République Algérienne Démocratique Et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifiques.

Université Abderrahmane-Mira, Béjaia.
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Analyse Mathématique.

Par : Ould Ali Noura.

Soutenue le 30/06/2022.

Combinatoire des mots

Présidente	Mme K. Kheloufi	Professeur	U. A. Mira Béjaia.
Encadreur	M. R. Chemlal	Maitre conf. A	U. A. Mira Béjaia.
Co-encadreur	M. N. Bédaride	Maitre conf. HDR	U. Aix Marseille.
Examinatrice	Mme F. Talbi	Professeur	U. A. Mira Béjaia.

Année universitaire : 2021/2022.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chers parents qui m'ont soutenue tout au long de mon parcours et ont toujours été là pour moi.

À ma sœur et mon petit frère pour leurs soutiens malgré mes sauts d'humeurs.

À toutes mes amies et mes camarades de ma promo.

À toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à mes encadreurs.

J'adresse mes remerciements à Mr R.Chemlal qui m'a fait l'honneur de m'encadrer, je le remercie également pour tous ses conseils, sa disponibilité permanente et son aide tout au long de l'élaboration de ce travail. Je ne le remercierais jamais assez.

Je remercie également Mr N.Bédaride qui m'a fait l'honneur de m'encadrer et de m'avoir fait découvrir un domaine passionnant que je ne connaissais pas. Je tiens aussi à le remercier pour son aide, ses conseils et sa disponibilité durant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie les membres du jury Mme Kheloufi et Mme Talbi d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Mes remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques y compris mon cher papa.

Résumé

La combinatoire des mots et les systèmes dynamiques sont deux branches des mathématiques qui se sont développées indépendamment. Les premiers liens sont apparus au $20^{\text{ème}}$ siècle. Dans ce mémoire intitulé "**Combinatoire des mots**", on s'est intéressé aux propriétés topologiques et ergodiques des systèmes dynamiques symboliques obtenus à partir de mots infinis.

On a d'abord présenté les différentes notions de base en dynamique topologique, dynamique symbolique, théorie ergodique et combinatoire des mots.

On a présenté dix catégories de mots où on a montré les différents liens existants entre elles. Ces liaisons nous ont permis d'obtenir une classification de tous les types de mots possibles, et ainsi restreindre le nombre de possibilités à 20, tandis qu'il était à 1024.

Enfin, on a étudié les différentes propriétés que vérifie le shift sur $\mathcal{A}^\omega$. Le shift sur cet espace n'est pas uniquement ergodique, c'est pour cela qu'on s'est intéressé aux mots sturmiens, on a montré que les sous-shift associés à ces mots sont uniquement ergodiques du fait qu'ils sont obtenus par codage de rotations irrationnelles.

Abstract

Combinatorics on words and the theory of discrete dynamical systems are two branches of mathematics that have evolved independently. The first links appeared in the 20^{th} century. In this dissertation entitled "**Combinatorics on words**", we are interested in the topological and ergodic properties of symbolic dynamical systems defined on infinite words.

First, we will present basic notions in topological dynamics, symbolic dynamics, ergodic theory and combinatorics on words.

We will define ten categories of words, and we will show the different links between each category. These links allowed us to obtain a classification of all possible words, thus we can restrict the number of possibilities to 20, whereas it was 1024.

After that, we will study the different properties of the shift on $\mathcal{A}^{\omega}$ and show that the action of the shift on this space is not uniquely ergodic. Finally, we will prove the theorem of Morse-Hedlund which establish a relation between sturmian words and irrational rotations. This will permit to deduce the unique egodicity of sturmian subshifts.

Table des matières

Introduction **8**

1 Propriétés des systèmes dynamiques discrets. **11**

1.1 Généralités 11

1.2 Quelques exemples de systèmes dynamiques 12

1.2.1 Systèmes dynamiques définis sur le cercle unité 13

1.3 Rappels de dynamique topologique 17

1.3.1 Factorisation et mélange topologique 25

1.4 Théorie ergodique 26

1.4.1 Mesures invariantes 27

1.4.2 Existence de mesures invariantes 28

1.4.3 Exemple de mesure invariante 29

1.4.4 Mesures portées par des points particuliers 30

1.4.5 Ergodicité 31

1.4.6 Unique ergodicité 36

1.5 Dynamique symbolique 37

1.5.1 Codage symbolique 38

1.5.2 Combinatoire des mots 38

2 Classification des mots morphiques **42**

2.1 Généralités 42

2.2 Types de mots 43

2.2.1 Mots purement morphiques 43

2.2.2 Mots purement uniformément morphiques 44
2.2.3 Mots morphiques 46
2.2.4 Mots uniformément morphiques 47
2.2.5 Mots purement morphiques primitifs 48
2.2.6 Mots morphiques primitifs 48
2.2.7 Mots purement uniformément morphiques primitifs 49
2.2.8 Mots uniformément morphiques primitifs 50
2.2.9 Mots récurrents 50
2.2.10 Mots uniformément récurrents 50
2.3 Classification 55
2.4 Les exemples 65

3 Propriétés des sous-shift 85

3.1 Espaces symboliques 85
3.1.1 Le décalage de Bernoulli 87
3.2 Propriétés des sous-shift 89
3.2.1 Transitivité et minimalité 89
3.2.2 Expansivité, distalité et equicontinuité 91
3.2.3 Ergodicité 92
3.3 Caractérisations des mots sturmiens 96
3.3.1 Mots sturmiens 97
3.3.2 Mots équilibrés 97
3.3.3 Mots mécaniques 103
3.4 Sous-shift sturmien 108

Conclusion 110

Annexe 111

Appendice 1 111
Appendice 2 112

Bibliographie 114

Table des figures

1.1 Diagramme itératif de f en $x_0 = 0.9$. 12

1.2 Identification du cercle unité S^1 à l'intervalle $[0, 1]$. 13

1.3 Rotation sur le cercle S^1. 14

1.4 L'application doublement de période sur S^1. 16

1.5 Représentation d'un ensemble syndétique. 23

1.6 Codage du point $x = \frac{1}{24}$ par la fonction B_2. 38

2.1 Arbre illustrant la classification de mots obtenus. 58

2.2 Carte récapitulative des différents types de mots. 84

3.1 Courbes représentants la complexité des mots. 97

3.2 Illustration de la position de $0w$ dans $u[i..i + 2n + 3]$. 100

3.3 Interprétation graphique des mots mécaniques. 104

3.4 Interprétation graphique des mots mécaniques pour $\alpha = 0.4$, $\rho = 0.2$. 104

Introduction

La combinatoire des mots est une branche des mathématiques qui a pour objet l'étude des mots infinis définis sur un ensemble fini de symboles appelé un alphabet. Les premiers travaux remontent au $19^{\text{ème}}$ siècle chez Prouhet et Gauss. Au début du $20^{\text{ème}}$ siècle, Axel-Thue est le premier à avoir étudié les mots sans carrés et les mots sans cubes.

Vers les années 40, Gustav Hedlund et Marston Morse ont étudié les mots sturmiens et ont commencé à établir des liens entre la combinatoire des mots et d'autres domaines mathématiques notamment les systèmes dynamiques.

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui est apparu avec l'étude du mouvement des planètes dans le temps.

Un système dynamique est la donnée d'un système (l'espace des phases) et d'une loi décrivant l'évolution de ce dernier. Cette loi peut être donnée par deux types de relations : soit par une équation différentielle ou bien par une application de l'espace des phases dans lui même. Ce deuxième type s'appelle un système dynamique discret.

A leurs tours, les systèmes dynamiques discrets donnent naissance à plusieurs branches différentes tel que la dynamique topologique, la théorie ergodique et la dynamique symbolique.

La dynamique topologique étudie des systèmes dynamiques où l'espace des phases est un espace métrique compact, l'objectif principal est l'étude des itérés successifs d'un point donné par une application continue définie sur l'espace des phases dans lui même.

La théorie ergodique étudie les systèmes dynamiques où l'espace des phases est un espace mesurable. Puis en introduisant une mesure invariante pour la fonction qui définie le système, on obtient des systèmes dynamiques mesurés.

La dynamique symbolique consiste au codage des systèmes dynamiques, l'idée intuitive est de découper l'espace des phases en morceaux, puis associer à chaque morceau un symbole. Pour un point initial donné, on associe une suite de symboles représentants les morceaux auxquels appartiennent les itérés successifs du point de départ.

Ce sont justement ces suites de symboles qui représentent des mots infinis. Les mots jouent un rôle très important en informatique théorique, ils sont utilisés dans les systèmes de Lindenmayer qui sont des systèmes de réécriture formelle qui modélisent le processus de développement et de prolifération de plantes ou de bactéries.

En mathématiques, les mots représentent l'objet principal de construction de systèmes dynamiques symboliques.

Dans ce mémoire, on étudie les différentes catégories de mots et retrouvons une classification de celles-ci qui nous permettra de construire des systèmes symboliques vérifiant certaines propriétés.

Le premier chapitre "Propriétés des systèmes dynamiques discrets" est consacré aux rappels sur les notions de base des systèmes dynamiques discrets en général, puis on présentera les notions de base de dynamique topologique consistant à définir la transitivité, la minimalité, et de définir une relation d'équivalence "la conjugaison topologique" et une relation d'ordre "la factorisation topologique" entre deux systèmes dynamiques quelconques. Ces deux relations permettent le passage de certaines propriétés d'un système dynamique à un autre. On va ensuite énoncer quelques rappels sur la théorie ergodique où on va définir la notion de mesure invariante, mesure ergodique et quelques résultats qui nous seront d'usage dans le troisième chapitre. Enfin, on donne quelques rappels sur la dynamique symbolique et en combinatoire des mots.

Dans le deuxième chapitre "Classification de mots morphiques", on va s'intéresser aux mots infinis. On va classifier les mots selon dix catégories différentes qui ne sont pas indépendantes, puis on va établir les différents liens existants entre celles-ci. Cela nous permettra d'obtenir une classification de mots et de passer de 1024 à 20 possibilités, et présentons ainsi un exemple de chaque cas. Ce travail a été développé dans [2].

Dans le dernier chapitre "Propriétés des sous-shift", On va étudier les différentes propriétés que vérifie le shift sur l'espace $\mathcal{A}^{\omega}$ (minimalité, transitivité, ...). Pour les propriétés que ne vérifie pas ce système, on va essayer de construire des sous-ensembles invariants de $\mathcal{A}^{\omega}$ sur lesquels ces dernières sont vérifiées. Enfin, on va s'intéresser à une catégorie particulière de sous-shift obtenue par les mots sturmiens. On va montrer que ces mots sont obtenus par codage de rotations irrationnelles puis déduire que les sous-shift associés sont minimaux et uniquement ergodiques.

Chapitre 1

Propriétés des systèmes dynamiques discrets.

Ce chapitre est destiné aux rappels des éléments de base de la théorie des systèmes dynamiques discrets. On s'intéressera à trois branches différentes de ce domaine : la dynamique topologique qui étudie les systèmes dynamiques discrets d'un point de vue topologique, nous aborderons ainsi la notion de transitivité qui est liée à l'existence d'une orbite dense, et la conjugaison topologique qui est une relation d'équivalence très utile pour classifier ces systèmes. La théorie ergodique qui est l'étude des systèmes dynamiques discrets d'un point de vue mesurable où nous allons construire des systèmes dynamiques mesurés. Enfin, la dynamique symbolique qui représente des systèmes obtenus grâce au codage de systèmes dynamique discret.

1.1 Généralités

Un système dynamique discret est un couple (X, f) où $f : X \longrightarrow X$ est une application continue et X un espace métrique compact dit espace des phases. L'objet principal des systèmes dynamique est d'étudier les itérations successives d'un point initial $x_0 \in X$ par f, on désignera par $f^i(x_0)$ le $i^{\text{ème}}$ itéré de x_0 par f, c-à-d :

$$f^i(x_0) = (\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{i\ fois})(x_0)$$

Définition 1.1 *L'orbite d'un point x_0 est l'ensemble de ses itérés par f, on le note :*

$$\theta(x_0) = \{f^i(x_0), i \in \mathbb{N}\}$$

Si de plus f est inversible, alors

$$\theta(x_0) = \{f^i(x_0), i \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple 1.1 *Soit $([0,1], x^3)$ un système dynamique discret, voici le diagramme itératif de $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0.9$.*

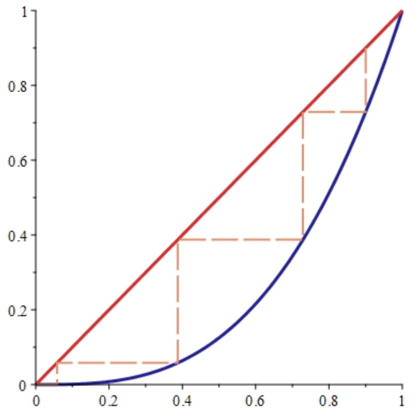


FIGURE 1.1 – Diagramme itératif de f en $x_0 = 0.9$.

Définition 1.2 *Soit (X, f) un système dynamique.*

- *Un point $x_0 \in X$ est un **point fixe** si $f(x_0) = x_0$.*
- *Un point x_0 est dit **k-périodique** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x_0) = x_0$, (le plus petit entier vérifiant cette propriété est appelé période de x_0).*
- *Un point x_0 est dit **ultimement périodique** s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m(x_0)$ est un point périodique.*

1.2 Quelques exemples de systèmes dynamiques

Il existe une grande variété de systèmes dynamiques définis sur différents ensembles (sur des intervalles, sur le cercle unité S^1, sur le tore, sur des espaces symboliques ...), on va présenter deux systèmes dynamiques définis sur le cercle S^1 et on verra par la suite un exemple défini sur un espace symbolique.

1.2.1 Systèmes dynamiques définis sur le cercle unité

On peut définir le cercle unité noté S^1 représentant un cercle de périmètre 1 de deux façons différentes, la notation additive et la notation multiplicative. **([3], p.4)**

- Pour la notation additive, on devra d'abord définir la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Les classes d'équivalences sont définies par :

$$\widehat{x} = \{x + m, m \in \mathbb{Z}\}$$

et comme la relation d'équivalence est compatible avec l'addition alors on a :

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$$

Le cercle unité S^1 représente l'ensemble des classes d'équivalence de la relation définie ci-dessus (l'ensemble quotient), c'est-à-dire que $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on peut voir ceci comme étant l'intervalle [0,1] où les points 0 et 1 sont identifiés.

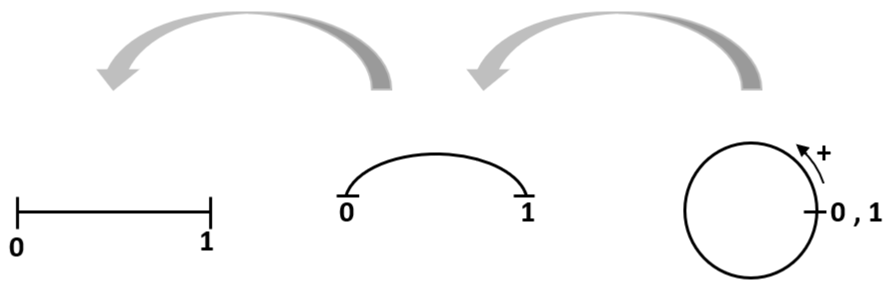


FIGURE 1.2 – Identification du cercle unité S^1 à l'intervalle $[0, 1]$.

- La notation multiplicative consiste à définir S^1 sur le plan complexe comme étant l'ensemble des nombres complexes de module $\frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire :

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \tfrac{1}{2\pi}\}$$

Les deux notations sont liées par l'isométrie suivante :

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto \frac{1}{2\pi} \times e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

La rotation sur le cercle

On définit la rotation d'angle $2\pi\alpha$ sur S^1 par l'application définie par :

$$R_\alpha(x) = (x + \alpha) \text{ mod } 1 = \{x + \alpha\}$$

où $\alpha \in [0, 1[$ et $\{x + \alpha\}$ représente la partie fractionnaire de $x + \alpha$.

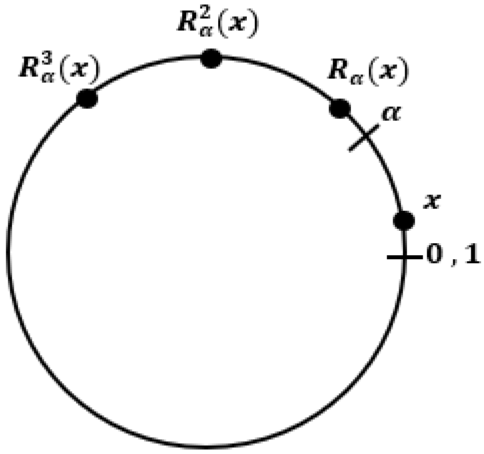


FIGURE 1.3 – Rotation sur le cercle S^1.

Remarque 1.1

- *Par abus de langage, on parle de rotation d'angle α au lieu de rotation d'angle $2\pi\alpha$.*
- $R_\alpha^n(x) = (x + n\alpha)$ *mod* 1 *se démontre facilement par récurrence en utilisant le fait que* $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$.
- *La rotation sur le cercle est inversible et* $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$.

Proposition 1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap S^1$ alors R_α n'admet pas de point périodique.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap S^1$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$, alors tous les points sont périodiques de période q pour R_α.*

Démonstration

1. *Raisonnons par l'absurde et supposons que R_α admet un point périodique. Alors $\exists x \in S^1$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(x) = x &\Longrightarrow (x + n\alpha) \ mod \ 1 = x \\ &\Longrightarrow n\alpha = \frac{p}{q} \ , \ avec \ p, q \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Contradiction avec l'hypothèse, d'où R_α n'admet pas de points périodiques.

2. *Montrons d'abord que $R_\alpha^q(x) = x, \forall x \in S^1$. On a*

$$\begin{aligned} R_\alpha^q(x) = (x + q\alpha) \ mod \ 1 = (x + p) \ mod \ 1 &\Longrightarrow R_\alpha^q(x) = x \\ &\Longrightarrow R_\alpha^q(x) = x, \forall x \in S^1 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que q est la plus petite période.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\exists q' \in \mathbb{N}$, tel que $q' < q$ et $R_\alpha^{q'}(x) = x$. Alors on a :

$$\begin{aligned} R_\alpha^{q'}(x) &= (x + q'\alpha) \ mod \ 1 \\ &= \left(x + q'\frac{p}{q}\right) \ mod \ 1 = x \end{aligned}$$

D'où : $q'\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$
Comme $p \wedge q = 1$, alors q divise q' (contradiction avec $q' < q$).
D'où tous les points sont q-périodiques. □

On définit maintenant dans cette deuxième partie une autre série d'application sur S^1.

La dilatation du cercle ([3], p.5)

Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on définit l'application dilatante comme suit :

$$\begin{array}{rcl} B_m : S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & mx \bmod 1 \end{array}$$

Pour déterminer les points périodiques de l'application dilatante B_m, il est plus facile de les retrouver en base m. On va s'intéresser au cas où $m = 2$.
L'application dilatante pour $m = 2$ est dite **l'application doublement de période**, car elle double la distance entre deux itérés successifs.

$$\begin{array}{rcl} B_2 : S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & 2x \bmod 1 \end{array}$$

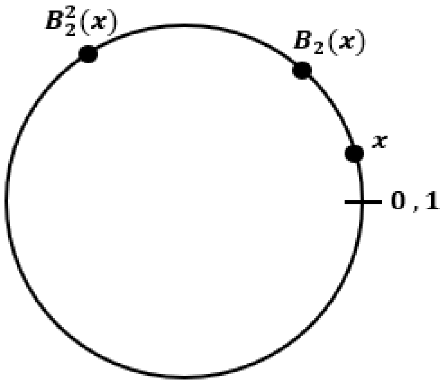


FIGURE 1.4 – L'application doublement de période sur S^1.

Passons maintenant à la détermination des points fixes de B_2. Pour cela on devra écrire x en binaire puis résoudre l'équation $B_2(x) = x$.
Si $x \in S^1$, alors on peut l'écrire en base 2 sous la forme $x = 0, x_1x_2x_3....|_{Base_2}$ $x_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.
Alors

$$B_2(x) = x \iff 0, x_2x_3x_4...|_{Base_2} = 0, x_1x_2x_3x_4...|_{Base_2}$$

Par identification on obtient

$$x_i = x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}^* \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 0.111...|_{Base_2} = 1 \end{cases}$$

D'où $x = 0$ est l'unique point fixe.

Déterminons maintenant les points périodiques de période 2 :

$$B_2^2(x) = x \iff 0, x_3x_4x_5...|_{Base_2} = 0, x_1x_2x_3...|_{Base_2}$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases} x_{2i} = x_{2i+2} \\ x_{2i+1} = x_{2i+3} \end{cases}, \forall i \in \mathbb{N}^* \iff x = 0, x_1x_2x_1x_2x_1...|_{Base_2}$$

Alors :

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 0.1010...|_{Base_2} \text{ ou } x = 0.0101...|_{Base_2} \end{cases}$$

Mais comme $x = 0$ est un point fixe, on déduit que $x = 0.1010...|_{Base_2}$ ou $x = 0.0101...|_{Base_2}$. En revenant en base décimale :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{2i+1} \\ \text{ou} \\ x = \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{2i} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

C'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc elle est convergente. Avec un simple calcul, on obtient que $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$.

Il est facile de construire des points $p-$périodiques en choisissant correctement les séquences à répéter dans l'écriture binaire.

1.3 Rappels de dynamique topologique

On va élaborer dans cette partie des résultats topologiques élémentaires des systèmes dynamiques discrets.

Définition 1.3 *Un ensemble $A \subset X$ est dit **invariant** si $f(A) \subset A$.*

Remarque 1.2 *Si $A \subset X$ est un sous-ensemble invariant, alors $\overline{A}$ est invariant.*

Définition 1.4 ***([13], p.56)***

- *Un point x_0 est dit **transitif** si $\overline{\theta(x_0)} = X$.*
- *Un système (X, f) où tous les points sont transitifs est dit **minimal**.*

Proposition 1.2 *Le système dynamique (X, f) est minimal si et seulement si les seuls fermés invariants sont X et $\emptyset$.*

Démonstration

$\Rightarrow$) *Supposons que (X, f) est minimal et montrons que X et $\emptyset$ sont les seuls fermés invariants.*
Raisonnons par l'absurde. Soit A un fermé invariant non vide de X.
Comme $A \neq \emptyset$, alors $\exists x \in A$, tel que $\overline{\theta(x)} = X$ (car (X, f) est minimal).
D'autre part , comme A est un ensemble invariant alors :

$$\begin{aligned} \theta(x) \subset A &\Longrightarrow \overline{\theta(x)} = \overline{A} = A \\ &\Longrightarrow X = A \quad (\text{ contradiction avec l'hypothèse}) \\ &\Longrightarrow X \text{ et } \emptyset \text{ sont les seuls fermés invariants.} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) *Supposons que les seuls fermés invariants sont X est $\emptyset$ et montrons que X est minimal.*
Soit $x \in X$, $\overline{\theta(x)}$ est un fermé invariant de X.
Comme le seul fermé invariant non vide est X, donc $\overline{\theta(x)} = X$
D'où (X, f) est minimal.

Définition 1.5

- *Une application f est dite **transitive** si pour tous ouverts $U, V \subset X$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.*
- *Un système dynamique (X, f) où f est transitive est dit **transitif**.*

Définition 1.6

*On dit qu'un ensemble A est un G_δ **dense** si c'est une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Proposition 1.3

Soit (X, f) un système dynamique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *(X, f) est un système dynamique transitif.*

(b) *L'ensemble des points transitifs est G_δ dense.*

(c) *Il existe un point transitif.*

(d) *Si X possède un sous-ensemble fermé invariant A alors $A = X$ ou $\mathring{A} = \emptyset$.*

Démonstration

$a \Rightarrow b$:

Montrons que l'ensemble des points transitifs est un G_δ dense.

X est un espace compact $\Longrightarrow \exists (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une famille dénombrable d'ouverts tel que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$

Posons $V_n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} f^{-i}(U_n)$ qui est un ouvert.

Soit $U \subset X$ un ouvert quelconque, comme f est transitive alors $\exists i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, f^{-i_0}(U_n) \cap U \neq \emptyset &\Longleftrightarrow V_n \cap U \neq \emptyset \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap U \neq \emptyset\end{aligned}$$

Comme $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ rencontre tout ouvert de X, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est un G_δ dense.

