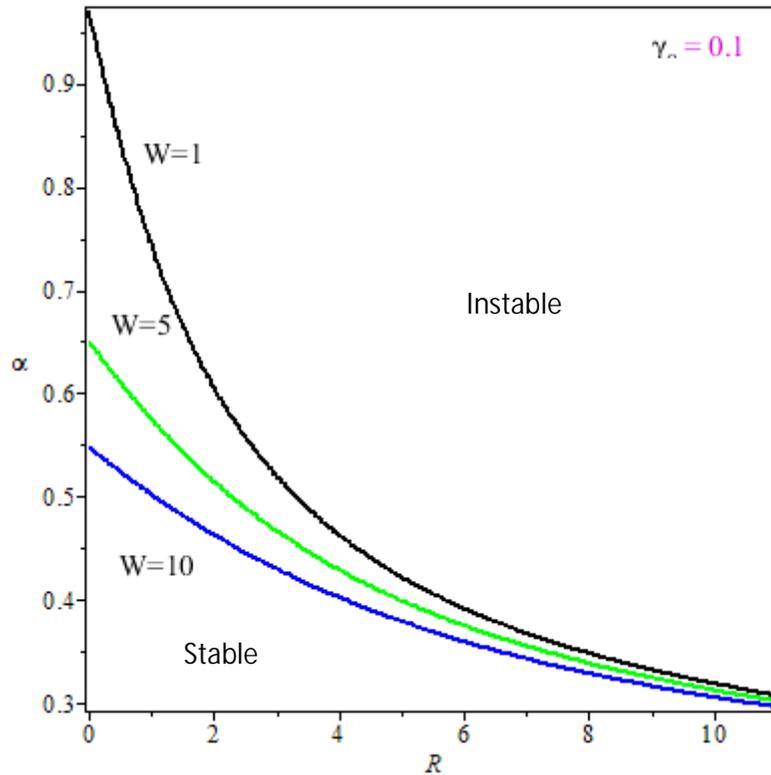


Figure 3 : Effet de  $W$  en fixant  $\gamma_0 = 0.1$  ;  $h_0 = \frac{2}{100}$  [m] et  $R_c = \frac{2}{10}$  [m]

L'influence du  $w$  est représentée sur la figure (3).

Contrairement au effet de contrôle  $\gamma_0$ ;

La variation de  $W$  montre que les perturbations sont moins stables quand le paramètre augmente. Donc on obtient la stabilité quand le nombre de  $W$  est petit.