Posons $V = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, Montrons que V est l'ensemble des points transitifs.

$$\begin{aligned}x \in V &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists i_0 > 0, \ f^{i_0}(x) \in U_n \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ \theta(x) \cap U_n \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \overline{\theta(x)} = X\end{aligned}$$

D'où V représente l'ensemble des points transitifs, donc c'est un G_δ dense.

$b \Rightarrow c$:

L'ensemble des points transitifs est dense, alors il est non vide.

D'où il existe un point transitif.

$c \Rightarrow d$:

Soit $x \in X$ un point transitif et $A \subset X$ un fermé invariant.

Supposons que $\mathring{A} \neq \emptyset$, et montrons que $A = X$.

$$\begin{aligned}
\mathring{A} \neq \emptyset &\Longrightarrow \exists U \subset A,\ (U \text{ ouvert}) \\
&\Longrightarrow \theta(x) \cap U \neq \emptyset \quad (\text{ car } \theta(x) \text{ est dense}) \\
&\Longrightarrow \exists i > 0,\ f^i(x) \in U \subset A \\
&\Longrightarrow \theta(x) \subset A \ (\text{ car } A \text{ est invariant }) \\
&\Longrightarrow X = \overline{\theta(x)} \subset A \quad (\text{ car } \overline{A} = A)
\end{aligned}$$

D'où $A = X$

$d \Rightarrow a$:

Soit $U \subset X$ un ouvert non vide, $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(U)$ est un ensemble invariant d'intérieur non vide (car $U = f^0(U) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(U)$), alors il est dense.
$\forall$ V ouvert de X, on a :

$$V \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(U) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists i \in \mathbb{Z},\ f^{-i}(U) \cap V \neq \emptyset$$

D'où (X, f) est un système dynamique transitif. □

Proposition 1.4

1. *(S^1, R_α) est un système dynamique minimal pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap S^1$.*
2. *(S^1, R_α) n'est pas un système dynamique transitif pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap S^1$.*

Démonstration

1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap S^1$, $x \in S^1$. Montrons que x est transitif.*
   Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
   On considère les points $x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), ..., R_\alpha^{n-1}(x)$. Comme S^1 est de périmètre égal à 1, alors il existe deux entiers $i, j \in [0, n[$ tel que :

$$d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) \leqslant \frac{1}{n}$$

Comme R_α préserve les distances, on obtient :

$$d(x, R_\alpha^{i-j}(x)) = d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$$

D'autre part, $R_\alpha^{i-j} = R_\beta$ où $\beta = (i-j)\alpha \bmod 1$.
Alors les points $x, R_\beta(x), R_\beta^2(x), ..., R_\beta^{n-1}(x)$ sont à une distance inférieur à $\frac{1}{n}$ les uns des autres.
Alors $\forall x \in S^1$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que y appartient à l'arc formé par $R_\beta^i(x)$ et $R_\beta^{i+1}(x)$, et donc $d(x, R_\beta^i(x)) < \varepsilon$.
D'où x est un point transitif.

2. *Comme $\alpha \in \mathbb{Q} \cap S^1$,alors $\exists\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$ alors tout point $x \in S^1$ est périodique de période q. Donc :*

$$\overline{\theta(x)} = \{x, R_{\alpha(x)}, R_\alpha^2(x), ..., R_\alpha^{q-1}(x)\} \neq S^1$$

D'où le système n'est pas transitif. □

Proposition 1.5

Le système (S^1, B_2) est transitif mais pas minimal.

Démonstration

- *L'application B_2 admet 0 comme point fixe, donc ce n'est pas un point transitif, par suite (S^1, B_2) n'est pas minimal.*
- *Soit $y \in S^1$ un point admettant le développement en base binaire suivant :*
  $y = 0.y_1y_2y_3.....$ où $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, puis de y_3 jusqu'à y_6 toutes les combinaisons à deux chiffres de 0 et 1 ($\{00, 01, 10, 11\}$), puis toutes les combinaisons à 3 chiffres ....
  Montrons que y est d'orbite dense.
  Soit $x \in S^1$ tel que $x = 0.x_1x_2x_3...|_{Base2}$, alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{2^i}, \quad x_i \in \{0,1\}, \forall i \in \mathbb{N}$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Comme y est formé de toutes les combinaisons possibles de toutes les longueurs alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $x_1 x_2 \ldots x_{n_0} = y_m y_{m+1} \ldots y_{m+n_0}$. Donc :

$$B_2^m(y) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{x_i}{2^i} + \sum_{i=n_0+1}^{+\infty} \frac{y_i}{2^i}$$

D'où $|B_2^m(y) - x| \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Donc y est transitif. □

Définition 1.7 ***([3], p.36)***

*Un système dynamique (X, f) est dit **mélangeant** si pour tous ouverts $U, V \subset X, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0, U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$, la fonction f associée est dite **topologiquement mélangeante**.*

Remarque 1.3

La notion de mélange est plus forte que la transitivité, un système dynamique mélangeant est transitif mais l'inverse n'est pas toujours vrai, c'est ce que nous montre l'exemple suivant :

Exemple 1.2 ***([3], p.36)***

(S^1, R_α) est un système transitif pour α irrationnel mais non mélangeant.

Soit $x \in S^1$, $\varepsilon < \frac{1}{12}$ et U un ouvert tel que :

$$U =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset S^1$$

Comme x est d'orbite dense, alors tout élément de S^1 est limite d'une suite de $\theta(x)$.

Soit $y = x + \frac{1}{2} \in S^1$, alors $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante tel que :

$$R_\alpha^{-n_k}(x) \longrightarrow y, \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

Donc pour k assez grand, $U \cap R_\alpha^{-n_k}(U) = \emptyset$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists k_0 > k$ tel que $U \cap R_\alpha^{-n_{k_0}}(U) = \emptyset$.

D'où (S^1, R_α) n'est pas mélangeant.

Définition 1.8 *Soit (X, f) un système dynamique.*

- *Un point $x \in X$ est dit* ***point d'équicontinuité*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in B(x, \delta),\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon.$$

- *Le système (X, f) est dit* ***équicontinu*** *si $\forall x \in X$, x est un point d'équicontinuité.*

Exemple 1.3 ***([24], p.31)***

La rotation sur le cercle est une isométrie, donc les système (S^1, R_α) est équicontinu.

Définition 1.9 ***([24], p.15)***

Soit (X, f) un système dynamique discret, on définit l'ensemble de temps de retour d'un point $x \in X$ par :

$$R(U) = \{r \in \mathbb{N}, f^r(x) \in U\}$$

où U est un voisinage de x. L'ensemble $R(U)$ est dit ***syndétique*** *si :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n, n+k] \cap R(U) \neq \emptyset$$

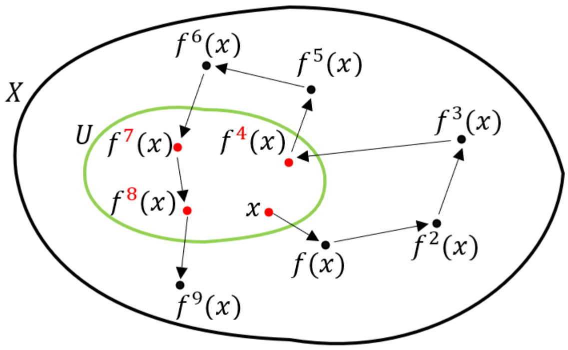


FIGURE 1.5 – Représentation d'un ensemble syndétique.

Remarque 1.4

Dans la littérature, un ensemble syndétique est aussi dit uniformément récurrent ou presque périodique.

Théorème 1.1 ***([20], p.57)***
Soit (X, f) un système dynamique discret et $x \in X$, alors $(\overline{\theta(x)}, f)$ est minimal si et seulement si pour tout voisinage U de x, $R(U)$ est syndétique.

Démonstration

$\Rightarrow$) *Supposons que le système $(\overline{\theta(x)}, f)$ est minimal et soit U un ouvert contenant x. Considérons $y \in \overline{\theta(x)}$, alors :*

$$\begin{aligned}\overline{\theta(y)} = \overline{\theta(x)} &\Longrightarrow \exists i > 0, f^i(y) \subset U\\ &\Longrightarrow y \in f^{-i}(U)\\ &\Longrightarrow y \in \bigcup_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(U)\end{aligned}$$

D'où $\cup_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(U)$ constitue un recouvrement ouvert de $\overline{\theta(x)}$, par compacité, on peut extraire un sous recouvrement fini V tel que :

$$V = \{f^{-i}(U), \quad i = 0, .., p-1\}$$

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists j < p$ tel que $f^n(x) \in f^{-j}(U)$ et donc $f^{n+j}(x) \in U$. D'où $R(U)$ est syndétique.

$\Leftarrow$) *Soit x un point tel que pour tout voisinage U de x, $R(U)$ est syndétique, soit $y \in \overline{\theta(x)}$, montrons qu'il est d'orbite dense.*
Comme X est un espace métrique compact alors il est localement compact, par suite il existe un voisinage compact de x, soit W le plus petit (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.
On a :

$$\begin{aligned}\theta(x) = \bigcup_{j=n}^{n+k} f^j\left(\bigcup_{r \in R(W)} f^r(x)\right) &\Longrightarrow \bigcup_{j=n}^{n+k} f^j\left(\bigcup_{r \in R(W)} f^r(x)\right) \subset \bigcup_{j=n}^{n+k} f^j(W)\\ &\Longrightarrow \overline{\theta(x)} \subset \bigcup_{j=n}^{n+k} f^j(W)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} y \in \overline{\theta(x)} &\Longrightarrow \exists j \in [n, n+k] \text{ tel que } y \in f^j(W) \text{ et donc } f^{-j}(y) \in W \\ &\Longrightarrow \theta(y) \cap W \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow x \in \overline{\theta(y)} \\ &\Longrightarrow \overline{\theta(x)} = \overline{\theta(y)} \\ &\Longrightarrow (\overline{\theta(x)}, \sigma) \text{ est minimal.} \end{aligned}$$

□

Exemple 1.4

Les ensembles $R(U) = \{r \in \mathbb{N}, R_\alpha^r(x) \in U\}$ *où* $U \subset S^1$ *est un voisinage de* x *et* α *un irrationnel tel que* $\alpha \in]0,1[$ *sont syndétiques. (car* $(S^1, R_\alpha))$ *est minimal).*

1.3.1 Factorisation et mélange topologique

On va élaborer maintenant deux notions importantes, la conjugaison et la factorisation topologique.

Définition 1.10

Étant donné deux systèmes dynamiques (X, f) *et* (Y, g)*, soit l'application continue* $\pi : X \longrightarrow Y$ *tel que* $\pi \circ f = g \circ \pi$*, alors :*

- *Si* π *est bijective, alors* (X, f) *et* (Y, g) *sont dits* ***topologiquement conjugués*** *et* π *une conjugaison.*
- *Si* π *est injective, alors* (X, f) *est dit* ***sous-système*** *de* (Y, g)*.*
- *Si* π *est surjective, alors* (X, f) *est dit extension de* (Y, g) *ou que* (Y, g) *est facteur topologique de* (X, f) *et* π *est* ***un facteur topologique****.*

Remarque 1.5

- *La conjugaison topologique est une relation d'équivalence.*
- *La factorisation topologique est une relation d'ordre.*

Proposition 1.6 *Soit $\pi : (X,f) \longrightarrow (Y,g)$ un facteur topologique, alors :*

1. *Si (X,f) est minimal, alors (Y,g) est minimal.*
2. *Si (X,f) est transitif, alors (Y,g) est transitif.*

Démonstration

1. *Soit $Z \subset Y$ un sous-ensemble fermé invariant non vide, alors $\pi^{-1}(Z)$ est un fermé invariant non vide de X. On a :*

$$\begin{aligned}(X,f) \text{ est minimal } &\Longrightarrow \pi^{-1}(Z) = X \\ &\Longrightarrow \pi(\pi^{-1}(Z)) = Z = \pi(X) = Y \\ &\Longrightarrow (Y,g) \text{ est minimal.}\end{aligned}$$

2. *Soit $y \in Y$, alors par surjectivité de π, $\exists z \in X$ tel que $\pi(z) = y$.*
   Soit $x \in X$ un point transitif, comme x est d'orbite dense alors il existe une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers z tel que $x_{n_k} = f^{n_k}(x)$.
   Comme π est continue alors :

$$y = \pi(z) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \pi(x_{n_k}) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \pi(f^{n_k}(x)) = \lim_{k\longrightarrow+\infty} g^{n_k}(\pi(x))$$

   D'où $\pi(x)$ est un point transitif. □

Remarque 1.6

Il est clair que si π est une conjugaison, alors (X,f) est minimal (resp. transitif) si et seulement si (Y,g) est minimal (resp. transitif).

1.4 Théorie ergodique

Etant donné un espace métrique compact X, on peut le munir de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ afin d'obtenir un espace mesurable $(X,\mathcal{B})$. Soit $f : X \longrightarrow X$ une fonction continue, donc mesurable. Le triplet $(X,\mathcal{B},f)$ est un système dynamique mesurable.

Définition 1.11 ***([9], p.2)***

*Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur X, $f : X \longrightarrow X$ est dite **mesurable** si $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{B}$.*

1.4.1 Mesures invariantes

Définition 1.12 ***([9], p.2)***

*Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne définie sur X et $f : X \longrightarrow X$ une application mesurable, une mesure μ est dite **invariante** ou f-**invariante** si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

*Le quadruplet $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ est dit **système dynamique mesuré**.*

Définition 1.13

Soit μ une mesure positive définie sur une tribu $\mathcal{B}$, alors si $\mu(X) = 1$, μ est dite mesure de probabilité.

Proposition 1.7 ***([15], p.17)***

Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ un système dynamique mesurable, alors μ est f-invariante si et seulement si :

$$\int_X \varphi \; d\mu = \int_X \varphi \circ f \; d\mu, \quad \forall \varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$$

Démonstration

$\Rightarrow$*) Soit $A \in \mathcal{B}$, vérifions d'abord l'égalité pour $\varphi = 1_A$ (1_A est la fonction indicatrice de A) :*

$$\int_X 1_A \; d\mu = \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int_X 1_{f^{-1}(A)} \; d\mu = \int_X 1_A \circ f \; d\mu$$

Par la linéarité de l'intégrale, l'égalité est vraie pour toute fonction étagée.
Soit $\varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, alors $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ avec $\varphi^+ = sup(0, \varphi)$ et $\varphi^- = sup(0, -\varphi)$, donc φ^+ et φ^- sont deux fonctions mesurables positives.
Il suffit alors de montrer l'égalité pour une fonction mesurable positive.
Soit φ une fonction mesurable positive, d'après le théorème d'approximation $\exists(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives croissante qui converge vers φ, donc $(\varphi_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions étagées positives croissante qui

converge vers $\varphi \circ f$. En utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\int_X \varphi(f(x))d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n(f(x))\ d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n(x)\ d\mu = \int_X \varphi(x)\ d\mu$$

D'où l'égalité est vraie pour toute fonction mesurable.

$\Leftarrow$) *Soit $A \in \mathcal{B}$, posons $\varphi = 1_A$, alors :*

$$\mu(A) = \int_X 1_A(x)\ d\mu = \int_X 1_A(f(x))\ d\mu = \int_X 1_{f^{-1}(A)}(x)\ d\mu = \mu(f^{-1}(A))$$

D'où μ est f-invariante. □

1.4.2 Existence de mesures invariantes

Dans cette section, on va montrer que tout système dynamique mesurable admet une mesures invariante. Notons par $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes signées (où les valeurs négatives sont autorisées) définies sur X, qui est un espace métrique compact pour la topologie faible*. **([30], p.39-41)**
Par le théorème de la représentation de Riesz, on obtient que $C(X)^* = \mathcal{M}(X)$ où $C(X)^*$ représente le dual topologique de l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans X.
Pour une application continue $f : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$, pour $\mu \in \mathcal{M}(X)$:

$$f\mu(\varphi) = \mu(f\varphi) = \int_X \varphi \circ f\ d\mu, \qquad \forall \varphi \in C(X)$$

Proposition 1.8 ***([31], p.69)***
Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ un système dynamique mesurable, alors il existe au moins une mesure de probabilité f-invariante.

Démonstration
On sait que l'ensemble des mesures de probabilités $\mathcal{M}_p(X)$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}(X)$. On considère une mesure de Dirac μ_0 définie sur X. Soit la

suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu_0(f^i(A)), \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Il est clair que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une mesure de probabilité. Comme* $\mathcal{M}_p(X)$ *est compact, alors il existe une sous-suite* $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *faiblement* * *convergente vers* $\mu \in \mathcal{M}_p(X)$.
Il suffit alors de montrer que μ *est* f*-invariante, c-à-d :*

$$\forall\varphi \in C(X), \quad \int_X \varphi\ d\mu = \int_X \varphi\circ f\ d\mu$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_X \varphi\circ f\ d\mu - \int_X \varphi\ d\mu\right| = \left|\int_X (\varphi\circ f - \varphi)d\mu\right| &= \lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\int_X (\varphi\circ f - \varphi)\ d\mu_{n_k}\right| \\
&= \lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\int_X (\varphi\circ f - \varphi)\ d\left(\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\mu_0(f^i)\right)\right| \\
&= \lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\int_X (\varphi\circ f - \varphi)\ d\left(\mu_0(f^i)\right)\right| \\
&= \lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\int_X (\varphi\circ f^{i+1} - \varphi\circ f^i)\ d\mu_0\right| \\
&= \lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{n_k}\int_X (\varphi\circ f^{n_k} - \varphi)\ d\mu_0\right| \\
&\leqslant \lim_{k\longrightarrow+\infty}\frac{2\|\varphi\|_\infty}{n_k} = 0
\end{aligned}$$

D'où μ *est* f*-invariante.* □

1.4.3 Exemple de mesure invariante

La mesure de Lebesgue sur le cercle S^1

On considère la mesure de Lebesgue λ sur le cercle $S^1 = [0,1[$ par :

$$\lambda([a,b]) = b - a, \qquad \forall[a,b] \subset [0,1[$$

La mesure de Lebesgue est invariante pour la rotation sur le cercle .
En effet, soit $[a, b] \subset [0, 1[$, alors :

$$\lambda(R_\alpha^{-1}([a, b])) = \lambda(R_{-\alpha}([a, b])) = \lambda([a - \alpha, b - \alpha]) = b - a = \lambda([a, b])$$

D'où λ est R_α-invariante.

1.4.4 Mesures portées par des points particuliers

Étant donné un système dynamique mesurable $(X, \mathcal{B}, f)$, on peut définir une mesure f-invariante grâce à un point fixe ou un point périodique du système. Si un tel point existe, on va montrer que ce système est mesuré.

Mesure portée par un point fixe

Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ un espace mesurable admettant un point fixe r, alors on pourra définir une mesure f-invariante dite mesure portée par un point fixe.
En effet, on définit la mesure de Dirac δ_r par :

$$\delta_r(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in A \\ 0 & \text{si } r \notin A \end{cases}$$

où A est un ensemble mesurable.
Montrons que δ_r est une mesure f-invariante. Soit $A \in \mathcal{B}$, on distingue deux cas :

- Si $r \in A$, alors $\delta_r(A) = 1$ et $\delta_r(f^{-1}(A)) = 1$.
- Si $r \notin A$, alors $\delta_r(A) = 0$ et $\delta_r(f^{-1}(A)) = 0$ (car $r \in f^{-1}(A) \Rightarrow r \in A$).

Alors $\quad \delta_r(f^{-1}(A)) = \delta_r(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$.
D'où δ_r est f-invariante.

Mesure portée par un point périodique

Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ un système dynamique mesurable admettant un point p-périodique x, alors on pourra définir une mesure f-invariante dite mesure portée par un point périodique.

Montrons que la mesure μ définie ci-dessous est f-invariante.

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1}\delta_{f^i(x)} \quad \text{où} \quad \delta_{f^i(x)}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^i(x) \in A \\ 0 & \text{si } f^i(x) \notin A \end{cases}$$

où A est un mesurable. Il suffit de montrer que :

$$\int_X \varphi \circ f \; d\mu = \int_X \varphi \; d\mu \quad , \forall \varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$$

Soit $\varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \circ f \; d\mu &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1}\varphi(f(f^i(x))) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1}\varphi(f^{i+1}(x)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1}\varphi(f^i(x)) \qquad \text{car } (f^p(x) = x) \\ &= \int_X \varphi \; d\mu \end{aligned}$$

D'où μ est f-invariante.

1.4.5 Ergodicité

Définition 1.14 ***([13], p.23)***

*Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré où μ est une mesure de probabilité, μ est dite **ergodique** si :*

$$f^{-1}(A) = A \Longrightarrow \mu(A) = 0 \quad ou \quad \mu(A) = 1$$

*Le système associé (X, f, μ) est dit **ergodique**.*

On va présenter une caractérisation d'une mesure ergodique qui nous permettra de montrer que tout espace mesurable peut être muni d'une telle mesure. Pour cela, on note par $\mathcal{I}(X, f)$ l'ensemble des mesures f-invariante définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ qui est une partie convexe et compacte de $\mathcal{M}(X)$. **([31], p.70)**

Définition 1.15

Soit V un ensemble convexe, un point x de V est un point extrémal si :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall y, z \in V,\ x = ty + (1-t)z \implies x = y \text{ ou } x = z$$

Définition 1.16

Soit μ et η deux mesures de probabilités définies sur X, on dit que η est absolument continue par rapport à μ si :

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \eta(A) = 0$$

Proposition 1.9 ***([31], p.74)***

Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *μ est ergodique.*
2. *μ est un point extrémal de $\mathcal{I}(X, f)$.*

Pour la preuve de cette proposition on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1 *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré alors :*

- *Pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$: $\mu(f^{-1}(A) \setminus A) = \mu(A \setminus f^{-1}(A))$.*
- *μ est ergodique si et seulement si $\forall A \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(f^{-1}(A) \Delta A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Démonstration (de la proposition 1.9)

$1 \Rightarrow 2$ *Supposons que μ est ergodique et qu'il existe $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{I}(X, f)$, et $\exists t \in]0,1[$, tel que $\mu = t\eta_1 + (1-t)\eta_2$.*

Montrons que $\eta_1 = \eta_2 = \mu$ (ce qui revient à dire que μ est un point extrémal).

Il est clair que η_1 et η_2 sont absolument continues par rapport à μ.

D'après le théorème de Radon-Nikodym, $\exists g_1, g_2 \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \eta_i(A) = \int_A g_i \, d\mu, \quad i \in \{1, 2\}$$

Il suffit alors de montrer que $g_i = 1$ *μ-presque-partout.*

Le procédé est identique pour g_1 *et* g_2*, on montre alors que* $g_1 = 1$ *μ-presque partout. Posons :*

$$E = \{x \in X,\ \textit{tel que } g_1(x) < 1\}$$

On a :

$$\eta_1(E) = \int_E g_1\ d\mu = \int_{E\cap f^{-1}(E)} g_1\ d\mu + \int_{E\setminus f^{-1}(E)} g_1\ d\mu$$

et :

$$\eta_1(f^{-1}(E)) = \int_{f^{-1}(E)} g_1\ d\mu = \int_{E\cap f^{-1}(E)} g_1\ d\mu + \int_{f^{-1}(E)\setminus E} g_1\ d\mu$$

Comme η_1 *est* f*-invariante, c-à-d :* $\eta_1(f^{-1}(E)) = \eta_1(E)$*, alors*

$$\int_{E\setminus f^{-1}(E)} g_1\ d\mu = \int_{f^{-1}(E)\setminus E} g_1\ d\mu$$

D'autre part, d'après le lemme 1.1 , $\mu(f^{-1}(E)\setminus E) = \mu(E\setminus f^{-1}(E))$ *On sait que* $g_1(x) < 1$ *sur* $E\setminus f^{-1}(E)$ *et* $g_1(x) \geqslant 1$ *sur* $f^{-1}(E)\setminus E$*. Alors on devrait avoir* $\mu(f^{-1}(E)\setminus E) = \mu(E\setminus f^{-1}(E)) = 0$

Il en résulte que $\mu(f^{-1}(E)\Delta E) = 0$*, et comme* μ *est ergodique, alors d'après le lemme 1.1, on obtient que* $\mu(E) \in \{0, 1\}$.

Supposons que $\mu(E) = 1$*, alors :*

$$1 = \eta_1(X) = \int_X g_1 d\mu = \int_E g_1 d\mu < \mu(E) = 1$$

D'où $\mu(E) = 0$*. D'une façon analogue, on montre que :*

$$\mu(F) = 0 \ \textit{où}\ F = \{x \in X,\ \textit{tel que } g_1(x) > 1\}.$$

Donc $\mu = \eta_1 = \eta_2$.

D'où μ *est un point extrémal de* $\mathcal{I}(X, f)$.

$2 \Rightarrow 1$ *Supposons que* μ *n'est pas ergodique, alors* $\exists A \subset X$ *tel que* $f^{-1}(A) = A$ *et* $\mu(A) \in]0, 1[$.

On considère les mesures de probabilités suivantes :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \eta_1(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \quad et \quad \eta_2(B) = \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)}$$

où A^c désigne le complémentaire de A dans X.

Il est clair que $\mu = \mu(A)\eta_1 + (1 - \mu(A))\eta_2$, montrons que η_1 est f-invariante.

$$\begin{aligned}\eta_1(f^{-1}(B)) =& \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)} \\ &= \frac{\mu(f^{-1}(A \cap B)}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \eta_1(B)\end{aligned}$$

D'où $\eta_1 \in \mathcal{I}(X, f)$. (la démonstration est identique pour $\eta_2 \in \mathcal{I}(X, f)$) □

Proposition 1.10

Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ un système dynamique mesurable, alors il existe au moins une mesure f-invariante qui est ergodique.

Démonstration

Comme $\mathcal{I}(X, f)$ est convexe et compact, alors d'après le théorème de Krein Milman il admet au moins un point extrémal.

D'après la proposition 1.9, cette mesure est ergodique. □

Remarque 1.7

Étant donné un système dynamique mesurable $(X, \mathcal{B}, f)$, alors si $\mathcal{I}(X, f)$ contient une seule mesure alors elle est ergodique vue que $\mathcal{I}(X, f)$ contient au moins un point extrémal.

Proposition 1.11 ***([16], p.26)***

Soit le système dynamique mesuré $(S^1, \mathcal{B}, R_\alpha, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, alors :

- *Si α est rationnel, λ n'est pas ergodique.*
- *Si α est irrationnel, λ est ergodique.*

Pour la démonstration du 2ème point on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 1.12 ***([16], p.23)***
Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré, alors μ est ergodique si et seulement si pour toute fonction $\varphi \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ vérifiant $\varphi \circ f = \varphi$, $\mu - p.p$, alors φ est constante $\mu - p.p.$

Démonstration (de la proposition 1.11)

- *Supposons que α est rationnel, alors $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$.*
  Soit un $A \in \mathcal{B}$, tel que $\lambda(A) = (b - a) < \frac{1}{q}$.
  Posons :
  $$S = \bigcup_{i=0}^{q-1} R_\alpha^i(A)$$
  Comme tout point est q-périodique alors :
  $$R^{-1}(S) = S \text{ et } \lambda(S) = \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{q-1} R_\alpha^i(A)\right) \leqslant q(b - a) < 1$$
  D'où λ n'est pas ergodique.
- *Supposons que α est irrationnel, soit $\varphi \in L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$ et supposons que $\varphi \circ R_\alpha = \varphi$. Montrons que φ est constante $\lambda - p.p.$*
  Supposons que φ admet un développement en série de Fourier alors :
  $$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx} \Longrightarrow (\varphi \circ R_\alpha)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi in\alpha} e^{2\pi inx}$$
  $$\Longrightarrow c_n = c_n e^{2\pi in\alpha},\ \forall n \in \mathbb{Z}$$
  Comme $e^{2\pi in\alpha} \neq 1$ sauf pour $n = 0$, alors $c_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.
  Donc $f(x) = c_0$ qui est une constante.
  Alors d'après la proposition 1.12 λ est ergodique. □

Théorème 1.2 (Théorème ergodique de Birkhoff) ***([15], p.32)***
Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré où* μ *est une mesure de probabilité alors :*

$$A_N\varphi(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi(f^n(x)), \qquad \varphi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$$

converge μ*-p-p.*

Remarque 1.8 *Si* μ *est ergodique alors elle converge vers la constante* $\int_X \varphi \, d\mu$.

1.4.6 Unique ergodicité

Définition 1.17
Soit $(X, \mathcal{B}, f)$ *un système dynamique mesurable, le système est dit* ***uniquement ergodique*** *s'il existe une unique mesure ergodique* μ.

On va présenter un théorème ergodique qui nous permettra de donner les différentes caractérisations d'un système uniquement ergodique.

Théorème 1.3 ***([16], p.105)***
Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *est uniquement ergodique.*
2. $\forall \varphi \in C(X)$, $A_N\varphi(x) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\varphi(f^n(x))$ *converge uniformément vers* $\int_X \varphi \, d\mu$.
3. $(A_N\varphi)_{N\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente* $\forall \varphi \in E$, *où* E *est un sous-ensemble dense de* $C(X)$.

Proposition 1.13 ***([16], p.107)***
Les rotations irrationnelles munis de la mesure de Lebesgue λ *sont uniquement ergodiques.*

Démonstration
Pour montrer que $(S^1, \mathcal{B}, R_\alpha, \lambda)$ *(où* α *est irrationnel) est uniquement ergodique, il suffit de montrer la convergence de* $(A_N\varphi(x))_{N\in\mathbb{N}}$ *sur un sous-ensemble dense de*

$C(S^1)$.

Posons $\varphi_k(x) = e^{2\pi ikx}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\begin{aligned} A_N\varphi_k(x) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_k(R_\alpha^n(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ik(x+n\alpha)} = \begin{cases} 1 & si\ k=0 \\ \frac{1}{N}e^{2\pi ikx}\frac{e^{2\pi ikN\alpha}-1}{e^{2\pi ik\alpha}-1} & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_k(R_\alpha^n(x)) \longrightarrow \int_{S^1}\varphi\ d\lambda = \begin{cases} 1 & si\ k=0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Par linéarité, pour toute combinaison linéaire de φ_k où $k \in \mathbb{Z}$, la convergence uniforme est vérifiée.

Comme l'ensemble $E = \{\varphi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-ensemble dense de $C(S^1)$, le système $(S^1, \mathcal{B}, R_\alpha, \lambda)$ où α est irrationnel est uniquement ergodique. □

Définition 1.18

Soit $(X, \mathcal{B}_X, f, \mu_f)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, g, \mu_g)$ deux systèmes dynamiques mesurés, une ***conjugaison mesurable*** *est une application bijective mesurable $\pi : X \longrightarrow Y$ vérifiant $\pi \circ f = g \circ \pi$.*

Remarque 1.9

Si π est une conjugaison topologique alors c'est une conjugaison mesurable.

1.5 Dynamique symbolique

La dynamique symbolique étudie les systèmes dynamiques dont l'espace des phases est un ensemble de suites qui prennent leurs valeurs dans un ensemble fini qu'on appelle alphabet. Ces systèmes peuvent être obtenus à partir du codage d'un système dynamique discret en associant une partition à son espace des phases.

1.5.1 Codage symbolique

Le principe du codage symbolique est qu'à partir d'un système dynamique discret (X, f), on définit une partition de $X = \{I_0, .., I_n\}$, et on associe à chaque élément de la partition un symbole.
Pour un point donné $x \in X$, on associe à chacun de ses itérés par f le symbole de la partie qui le contient. Ainsi on obtient un codage de l'orbite de x représenté par la suite infini suivante :

$$x \longmapsto x_0 x_1 x_2 ...$$

où $x_i = k$ si $f^i(x) \in I_k$.

Exemple 1.5 *On considère le système dynamique (S^1, B_2), et définissons une partition de $S^1 = \{I_0, I_1\}$ où $I_0 = [0, 0.5[$ et $I_1 = [0.5, 1[$.*
Codons le point $x = \frac{1}{24}$.
Donc le codage de $\frac{1}{24}$ est 00001...

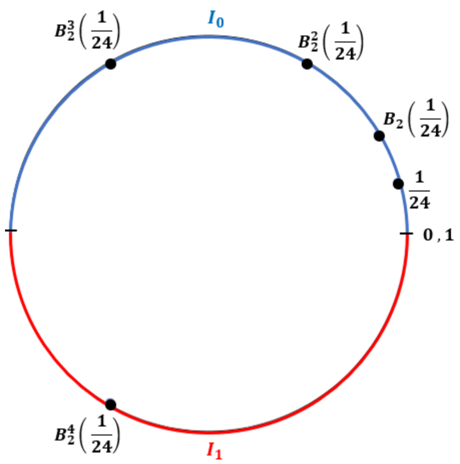


FIGURE 1.6 – Codage du point $x = \frac{1}{24}$ par la fonction B_2.

1.5.2 Combinatoire des mots

Définition 1.19

*Un **alphabet** est un ensemble fini de symboles noté par $\mathcal{A}$, ses éléments sont appelés des lettres.*

Définition 1.20

- *Un **mot** fini (resp. infini) est une suite fini (resp. infini) d'éléments de $\mathcal{A}$.*
- *On désigne par $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots finis définis sur $\mathcal{A}$.*
- *On désigne par $\mathcal{A}^\omega$ ou $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ l'ensemble des mots infinis définis sur $\mathcal{A}$.*
- *La concaténation de deux mots u, v est le mot uv.*

Définition 1.21 *Soit u un mot défini sur $\mathcal{A}$.*

- *Un mot v est dit **facteur** de u s'il existe deux mots x, y tel que $u = xvy$.*
- *La longueur d'un mot fini $u \in \mathcal{A}^n$ est notée par $|u| = n$*
- *Le **langage** de u noté $\mathcal{L}(u)$ est l'ensemble de tous ses facteurs. On désigne par $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble de ses facteurs de longueur n.*
- *On désigne par la complexité d'un mot u, $P_u(n) = Card(\mathcal{L}_n(u))$.*
- *On désigne par $u[n]$ le $n^{ème}$ symbole de u et par $u[i..j]$ le facteur $u_i...u_j$ de u se trouvant entre la position i et j.*

Proposition 1.14 ***([29], p.2)***
Soit u un mot infini alors :

(a) *La suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

(b) *Si u est ultimement périodique, alors $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

(c) *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_u(n) = P_u(n+1)$ alors u est ultimement périodique.*

(d) *Si u est non ultimement périodique alors $P_u(n) \geqslant n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration

(a) *Évidente.*

(b) *Soit u un mot ultimement périodique, alors $\exists i_0, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \geqslant i_0$, $u_{i+p} = u_i$. On a :*

$$u = \underbrace{u_0u_1...u_{i_0-1}}_{i_0 \text{ éléments}}\underbrace{u_{i_0}u_{i_0+1}...u_{i_0+p-1}}_{p \text{ éléments}}\underbrace{u_{i_0+p}u_{i_0+p+1}...u_{i_0+2p-1}}_{p \text{ éléments}}\cdots$$

On constate qu'on peut avoir maximum i_0 *facteurs distincts de longueur* n *qui commence par une lettre de* $u[0...i_0-1]$*, de la même manière, on aura maximum* p *facteurs distincts de longueur* n *qui commence par une lettre de* $u[i_0...i_0+p-1]$*. Et comme* u *est ultimement périodique alors on obtiendra de* $u[i_0+p...i_0+2p-1]$ *les mêmes facteurs obtenues de* $u[i_0...i_0+p-1]$*, D'où :*

$$P_u(n) \leqslant i_0 + p, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

(c) *Supposons qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $P_u(n_0) = P_u(n_0+1)$*, alors chaque facteur de longueur* n_0 *se prolonge de façon unique en un facteur de longueur* n_0+1*.*

Posons $M_i = u[i..i+n_0-1]$ *et soit* f *l'application définie par :*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{L}_{n_0}(u) &\longrightarrow \mathcal{L}_{n_0}(u) \\ M_i &\longmapsto M_{i+1} \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient que $M_{i+k} = f^k(M_i)$*.*

D'autre part, pour $i \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leqslant i \leqslant P_u(n_0)$*, les mots* M_i *ne peuvent pas être distincts car il existe* $P_u(n_0)$ *mots distincts de longueur* n_0*.*

Donc il existe deux entiers a, b *où* $0 \leqslant a < b \leqslant P_u(n_0)$ *tel que* $M_a = M_b$*. Alors :*

$$\begin{aligned} M_a = M_b &\Longrightarrow f^k(M_a) = f^k(M_b), \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow M_{a+k} = M_{b+k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow M_i = M_{i+(b-a)}, \quad \forall i \geqslant a \quad \textit{(en posant i=a+k)} \\ &\Longrightarrow u_i = u_{i+(b-a)}, \quad \forall i \geqslant a \\ &\Longrightarrow u \textit{ est ultimement périodique.} \end{aligned}$$

(d) *Évidente (par la croissance de* $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$*).* □

Définition 1.22 *Soit u un mot.*

- *On dit que v est un **préfixe** de u s'il existe x tel que $u = vx$.*
- *On dit que v est un **suffixe** de u s'il existe x tel que $u = xv$.*

Chapitre 2

Classification des mots morphiques

Les mots infinis jouent un rôle très important en mathématique ainsi qu'en informatique théorique, comme par exemple dans la théorie des mots sturmiens, les systèmes de Lindenmayer. Dans ce chapitre, on va classer les mots infinis selon 10 catégories différentes qu'on va présenter. Puis nous allons établir les différents liens entre elles, ce qui nous permettra d'obtenir une classification de mots et de restreindre le nombre de possibilités à 20 types tandis qu'il était à 1024.

2.1 Généralités

On commence par présenter quelques notions de base en combinatoire des mots. On rappelle que $\mathcal{A}$ désigne un alphabet et $\mathcal{A}^\omega$ l'ensemble des mots infinis définis sur $\mathcal{A}$.

Définition 2.1 ***([11], p.3)***

- *Une application $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ est un* ***morphisme*** *si elle vérifie :*

$$h(ab) = h(a)h(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}^*$$

- *Une lettre a est dite* ***croissante*** *pour un morphisme h si :*

$$\lim_{n \to +\infty} |h^n(a)| = +\infty$$

- *Soit $a \in \mathcal{A}$, un morphisme h défini sur $\mathcal{A}^*$ est dit* ***prolongeable en*** *a si :*

$$\exists x \in \mathcal{A}^*, \text{ tel que : } \begin{cases} h(a) = ax \\ h^i(x) \neq \epsilon, \ \forall i \geqslant 0 \end{cases}$$

où ϵ désigne le mot vide.

Remarque 2.1 ***([2], p.2)***

1. *On peut définir un morphisme $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux alphabets différents.*
2. *On peut définir h sur $\mathcal{A}^\omega$, dans ce cas :*

$$h(a_1a_2a_3...) = h(a_1)h(a_2)h(a_3)...$$

3. *Les itérés successifs d'un morphisme h prolongeable en a nous donne un mot infini qui tends vers un point fixe de h à l'infini.*

$$\begin{aligned} h(a) &= ax \\ h^2(a) &= h(ax) = axh(x) \\ h^3(a) &= h(axh(x)) = axh(x)h^2(x) \\ &\vdots \\ h^\omega(a) &= axh(x)h^2(x)h^3(x)... \in \mathcal{A}^\omega \end{aligned}$$

Alors $u = h^\omega(a)$ est un point fixe de h, et on dit que le mot infini u est généré par h.

2.2 Types de mots

Il existe plusieurs types de mots, on va présenter dix catégories. **([2], p.3)**

2.2.1 Mots purement morphiques

Soit w un mot infini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. S'il existe un morphisme h prolongeable en a, tel que $w = h^\omega(a)$, alors w est dit purement morphique.

Exemple 2.1 ***([2], p.3)***

Le mot de Fibonacci $f = 01001010...$ *est un mot purement morphique.*

En effet, soit le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \{0,1\}^* &\longrightarrow \{0,1\}^* \\ a &\longmapsto \begin{cases} 01 & si\ a = 0 \\ 0 & si\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

φ *est prolongeable en* 0*, donc*

$$\begin{aligned} \varphi(0) =& 01 \\ \varphi^2(0) =& 010 \\ \varphi^3(0) =& 01001 \\ &\vdots \\ \varphi^\omega(0) =& f = 01001010... \end{aligned}$$

D'où le mot de Fibonacci est un mot purement morphique.

2.2.2 Mots purement uniformément morphiques

Un morphisme h est k-uniforme si $|h(a)| = k, \forall a \in \mathcal{A}$. Il est uniforme s'il est k-uniforme pour un certain $k \geqslant 2$.

Si un mot infini w est généré par un morphisme uniforme, alors w est dit purement uniformément morphique.

Exemple 2.2

Le mot de Thue-Morse $t = 01101001...$ *est un mot purement uniformément morphique.*

En effet, soit le morphisme défini par :

$$\mu : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$$
$$a \longmapsto \begin{cases} 01 & si\ a = 0 \\ 10 & si\ a = 1 \end{cases}$$

μ *est uniforme et prolongeable en* 0, *donc*

$$\begin{aligned}
\mu(0) =& 01 \\
\mu^2(0) =& 0110 \\
\mu^3(0) =& 01101001 \\
&\vdots \\
\mu^\omega(0) =& t = 01101001...
\end{aligned}$$

D'où le mot de Thue-Morse est un mot purement uniformément morphique.

Remarque 2.2 *Un morphisme qui vérifie* $|h(a)| = 1, \forall a \in \mathcal{A}$, *est appelé codage.*

Définition 2.2 ***([12], p.166)***
Soit $S \subset \mathbb{N}$, *le mot caractéristique* χ *associé au sous-ensemble* S *est déterminé par la condition :*

$$\chi_i = \chi[i] = \begin{cases} 1 & si\ i \in S \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple 2.3 ***([2], p.4)***
Soit la suite de Fibonacci définie comme suit :

$$\begin{cases} F_0 = 0\ ,\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ , \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Construisons le mot caractéristique des nombres de Fibonacci qui sont représentés par S.

$$S = \{F_i, i \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 \in S &\implies \chi_0 = 1 \\ 1 \in S &\implies \chi_1 = 1 \\ 4 \notin S &\implies \chi_4 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

D'où on obtient le mot caractéristique des nombres de Fibonacci :

$$\chi_F = \chi = 11110100100001...$$

2.2.3 Mots morphiques

Soit w un mot infini, si w est le codage d'un certain mot purement morphique, alors w est morphique.

Exemple 2.4 ***([10], p.665)***
Le mot caractéristique des nombres de Fibonacci est un mot morphique.

$$\chi_F = 11110100100001...$$

Le morphisme qui le génère est :

$$h : \{a, b, c, d, e\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d, e\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ c & si\ x = b \\ cd & si\ x = c \\ e & si\ x = d \\ ed & si\ x = e \end{cases}$$

h est prolongeable en a :

$$\begin{aligned} h(a) &= ab \\ h^2(a) &= abc \\ h^3(a) &= abccd \\ &\vdots \\ h^\omega(a) &= abccdcdecdeed... \end{aligned}$$

En appliquant le codage $abcde \longrightarrow 11100$ à $h^\omega(a)$, on obtient χ_F :

$$\chi_F = 1111010010000...$$

D'où χ_F est un mot morphique.

2.2.4 Mots uniformément morphiques

Un mot uniformément morphique est l'image par un codage d'un mot purement uniformément morphique.

Exemple 2.5

Le mot de Golay-Rudin-Shapiro $r = 0001001000011101...$ connu aussi sous le nom de Rudin-Shapiro est un mot uniformément morphique.

Soit le morphisme uniforme défini par :

$$g : \{a, b, c, d\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$$

$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ ac & si\ x = b \\ db & si\ x = c \\ dc & si\ x = d \end{cases}$$

g est prolongeable en a :

$$\begin{aligned} g(a) &= ab \\ g^2(a) &= abac \\ g^3(a) &= abacabdb \\ &\vdots \\ g^{\omega}(a) &= abacabdbabacdcac... \end{aligned}$$

En appliquant le codage abcd $\longrightarrow 0011$ *à* $g^{\omega}(a)$*, on obtient r :*

$$r = 0001001000011101...$$

D'où r est un mot uniformément morphique.

2.2.5 Mots purement morphiques primitifs

Un mophisme $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ est dit primitif s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que toute lettre de $\mathcal{A}$ apparait au moins une fois dans $h^n(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Un mot infini est dit purement morphique primitif si c'est un point fixe d'un certain morphisme primitif.

Exemple 2.6 *Le morphisme qui génère le mot de Fibonacci est primitif :*

$$\begin{cases} \varphi(0) = 01 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi^2(0) = 010 \\ \varphi^2(1) = 01 \end{cases}$$

Donc pour $n = 2$*, tout élément de* $\mathcal{A}$ *apparait dans* $\varphi^n(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$.
D'où φ *est primitif. Ainsi le mot de Fibonacci est purement morphique primitif.*

2.2.6 Mots morphiques primitifs

Un mot infini est morphique primitif si c'est l'image par codage d'un certain mot purement morphique primitif.

Exemple 2.7 ***([14], p.148)***

Le mot de Rote-Fibonacci est morphique primitif.

Soit le morphisme défini comme suit :

$$h : \{a, b, c, d\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} abcab & si\ x = a \\ cda & si\ x = b \\ cdacd & si\ x = c \\ abc & si\ x = d \end{cases}$$

h est prolongeable en a, et donc par itérations successives on obtient :

$$h^\omega(a) = abcabcdacdacdabcabcdacdacd...$$

En appliquant le codage $abcd \longrightarrow 0011$ au mot infini $h^\omega(a)$, on obtient le mot de Rote-Fibonacci :

$$R = 00100110110110010011011011...$$

De plus, $\forall x \in \{a, b, c, d\}$, $h^2(x)$ contient toutes les lettres. Donc h est primitif .

On déduit alors que R est un mot morphique primitif.

2.2.7 Mots purement uniformément morphiques primitifs

Un mot infini est purement uniformément morphique primitif si c'est un point fixe d'un morphisme primitif uniforme.

Exemple 2.8

Le mot de Thue-Morse est purement uniformément morphique primitif.

On a vu précédemment qu'il est purement uniformément morphique.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \mu(0) = 01 \\ \mu(1) = 10 \end{cases}$$

Alors $\forall a \in \mathcal{A}$, toute lettre de $\mathcal{A}$ apparait dans $\mu(a)$. D'où μ est primitif.

Ainsi $t = 01101001...$ est un mot purement uniformément morphique primitif.

2.2.8 Mots uniformément morphiques primitifs

Un mot infini est uniformément morphique primitif si c'est l'image par un codage d'un mot purement morphique primitif.

Exemple 2.9 *Le mot de Rudin-Shapiro est uniformément morphique primitif.*
On a vu précédemment qu'il est purement uniformément morphique, il reste à vérifier que le morphisme g est primitif. On a :

$$\begin{cases} g(a) = ab \\ g(b) = ac \\ g(c) = db \\ g(d) = dc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g^2(a) = abac \\ g^2(b) = abdb \\ g^2(c) = dcac \\ g^2(d) = dcdb \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g^3(a) = abacabdb \\ g^3(b) = abacdcac \\ g^3(c) = dcdbabdb \\ g^3(d) = dcdbdcac \end{cases}$$

On constate que $\forall x \in \mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$, toute lettre de $\mathcal{A}$ apparait dans $g^3(x)$, donc g est primitif.
D'où le mot de Rudin-Shapiro est uniformément morphique primitif.

2.2.9 Mots récurrents

Un mot w est dit récurrent si tout facteur de w apparait une infinité de fois.

Exemple 2.10 *Soit le mot w défini comme suit :*

$$w = 01010101... = \prod_{i \in \mathbb{N}} (01)^i$$

Il est clair que tout facteur de w apparait une infinité de fois, alors w est récurrent. Plus généralement, tout mot périodique est récurrent.

2.2.10 Mots uniformément récurrents

Un mot w est uniformément récurrent s'il est récurrent et si pour tout facteur u de longueur m, $\exists s \geqslant 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, u apparait dans $w_{n+1}.....w_{n+m+s}$. C-à-d que pour tout facteur u la différence entre deux occurrences consécutives de u est uniformément bornée.

Remarque 2.3 ***([18], p.6)***

Dans la littérature, un mot uniformément récurrent est parfois dit "minimal" ou "presque périodique".