# Analyse de stabilité linéaire

## 4.4.2 Taux d'amplification

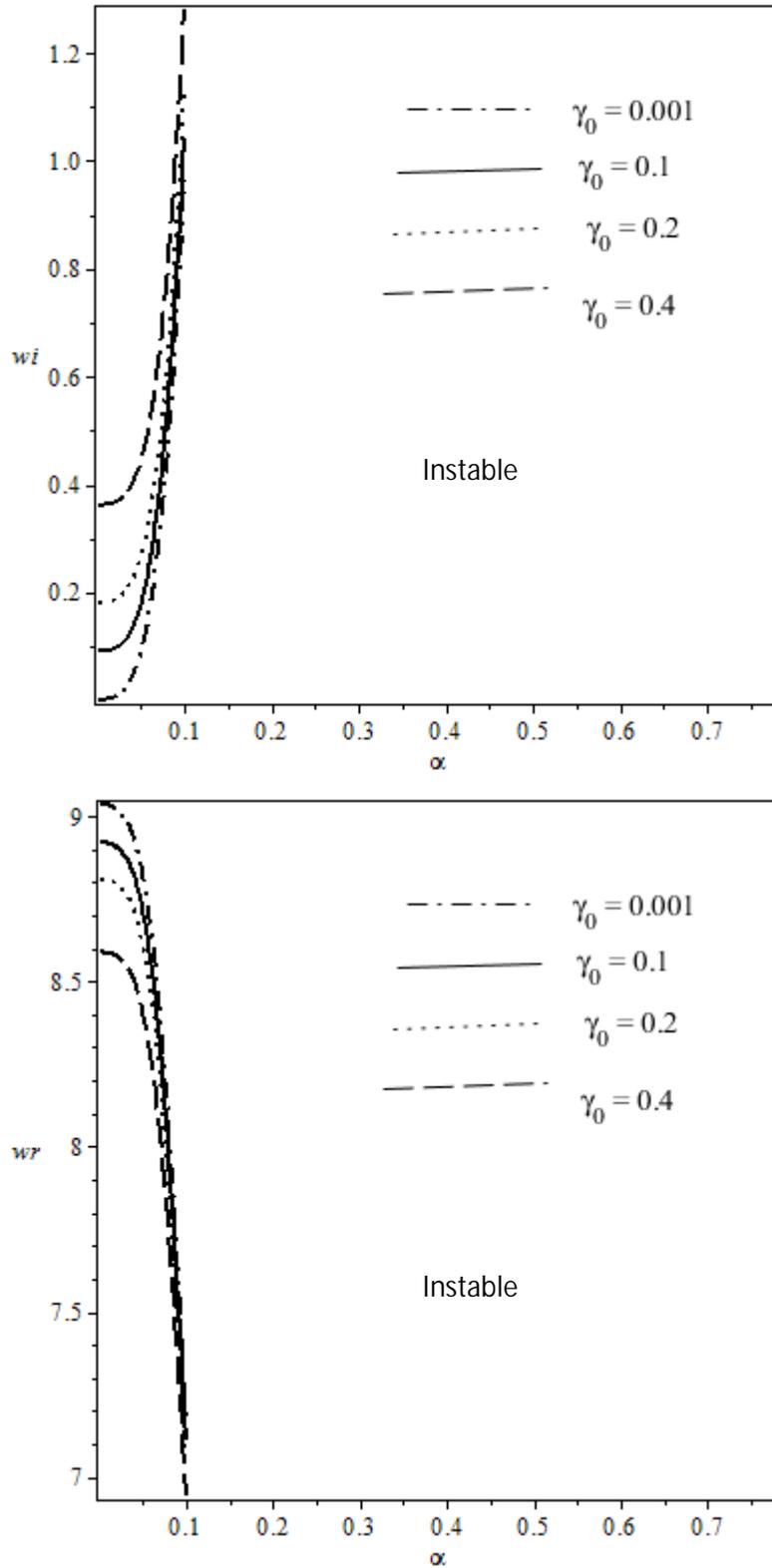


figure 4 : Taux d'amplification

## Analyse de stabilité linéaire

---

Nous nous sommes également intéressés au taux d'amplification des perturbations. Son évolution en fonction de  $a$  est représentée sur les figures (4). Pour un contrôle  $\gamma_0=0,001$  ; 0,01 ; 0,2 ; 0,4.

Nous remarquons que les perturbations de grandes longueurs d'onde sont instables, elles sont stables si par contre on l'imposait.

Nous remarquons aussi que la zone de l'instabilité augmente quand le nombre de  $\omega r$  augmente, contrairement au nombre  $\omega r$ , la zone de stabilité augmente en augmentant le nombre de  $\omega r$

## Conclusion général

---

### Conclusion général

Dans ce, travaille nous avons étudié la stabilité linéaire de l'écoulement d'un film mince sur une paroi cylindrique vertical. La rétroaction a été appliquée par injection et aspiration à travers la paroi vertical, avec le profil d'injection / d'aspiration requis déterminé en réponse aux observations de la hauteur de l'interface. Nous avons utilisé l'hypothèse des d'ondes longues combinée avec la méthode des résidus pondérés afin de construire un modèle cohérent à l'ordre un pour décrire l'effet de l'aspiration et de l'injection sur la dynamique du système. Nous notons que l'aspiration est le seul mécanisme par lequel la masse nette du système peut être modifiée, et ainsi les commandes d'aspiration sont la seule manière dont les perturbations de longueur d'onde infinie peuvent être rendues meilleures que la stabilité neutre; de plus, les commandes d'aspiration ne nécessitent aucune connaissance.