Exemple 2.11

Le mot mécanique s défini ci-dessous avec α irrationnel est uniformément récurrent :

$$s_n = [(n+1)\alpha + x] - [n\alpha + x],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

On va voir dans le 3ème chapitre qu'un mot mécanique avec α irrationnel n'est rien d'autre que le codage d'une rotation irrationnelle. Ainsi, on pourra dire que montrer que s est uniformément récurrent revient à montrer que le codage de x génère un mot uniformément récurrent.
Pour montrer ceci, on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.1 ***([27], p.186)***

Soit s un mot mécanique avec α irrationnel, soit $v = v_0v_1...v_n$ un facteur de s et I_v l'intervalle défini par : $I_v = I_{v_0} \cap R_\alpha^{-1}(I_{v_1}) \cap R_\alpha^{-2}(I_{v_2}) \cap ... \cap R_\alpha^{-n}(I_{v_n})$ où $I_0 = [0, 1-\alpha)$ et $I_1 = [1-\alpha, 1)$, alors

$$s[i...i+n] = v \iff R_\alpha^i(x) \in I_v$$

On peut à présent montrer que s est uniformément récurrent.
Soit $v \in \mathcal{L}(s)$, on lui associe l'intervalle I_v défini dans la proposition ci-dessus.
On sait que $s[i...i+n] = v \iff R_\alpha^i(x) \in I_v$.

On verras dans le 3ème chapitre que montrer que s est uniformément récurrent, revient à montrer que pour un intervalle donné $I = [a,b] \subsetneq [0,1]$, $\exists c > 0$ tel que :

$$z \in I \Longrightarrow \exists i \in \{1, .., c\},\ R_\alpha^i(z) \in I$$

C'est-à-dire que $R(I) = \{i \in \mathbb{N},\ R_\alpha^i(x) \in I\}$ est syndétique.
Ceci a déjà été montré au 1er chapitre. D'où s est uniformément récurrent.

Théorème 2.1 ***([2], p.6)***

Soit u un point fixe d'un morphisme h où tout élément de $\mathcal{A}$ apparait dans u, supposons que toute lettre de l'alphabet $\mathcal{A}$ est croissante.
Si u est uniformément récurrent, alors h est primitif.

Démonstration

Soit u un point fixe de h, alors

$$u = h(u) \Longrightarrow u = h^k(u), \quad \forall k \geqslant 0$$

Alors pour toute lettre a de $\mathcal{A}$*,* $h^k(a)$ *est facteur de* $u, \forall k \geqslant 0$.

Comme u est uniformément récurrent, alors

$\forall b \in \mathcal{A},\ \exists l_b > 0$*, tout facteur v de u tel que :* $|v| > l_b$*, b apparait dans v.*

Posons $l = \max\limits_{b \in \mathcal{A}} l_b$*, pour tout facteur v tel que* $|v| \geqslant l_b$*, b apparait dans v,* $\forall b \in \mathcal{A}$.

D'autre part, toute lettre de $\mathcal{A}$ *est croissante.*

Donc

$$\exists k_a \in \mathbb{N}, \ \ \textit{tel que} \ \ \forall k \geqslant k_a \ , \ |h^k(a)| > l$$

Posons

$$K = \max_{a \in \mathcal{A}} k_a$$

Alors $\forall a \in \mathcal{A}$*, toute lettre de* $\mathcal{A}$ *apparait dans* $h^K(a)$.

D'où h est primitif. □

Théorème 2.2 ***([2], p.6)***

(a) Si w est un mot morphique primitif, alors w est uniformément récurrent.

(b) Si w est uniformément récurrent et uniformément morphique, alors w est un mot uniformément morphique primitif

Démonstration ***([18], p.9)***

On va démontrer que le premier point.

(a) Soit w un mot morphique primitif, alors il existe un codage ρ *tel que* $w = \rho(u)$ *où u est un mot purement morphique primitif généré par un certain morphisme primitif h.*

Comme h primitif alors $\exists k > 0, \ \forall a \in \mathcal{A}, b$ *apparait dans* $h^k(a), \ \forall b \in \mathcal{A}$.

D'autre part, $u = h^k(u) = h^k(u_0)h^k(u_1)$*... (car u est un point fixe de h).*

Alors pour toute lettre a de l'alphabet $\mathcal{A}$*, a apparait dans* $h^k(u_i), \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Donc a apparait une infinité de fois dans u.

De même, comme a apparait une infinité de fois dans u alors

$\forall n \in \mathbb{N},\ h^n(a)$ apparait une infinité de fois dans $h^n(u) = u$.

D'où, tout facteur de u apparait une infinité de fois, alors u est récurrent.

On a $\forall a \in \mathcal{A}$ tout facteur $h^n(a)$ de u apparait dans $h^{n+k}(b),\ \forall b \in \mathcal{A}$.

Posons

$$s = \max_{a \in \mathcal{A}} |h^{n+k}(a)|$$

Donc $h^n(a)$ apparait dans tout facteur de u de longueur $2s$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

D'où u est uniformément récurrent.

Ainsi $w = \rho(u)$ est uniformément récurrent. $\square$

Corrolaire 2.1

Si un mot w est purement uniformément morphique et uniformément récurrent, alors il est purement uniformément morphique primitif.

Démonstration

Soit w un mot purement uniformément morphique, alors w est point fixe d'un morphisme h qui est uniforme.

Posons $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{$ les lettres qui n'apparaissent pas dans $w\}$ et h_2 la restriction de h sur $\mathcal{A}'$ qui est un morphisme uniforme.

D'où w est un point fixe de h_2 où toutes les lettres de $\mathcal{A}'$ apparaissent.

D'autre part, comme h_2 est uniforme alors $\exists k \geqslant 2,$ tel que $|h_2(a)| = k,\ \forall a \in \mathcal{A}'$.

Alors

$$|h_2^n(a)| = k|h_2^{n-1}(a)| = k^n|a| = k^n \longrightarrow +\infty \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'où

$$|h_2^n(a)| \longrightarrow +\infty \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \ ,\ \forall a \in \mathcal{A}'.$$

De plus, w est uniformément récurrent.

Les trois hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites, alors h_2 est primitif.

D'où w est un mot purement uniformément morphique primitif. $\square$

Corrolaire 2.2

Si un mot w est un mot uniformément morphique et morphique primitif, alors w est purement uniformément morphique primitif.

Démonstration

Soit w un mot uniformément morphique et morphique primitif.

Comme w est morphique primitif, alors d'après le théorème 2.2, w est uniformément récurrent. Par suite, d'après le corollaire précédent, w est purement uniformément morphique. $\square$

Théorème 2.3 ***([25], p.130)***

Soit $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ un morphisme prolongeable en a et $\forall b \in \mathcal{A}$, b est croissante. Alors

$$h^\omega(a) \text{ est purement morphique primitif} \Longleftrightarrow h^\omega(a) \text{ est uniformément récurrent.}$$

Démonstration *Posons $u = h^\omega(a)$.*

$\Rightarrow$) *Supposons que u est un mot morphique purement primitif, alors u est mot morphique primitif.*

D'après le théorème 2.2.a, u est uniformément récurrent.

$\Leftarrow$) *Supposons que u est uniformément récurrent, et notons $\mathcal{A}'$ l'alphabet apparaissant dans u.*

On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, b \in \mathcal{A}' \Longrightarrow h^k(b) \in \mathcal{L}(u)$$

D'autre part, comme $|h^k(b)| \longrightarrow +\infty$ quand $k \longrightarrow +\infty$, alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que a apparait dans $h^{k_0}(b)$, $\forall b \in \mathcal{A}'$.

Posons

$$K = \sup_{b \in \mathcal{A}'} \inf_{k \geqslant 1} \{k, \ a \text{ est facteur de } h^k(b)\}$$

Donc a est facteur de $h^K(b)$, $\forall b \in \mathcal{A}'$.

Comme toutes les lettres de $\mathcal{A}'$ apparaissent dans u alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \textit{tel que } b \textit{ apparait dans } u, \forall b \in \mathcal{A}'$$

D'où $h^N(a)$ *est facteur de* $h^{N+K}(b)$, $\forall b \in \mathcal{A}'$.
On déduit alors que toutes les lettres de $\mathcal{A}'$ *apparaissent dans* $h^{N+K}(b), \forall b \in \mathcal{A}'$. *D'où la restriction de* h *sur* $\mathcal{A}'$ *est primitif, donc* u *est un mot purement morphique primitif.* □

Théorème 2.4 ***([2], p.7)***
Soit u *un mot morphique uniformément récurrent, alors* u *est un mot morphique primitif.*

2.3 Classification

En se contentant de ce qu'on vient de présenter, un mot peut être classifié de dix façons différentes :
P_1 : Purement morphique.
P_2 : Morphique.
P_3 : Purement uniformément morphique.
P_4 : Uniformément morphique.
P_5 : Purement morphique primitif.
P_6 : Morphique primitif.
P_7 : Purement uniformément morphique primitif.
P_8 : Uniformément morphique primitif.
P_9 : Uniformément récurrent.
P_{10} : Récurrent.
Ces dix propriétés ne sont pas indépendantes, on a alors quelques implications triviales.

- $P_1 \Longrightarrow P_2$
- $P_3 \Longrightarrow P_1, P_2, P_4$
- $P_4 \Longrightarrow P_2$
- $P_5 \Longrightarrow P_1, P_2, P_6$
- $P_6 \Longrightarrow P_2$
- $P_7 \Longrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_8$
- $P_8 \Longrightarrow P_2, P_4, P_6$
- $P_9 \Longrightarrow P_{10}$

Par le biais des théorèmes et des résultats obtenus précédemment, on aboutit aux implications suivantes :

- Théorème 2.2 : $\begin{cases} (a) : \ P_6 \Longrightarrow P_9 \\ (b) : P_6 + P_4 \Longrightarrow P_8 \end{cases}$
- Corollaire 2.2 : $P_3 + P_6 \Longrightarrow P_7$.
- Théorème 2.4 : $P_2 + P_9 \Longrightarrow P_6$.

Étant donné qu'on a défini dix catégories de mots qui ne sont pas indépendantes, alors on peut avoir $2^{10} = 1024$ possibilités de mots. Mais Grâce à toutes les restrictions obtenues, on passe de 1024 possibilités à 20 :

(a) Ni morphique ni récurrent.

(b) Récurrent mais ni morphique, ni uniformément récurrent.

(c) Uniformément récurrent mais pas morphique.

(d) Morphique, sans être purement morphique, uniformément morphique primitif, uniformément récurrent.

(e) Morphique et récurrent, mais pas purement morphique, pas uniformément morphique, pas morphique primitif, ni uniformément récurrent.

(f) Morphique primitif, mais ni purement morphique, ni uniformément morphique.

(g) Uniformément morphique, mais ni purement morphique, ni morphique primitif, ni récurrent.

(h) Uniformément morphique et récurrent, mais ni purement morphique ni morphique primitif.

(i) Uniformément morphique primitif mais pas purement morphique.

(j) Purement morphique, mais pas uniformément morphique, ni morphique primitif, ni récurrent.

(k) Purement morphique et récurrent, mais pas uniformément morphique, ni morphique primitif, ni uniformément morphique.

(l) Purement morphique et morphique primitif mais pas uniformément morphique, ni purement morphique primitif.

(m) Purement morphique primitif mais pas uniformément morphique.

(n) Purement morphique et uniformément morphique, mais pas purement uniformément morphique, ni morphique primitif, ni récurrent.

(o) Purement morphique et uniformément morphique et récurrent, mais pas purement uniformément morphique ni morphique primitif.

(p) Purement morphique et uniformément morphique primitif, mais pas purement uniformément morphique ni purement morphique primitif.

(q) Purement morphique primitif et uniformément morphique primitif mais pas purement uniformément morphique.

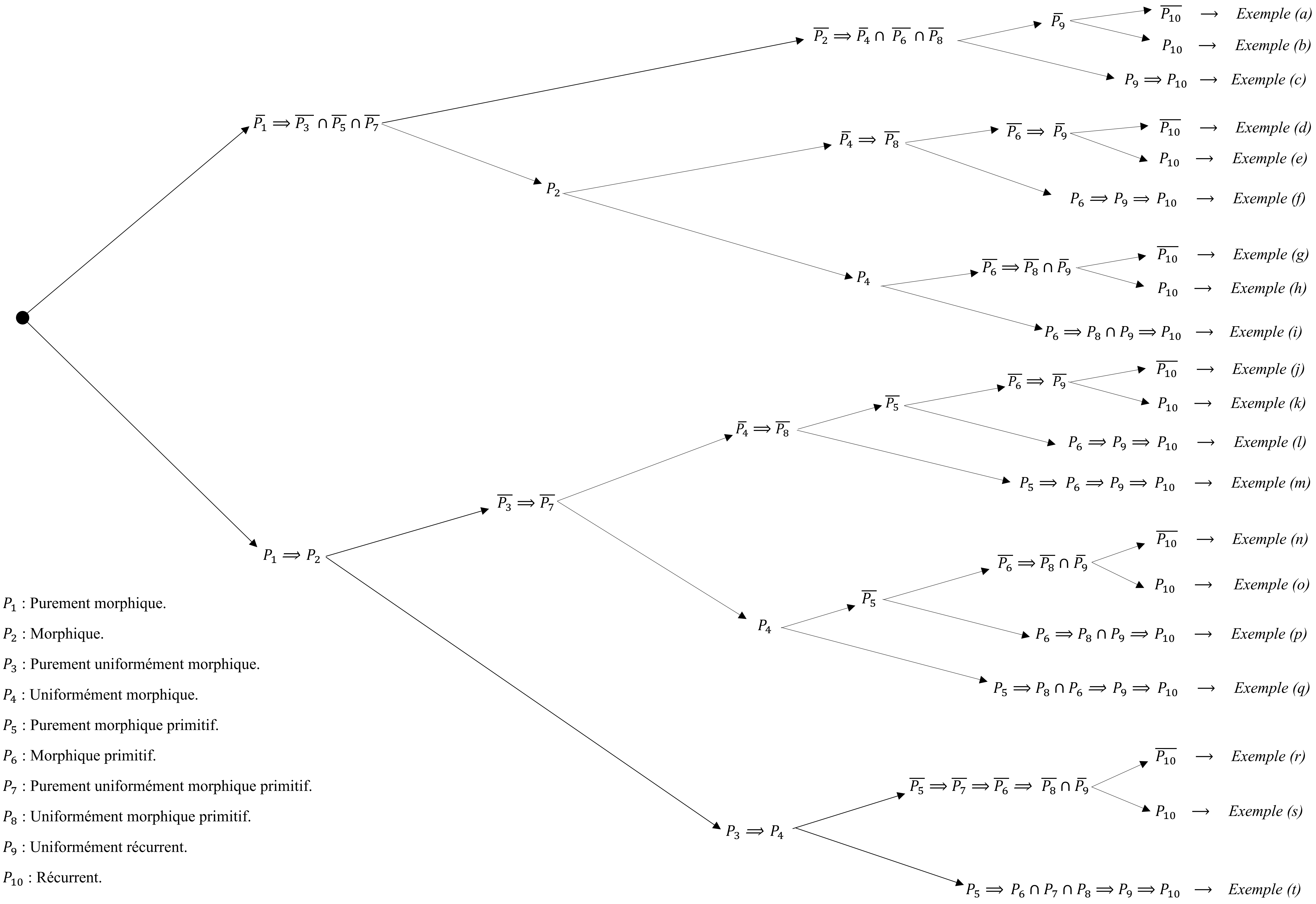
(r) Purement uniformément morphique mais pas morphique primitif, ni récurrent.

(s) Purement uniformément morphique et récurrent mais pas morphique primitif.

(t) Purement uniformément morphique primitif.

Dans ce qui suit, on va donner un exemple des 20 possibilités, mais avant cela, on présente un arbre qui explique comment on a pu passer de 1024 à 20 possibilités grâce à toutes les restrictions obtenues.

Classification des mots



P_1 : Purement morphique.

P_2 : Morphique.

P_3 : Purement uniformément morphique.

P_4 : Uniformément morphique.

P_5 : Purement morphique primitif.

P_6 : Morphique primitif.

P_7 : Purement uniformément morphique primitif.

P_8 : Uniformément morphique primitif.

P_9 : Uniformément récurrent.

P_{10} : Récurrent.

Avant de donner un exemple de chaque catégorie, on devra présenter quelques notions élémentaires.

Définition 2.3

- *Un mot infini u est dit sans carré si* $\forall v \in \mathcal{L}(u)$, $vv \notin \mathcal{L}(u)$.
- *Un mot infini u est dit sans cube si* $\forall v \in \mathcal{L}(u)$, $vvv \notin \mathcal{L}(u)$.

Définition 2.4 ***([2], p.9)***
La fréquence d'une lettre a de l'alphabet $\mathcal{A}$ *dans un mot infini w est définie par la quantité :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|w[0..n-1]|_a}{n}$$

si elle existe.

Définition 2.5

- *Un nombre complexe est dit* ***algébrique*** *si c'est une racine d'un certain polynôme sous la forme* $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ *où* $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, .., n-1\}$.
- *Un nombre réel est un* ***irrationnel quadratique*** *si c'est une racine d'un certain polynôme du* $2^{ème}$ *degré où les coefficients sont des nombres rationnels.*

Définition 2.6 ***([1], p.248)***
Soit $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ *un morphisme et* $n = card(\mathcal{A})$, *on associe à h une matrice dite* ***matrice d'incidence*** *définie par :*

$$M = M(h) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

où $m_{i,j}$ *est le nombre d'occurrence de* a_i *dans* $h(a_j)$, *c'est-à-dire :*

$$m_{i,j} = |h(a_j)|_{a_i}$$

Remarque 2.4 ***([1], p.249)***
Soit h un morphisme défini sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, *et M la matrice d'incidence associée, pour tout mot w défini sur* $\mathcal{A}$ *on a :*

$$\begin{pmatrix} |h(w)|_{a_1} \\ |h(w)|_{a_2} \\ \vdots \\ |h(w)|_{a_n} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ |w|_{a_2} \\ \vdots \\ |w|_{a_n} \end{pmatrix}$$

Et on obtient par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{pmatrix} |h^n(w)|_{a_1} \\ |h^n(w)|_{a_2} \\ \vdots \\ |h^n(w)|_{a_n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ |w|_{a_2} \\ \vdots \\ |w|_{a_n} \end{pmatrix}$$

Définition 2.7

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et* $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Théorème 2.5 ***([2], p.9)***

Supposons que la fréquence α *d'une lettre* a *apparaissant dans un mot* w *existe, alors :*

(a) Si w *est uniformément morphique, alors* α *est rationnel.*

(b) Si w *est un mot morphique, alors* α *est algébrique.*

Pour la démonstration de ce théorème on aura besoin des deux théorèmes suivants :

Théorème 2.6 ***([1], p.261)***

Soit h *un morphisme et* M *sa matrice d'incidence, alors il existe un réel* $r \geqslant 0$ *tel que :*

(i) r *est une valeur propre de* M *(dite valeur propre de Perron-Frobenius) et pour toute autre valeur propre* λ, *on a :* $|\lambda| \leqslant r$.

(ii) $\exists h \in \mathbb{N}^*$ *tel que toute valeur propre* λ *de* M *avec* $|\lambda| = r$ *vérifie* $\lambda^h = r^h$.

Théorème 2.7 ***([1], p.263)***

Soit M *une matrice stochastique alors sa valeur propre de Perron-Frobenius est* $r = 1$

et toute autre valeur propre λ tel que $|\lambda| = 1$ est une racine simple du polynôme minimal de M.

Si de plus, M n'a pas de valeur propre λ tel que $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} M^n$$

existe et les coefficients de la matrice obtenue sont rationnels.

Démonstration (du théorème 2.5) ***([1], p.268)***

On va montrer que le premier point.

(a) Supposons que w est un mot uniformément morphique, alors il existe un morphisme k-uniforme défini sur $\mathcal{A}$ et un codage ρ tel que $w = \rho(h^\omega(c))$.

Comme la fréquence de a dans w existe alors elle vaut la somme des fréquences de $b_1, ..., b_d$ tel que $\rho(b_i) = a$, $\forall i \in \{1, ..d\}$, donc ceci revient a montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|h^\omega(c))|_{b_i}}{|h^\omega(c))|} \text{ existent et sont rationnels } \forall i \in \{1, .., d\}$$

Soit M la matrice associée au morphisme h et $n = Card(\mathcal{A})$. Comme h est k-uniforme alors :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = k, \quad \forall j \in \{1, .., n\}$$

Donc $(\frac{1}{k}M)^t$, est une matrice stochastique. On déduit alors que 1 est sa valeur propre de Perron-Frobenius.

D'après le théorème 2.6.(ii), alors $\exists s \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\frac{1}{k}M^t)^s$ n'admet pas de valeur propre λ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$.

On déduit alors d'après le théorème 2.7 que $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{k}M^t)^{ns}$ existe et la matrice obtenue contient des nombres rationnels. Donc il en est de même pour $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{k}M)^{ns}$.

D'autre part, en posant $\mathcal{A} = \{b_1, ..., b_n\}$, on a :

$$\frac{M^{ns}}{k^{ns}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{M^{ns}}{|h^{ns}(b)|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|h^{ns}(b)|} \begin{pmatrix} |h^{ns}(b)|_{b_1} \\ |h^{ns}(b)|_{b_2} \\ \vdots \\ |h^{ns}(b)|_{b_n} \end{pmatrix}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|h^{ns}(b)|_{b_i}}{|h^{ns}(b)|}$ *existe* $\forall i \in \{1,..,n\}$ *et est rationnel.*
D'où α *est rationnel.* $\square$

Définition 2.8

- *Soit* w *un mot défini sur* $\mathcal{A}$, u *un préfixe de longueur* n, *et* $a \in \mathcal{A}$, $|u|_a$ *est* $\Omega(f(n))$ *si* $\exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$c_1 \leqslant \frac{|u|_a}{f(n)} \leqslant c_2$$

- *On dit que* $f(n) = \Theta(g(n))$ *si* $\exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$$

Proposition 2.2 ***([2], p.9)***
Soit w *un mot morphique et* a *une lettre qui apparait infiniment dans* w, *alors le nombre d'occurrence dans un préfixe de longueur* n *de* w *est* $\Omega(log(n))$.

Théorème 2.8 ***([23], p.380)***
Soit w *un mot purement morphique et* P_w *sa complexité, alors l'une des propriété suivantes est satisfaite :*

- $P_w(n) = \Theta(1)$
- $P_w(n) = \Theta(n)$
- $P_w(n) = \Theta(n\ log\ log(n))$
- $P_w(n) = \Theta(n\ log(n))$
- $P_w(n) = \Theta(n^2)$

Théorème 2.9 ***([2], p.9)***
Soit w *un mot non ultimement périodique.*

(a) Si w *est un mot uniformément morphique, alors* $P_w(n) = \Theta(n)$.

(b) Si w *est un mot morphique primitif, alors* $P_w(n) = \Theta(n)$.

Pour la démonstration du $2^{\text{ème}}$ point, on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.3

Soit $h : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ un morphisme primitif, et r la valeur propre de Perron-Frobenius associée à sa matrice d'incidence, alors $\forall u \in \mathcal{A}^*, \exists c > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|h^n(u)|}{r^n} = c$$

Démonstration (du théorème 2.9) ***([12], p.171 ; [25], p.148)***

Comme w est supposé non ultimement périodique, on a montré dans le premier chapitre que :

$$P_w(n) \geqslant n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il reste donc à montrer que $P_w(n) = O(n)$.

(a) *Supposons que w est un mot uniformément morphique, alors il existe un codage ρ tel que $w = \rho(u)$ où u est un mot purement uniformément morphique. C'est-à-dire que u est généré par un certain morphisme h k-uniforme.*

Soit un entier $n \geqslant 1$, alors $\exists t \in \mathbb{N}$ tel que :

$$k^{t-1} \leqslant n < k^t$$

Soit $i \in \mathbb{N}$, alors $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que :

$$jk^t \leqslant i < (j+1)k^t$$

Alors $w_i ... w_{i+n-1}$ est un facteur de longueur n de :

$$w_{jk^t} ... w_{(j+1)k^t - 1} = \rho(h^t(u_j u_{j+1}))$$

(car $jk^t \leqslant i < (j+1)k^t$ et $i+n-1 < jk^t + k^t - 1 = (j+1)k^t - 1$)

Donc $w_i ... w_{i+k-1}$ est déterminé par les symboles u_j, u_{j+1} et de l'entier $i - jk^t$

- *Pour le choix de $i - jk^t$, on a :*

$$jk^t \leqslant i < (j+1)k^t \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant i - jk^t < k^t$$

Alors $i - jk^t$ a k^t possibilités.

- *Pour le choix de u_j et u_{j+1} :*
  étant donné $\mathcal{A}$ l'alphabet sur lequel h est défini, il y a $(card(\mathcal{A}))^2$ possibilités.

On déduit alors que $w_i...w_{i+n-1}$ est l'un des $k^t(card(\mathcal{A}))^2$ possibilités.
Donc :

$$P_w(n) \leqslant k^t(card(\mathcal{A}))^2$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} k^{t-1} \leqslant n &\Longrightarrow k^t \leqslant kn \\ &\Longrightarrow k^t(card(\mathcal{A}))^2 \leqslant (card(\mathcal{A}))^2 kn \\ &\Longrightarrow P_w(n) \leqslant ((card(\mathcal{A}))^2 k)\ n \end{aligned}$$

D'où $P_w(n) = \Theta(n)$

(b) *Supposons $w = \rho(h(u))$ où h est un morphisme primitif et ρ un codage. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\inf_{a\in\mathcal{A}} |h^{p-1}(a)| \leqslant n \leqslant \inf_{a\in\mathcal{A}} |h^p(a)|$$

D'après la proposition 2.3 il existe deux constantes positives A, B tel que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$Ar^p \leqslant \inf_{a\in\mathcal{A}} |h^p(a)| \leqslant \sup_{a\in\mathcal{A}} |h^p(a)| \leqslant Br^p \quad (*)$$

Soit $v \in \mathcal{L}_n(u)$, puisque $u = h^p(u) = h^p(u_0)h^p(u_1)h^p(u_2)...$ alors $\exists a, b \in \mathcal{A}$ tel que v est facteur de $h^p(a)$ ou de $h^p(ab)$.
Il y a au plus $s^2 = (Card(\mathcal{A}))^2$ facteurs de longueur 2 dans u, et donc pour $h^p(ab) = h^p(a)h^p(b)$ quelconque, il y aura au plus $\sup_{a\in\mathcal{A}} |h^p(a)|$ facteurs de longueur n où la première lettre est dans $h^p(a)$. Alors :

$$P_w(n) \leqslant P_u(n) \leqslant s^2 \sup_{a\in\mathcal{A}} |h^p(a)| \leqslant s^2 Br^p$$

D'après $(*)$, $r^p \leqslant \frac{nr}{A}$, alors $P_w(n) \leqslant \frac{B}{A} s^2 rn$.
D'où $P_w(n) = \Theta(n)$. □

Définition 2.9 ***([8], p.2)***

Deux entiers k, l sont multiplicativement indépendants si et seulement si $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $l^n \neq k^p$.

Théorème 2.10 (Cobham)

Soit k, l deux entiers multiplicativement indépendants et u un mot infini alors :

$$u \text{ est à la fois } k\text{-uniforme et } l\text{-uniforme} \Longrightarrow u \text{ est ultimement périodique.}$$

Remarque 2.5 ***([18], p.60)***

Dans la littérature le théorème de Cobham est énoncé de cette façon :

Soit k, l deux entiers multiplicativement indépendants et u un mot infini alors :

$$u \text{ est à la fois } k\text{-automatique et } l\text{-automatique} \Longrightarrow u \text{ est ultimement périodique.}$$

2.4 Les exemples

Exemple 2.12 ***(a) Mot ni morphique ni récurrent.***

Soit F l'ensemble des nombres factoriels :

$$F = \{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$$

Le mot caractéristique associé à F est :

$$w = 0110001000000000000000000100...$$

w n'est pas récurrent car le facteur 11 n'apparait qu'une seule fois.

Soit u un préfixe de w de longueur $N = n! + 1$, alors le nombre de 1 dans u est n. (car $(n+1)! > N$).

Pour la suite, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.4 ***([2], p.10)***

Soit n un entier naturel, posons $N = n! + 1$, alors :

$$n = O\left(\frac{log\ N}{log\ log\ N}\right)$$

Supposons à présent que w est morphique, alors d'après la proposition 2.2, $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$c_1 \leqslant \frac{|w[0..N-1]|_1}{log\ N} = \frac{n}{log\ N} \leqslant c_2$$

D'autre part, d'après la proposition qu'on vient d'énoncer, $\exists c \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$n \leqslant c\ \frac{log\ N}{log\ log\ N}$$

Alors, en combinant les deux inégalités, on obtient :

$$c_1 \leqslant \frac{n}{log\ N} \leqslant \frac{c}{log\ log\ N} \quad \Longrightarrow \quad c \geqslant c_1\ log\ log\ N\ \ (contradiction\ quand\ N \to +\infty)$$

D'où w n'est pas morphique.

Exemple 2.13 ***(b) Mot récurrent mais ni morphique ni uniformément récurrent. ([2], p.10)***

Considérons le mot w définie comme étant la concaténation des entiers naturels en binaire.

$$w = \underbrace{1}_{1}\underbrace{10}_{2}\underbrace{11}_{3}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{7}\underbrace{1000}_{8}...$$

Étant donné $\mathcal{A} = \{0, 1\}$*, Soit* $n \in \mathbb{N}$*, il est clair que :*

$$P_w(n) = 2^n$$

D'après le théorème 2.8, on déduit que w n'est pas morphique.

D'autre part, $\forall s > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que 1 n'apparait pas dans* $w_n...w_{n+s-1}$*, car pour n assez grand, on aura un grand bloc qui ne contient que des 0.*

D'où w n'est pas uniformément récurrent.

Exemple 2.14 ***(c) Uniformément récurrent mais pas morphique.***

Soit le mot mécanique $s_{\alpha,x} = s_0s_1s_2...$ *définie par :*

$$s_n = [(n+1)\alpha + x] - [n\alpha + x],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

où α désigne un angle et x le point de départ dont on code l'orbite.

On a montré précédemment que les mots mécaniques d'angle irrationnel sont uniformément récurrents.

Pour montrer qu'ils ne sont pas morphiques on doit énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.5 ***([6], p.126)***

Un mot mécanique w d'angle α qui code l'orbite de x est morphique primitif si et seulement si α est un irrationnel quadratique et $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Comme π est un irrationnel non quadratique, alors d'après la proposition précédente $s_{\pi,0}$ n'est pas morphique primitif.

Donc d'après le théorème 2.4, $s_{\pi,0}$ n'est pas morphique.

Exemple 2.15 ***(d) Morphique, sans être purement morphique, uniformément morphique primitif, uniformément récurrent. ([1], p.248 ; [2], p.10)***

Soit le mot de Fibonacci défini précédemment $f = 01001010...$ et changeons les deux premiers symboles par le symbole 2, on obtient alors

$$f' = 22001010...$$

Supposons que f' est purement morphique, alors il existe un morphisme h tel que $f' = h^{\omega}(2)$, et donc $h(2)$ commence par 22, et donc le facteur 22 apparaitra infiniment dans f'. D'où f' ne peut pas être purement morphique.

Comme le mot de Fibonacci f est un mot mécanique d'angle et d'orbite $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, alors :

$$f_n = \left[(n+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] - \left[n\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}$$

Il est clair que $|f[0,..,n-1]|_1 = \left[(n+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, donc :

$$|f[0,..,n-1]|_0 = n - \left[(n+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$$

Comme $|f'|_0 = |f|_0 - 1$, *alors on pourras calculer la fréquence de 0 dans* f'.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f'[0..n-1]|_0}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n - \left[(n+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] - 1}{n} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Comme la fréquence de 0 dans f' *est un nombre irrationnel alors d'après le théorème 2.5,* f' *n'est pas uniformément morphique.*

D'autre part, f' *n'est pas récurrent car* 22 *apparait une seule fois, donc d'après le théorème 2.2,* f' *n'est pas morphique primitif.*

Le mot f' *est morphique car il est généré par le morphisme suivant :*

$$h : \{a, b, c, d\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ cd & si\ x = c \\ c & sinon \end{cases}$$

h *est prolongeable en* a *et* $h^\omega(a) = abccdcdc....$

En appliquant le codage $abcd \longrightarrow 2201$ *on obtient* f'.

Exemple 2.16 ***(e) Morphique et récurrent, mais pas purement morphique, pas uniformément morphique,pas morphique primitif, ni uniformément récurrent. ([2], p.11)***

Soit le morphisme h *défini ci-dessous :*

$$h : \{a, b, c, d\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ababb & si\ x = a \\ bc & si\ x = b \\ c & si\ x = c \end{cases}$$

h *est prolongeable en* a, *en appliquant le codage* $\tau : abc \longrightarrow 011$, *on obtient*

$$x = 0101111010111111111010111101... = \prod_{n\geqslant 1} 01^{a(n)}$$

où $a(n) = (\nu_2(n) + 1)^2$ *et* $\nu_2(n)$ *représente la plus grande puissance de 2 divisant* n *(appelé valuation 2-adique).*
Pour la suite, on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.6
Soit $x = \prod_{n \geqslant 1} 01^{a(n)}$*, alors* $P_x(n) = \Theta(n\sqrt{n})$*.*

D'après la proposition qu'on vient d'énoncer et du théorème 2.9, on déduit que x *n'est pas uniformément morphique et pas morphique primitif, et par le théorème 2.8 qu'il n'est pas purement morphique.*
Le mot x *n'est pas uniformément récurrent par le théorème 2.4, mais clairement récurrent.*

Exemple 2.17 ***(f) Morphique primitif, mais ni purement morphique, ni uniformément morphique.***
On doit d'abord énoncer le théorème de Yasutomi.

Théorème 2.11 (de Yasutomi) ***([7], p.331)***
Soit $\alpha \in]0, 1[$ *,* $x \in [0, 1]$ *et* α'*,* x' *leurs conjugués algébriques respectifs si ils existent. Le mot mécanique* $s_{\alpha,x}$ *est purement morphique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

(a) α *est un irrationnel quadratique et* $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$*.*

(b) $\alpha' > 1$ *et* $1 - \alpha' \leq x' \leq \alpha'$ *ou bien* $\alpha' < 0$ *et* $\alpha' \leq x' \leq 1 - \alpha'$*.*

On considère maintenant $s_{\alpha,x}$ *pour* $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x = 3 - \sqrt{5}$*.*
Alors $\alpha' = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ *et* $x' = 3 + \sqrt{5} > \alpha'$*, alors d'après le théorème ci-dessus* $s_{\alpha,x}$ *n'est pas purement morphique.*
Remarquons que le mot obtenu n'est rien d'autre que le décalé du mot de Fibonacci, il est donc morphique, alors il existe un morphisme h *et un codage* τ *tel que* $s_{\alpha,x} =$

$\tau(h^{\omega}(a))$ *où :*

$$h : \{a,b,c\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} c & si\ x = b \\ ac & sinon \end{cases}$$

h est prolongeable en a donc : $h^{\omega}(a) = acbacacb....$

En lui appliquant le codage abc $\longrightarrow 100$*, on obtient* $s_{\alpha,x} = 10010100...$

D'autre part h est primitif car $h^3(x)$ *contient toutes les lettres* $\forall x \in \{a,b,c\}$.

Enfin, comme la fréquence de 0 dans $s_{\alpha,x}$ *est* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *qui est irrationnel, d'après le théorème 2.5,* $s_{\alpha,x}$ *n'est pas uniformément morphique.*

Exemple 2.18 ***(g) Uniformément morphique, mais ni purement morphique, ni morphique primitif, ni récurrent. ([5], p.18-08, [2], p.11)***

Soit le morphisme g défini comme suit :

$$g : \{0,1,2\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 20 & si\ x = 1 \\ 210 & si\ x = 2 \end{cases}$$

g est prolongeable en 2 et $g^{\omega}(2) = 210201210.....$

D'autre part, on défini h comme suit :

$$h : \{a,b,c,d\}^* \longrightarrow \{a,b,c,d\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ ca & si\ x = b \\ cd & si\ x = c \\ ac & si\ x = d \end{cases}$$

h est prolongeable en a et $h^{\omega}(a) = abcacdab...$*, en lui appliquant le codage* τ *défini par abcd* $\longrightarrow 2101$*, on obtient* $\tau(h^{\omega}(a)) = w = 21020121....$

On va montrer maintenant que $g^\omega(2) = \tau(h^\omega(a))$. *Pour cela il suffit de montrer les trois formules suivantes :*

$$g^n(2) = \tau(h^{n-1}(abc)) \ , \ \ g^n(1) = \tau(h^{n-1}(ac)) \ \ \textit{et} \ \ g^n(0) = \tau(h^{n-1}(d))$$

Les formules se montrent par récurrence. Pour $n = 1$, *les trois formules sont vraies (la vérification est évidente).*

On suppose que les trois formules sont vraies pour $n \in \mathbb{N}$, *et montrons qu'elles le sont aussi pour* $n+1$.

$$\begin{aligned} g^{n+1}(2) = g^n(210) &= \tau(h^{n-1}(abc))\tau(h^{n-1}(ac))\tau(h^{n-1}(d)) \\ &= \tau(h^{n-1}(abcacd)) = \tau(h^n(abc)) \end{aligned}$$

On se contentera de celle-ci car les deux autres formules se vérifient de façon analogue.

Donc $g^\omega(2) = \tau(h^\omega(a))$, *on déduit alors que* $g^\omega(2)$ *est uniformément morphique.*

Considérons maintenant le mot $w = 220201210120...$ *qui représente le mot* $g^\omega(2)$ *où le premier symbole est changé par un 2. Comme* $g^\omega(2)$ *est 2-uniforme alors* w *l'est aussi, et est généré par le morphisme suivant :*

$$\lambda : \{0,1,2,3,4,5\}^* \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 01 & si\ x = 0 \\ 23 & si\ x = 1\ ou\ x = 5 \\ 24 & si\ x = 2 \\ 35 & si\ x = 3 \\ 32 & si\ x = 4 \end{cases}$$

λ *est prolongeable en* 0 *et en appliquant le codage* $\tau : 012345 \longrightarrow 220211$ *à* $\lambda^\omega(0)$ *on obtient* w.

Proposition 2.7 *Le mot* $g^\omega(2)$ *est sans carré.*

w *ne peut pas être purement morphique car si c'est le cas, alors il existe un morphisme* ξ *tel que* $w = \xi^\omega(2)$, *donc* $\xi(2)$ *commence par* 22, *ce qui implique que* 22

apparaitra infiniment dans w, ce qui est impossible car par définition de g il est impossible d'avoir 22 comme facteur de $g^\omega(2)$.
Enfin, comme 22 apparait qu'une seule fois dans w alors il n'est pas récurrent, et donc pas primitive par le théorème 2.2.a.

Exemple 2.19 ***(h) Uniformément morphique et récurrent, mais ni purement morphique ni morphique primitif. ([2], p.12)***
Soit le morphisme h 3-uniforme prolongeable en a défini comme suit :

$$h : \{a,b,c\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} aba & si\ x = a \\ ccc & si\ x = b \\ ccc & si\ x = c \end{cases}$$

Donc $h^\omega(a) = abacccabaccccccccccaba...$, en lui appliquant le codage $abc \longrightarrow 001$ on obtient le mot $y = 000111000111111111000...$
Il est clair que y est un mot uniformément morphique, récurrent mais pas uniformément récurrent car y contient un long bloc de 1.
Soit u le mot où $u_i = \nu_2(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$u = 010201030102...$$

Proposition 2.8 *Le mot u où $u_i = \nu_2(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ est sans carré.*

En appliquant à u le codage $u_i \longrightarrow 0001^{3^{i+1}}$, on obtient y.
Supposons à présent que y est purement morphique, alors c'est un point fixe d'un certain morphisme g qui commence par $g(0)g(0)g(0)$ où $g(0) = 000v$. Mais $000v000v$ signifie qu'il doit être décodé en un carré dans u qui est un mot sans carré.
D'où y ne peut pas être purement morphique.

Exemple 2.20 ***(i) Uniformément morphique primitif mais pas purement morphique. ([2], p.12)***
Reprenons le mot de Rudin-Shapiro r présenté dans l'exemple 2.5, il est clair que r

est uniformément morphique.

Pour montrer que r n'est pas purement morphique on devra d'abord énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.9 ***([2], p.12)***

Les seuls cubes figurant dans le mot de Rudin-Shapiro sont 000 *et* 111.

Supposons que r est purement morphique, alors il est généré par un certain morphisme h et $h(r) = r$.

Donc :

$$h(000...) = h(0)h(0)h(0).... = 000....$$

Alors le facteur $h(0)h(0)h(0)$ apparait dans r. Mais on sait que les seuls cubes existants dans le mot de Rudin-Shapiro sont 000 et 111 ($h(0)$ ne peut pas être égal à 0 ou 1 car sinon h ne sera pas prolongeable en 0).

D'où r ne peut pas être purement morphique.

Exemple 2.21 ***(j) Purement morphique, mais pas uniformément morphique, ni morphique primitif, ni récurrent.***

Soit le mot de Fibonacci $f =$ 01001010... et changeons le premier 0 par 2, on obtient :

$$u = 21001010...$$

Ce mot est purement morphique car $u = h^{\omega}(2)$ où h est défini comme suit :

$$h : \{0,1,2\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 01 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x = 1 \\ 21 & si\ x = 2 \end{cases}$$

On peut déduire de l'exemple 2.15 que la fréquence de 0 *dans u est égale à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qui est irrationnel, donc d'après le théorème 2.5, u n'est pas uniformément morphique.*

u n'est pas récurrent car 2 apparait qu'une seule fois, et donc pas primitif d'après le théorème 2.2.a.

Exemple 2.22 ***(k) Purement morphique et récurrent, mais pas uniformément morphique, ni morphique primitif, ni uniformément morphique.***
Soit le morphisme h définie comme suit :

$$h : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 010 & si\ x = 0 \\ 11 & si\ x = 1 \end{cases}$$

h est prolongeable en 0*, alors* $u = h^{\omega}(0)$ *est purement morphique.*
u *est récurrent car pour tout facteur* v *de* u*,* $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* v *apparait dans* $h^n(0)$*, et donc apparait infiniment car* $h^n(010) = h^{n+1}(0)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*
Comme u a un long facteur ne contenant que des 1 *alors u est récurrent.*
u n'est pas uniformément morphique d'après la proposition suivante :

Proposition 2.10 ***([2], p.12)***
Le mot u n'est pas k-automatique, $\forall k \in \mathbb{N}^*$*.*

Par les deux versions du théorème de Cobham on déduit que u n'est pas uniformément morphique.

Exemple 2.23 ***(l) Purement morphique et morphique primitif mais pas uniformément morphique, ni purement morphique primitif.***
Soit le morphisme de Chacon défini comme suit :

$$c : \mathcal{A}^* = \{0,1,2\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$
$$a \longmapsto \begin{cases} 0012 & si\ a = 0 \\ 12 & si\ a = 1 \\ 021 & si\ a = 2 \end{cases}$$

h est prolongeable en 0*, on obtient* $c^{\omega}(0) = 0012001212012...$*, en lui appliquant le codage* $\tau : 012 \longrightarrow 010$*, on obtient le mot de Chacon D :*

$$D = \tau(c^{\omega}(0)) = 0010001010010...$$

Le morphisme c est primitif car toutes les lettres de $\mathcal{A}$, apparaissent dans $c^2(a)$,$\forall a \in \mathcal{A}$. Donc D est un mot morphique primitif.
D'autre part, D peut être généré par le morphisme suivant :

$$g : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$$
$$a \longmapsto \begin{cases} 0010 & si\ a = 0 \\ 1 & si\ a = 1 \end{cases}$$

g est prolongeable en 0, on obtient ainsi le mot de Chacon :

$$D = g^\omega(0) = 0010001010010...$$

D'où D est purement morphique.
Montrons à présent que D ne peut pas être purement morphique primitif.
Soit h un morphisme tel que $h(D) = D$, on va montrer que :

$$h(0) = 0 \implies h(1) = 1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $h(1) \neq 1$ et posons $h(1) = u$.

- *Si $u = \epsilon$ alors le seul point fixe de h est $D = 0^\omega$.*
- *Si $u \neq \epsilon$, on a :*

$$h(D) = \underset{\substack{\downarrow\\0}}{h(0)}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{h(0)}\underset{\substack{\downarrow\\u}}{h(1)}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{h(0)}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{h(0)}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{h(0)}\underset{\substack{\downarrow\\u}}{h(1)}...$$

  On constate que u doit commencer par 1000 et doit se terminer par 1 (car u peut être suivi de 000 et $0000 \notin \mathcal{L}(D)$).
  Il nous reste à présent deux cas, soit u se termine par 001 ou bien par 101. (car par construction de D, $11 \notin \mathcal{L}(D)$).

  (i) Si u se termine par 001. On sait que $u00u \in \mathcal{L}(D)$, alors $001001 \in \mathcal{L}(D)$ (absurde car 001001 n'est pas un facteur de D).

  (ii) Si u se termine pas 101. On sait que $u0u \in \mathcal{L}(D)$, alors $10101 \in \mathcal{L}(D)$ (absurde car 10101 n'est pas un facteur de D).

On déduit alors que $u = 1$.

Supposons à présent que h *est un morphisme primitif tel que* $h(D) = D$. *Si* vv *est un préfixe de* D *alors* $v = 0$ *ou bien* $v = t^n(0)$ *où* t *est un morphisme qui génère* D. *Si* $|v| > 1$, *alors* v *commence par* 0010 *qui est obtenu par* $t(0)$, *et donc il existe un préfixe* v' *de* D *tel que* $v = t(v')$. *Comme* $D = vv... = t(v'v')....$ *alors* $v'v'$ *est un préfixe de* D.

On vient de montrer que :

$$t(v'v') = t(v')t(v') \text{ est préfixe de } D \Longrightarrow v'v' \text{ est un préfixe de } D$$

Par ailleurs, puisque D *commence par* $h(0)h(0)$, *donc* $h(0) = t^n(0)$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}^*$ *(car si* $h(0) = 0$, h *ne serait pas primitif). C'est-à-dire que* $h(0)$ *commence par* 0010.

On peut supposer que $h(1) = t(u)$ *où* u *contient* 0 *et* 1.

Ainsi, supposons que h *représente le morphisme primitif admettant* D *comme point fixe tel que* $|h(1)|$ *est minimal. Donc*

$$D = t^n(0)t^n(0)t(u)t^n(0)t^n(0)t^n(0)t(u)....$$

Par la formule démontrée on obtient que :

$$D = t^{n-1}(0)t^{n-1}(0)ut^{n-1}(0)t^{n-1}(0)t^{n-1}(0)u....$$

Par la minimalité de $|h(1)|$, *on obtient que le morphisme* h' *définie comme suit n'est pas primitif.*

$$h' : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} t^{n-1}(0) & si\ x = 0 \\ u & si\ x = 1 \end{cases}$$

Or, h' *n'est pas primitive si et seulement si* $n = 1$ *(contradiction avec l'hypothèse), donc* h *n'est pas primitif.*

Proposition 2.11 ***([2], p.14)***

Le mot D *n'est pas uniformément morphique.*

Exemple 2.24 ***(m) Purement morphique primitif mais pas uniformément morphique. ([2], p.14)***
Soit f le mot de Fibonacci, on a montré dans l'exemple 2.6 qu'il est purement morphique primitif.
La fréquence de 0 dans f est égale à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qui est irrationnel, donc u n'est pas uniformément morphique d'après le théorème 2.5.