Dans un premier temps, nous avons établi par la méthode des résidus pondérée, un modèle de deux équations d'évolution couplées pour deux inconnues, l'épaisseur du film  $h$ , le débit instantané local  $q$ .

Par suite, en soumettant l'écoulement à des perturbations d'amplitude infinitésimale, nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de la solution de base préétablie .et on a étudié l'effet de contrôle  $\gamma_0$  sur la stabilité du film. On à mit en évidence que la zone des modes stables augmente avec l'augmentation du nombre de contrôle  $\gamma_0$ .

**Annexe :**

On pose où  $\eta_1 = \eta + h$  et  $A = \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)$

On a alors

$$D_1 = -\frac{1}{2} \left( (C_z - h_{zzz}) W + G \right) \left( \left( A - \frac{3}{4} \right) \eta_1^4 + \eta^2 \eta_1^2 - \frac{1}{4} \eta^4 \right) \quad \text{où } C = \frac{1}{2\eta_1} (2 - h_z^2).$$

$$I_1 = R(C_1 q_t + C_2 q_z + C_3 h_z + C_f f)$$

$$C_1 = \frac{1}{48} \frac{(24A^2 - 36A + 17) \eta_1^6 + 24 \left( A - \frac{5}{4} \right) \eta^2 \eta_1^4 + 15 \eta^4 \eta_1^2 - 2 \eta^6}{\pi \left( \left( A - \frac{3}{4} \right) \eta_1^4 + \eta^2 \eta_1^2 - \frac{1}{4} \eta^4 \right)}$$

$$C_2 = \frac{1}{\left( 4A \eta_1^4 - \eta^4 + 4 \eta^2 \eta_1^2 - 3 \eta_1^4 \right)^2 \pi^2} \left( 16q \left( \left( A^3 - \frac{9}{4} A^2 + \frac{197}{96} A - \frac{301}{384} \right) \eta_1^8 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{11}{8} \eta^2 \left( A^2 - \frac{39}{22} A + \frac{311}{264} \right) \eta_1^6 + \frac{3}{16} \eta^4 \left( A^2 + \frac{13}{3} A - \frac{49}{8} \right) \eta_1^4 + \frac{1}{24} \left( A \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{65}{8} \right) \eta^6 \eta_1^2 - \frac{5}{192} \eta^8 \right) \right)$$

$$C_3 = -\frac{1}{\left( 4A \eta_1^4 - \eta^4 + 4 \eta^2 \eta_1^2 - 3 \eta_1^4 \right)^3 \pi^2} \left( 64 q^2 \eta_1 \left( \left( A^4 - 3A^3 + \frac{61}{16} A^2 - \frac{55}{24} A \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{51}{128} \right) \eta_1^{10} + \frac{7}{4} \eta^2 \left( A^3 - \frac{69}{28} A^2 + \frac{19}{7} A - \frac{451}{672} \right) \eta_1^8 + \frac{1}{2} \eta^4 \left( A^3 + \frac{9}{8} A^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{101}{16} A + \frac{31}{12} \right) \eta_1^6 + \frac{9}{16} \eta^6 \left( A^2 + \frac{29}{27} A - \frac{7}{6} \right) \eta_1^4 + \frac{3}{32} \eta^8 \left( A + \frac{55}{36} \right) \eta_1^2 \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{384} \eta^{10} \right) \right)$$

$$C_f = -\frac{1}{\left( 4A \eta_1^4 - \eta^4 + 4 \eta^2 \eta_1^2 - 3 \eta_1^4 \right)^2 \pi} \left( 8q \eta \left( \left( A^3 - \frac{9}{4} A^2 + \frac{11}{6} A - \frac{37}{96} \right) \eta_1^8 \right. \right. \\ \left. \left. + \eta^2 \left( A^2 - 3A + \frac{25}{24} \right) \eta_1^6 + \frac{3}{4} \eta^4 \left( A^2 + \frac{4}{3} A - \frac{5}{4} \right) \eta_1^4 + \frac{1}{6} \eta^6 \left( A + \frac{7}{4} \right) \eta_1^2 \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{96} \eta^8 \right) \right)$$