Exemple 2.25 ***(n) Purement morphique et uniformément morphique, mais pas purement uniformément morphique, ni morphique primitif, ni récurrent. ([2], p.14)***
Considérons le morphisme h défini par :

$$h : \{0,1,2,3\}^* \longrightarrow \{0,1,2,3\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 02 & si\ x = 0 \\ 1012 & si\ x = 1 \\ 102012 & si\ x = 2 \\ 32 & si\ x = 3 \end{cases}$$

En raisonnant par récurrence sur n, on obtient l'égalité suivante :

$$h^{n+1}(3) = 3g^{2n}(2)g^{2n-2}(2)...g^2(2)2$$

où g est le morphisme défini dans l'exemple 2.18, donc on constate que :

$$w = h^{\omega}(3) = \lim_{n\to+\infty} h^{n+1}(3) = 3g^{\omega}(2)$$

Il est clair que le mot w est purement morphique et uniformément morphique car il *est généré par le morphisme 2-uniforme suivant :*

$$\delta : \{a,b,c,d,e\}^* \longrightarrow \{a,b,c,d,e\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ cd & si\ x = b \\ bd & si\ x = c \\ eb & si\ x = d \\ db & si\ x = e \end{cases}$$

δ est prolongeable en a et en lui appliquant le codage $\rho : abcde \longrightarrow 32101$ on obtient w.
Il est clair que 3 n'apparait qu'une seule fois dans w, donc le mot n'est pas récurrent donc pas uniformément récurrent et par le théorème 2.2.a il n'est pas morphique primitif.
Supposons que w est purement uniformément morphique, alors il peut être généré par un morphisme k-uniforme noté f, donc w est à la fois 2-uniforme et k-uniforme. D'après le théorème de Cobham si 2 et k sont multiplicativement indépendants alors w serait ultimement périodique (contradiction). Supposons que 2 et k sont multiplicativement dépendants, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = 2^n$, on aura donc $f\rho = \rho\delta^n$. Alors :

$$\begin{cases} f(\rho(c)) = \rho(\delta^n(c)) \\ f(\rho(e)) = \rho(\delta^n(e)) \end{cases}$$

On aura maintenant deux cas :

- *Si n est impair :*

$$\begin{cases} f(\rho(c)) = \rho(\delta^n(c)) \\ f(\rho(e)) = \rho(\delta^n(e)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = \rho(bd...) \\ f(1) = \rho(db...) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = 20... \\ f(1) = 02... \end{cases}$$

  Contradiction, donc n ne peut pas être impair.

- *Si n est paire :*

$$\begin{cases} f(\rho(c)) = \rho(\delta^n(c)) \\ f(\rho(e)) = \rho(\delta^n(e)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = \rho(cd...) \\ f(1) = \rho(eb...) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = 10... \\ f(1) = 12... \end{cases}$$

Contradiction, donc n ne peut pas être paire.

On déduit alors que w n'est pas un mot purement uniformément morphique.

Exemple 2.26 ***(o) Purement morphique, uniformément morphique et récurrent, mais pas purement uniformément morphique, ni morphique primitif. ([2], p.15)***

Soit f le morphisme défini ci-dessous :

$$f : \{a,b,c,d,e\}^* \longrightarrow \{a,b,c,d,e\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} abcda & si\ x = a \\ bcdee & si\ x = b \\ eeeee & sinon \end{cases}$$

f est prolongeable en a et $f^\omega(a) = abcdabcdeeeeeeeeeeeeabcdabcde^{72}....$ En lui appliquant le codage $\tau : abcde \longrightarrow 01123$, on obtient :

$$q = \tau(f^\omega(a)) = 011201123333333333330112011 23^{72}...$$

q est un mot purement morphique car c'est le point fixe du morphisme h définie par :

$$f : \{0,1,2,3\}^* \longrightarrow \{0,1,2,3\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 01120 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x = 1 \\ 2333333333333 & si\ x = 2 \\ 33333 & sinon \end{cases}$$

$q = h^\omega(0)$ car $h\tau f = \tau f^2$. Supposons que q est purement uniformément morphique, alors il existe un morphisme j qui est uniforme. Mais comme q est généré par f qui est 5-uniforme alors d'après le théorème de Cobham j est de 5^k-uniforme où $k \in \mathbb{N}^*$ (sinon q serait ultimement périodique).

Par définition $j\tau = \tau f^k$, alors on a :

$$\begin{cases} j(\tau(b)) = \tau(f^k(b)) \\ j(\tau(c)) = \tau(f^k(c)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} j(1) = \tau(bcdee...) \\ j(1) = \tau(eeeee...) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} j(1) = 1123... \\ j(1) = 3333... \end{cases}$$

$j(1)$ ne peut pas commencer par 1 et 3 au même temps (contradiction). Donc q ne peut pas être purement uniformément morphique.
Le mot q n'est pas uniformément récurrent car il contient un long bloc de 3.

Exemple 2.27 ***(p) Purement morphique et uniformément morphique primitif, mais pas purement uniformément morphique ni purement morphique primitif. ([2], p.15)***
On considère le mot de Thue-Morse t défini dans l'exemple 2.2, et appliquons lui le morphisme suivant :

$$h : \{0,1\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ac & si\ x = 0 \\ bc & si\ x = 1 \end{cases}$$

On obtient $u = h(t) = acbcbcacbcacacbc....$ Le mot u est purement morphique car il peut être généré par le morphisme suivant :

$$g : \{a,b,c\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} acb & si\ x = a \\ bca & si\ x = b \\ c & si\ x = c \end{cases}$$

D'autre part, u est uniformément morphique primitif, car c'est l'image par le codage $0123 \to acbc$ de $\eta^\omega(0)$ où η est le morphisme suivant :

$$\eta : \{0,1,2,3\}^* \longrightarrow \{0,1,2,3\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 01 & si\ x = 0 \\ 01 & si\ x = 3 \\ 23 & sinon \end{cases}$$

Le mot u ne peut pas être purement morphique primitif, ni purement uniformément morphique.

En effet, supposons que $u = f^{\omega}(a)$ *où* f *est un morphisme.*

Si f *est primitif ou* k*-uniforme, avec* $k \geqslant 2$ *alors* $f(c) \neq c$ *et* $f(c) \neq \epsilon$. *Par définition du morphisme* g, *on remarque que* $cc \notin \mathcal{L}(u)$, *donc* $f(c) \neq cc$, *alors* $f(c)$ *doit contenir une occurrence de* a *ou de* b.

Le mot u *peut être construit avec les mots* $f(acbc), f(bcac)$. *Ces deux mots ont leurs occurrences de* a *et de* b *dans des positions d'indices impairs. Donc, il existe une suite arithmétique* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tel que le mot* $w = u_{v_1}u_{v_2}u_{v_3}...$ *ne contient que des* a *ou des* b.

Donc il en est de même pour le mot de Thue-Morse, ce qui contredit la proposition suivante :

Proposition 2.12

Toute suite de symbole extraite du mot de Thue-Morse t *obtenue par une suite arithmétique sur les indices du mot* t *contient les deux lettres* 0 *et* 1.

D'où le résultat.

Exemple 2.28 ***(q) Purement morphique primitif et uniformément morphique primitif mais pas purement uniformément morphique.***

Soit le mot $T = g^{\omega}(2)$ *où* g *est le morphisme défini dans l'exemple 2.18.*

$$g : \{0,1,2\}^* \longrightarrow \{0,1,2\}^*$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 20 & si\ x = 1 \\ 210 & si\ x = 2 \end{cases}$$

On a déjà montré que T *peut être généré par un morphisme 2-uniforme, ce morphisme en question est primitif (défini par* h *dans l'exemple 2.18). Donc* T *est uniformément morphique primitif.*

Supposons à présent que T *est purement uniformément morphique, alors* T *est généré par un certain morphisme* ψ k*-uniforme où* k *est un entier supérieur ou égal à 2, et donc* T *est 2-uniforme et* k*-uniforme.*

Si k n'est pas une puissance de 2 alors d'après le théorème de Cobham T est ultimement périodique (contradiction avec le fait que T est sans carré).
On déduit alors que T est k-uniforme où $k = 2^q$.
D'autre part :

$$T = \psi(T) \Longrightarrow \psi(210201) \textit{ est préfixe de } T \textit{ de longueur } 6k$$

En particulier, $T_k = T_{5k}$ car c'est la première lettre de $\psi(1)$

$$T = \underbrace{T_0T_1...T_{k-1}}_{\psi(2)}\underbrace{T_k...T_{2k-1}}_{\psi(1)}...\underbrace{T_{5k}...T_{6k-1}}_{\psi(1)}$$

Par ailleurs, posons $T' = h^\omega(a)$ où h est le morphisme défini dans l'exemple 2.18, donc :

$$h^q(abcacd) = h^q(a)h^q(a)h^q(b)h^q(cac)h^q(d) = T'_0...T'_{6k-1}$$

On sait que $h^q(b)$ commence par c et $h^q(d)$ commence par a, alors $\tau(h^q(b))$ commence par 0 et $\tau(h^q(d))$ commence par a, c'est-à-dire : $T_k = 0$ et $T_{5k} = 2$ (contradiction avec $T_k = T_{5k}$).
D'où T ne peut pas être purement uniformément morphique.

Exemple 2.29 ***(r)Purement uniformément morphique mais pas morphique primitif, ni récurrent. ([2], p.16)***
Soit h le morphisme 2-uniforme défini comme suit :

$$h : \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, b, c\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} ab & si\ x = a \\ bc & si\ x = b \\ cc & si\ x = c \end{cases}$$

h est prolongeable en a et $u = h^\omega(a) = abbcbccc....$ est purement uniformément morphique.
Il est clair que a apparait qu'une seule fois dans u, donc il n'est pas récurrent. Par suite par le théorème 2.2.a, u n'est pas primitif.

Exemple 2.30 ***(s) Purement uniformément morphique et récurrent mais pas morphique primitif. ([2], p.16)***

Soit h le morphisme 3-uniforme défini comme suit :

$$h : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 010 & si\ x = 0 \\ 111 & si\ x = 1 \end{cases}$$

h est prolongeable en 0 et $u = h^\omega(0) = 010111010111111....$

u est purement uniformément morphique et récurrent mais pas uniformément récurrent car pour n assez grand, $h^n(0)$ aura un long bloc qui contient que des 1.

Donc d'après le théorème 2.2.a, u n'est pas primitif.

Exemple 2.31 ***(t) Purement uniformément morphique primitif.***

Le mot de Thue-Morse t présenté dans l'exemple 2.8.

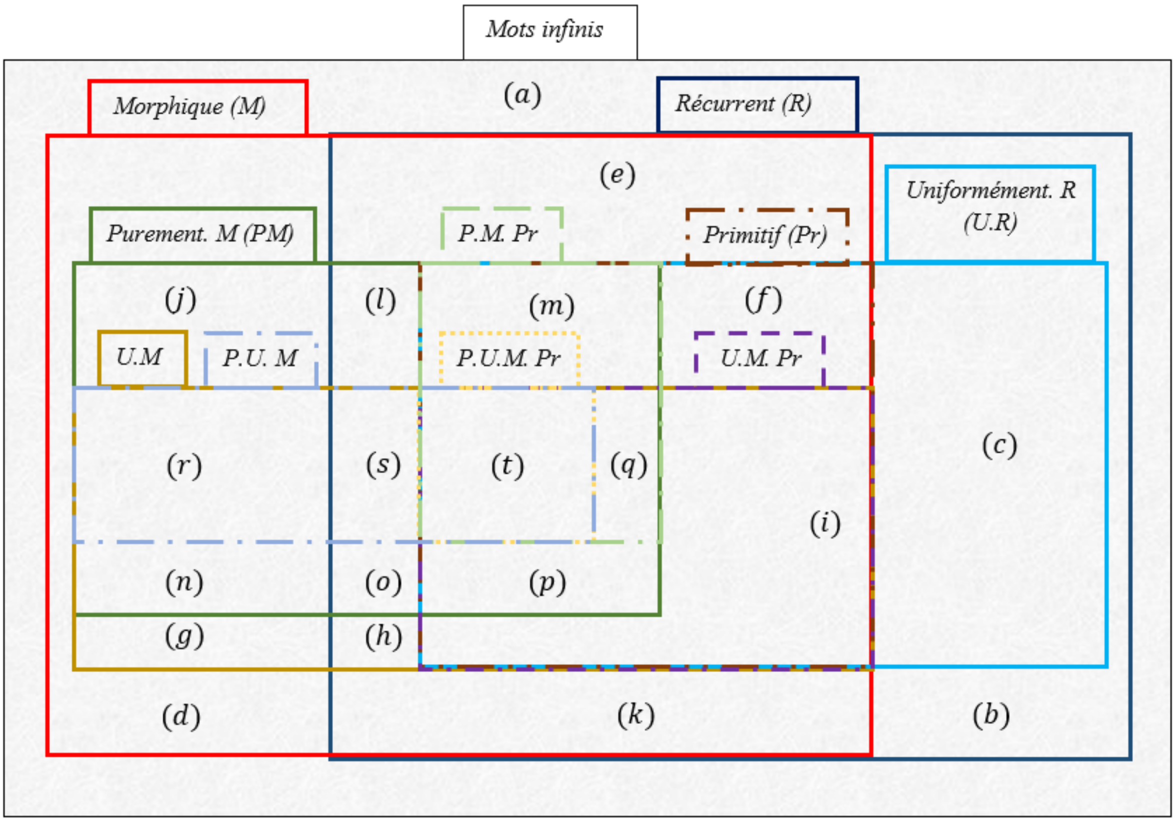


FIGURE 2.2 – Carte récapitulative des différents types de mots.

Chapitre 3

Propriétés des sous-shift

Dans le chapitre précédent, on a défini différentes catégories de mots. Dans ce chapitre, on va construire des systèmes dynamiques symboliques à partir de ces derniers. On va étudier les différentes propriétés topologiques et ergodiques que vérifie le shift sur $\mathcal{A}^\omega$. Pour celles qui ne sont par vérifiées, on va essayer de trouver des sous-ensembles invariants de $\mathcal{A}^\omega$ sur lesquels elles sont vérifiées.
On va aussi s'intéresser aux différentes caractérisations d'une catégorie de mots très importante en combinatoire des mots ainsi qu'en dynamique symbolique qui est représenté par "les mots sturmiens", qui nous permettra de construire des sous-shift minimaux et uniquement ergodique.

3.1 Espaces symboliques

Un espace symbolique est le produit infini de concaténation d'un ensemble fini de symboles "Alphabet". Étant donné un alphabet $\mathcal{A}$, on peut le munir d'une topologie en considérant par exemple la topologie discrète où $\tau = \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Par suite on pourra déduire que $\mathcal{A}^\omega$ peut être muni de la topologie produit.
Le but de cette section est de définir des systèmes dynamiques symboliques.

Proposition 3.1 ***([4], p.49)***
Soit $\mathcal{A}$ un alphabet et d_m une application définie comme suit :

$$\begin{aligned} d_m &: \mathcal{A}^\omega \to \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \frac{1}{m^n}, \text{ où } n = inf\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq y_i\} \end{aligned}$$

d_m définit une distance sur $\mathcal{A}^\omega$.

Démonstration

Montrons que d_m définit bien une distance sur $\mathcal{A}^\omega$. Soit $x, y, z \in \mathcal{A}^\omega$.

1. *Montrons que $d_m(x, x) = 0$.*
   On a : $d_m(x, x) = \frac{1}{m^n}$ avec $n = inf\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq x_i\} \longrightarrow +\infty \Rightarrow d_m(x, x) = 0$.
2. *Montrons que $d_m(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.*
   $d_m(x, y) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{m^n} = 0 \Longrightarrow n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow x = y$.
3. *Montrons que $d_m(x, y) = d_m(y, x)$.*
   $n = inf\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq y_i\} = inf\{i \in \mathbb{N}, y_i \neq x_i\} \Longleftrightarrow d_m(x, y) = d_m(y, x)$.
4. *Montrons que $d_m(x, y) \leq d_m(x, z) + d_m(z, y)$*
   Posons $p = inf\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq y_i\}$, $q = inf\{i \in \mathbb{N}, y_i \neq z_i\}$ et $r = inf\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq z_i\}$.

   $$\textit{On a : } \begin{cases} q > p \\ r > p \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_p = z_p \\ x_p = z_p \end{cases} \Longleftrightarrow x_p = y_p \ \ \textit{(contradiction)}$$

   Alors $q > p$ ou $r > p$.
   D'où : $d_m(x, y) \leq d_m(x, z) + d_m(z, y)$ □

Remarque 3.1 *Souvent, on associe à $\mathcal{A}^\omega$ la distance d_2.*

On obtient que $\mathcal{A}^\omega$ est un espace métrique. La topologie discrète étant compact, on déduit par le théorème de Tychonoff que $\mathcal{A}^\omega$ l'est aussi. Ainsi, on peut à présent définir un système dynamique discret sur $\mathcal{A}^\omega$.

3.1.1 Le décalage de Bernoulli

Le décalage de Bernoulli (ou l'application shift), est l'application définie sur $\mathcal{A}^\omega$ qui à tout mot $u = u_0u_1u_2...$ associe son décalé d'une seule position.

$$\begin{aligned}\sigma : \mathcal{A}^\omega &\longrightarrow \mathcal{A}^\omega \\ u &\longmapsto \sigma(u_0u_1u_2...) = u_1u_2u_3...\end{aligned}$$

L'application σ est continue, donc $(\mathcal{A}^\omega, \sigma)$ est bien un système dynamique discret. Déterminons maintenant les points fixes du décalage de Bernoulli.

$$\begin{aligned}\sigma(u) = u &\Longleftrightarrow u_1u_2u_3... = u_0u_1u_2... \\ &\Longleftrightarrow u_i = u_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Alors l'ensemble des points fixes de σ s'écrit sous la forme :

$$S = \{a^\omega \quad , a \in \mathcal{A}\}$$

D'où le nombre de points fixes est égal au cardinal de $\mathcal{A}$, noté $Card(\mathcal{A})$.

Définition 3.1

Soit u un mot fini défini sur l'alphabet $\mathcal{A}$, tel que $|u| = n$, on appelle cylindre de longueur n l'ensemble défini par :

$$[u] = \{x \in \mathcal{A}^\omega, x[0..n-1] = u\}$$

Proposition 3.2

Les cylindres sont ouverts et fermés pour la topologie discrète de $\mathcal{A}^\omega$.

Démonstration

Soit $m = Card(\mathcal{A})$, alors il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, B\left(x, \frac{1}{m^{n-1}}\right) = \overline{B}\left(x, \frac{1}{m^n}\right)$.

On considère deux éléments $x, y \in [u]$, comme les n premières lettres de x et y sont identiques, alors :

$$d(x,y) \leqslant \frac{1}{m^n} \Longrightarrow y \in \overline{B}\left(x, \frac{1}{m^n}\right)$$

Réciproquement,soit $y \in \overline{B}\left(x, \frac{1}{m^n}\right)$, *alors* $y \in [x[0..n-1]]$.

On déduit qu'un cylindre est ouvert et fermé. $\square$

Remarque 3.2

- *On désigne par* $[u]_k$ *l'ensemble suivant* $[u]_k = \{x \in \mathcal{A}^\omega, x[k..k+n-1] = u\}$.
- *Les* $[u]_k$ *sont ouverts et fermés en utilisant le fait que* $[u]_k = \sigma^{-k}([u])$.
- *On peut définir un espace métrique sur* $\mathcal{A}^\omega$ *en utilisant les cylindres comme étant les éléments de la topologie (car ils forment une base de voisinage).*

Proposition 3.3 ***([20], p.15)***

Soit $\mathcal{A} = \{0,1\}$ *un alphabet, alors* (S^1, B_2) *est un facteur de* $(\mathcal{A}^\omega, \sigma)$.

Démonstration *Soit l'application* π *définie par :*

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A}^\omega &\longrightarrow S^1 \\ u_0u_1... &\longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u_i}{2^{i+1}} \ mod\ 1 \end{aligned}$$

Il est clair que π *est surjective car tout élément de* S^1 *admet un développement en base binaire. On a :*

$$(\pi \circ \sigma)(u_0u_1u_2...) = \pi(u_1u_2...) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{u_i}{2^{i+1}} \ mod\ 1$$

$$(B_2 \circ \pi)(u_0u_1u_2...) = B_2\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u_i}{2^{i+1}} \ mod\ 1\right) = 2\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u_i}{2^{i+1}} \ mod\ 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{u_i}{2^{i+1}} \ mod\ 1$$

D'où $\pi \circ \sigma = B_2 \circ \pi$, *donc* (S^1, B_2) *est un facteur de* $(\mathcal{A}, \sigma)$. $\square$

Remarque 3.3

L'application π *n'est pas une conjugaison car* $\frac{1}{2}$ *par exemple admet deux développements binaires (* 0.1 *et* $\sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i-1}$*), donc elle n'est pas injective.*

3.2 Propriétés des sous-shift

Dans cette partie, on va s'intéresser aux propriétés topologiques et ergodique du shift et sous-shift, plus précisément à la transitivité, minimalité, équicontinuité, expansivité, unique ergodicité....

3.2.1 Transitivité et minimalité

Proposition 3.4 *$(\mathcal{A}^\omega, \sigma)$ est transitif mais pas minimal.*

Démonstration

Comme $\mathcal{A}$ est fini, notons ses lettres par $\mathcal{A} = \{0, 1, ..., n\}$.

On va montrer que le système n'est pas minimal, puis qu'il est transitif.

- *Soit le point fixe $u = 0^\omega$, alors $\overline{\theta(u)} = (0)^\omega \neq \mathcal{A}^\omega$.*
  D'où $(\mathcal{A}^\omega, \sigma)$ n'est pas minimal.
- *Pour la transitivité, considérons le point x en mettant les $n+1$ premières lettres, puis toutes les combinaisons à deux lettres $\{00, 01, 02, ..., 0n, 10, 11, ..., nn\}$, puis toutes les combinaisons à trois lettres et ainsi de suite.*
  Montrons que x est d'orbite dense. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.
  Soit $y \in \mathcal{A}^\omega$ tel que $y = y_0y_1y_2...$, alors comme x contient toutes les combinaisons possibles de toutes les longueurs, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$y[0...n_0] = x[m...m+n_0] = \sigma^m(x)[0...n_0]$$
  Ceci implique que :
  $$d(y, \sigma^m(x)) < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$
  D'où x est transitif. □

Définition 3.2

*Soit X un sous-ensemble fermé invariant de $\mathcal{A}^\omega$. Le système (X, σ) est dit **sous-shift**.*

Le résultat suivant nous permet d'avoir une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier un mot infini x pour que le sous-shift $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ soit minimal.

Proposition 3.5

Soit $x \in \mathcal{A}^\omega$,et $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ un système dynamique discret, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *x est un mot uniformément récurrent.*
2. *Pour tout voisinage U de x, $R(U) = \{r \in \mathbb{N}, \sigma^r(x) \in U\}$ est syndétique.*

Démonstration

$1 \Rightarrow 2$ *Soit U un voisinage de x alors il existe un cylindre B contenant x tel que $B = [u] = [u_0u_1...u_{m-1}]$. Donc :*

$$x[0...m-1] = u$$

Comme $u \in \mathcal{L}(x)$ et x est uniformément récurrent, alors :

$$\exists s > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u \text{ est facteur de } x[n...n+m+s-1]$$

Donc pour $k = s-1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r \in [n, n+k]$ tel que $\sigma^r(x) \in U$

D'où $R(U)$ est syndétique.

$2 \Rightarrow 1$ *Soit U un voisinage de x, alors $R(U)$ est syndétique, c-à-d :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ \exists r \in [n, n+k] \text{ tel que } \sigma^r(x) \in U$$

Comme U est un voisinage, alors il contient un cylindre B contenant x. Posons $B = [u] = [u_0u_1...u_{m-1}]$.
On déduit que $\sigma^r(x)[0...m-1] = u$, alors $u \in \mathcal{L}(x)$.
Autrement dit :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ \exists r \in [n, n+k] \text{ tel que } u = x[r...r+m-1]$$

Alors :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u \text{ est facteur de } x[n...n+k+m-1]$$

D'où x est uniformément récurrent. □

Proposition 3.6 ***([18], p.6)***

Le sous-shift $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ est minimal si et seulement si le mot x est uniformément récurrent.

Démonstration

On a vu dans le théorème 1.1 qu'un système dynamique $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *est minimal si et seulement si pour tout voisinage* U *de* x*,* $R(U)$ *est syndétique.*

De la proposition précédente on obtient le résultat. □

Exemple 3.1 *Sous-shift minimal.*

- *Le sous-shift* $(\overline{\theta(t)}, \sigma)$ *où* t *est le mot de Thue-Morse est minimal.*
- *Le sous-shift* $(\overline{\theta(r)}, \sigma)$ *où* r *est le mot de Rudin-Shapiro est minimal.*

3.2.2 Expansivité, distalité et equicontinuité

Définition 3.3 *Un système dynamique* (X, f) *est dit* ***expansif*** *si :*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x, y \in X \text{ tel que } x \neq y,\ \exists n \geqslant 0,\ d(f^n(x), f^n(y)) \geqslant \varepsilon$$

Proposition 3.7 *Tout sous-shift est expansif.*

Démonstration

Soit un sous shift (Y, σ)*, soit* $x, y \in Y$ *tel que* $x \neq y$*, alors* $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \neq y_n$*, donc* $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) = 1$*.*

D'où (Y, σ) *est expansif.* □

Théorème 3.1 ***([24], p.31)***

Soit (X, f) *système dynamique expansif alors il est facteur topologique d'un certain sous-shift.*

Si de plus, X *est totalement discontinu, alors* (X, f) *est conjugué à un certain sous-shift.*

Maintenant qu'on sait que tout sous-shift est expansif, on se demande s'il est possible d'avoir un sous-shift equicontinu. La réponse est oui, comme le montre l'exemple ci-dessous :

Exemple 3.2

Soit $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *un sous-shift où* $x = (01)^\omega$.

Remarquons que $\forall u, v \in \overline{\theta(x)}$, *la distance entre* u *et* v *est égal à* $\frac{1}{2}$ *ou* 1.

Posons $\delta = \frac{1}{2}$ *dans la définition de l'equicontinuité alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall u, v \in \overline{\theta(x)}, v \neq u, \quad d(u,v) < \frac{1}{2} \implies d(\sigma(u), \sigma(v)) < \varepsilon$$

Car il n'existe pas deux facteurs ayant une distance inférieur à $\frac{1}{2}$.

D'où $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *est equicontinu.*

Définition 3.4 ***([26], p.30)***

Soit (X, f) *un système dynamique vérifiant* $\forall x, y \in X$ *:*

$$x \neq y \implies \inf_{n \in \mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

Alors le système dynamique (X, f) *est dit* ***distale****.*

Remarque 3.4

Les seuls sous-shift distales sont ceux où l'espace des phases est fini.

Exemple 3.3

Le sous-shift $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *où* $x = (01)^\omega$ *est distale.*

En effet, $\overline{\theta(x)} = \{(01)^\omega, (10)^\omega\}$, *donc si* $x \neq y$ *alors* $d(x,y) = 1 > 0$.

3.2.3 Ergodicité

Étant donné que tout système dynamique mesurable admet une mesure invariante, donc le shift et les sous-shift sont des systèmes dynamiques mesurés. Dans cette partie, on présentera la mesure de Bernoulli qui est un exemple de mesure invariante et ergodique pour le shift $(\mathcal{A}^\omega, \sigma)$, puis nous allons donner une condition nécessaire et suffisante afin d'obtenir des sous-shift uniquement ergodiques.

Mesure de Bernoulli ([31], p.58)

Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, ..., a-1\}$ et $x \in \mathcal{A}^\omega$ un mot infini $x = x_0x_1, ...$ où $x_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. à chaque $n \in \mathcal{A}$, on associe p_i, $i \in \{0, 1, ..., a-1\}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{a-1} p_i = 1$.
Soit $[B] = [b_0\ b_1...b_{n-1}]$ un cylindre de longueur n.
On définit la mesure de Bernoulli par :

$$\mu_B([b_0\ b_1...\ b_{n-1}]) = \prod_{i=0}^{n-1} p_{b_i}$$

La mesure de Bernoulli est invariante pour l'application shift. En effet, on a :

$$\sigma^{-1}([b_0\ b_1...\ b_{n-1}]) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma([i\ b_0\ b_1...\ b_{n-1}])$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mu_B(\sigma^{-1}([b_0\ b_1...\ b_{n-1}])) &= \mu_B(\bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma([i\ b_0\ b_1...\ b_{n-1}])) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mu_B(\sigma([i\ b_0\ b_1...\ b_{n-1}])) \\
&= \mu_B(\sigma([b_0\ b_1...\ b_{n-1}]) \sum_{i=0}^{n-1} p_{b_i} \\
&= \mu_B([b_0\ b_1...\ b_{n-1}])
\end{aligned}$$

D'où la mesure de Bernoulli μ_B est σ-invariante.

Proposition 3.8

Le système mesuré $(\mathcal{A}^\omega, \mathcal{B}, \sigma, \mu_B)$ où μ_B désigne la mesure de Bernoulli est ergodique.

Démonstration

Soit A un ensemble mesurable vérifiant $\sigma^{-1}(A) = A$, montrons que $\mu_B(A) \in \{0, 1\}$.
Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver des cylindres $C_1, C_2, ..., C_N$ tel que :

$$\mu\left(A\Delta\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) < \varepsilon$$

Posons $E = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$, *alors* $|\mu(A) - \mu(E)| < \varepsilon$.
Pour n *assez grand, posons* $F = \sigma^{-1}(E)$, *alors on aura :*

$$\mu_B(F \cap E) = \mu_B(F)\mu_B(E) = \mu_B(\sigma^{-1}(E))\mu_B(E) = \mu_B(E)^2$$

Car μ *est* σ*-invariante.*

D'autre part :

$$\mu_B(A\Delta F) = \mu_B(\sigma^{-1}(A)\Delta\sigma^{-1}(E)) = \mu_B(\sigma^{-1}(A\Delta E)) = \mu_B(A\Delta E) < \varepsilon$$

Puisque $A\Delta(E \cap F) \subset (A\Delta E) \cup (A\Delta F)$, *on obtient :*

$$\mu_B(A\Delta(E \cap F)) \leqslant \mu_B(A\Delta E) + \mu_B(A\Delta F) < 2\varepsilon$$

Donc $|\mu_B(A) - \mu_B(E \cap F)| < 2\varepsilon$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|\mu_B(A) - \mu_B(A)^2| &\leqslant |\mu_B(A) - \mu_B(E \cap F)| + |\mu_B(E \cap F) - \mu_B(A)^2| \\
&\leqslant 2\varepsilon + |\mu_B(E)^2 - \mu_B(A)^2| = 2\varepsilon + |\mu_B(E) - \mu_B(A)||\mu_B(E) + \mu_B(A)| \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}$$

On déduit que $\mu_B(A) \in \{0, 1\}$, *d'où* μ_B *est* σ*-ergodique.* □

Remarque 3.5

Comme le système dynamique mesurable $(\mathcal{A}^\omega, \mathcal{B}, \sigma)$ *admet d'autres mesures ergodiques (la mesure de Dirac au point fixe* $u = 0^\omega$ *), on déduit que le système* $(\mathcal{A}^\omega, \mathcal{B}, \sigma)$ *n'est pas uniquement ergodique. C'est ce qui nous amène à chercher des sous-shift rendant la mesure de Bernoulli uniquement ergodique.*

Définition 3.5 ***([28], p.139)***

Soit $\mathcal{A}$ *un alphabet et* w *un mot infini défini sur* $\mathcal{A}$, *on dit que* w *a une fréquence de mots uniforme si :*

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathcal{A}^*, \lim_{l \to +\infty} \frac{|w[k...k+l-1]|_v}{l} \text{ existe et est indépendante de } k$$

Théorème 3.2 ***([25], p.101)***
Soit $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *un sous-shift, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *est uniquement ergodique.*
2. x *a une fréquence de mots uniforme.*

Démonstration
Pour montrer que $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *est uniquement ergodique, d'après le théorème 1.3 ceci revient à montrer que* $A_n\varphi$ *converge uniformément vers une constante.*
Il suffit alors de montrer la convergence uniforme pour une famille dense de $C(X)$.
Définissons une famille de fonctions vérifiant cette propriété :

$$K = \{1_{[B]} \circ \sigma^j,\ j \geqslant 0,\ B \in \mathcal{A}^*\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A_n 1_{[B]}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{[B]}(\sigma^{k+j}(x)) \\ &= \frac{1}{n} \times\ Card\{k \leqslant n, x[k+j...k+j+|B|-1] = B\} \end{aligned}$$

$A_n 1_{[B]}$ *converge uniformément en* j *si seulement si la fréquence de* B *dans* $\sigma^j(x)$ *existe et est uniforme.* □

On peut avoir un sous-shift uniquement ergodique mais non minimal ou carrément non transitif, comme on peut avoir un sous-shift minimal mais non uniquement ergodique ou minimal et transitif.

Exemple 3.4 *Sous-shift uniquement ergodique mais pas minimal.*
Soit $x = 0000010^\omega$, *et considérons le sous-shift* $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *alors* $\overline{\theta(x)} = \theta(x) \cup 0^\omega$.
Comme 0^ω *n'est pas d'orbite dense, alors le système n'est pas minimal.*
D'autre part, puisque le point $z = 0^\omega$ *est un point fixe alors la mesure de Dirac en ce point* δ_z *est* σ*- invariante et ergodique, montrons qu'elle est uniquement ergodique.*
Soit B *un facteur de* x *tel que* $|B| = s$, *il suffit de montrer que* $A_n 1_{[B]}$ *converge*

uniformément vers $\delta_z([B])$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} A_n 1_{[B]}(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \; Card\{k \leqslant n, x[k+j...k+j+s-1] = B\} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n-s) & si\ B = 0^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} & sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & si\ B = 0^n \\ 0 & sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme vers la mesure de Dirac δ_z.
De la proposition précédente, le sous-shift $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ *est uniquement ergodique.*

Exemple 3.5 *Sous-shift uniquement ergodique mais pas transitif.*
Soit les mots x *et* y *tel que :* $x = 0000010^\omega$ *et* $y = x = 0000110^\omega$.
Posons $X = \overline{\theta(x)} \cup \overline{\theta(y)}$.
Le sous-shift (X, σ) *est uniquement ergodique (la preuve est similaire avec l'exemple précédent), et pas transitif.*

On va s'intéresser à présent aux mots sturmiens qui nous permettront de définir des sous-shift minimaux et uniquement ergodiques. Pour cela, on devra d'abord étudier les différentes propriétés que vérifie cette catégorie de mots afin d'arriver au résultat voulu.

3.3 Caractérisations des mots sturmiens

Le but de cette section est d'établir le lien existant entre les rotations irrationnelles et les mots sturmiens.
On précise que dans ce qui suit l'alphabet est fixé à $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
On a vu dans le premier chapitre qu'un mot non ultimement périodique u a au moins $n+1$ facteurs distincts de longueur n, on va maintenant présenter une catégorie de mots qui a exactement $n+1$ facteurs distincts de longueur n, ces mots sont dits mots sturmiens.

3.3.1 Mots sturmiens

Définition 3.6

Les mots sturmiens sont des mots non ultimement périodique de complexité minimale, autrement dit un mot infini u est sturmien si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_u(n) = n + 1$.

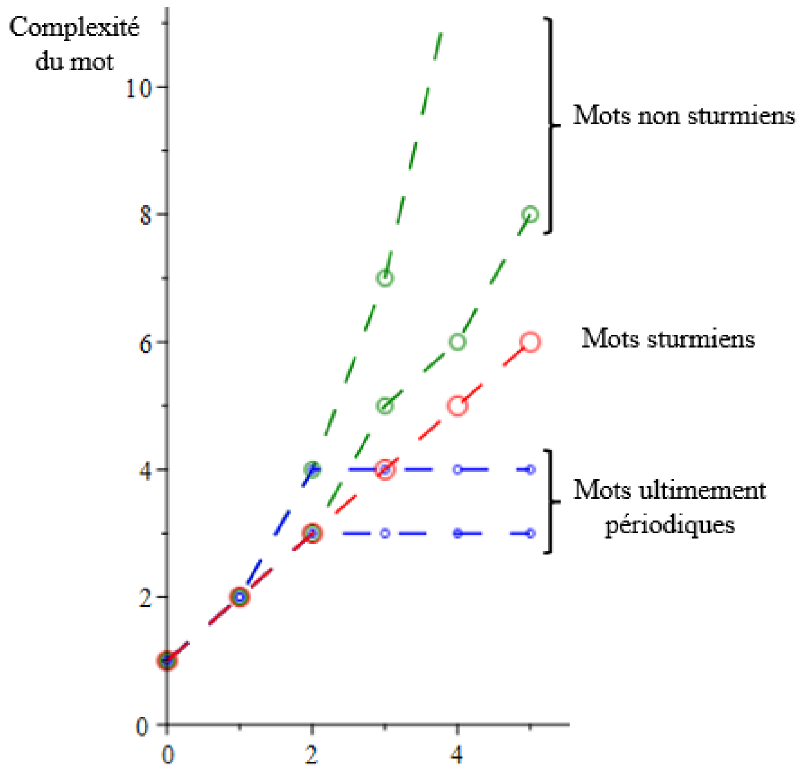


FIGURE 3.1 – Courbes représentants la complexité des mots.

Définition 3.7 *On dit qu'un facteur* w *de* u *est spécial si* $\exists a, b \in \mathcal{A}$ *avec* $a \neq b$ *tel que* $wa, wb \in \mathcal{L}(u)$.

Remarque 3.6 *Un mot sturmien a un unique facteur spécial (sinon* $P_u(n) > n+1$*).*

3.3.2 Mots équilibrés

Définition 3.8 *Un mot* u *est dit équilibré si* $\forall U, V \in \mathcal{L}_n(u)$, $||U|_1 - |V|_1| \leqslant 1$.

Proposition 3.9 *Soit* u *un mot équilibré, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, P_u(n) \leqslant n + 1$.

Démonstration ***([29], p.3)***

L'inégalité est évidente pour $n \in \{0, 1, 2\}$. *Pour* $n \geqslant 3$, *raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$n = min\{k \in \mathbb{N}, P_u(k) > k + 1\}$$

Par définition : $\begin{cases} P_u(n-1) \leqslant n \\ P_u(n) \geqslant n+2 \end{cases}$

Alors il existe deux facteurs spéciaux $U, V \in \mathcal{L}_n(u)$, *c-à-d :*

$$V0,\ V1,\ U0,\ U1 \in \mathcal{L}_n(u)$$

Comme U *et* V *sont distincts, on peut poser* x *le préfixe commun de ces deux facteurs (*x *peut être un mot vide).*

Donc $x0$ *et* $x1$ *sont les préfixes respectifs de* U *et* V *(ou bien* V *et* U*). Alors* $0x0, 1x1 \in \mathcal{L}_{|x|+2}(u)$ *, or ces deux facteurs ne sont pas équilibrés. (Contradiction)*

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, P_u(n) \leqslant n + 1$. □

Définition 3.9

- *Un mot* $w = w_0...w_n$ *est un palindrome si* $w_i = w_{n-i}$, $\forall i \in [0, n] \cap \mathbb{N}$.
- *Soit* $u = u_0u_1...u_n$, *on désigne par* u^R *l'inverse de* u *qui est* $u^R = u_n...u_1u_0$.

Proposition 3.10 ***([29], p.4)***

Soit u *un mot non équilibré, alors il existe un palindrome* w *tel que* $0w0, 1w1 \in \mathcal{L}(u)$.

Démonstration

Soit u *un mot non équilibré, alors* $\exists n \in \mathbb{N}, \exists U, V \in \mathcal{L}_n(u)$ *tel que* $||U|_1 - |V|_1| \geqslant 2$, *montrons qu'il existe* U', V' *deux facteurs respectivement de* U *et* V *où :* $|U'| = |V'|$ *et* $||U'|_1 - |V'|_1| = 2$.

Notons U_i *(resp.* V_i*) le préfixe de longueur* i *de* U *(resp.* V*) et* $d_i = ||U_i|_1 - |V_i|_1|$.

Il est clair que $d_0 = 0$ *et que pour* $i \in \mathbb{N}$ *:*

$$d_{i+1} = \begin{cases} d_i & \text{Si } U_{i+1} \text{ et } V_{i+1} \text{ se finissent par la même lettre} \\ d_i + 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors $\exists i_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $d_{i_0} = 2$ *(car* $d_n \geqslant 2$*).*

Donc pour $U' = U_{i_0}$ *et* $V' = V_{i_0}$, $||U'|_1 - |V'|_1| = 2$. *Supposons à présent que* U' *et* V' *sont les facteurs de longueurs minimale de* U *et* V *vérifiant* $||U'|_1 - |V'|_1| = 2$.

Alors les premières lettres de U' *et* V' *sont différentes, et également les dernières.*

Supposons que U' *commence par* 1 *et* V' *par* 0, *on peut supposer que :*

$$\begin{cases} U' = 1wau' \\ V' = 0wbv' \end{cases} \text{, avec } a \neq b$$

Si $a = 0$ *et* $b = 1$ *alors* $||u'|_1 - |v'|_1| = 2$ *(contradiction avec le fait que* U', V' *sont minimaux), donc* $a = 1$ *et* $b = 0$.

D'où par minimalité $U' = 0w0$ *et* $V' = 1w1$.

Il reste à montrer que w *est un palindrome, supposons que* w *ne l'est pas.*

Soit x *un préfixe de* w, *tel que* x^R *est un suffixe de* w *et* xa *est un préfixe, mais* ax^R *n'est pas suffixe de* w. *(*x *peut être le mot vide)*

Supposons que $a = 1$, *donc* $1x1$ *est un préfixe de* V' *et* $0x0$ *est suffixe de* U', *mais :*

$$||1x1|_1 - |0x0|_1| = 2$$

Contradiction avec le fait que U' *et* V' *sont minimaux. D'où* w *est un palindrome.*

$\square$

Théorème 3.3 ***([21], p.49)***

Un mot infini u *est sturmien si et seulement* u *est non ultimement périodique et équilibré.*

Démonstration ***([21], p.49)***

$\Rightarrow$) *Supposons que* u *est sturmien et commençons par montrer que* u *est non ultimement périodique.*

$$\begin{aligned} u \text{ est sturmien} &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P_u(n) = n+1 \\ &\Longrightarrow (P_n(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \\ &\Longrightarrow u \text{ est non ultimement périodique.} \end{aligned}$$

Montrons à présent que u est équilibré. Raisonnons par l'absurde et supposons que u est non équilibré, alors d'après la proposition 3.10 ,$\exists n \in \mathbb{N}$, *il existe* $w = w_0 w_1 \ldots w_n$ *tel que* $0w0, 1w1 \in \mathcal{L}(u)$.

Alors w *est l'unique facteur special de longueur* $n+1$, *donc l'un des deux mots* $0w$ *ou* $1w$ *est un facteur spécial de longueur* $n+2$. *Supposons que c'est* $0w$, *alors* $0w0, 1w1, 0w1 \in \mathcal{L}(u)$ *mais* $1w0 \notin \mathcal{L}(u)$ *(car* $1w$ *est prolongeable d'une seule façon).*

Soit i le rang d'apparition du facteur $1w$, *le mot* $0w$ *ne peut pas être facteur de* $u[i..i+2n+3]$.

En effet, supposons que $0w$ *est facteur de* $u[i..i+2n+3]$, *alors :*

$$\exists k \in [0, n+2], \textit{ tel que } 0w = u_{i+k} \ldots u_{i+k+n+1}$$

Mais $k \neq 0$ *car* $u_i = 1$, *et* $k \neq n+2$ *car* $u_{i+n+2} = 1$ *(car* $1w$ *est suivi de 1).*
D'après la première ligne du tableau $w_{k-1} = 0$, *et d'après la deuxième ligne*

	$u_i \dots u_{i+2n+3}$			
La position	i	$i+k$	$i+n+2$	
La 1ère ligne	1	w	1	
La 2ème ligne		0	w	

FIGURE 3.2 – Illustration de la position de $0w$ dans $u[i..i+2n+3]$.

$w_{n-(k-1)} = 1$, *ceci contredit le fait que* w *est un palindrome, d'où* $0w$ *n'est pas facteur de* $u[i..i+2n+3]$.

Par ailleurs, il y'a $n+3$ *facteurs de longueur* $n+2$ *dans* $u[i..i+2n+3]$ *de longueur* $2n+4$, *on sait que* $P_u(n+2) = n+3$ *et* $0w$ *n'est pas un facteur de* $u[i..i+2n+3]$, *donc il contient que des facteurs prolongeables d'une seule façon et il existe au moins un facteur qui apparait deux fois.*

Posons $M_j = u[j..j+n+1]$, *alors* $\exists a, b \in [i, i+n+2]$, *tel que* $M_a = M_b$.

$$\begin{aligned} M_a = M_b &\Longrightarrow M_{a+j} = M_{b+j}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \textit{car tout facteur n'est pas spécial} \\ &\Longrightarrow M_i = M_{i+(b-a)}, \quad \forall i \geqslant a \quad \textit{(en posant i=a+j)} \\ &\Longrightarrow u_i = u_{i+(b-a)}, \quad \forall i \geqslant a \end{aligned}$$

D'où u est ultimement périodique (contradition). D'où u est équilibré.

$\Leftarrow$) *Supposons que u est équilibré, alors d'après la proposition 3.9*

$$P_u(n) \leqslant n+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Par ailleurs, comme u n'est pas ultimement périodique alors $P_u(n) \geqslant n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *(d'après la proposition 1.14).*

Donc $P_u(n) = n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *D'où u est sturmien.* □

Proposition 3.11 *Soit u un mot équilibré et* $\pi(u) = \frac{|u|_1}{|u|}$ *alors* $\forall v, w \in \mathcal{L}(u)$:

$$|\pi(v) - \pi(w)| < \frac{1}{|v|} + \frac{1}{|w|}$$

Démonstration ***([29], p.5)***

On sépare les deux cas suivants :

- *Si* $|v| = |w|$, *alors* $||v|_1 - |w|_1| \leqslant 1$, *donc :*

$$\left| \frac{|v|_1}{|v|} - \frac{|w|_1}{|w|} \right| \leqslant \frac{1}{|v|} < \frac{1}{|v|} + \frac{1}{|w|}$$

- *Si* $|v| > |w|$, *alors raisonnons par récurrence sur* $|u| + |v|$.

  Pour $n = 2$ *l'inégalité est évidente, supposons que l'inégalité est vraie pour* $n \in \mathbb{N}$, *vérifions-là pour* $n+1$.

  Posons $v = zt$ *où* $|z| = |w|$ *d'après le premier cas, on déduit que :*

$$\left| \frac{|z|_1}{|z|} - \frac{|w|_1}{|w|} \right| \leqslant \frac{1}{|z|}$$

D'autre part , remarquons que :

$$\pi(xy) = \frac{|x|}{|xy|}\pi(x) + \frac{|y|}{|xy|}\pi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}(u)$$

L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$|\pi(t) - \pi(w)| < \frac{1}{|t|} + \frac{1}{|w|}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \pi(zt) - \pi(w) &= \frac{|z|}{|x|}\pi(z) + \frac{|t|}{|x|}\pi(t) - \pi(w) \\ &= \frac{|z|}{|v|}(\pi(z) - \pi(w)) + \frac{|t|}{|v|}(\pi(t) - \pi(w)) \end{aligned}$$

On obtient que

$$|\pi(v) - \pi(w)| \leqslant \frac{|z|}{|x||z|} + \frac{|t|}{|x|}\left(\frac{1}{|t|} + \frac{1}{|w|}\right) = \frac{1}{|v|} + \frac{1}{|w|}$$

Proposition 3.12 *Soit u un mot infini alors la suite suivante est convergente.*

$$(\pi(u[0..n-1]))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|u[0..n-1]|_1}{|u[0..n-1]|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Démonstration

Évidente en utilisant la proposition 3.11 pour montrer que c'est une suite de Cauchy

Proposition 3.13

Soit u un mot équilibré tel que la fréquence de 1 est égal à α, alors :

$$\forall v \in \mathcal{L}(u),\ |\pi(v) - \alpha| \leqslant \tfrac{1}{|v|}$$

De plus, l'une des propositions suivantes est vérifiée pour tout facteur v de u

$$\begin{cases} \alpha|v| - 1 < |v|_1 \leqslant \alpha|v| + 1 \\ \alpha|v| - 1 \leqslant |v|_1 < \alpha|v| + 1 \end{cases}$$

Démonstration ***([29], p.5)***

Comme $(\pi(u[0..n-1]))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy, alors* $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n > n_0$:

$$|\pi(u[0..n-1]) - \alpha| < \varepsilon$$

En utilisant la proposition 3.11, on obtient que :

$$|\pi(v) - \alpha| \leqslant |\pi(v) - \pi(u[0..n-1])| + |\pi(u[0..n-1]) - \alpha| < \frac{1}{|v|} + \frac{1}{n} + \varepsilon$$

Par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ *et* $\varepsilon \longrightarrow 0$, *on obtient :*

$$\alpha|v| - 1 \leqslant |v|_1 \leqslant \alpha|v| + 1$$

Supposons à présent que $\exists v, w \in \mathcal{L}(u)$ *tel que* $\alpha|v|_1 = |v| - 1$ *et* $|w|_1 = \alpha|w| + 1$, *alors* $|\pi(v) - \pi(w)| = \frac{1}{|v|} + \frac{1}{|w|}$. *(contradiction avec proposition 3.11).*
D'où le résultat. □

Proposition 3.14 ***([29], p.5)***

La fréquence de 1 *dans un mot équilibré* u *est rationnelle si et seulement si* u *est ultimement périodique.*

3.3.3 Mots mécaniques

Définition 3.10 ***([21], p.53)***

- *On dit qu'un mot infini* $s_{\rho,\alpha}$ *est* ***mécanique inférieur*** *s'il existe* $\rho \in [0, 1[$, $\alpha \in]0, 1[$ *tel que :*

$$s_{\rho,\alpha}(n) = \lfloor (n+1)\alpha + \rho \rfloor - \lfloor n\alpha + \rho \rfloor, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- *On dit qu'un mot infini* $s_{\rho,\alpha}$ *est* ***mécanique supérieur*** *s'il existe* $\rho \in [0, 1[$, $\alpha \in]0, 1[$ *tel que :*

$$s'_{\rho,\alpha}(n) = \lceil (n+1)\alpha + \rho \rceil - \lceil n\alpha + \rho \rceil, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'interprétation graphique d'un mot mécanique est montré ci-dessous.
Dans la figure ci-dessous on a pris $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ *et* $\rho = \frac{7}{20}$.
Pour obtenir le mot graphiquement, il suffit de mettre 1 *si la droite coupe une horizontale et* 0 *sinon.*

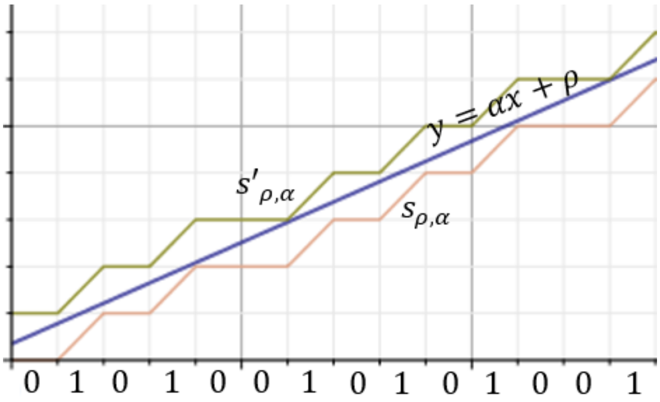


FIGURE 3.3 – Interprétation graphique des mots mécaniques.