# Références bibliographiques

---

## Références bibliographiques

- [1] Duprat, C. , Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale, *Fluid Dynamics*. Université Pierre et Marie Curie - Paris(2009).
- [2] Ndoumbe, S. Lusseyran, F. Izrar, B. *Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant*, C. R. Mécanique 331 pp 173–178, (2003).
- [3] Kapitza P. L. and Kapitza S. P., Wave flow of thin layers of a viscous fluid, *Zh. Eksp. Teor.Fiz* 19 ,pp105–120, (1949).
- [4] Yih, C.-S. , Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* 6 : 321-34, (1963).
- [5]C.-S. Yih, Stability of parallel laminar flow with a free surface, in *Proceedings of the 2nd U.S. National Congress on Applied Mechanics*, pp. 623–628, ASME, 1955.
- [6]T. B. Benjamin, Wave formation in laminar flow down an inclined plane,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 2, no. 06, pp. 554–573, 1957.
- [7]C.-S. Yih, “Stability of liquid flow down an inclined plane,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 3, pp. 321–334, 1963.
- [8]J. Benney, Long waves on liquid films, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 45, pp. 150–155, 1966.
- [9] Shkadov V.Y., Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity, *Izv. Ak. Nauk. SSSR, Mekh. Zhi. Gaza*, 2, 43-51, 1967. English translation in *Fluid dynamics*, Faraday Press, N.Y., 2, 29-34, 1970.
- [10] Ruyer-Quil C., Manneville P., Improved modeling of flows down inclined planes, *Eur. Phys. J. B*, 15,357-369 , 2000.
- [11] : M-BontouNET :Mémoire « Modèle asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince »2011.
- [12]J. Liu and J. P. Gollub, “Onset of spatially chaotic waves on flowing films,” *Phys. Rev. Lett.* 70, 2289–2292 (1993).
- [13] M. Vlachogiannis and V. Bontozoglou, “Experiments on laminar film flow along a periodic wall,” *J. Fluid Mech.* 457, 133–156 (2002).
- [14] C. Heining, T. Pollak, and M. Sellier, “Flow domain identification from free surface velocity in thin inertial films,” *J. Fluid*

# Références bibliographiques

---

Mech. 720, 338–356 (2013).

[15] M. Schorner, D. Reck, and N. Aksel, “Does the topography’s specific shape matter in general for the stability of film flows?,”

Phys. Fluids 27, 042103 (2015).

[16] A. B. Thompson, D. Tseluiko, and D. T. Papageorgiou, “Falling liquid films with blowing and suction,” J. Fluid Mech. 787, 292–330 (2016).

[17] E. Momoniat, R. Ravindran, and S. Roy, “The influence of slot injection/suction on the spreading of a thin film under gravity and surface tension,” Acta Mech. 211, 61–71 (2010).

[18] S. H. Davis and L. M. Hocking, “Spreading and imbibition of viscous liquid on a porous base. II,” Phys. Fluids 12, 1646–1655 (2000).

[19] Schwartz and E. E. Michaelides, “Gravity flow of a viscous liquid down a slope with injection,” Phys. Fluids 31, 2739–2741 (1988).

## **Résumé :**

On s'intéresse à l'instabilité d'un écoulement bidimensionnel d'un film mince s'écoulant par gravité sur une paroi cylindrique verticale. Les fluides en écoulement sont newtoniens et incompressibles. Un modèle basé sur une méthode aux résidus pondérés est développé. Ceci a permis de construire un modèle de deux équations d'évolution de l'interface et du débit local. Une étude de stabilité linéaire par rapport à l'écoulement de base a été effectuée.

## **Abstract:**

We are interested in the instability of a two-dimensional flow of a thin film flowing by gravity on a vertical cylindrical wall. Flowing fluids are Newtonian and incompressible. A model based on a weighted residual method is developed. This made it possible to build a model of two evolution equations for the interface and the local flow. A linear stability study with respect to the base flow was performed.