Remarque 3.7

1. *Parfois par abus de langage, on désigne par mot mécanique un mot mécanique inférieur.*

2. *Les deux lettres $s'_{\rho,\alpha}(n)$ et $s_{\rho,\alpha}(n)$ sont identiques $\forall n \in \mathbb{N}$ sauf si $n\alpha + \rho \in \mathbb{N}$, car :*

$$\begin{cases} \lfloor (n+1)\alpha + \rho \rfloor = \lfloor n\alpha + \rho \rfloor \\ \lceil n\alpha + \rho \rceil + 1 = \lceil (n+1)\alpha + \rho \rceil \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s_{\rho,\alpha}(n) = 0 \\ s'_{\rho,\alpha}(n) = 1 \end{cases}$$

Si de plus $n \neq 0$ alors :

$$\begin{cases} \lfloor n\alpha + \rho \rfloor = \lfloor (n-1)\alpha + \rho \rfloor + 1 \\ \lceil n\alpha + \rho \rceil = \lceil (n-1)\alpha + \rho \rceil \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s_{\rho,\alpha}(n) = 1 \\ s'_{\rho,\alpha}(n) = 0 \end{cases}$$

On peut voir ceci dans la figure ci-dessous :

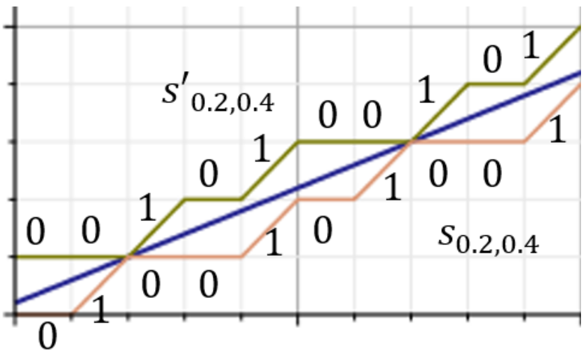


FIGURE 3.4 – Interprétation graphique des mots mécaniques pour $\alpha = 0.4$, $\rho = 0.2$.

Proposition 3.15

Soit $s_{\rho,\alpha}$ un mot mécanique, alors $s_{\rho,\alpha}$ est périodique de période q si et seulement si α est rationnel tel que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$.

Démonstration

$\Rightarrow$) *Il est clair que q est une période de $s_{\rho,\alpha}$, montrons que c'est la plus petite. Raisonnons par l'absurde, supposons que $s_{\rho,\alpha}$ est q'-périodique où q' divise q. D'une part, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|s_{\rho,\alpha}[0..n-1]|_1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\alpha+\rho\rfloor}{n} = \alpha = \frac{p}{q}$$

D'autre part, comme $s_{\rho,\alpha}$ est q'-périodique notons $p' = |s_{\rho,\alpha}[0..q'-1]|_1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|s_{\rho,\alpha}[0..nq'-1]|_1}{nq'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{np'}{nq'} = \frac{p'}{q'}$$

On obtient alors que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, mais comme $\frac{p}{q}$ est irréductible alors $q' = q$. D'où $s_{\rho,\alpha}$ est q-périodique.

$\Leftarrow$) *Supposons que $s_{\rho,\alpha}$ est q-périodique, alors en calculant la fréquence de 1 dans $s_{\rho,\alpha}$ de deux façons différentes on obtient que $\alpha = \frac{p'}{q'}$, qui est rationnel.* $\square$

Proposition 3.16 *Soient l'application $R_\alpha(x) = \{x+1\}$ où $x \in [0,1[$ et les intervalles $I_0 = [0, 1-\alpha[$, $I_1 = [1-\alpha, 1[$, alors :*

(a) $s_{\rho,\alpha}(n) = 0$ *si et seulement si* $R_\alpha^n(\rho) \in I_0$.

(b) $s_{\rho,\alpha}(n) = 1$ *si et seulement si* $R_\alpha^n(\rho) \in I_1$.

Démonstration

(a) Supposons que $s_{\rho,\alpha}(n) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(\rho) &= \{n\alpha+\rho\} \geqslant 0 \\ &= n\alpha+\rho-\lfloor n\alpha+\rho\rfloor \\ &= n\alpha+\rho-\lfloor (n+1)\alpha+\rho\rfloor \\ &= n\alpha+\rho-(n+1)\alpha+\rho+\{(n+1)\alpha+\rho\} < 1-\alpha \end{aligned}$$

D'où $R_\alpha^n(\rho) \in I_0$.

Montrons que la réciproque est vraie, alors on a :

$$\begin{aligned} R_\alpha^n(\rho) \in I_0 &\Longrightarrow \{n\alpha + \rho\} < 1 - \alpha \\ &\Longrightarrow \{n\alpha + \rho\} + \alpha < 1 \end{aligned}$$

Donc $\{n\alpha + \rho\} + \alpha = \{n\alpha + \rho\} + \{\alpha\}$*, alors :*

$$\begin{aligned} \{n\alpha + \rho\} + \{\alpha\} &= \{(n+1)\alpha\} \\ \Longrightarrow \{n\alpha + \rho\} + \{\alpha\} - (n+1)\alpha &= \{(n+1)\alpha\} - (n+1)\alpha \\ \Longrightarrow -\lfloor n\alpha + \rho \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor &= -\lfloor (n+1)\alpha \rfloor \\ \Longrightarrow \lfloor n\alpha + \rho \rfloor &= \lfloor (n+1)\alpha \rfloor \end{aligned}$$

D'où $s_{\rho,\alpha}(n) = 0$.

(b) la démonstration se fait de la même manière que (a). □

Remarque 3.8
Le même résultat est valable pour $s'_{\rho,\alpha}$ *en considérant la partition* $I_0 =]0, 1-\alpha]$, $I_1 =]1-\alpha, 1]$.

Cette proposition permet donc de conclure qu'un mot $s_{\rho,\alpha}$ est un mot mécanique si et seulement s'il peut être engendré par une rotations irrationnelle R_α.

Théorème 3.4 ***([21], p.57)***
Soit s un mot infini, s est sturmien si et seulement s'il est mécanique avec α *irrationnel.*

Démonstration

$\Rightarrow$) *Admettant la formule suivante :* $x' - x - 1 < \lfloor x' \rfloor - \lfloor x \rfloor < x' - x + 1$
Soit s un mot sturmien, alors s est non ultimement périodique et équilibré. Donc la fréquence de 1 *dans n est irrationnelle.*

Posons $h_n = |s[0..n-1]|$*, soit* $t \in \mathbb{R}$*, supposons que* $\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}^*$ *tel que :*

$$\begin{cases} h_n < \lfloor \alpha n + t \rfloor \\ h_{n+k} > \lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h_n \leqslant \lfloor \alpha n + t \rfloor - 1 \\ h_{n+k} \geqslant \lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor + 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} h_{n+k} - h_n &\geqslant 2 + \lfloor \alpha(n+k) + t \rfloor - \lfloor \alpha n + t \rfloor \\ &> 1 + \alpha n + \alpha k + t + \alpha n - t > 1 + \alpha k \end{aligned}$$

Comme $h_{n+k} - h_n$ *est un facteur de* s *de longueur* k*, on obtient une contradiction avec la proposition 3.13. De même, on obtient une contradiction en supposant que* $\exists n \in \mathbb{N}$*,* $\exists k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $h_n > \lfloor \alpha n+t \rfloor$ *et* $h_{n+k} < \lfloor \alpha(n+k)+t \rfloor$*. Donc on déduit que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $h_n \leqslant \lfloor \alpha n+t \rfloor$ *ou* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $h_n \geqslant \lfloor \alpha n+t \rfloor$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*. Posons* $\rho = inf\{t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, h_n \leqslant \lfloor \alpha n + t \rfloor\}$*, alors d'après la proposition 3.13, on déduit que* $\rho \leqslant 1$*.*
On a $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $h_n \leqslant \alpha n + \rho \leqslant h_n + 1$*.*
(sinon $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $h_{n0}+1 < \alpha n_0+\rho$*, donc en posant* $\rho' = h_{n0}+1-\alpha n_0 < \rho$*, on aura que* $h_{n_0} < \alpha n_0 + \rho'$*, ce qui contredit la définition de* ρ*).*
Comme s *est sturmien, par la proposition 3.14,* α *est irrationnel. Donc, au plus* $\exists! n_0 \in \mathbb{N}$*, tel que* $\alpha n_0 + \rho \in \mathbb{N}$*.*

- *Si* $\alpha n + \rho \notin \mathbb{N}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, alors* $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$*. D'où* $s = s_{\alpha,\rho}$*.*
- *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$*, tel que* $\alpha n_0 + \rho \in \mathbb{N}$*, alors soit* $h_{n_0} = \alpha n_0 + \rho$ *alors* $s = s_{\alpha,\rho}$*, ou bien* $h_{n_0} + 1 = \alpha n_0 + \rho$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$*,* $h_n = \alpha n_0 + \rho$*, alors* $h_n = \lceil \alpha n_0 + \rho - 1 \rceil$*. D'où* $s = s'_{\alpha,1-\rho}$*.*

D'où s *est un mot mécanique.*

$\Leftarrow$) *Montrons d'abord que* $s_{\alpha,\rho}$ *est équilibré, soit* $M, M' \in \mathcal{L}(s_{\alpha,\rho})$*, alors :*

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, \ \textit{tel que } M = s_{\rho,\alpha}[k..k+n-1] \\ \exists j \in \mathbb{N}, \ \textit{tel que } M' = s_{\rho,\alpha}[j..j+n-1] \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} |M|_1 = |s_{\rho,\alpha}[0..k+n-1]|_1 - |s_{\rho,\alpha}[0..k-1]|_1 = [(k+n)\alpha] - [k\alpha] \\ |M'|_1 = |s_{\rho,\alpha}[0..j+n-1]|_1 - |s_{\rho,\alpha}[0..j-1]|_1 = [(j+n)\alpha] - [j\alpha] \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} |M|_1 = n\alpha + \{k\alpha\} - \{(k+n)\alpha\} \\ |M'|_1 = n\alpha + \{j\alpha\} - \{(j+n)\alpha\} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |M|_1 - |M'|_1 &= n\alpha + \{k\alpha\} - \{(k+n)\alpha\} - n\alpha + \{k\alpha\} - \{(j+n)\alpha\} \\ &= (\{k\alpha\} + \{k\alpha\}) - (\{(k+n)\alpha\} + \{(j+n)\alpha\}) \end{aligned}$$

Donc $-2 < |M|_1 - |M'|_1 < 2$, *alors* $||M|_1 - |M'|_1| \leqslant 1$.

D'où $s_{\rho,\alpha}$ *est équilibré. (la preuve est la même pour* $s'_{\rho,\alpha}$*).*

De plus α *est irrationnel alors* $s_{\rho,\alpha}$ *est non ultimement périodique (d'après la proposition 3.14), alors* $s_{\rho,\alpha}$ *est sturmien d'après le théorème 3.3.* □

En combinant la proposition 3.16 et le théorème 3.4, on obtient le théorème de Morse Hudlund :

Théorème 3.5 (Morse Hedlund)

Un mot est sturmien si et seulement si il est engendré par une rotation irrationnelle.

3.4 Sous-shift sturmien

Le but de cette partie est de montrer que les sous-shift sturmiens sont uniquement ergodiques.

Définition 3.11

Soit s *un mot sturmien, on appelle sous-shift sturmien le système* $(\overline{\theta(s)}, \sigma)$.

Remarque 3.9

On a montré dans le deuxième chapitre dans l'exemple 2.11 que tout mot mécanique

où α est irrationnel est uniformément récurrent, ce qui implique d'après le théorème de Morse-Hudlund que tout mot sturmien est uniformément récurrent.
D'où le sous-shift sturmien $(\overline{\theta(s)}, \sigma)$ est minimal.

Proposition 3.17 ***([20], p.169)***
Le sous-shift sturmien $(\overline{\theta(x)}, \sigma)$ est uniquement ergodique.

Démonstration ***([20], p.169)***
Comme un mot sturmien est obtenue par codage de rotation irrationnelle où $P = \{I_0, I_1\}$ est une partition de S^1 avec $I_0 = [0, 1-\alpha[$ et $I_1 = [1-\alpha, 1[$, alors il existe un facteur topologique φ tel que :

$$\varphi : (\overline{\theta(x)}, \sigma) \longrightarrow (S^1, R_\alpha)$$

Soit u un facteur de longueur n de x , $V_u \in P^n$ et $z \in \overline{\theta(x)}$.
Si $\varphi(z) \in \mathring{V}_u$ alors $z \in [u]$ et donc $\varphi(z) \in \overline{V_u}$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\| V_u \| &= \lim_{n \to +\infty} \frac{Card\{i < n,\ R^i(\varphi(z)) \in \mathring{V}_u\}}{n} \\
&\leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{Card\{i < n, z_i \in [u]\}}{n} \\
&\leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{Card\{i < n,\ R^i(\varphi(z)) \in \overline{V_u}\}}{n} = \| V_u \|
\end{aligned}$$

Alors d'après le théorème 3.2, le sous-shift sturmien est uniquement ergodique. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à la classification des mots infinis, ainsi qu'aux propriétés topologiques et ergodiques qui leurs sont associés sous l'action du décalage.

On a d'abord commencé par présenter les notions de bases de systèmes dynamiques discrets, dynamique topologique, théorie ergodique, dynamique symbolique et combinatoire des mots.

Dans le deuxième chapitre, on a défini dix classes de mots infinis et on a démontré les différents liens possibles entre elles, ceci nous a permis de construire un arbre permettant de visualiser les 20 types de mots existants et on a présenté un exemple de chaque type.

Au dernier chapitre, on a construit des sous-shift vérifiant des propriétés intéressantes dont l'unique ergodicité et la minimalité. Puis, nous nous sommes intéressés aux mots sturmiens où on a montré le théorème de Morse-Hedlund. Grâce à ce résultat, on a pu montrer l'unique ergodicité des sous-shift sturmiens.

En conclusion, bien qu'on a étudié les propriétés des différents sous-shift, il serait intéressant d'étudier les propriétés topologiques et ergodiques que vérifie les sous-shift associés aux 20 types de mots obtenus dans le deuxième chapitre, et vérifier si cette classification correspond à une classification du point de vue dynamique.

Appendice 1

Voici les théorèmes qu'on a utilisé dans ce mémoire.

Théorème 1 (de Tychonoff) ***([20] p.272)***

Le produit d'espaces compacts est compact.

Théorème 2 (de convergence monotone ou Beppo Levi) ***([17] p.72)***

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesurable,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors :*

$$\int_X \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \ d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n \ d\mu$$

Théorème 3 (d'approximation) ***([17] p.55)***

Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Théorème 4 (de la représentation de Riesz) ***([22] p.1)***

Soit X *un espace de Hausdorff localement compact. Soit* Λ *une forme linéaire positive définie sur l'espace des fonctions continues à support compact. Alors, il existe* S *une* σ*-algèbre sur* X *contenant les boréliens de* X *et une unique mesure positive* μ *sur* S *tel que :*

$$\Lambda(f) = \int_X f(x)d\mu(x), \qquad \forall f \in C_c(X)$$

Théorème 5 (Krein milman) ***([19] p.134)***

Tout compact convexe d'un espace localement convexe séparé est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Théorème 6 (Radon Nikodym) ***([31] p.72)***

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace probabilisé, soit* ν *une mesure définie sur* $\mathcal{B}$ *et supposons que* ν *est absolument continue par rapport à* μ*, alors il existe une fonction mesurable non-négative* f *tel que :*

$$\nu(A) = \int_A f \ d\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

Appendice 2

Dans cet annexe on va présenter quelques programmes Maple qu'on a utilisé pour la réalisations de certaines figures.

Interprétation graphique d'un mot mécanique

La procédure ci-dessous "mecanique" permet de donner un aspect géométrique d'un mot mécanique et de voir la différence entre un mot mécanique inférieur et un mot mécanique supérieur.

La valeur de α est représentée par a et celle de ρ par b.

```
mecanique := proc(a, b , n)
 local f, M, i, K, G1, G2, G3 :
 with(plots) :
 f := x→a·x + b :
 M := { } :
 K := { } :
 for i from 0 to n do
 M := M union { [ i, floor( f( i ) ) ]};
 if ( f( i ) − floor( f( i ) ) = 0 ) then
 K := K union { [ i, floor( f( i ) ) ]};
 else K := K union { [ i, floor( f( i ) ) + 1 ]};
 end
 od:
 K := [ op( K ) ];
 M := [ op( M ) ];
 G1 := plot( a·x + b, x = 0 ..n, color = navy, thickness = 2 ) :
G2 := plot( K, color = olive, thickness = 1 ) :
G3 := plot( M, color = tan, thickness = 1 ) :
 display( G1, G2, G3 ) :
 end proc:
```

Orbite d'un point

La procédure ci-dessous "orbite" permet de tracer l'orbite de la fonction $f(x) = x^3$ au point x_0.

La fonction f peut être modifiée afin de tracer l'orbite de x_0 par n'importe quelle fonction.

```
orbite := proc(n, x0)
 local f, M, i, G1, G2, G3 :
 with(plots) :
 f := x→x^3 :
 M := { } :
 for i from 0 to n do
 M := M union {[(f@@i)(x0), (f@@i)(x0)], [(f@@i)(x0), (f@@(i + 1))(x0)]};
 od:
 M := [op(M)];
 G1 := plot(x^3, x = 0 ..1, color = navy, thickness = 3) :
 G2 := plot(x, x = 0 ..1, color = orange, thickness = 3) :
 G3 := plot(M, color = tan, thickness = 2, linestyle = longdash) :
 display(G1, G2, G3) :
 end proc:
```

Remarque .10

Toutes les figures qui se trouvent dans ce mémoire ont été réalisé à l'aide des logiciels Maple et Word.

Bibliographie

[1] J-P. Allouche et J. Shallit, *Automatic Sequences : Theory, Application, Generalizations.* Cambridge University press, 2003.

[2] J-P. Allouche, J. Shallit, J. Caissaigne et L.Q.Zamboni, A taxonomy of morphic sequences. *arXiv :1711.10807v1*, (10/2017).

[3] L. Barreira et C.Valls, *Théorie des systèmes dynamiques : Une introduction*, Edp Sciences, France, 2013.

[4] L. Barreira et C.Valls, *Dynamical systems by example*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2019.

[5] J. Berstel, Sur le construction de mots sans carré. *Séminaire de Théories des Nombres de Bordeaux*, (09/1978) 18.01-18.15.

[6] V. Berthé, C. Holton et L.Q. Zamboni, Initial powers of Sturmian sequences. *Acta Arith.***122**, (2006), 315-347.

[7] V. Berthé, H. Ei, S.Ito et H.Rao, On substitutions invariant sturmian words : an application of Rauzy fractals. *RAIRO Inform. Théor. App.* Vol : **41**, (2007), 329-349.

[8] I. Boyer, *Parties de $\mathbb{N}$ reconnaissables : Théorème de Cobham*, (12/09/2007). Consulté le (10/05/2022) sur : `https://www.irif.fr/~carton/Enseignement/Complexite/ENS/Redaction/2006-2007/ivan.boyer.pdf`.

[9] J.R. Brown, *Ergodic and Topological Dynamics* . Academic Press, USA, 1976.

[10] J. Cassaigne, F. Nicolas, Quelques propriétés des mots substitutifs. *Bull. Belg. Math. Soc.S imon Stevin.* Vol : **10**, (2003), 661-676.

[11] J. Cassaigne, *Combinatoire des mots : Notes de cours.* École CIMPA, Bobo-Dioulasso, (10/2012). Consulté (26/03/2022), sur : `http://archive.schools.cimpa.info/archivesecoles/20130131161626/cours-cassaigne-fr.pdf`.

[12] A. Cobham, Uniforme tag sequences. Math. *Systems Theory.* Vol : **6** (1972), 164-192.

[13] Y. Coudène, *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*, Savoir actuel, EDP-Sciences, Springer-Verlag, France, 2012.

[14] C.F. Du, H. Mousavi, E. Rowland, L. Schaeffer, et J .Shallit. Decision algorithms for Fibonacci-Automatic words, II : Related sequences and avoidability. *Theoret. Comput. Sci.* **657** (2017), 146-162.

[15] R. Dujardin, *Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques : Notes de cours*, Université de Sorbonne, Paris, 2020/2021, consulté le (02/04/2022) sur : `https://perso.lpsm.paris/~dujardin/latex/notes_M2.pdf`.

[16] M. Einsiedler et T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, 256, Graduate Texts in Mathematics, Springer, London, 2011.

[17] L. El Haj, *Mesures, Intégration, Convolution et transformée de Fourier des fonctions.* Dunod, 2007.

[18] N.P. Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Springer-Verlag, 2002.

[19] M. Krein et D. Milman, On extreme points of regular convex sets. *Studia Mathematica* , Vol : **9.1**, (1940), 133-138.

[20] P. Kurka, *Topological and Symbolic Dynamics*, Cours spécialisés, Société Mathématiques de France, n°11, Institut Henri-Poincaré, Paris, 2003.

[21] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol : **90**, Cambridge University Press, 2002.

[22] J. Norqvist, *The Riesz Representation Theorem For Positive Linear Functionals : Notes de cours*, Université Umeå, Suède. Consulté le (06/07/2022) sur : `http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:953904/FULLTEXT01.pdf`.

[23] J-J. Pansiot, Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés. In J.Paredaens, editor, *Proc. 11th Int'l Conf. On automata languages, and programming (ICALP).* Vol : **172** de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, (1984), 380-389.

[24] K. Peterson, *Symbolic Dynamics : Notes de cours,* University of North Carolina at Chappel Hill, 1998. Disponible sur `https://petersen.web.unc.edu/lecture-notes/`.

[25] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis.* Springer-Verlag, 2ème édition, 2010.

[26] T. Rejeiba, *Propriétés de récurrence et systèmes dynamiques équicontinus*, Ecole Doctorale : Mer et Sciences (Toulon), 17/12/2020, 106 p.

[27] M. Rigo, *Formal Languages, Automata and Numeration Systems 1 : Introduction to Combinatorics on Words*, Network and telecomunication series, Wiley, 2014.

[28] J. Thuswaldner, M. Rigo, *Substitution and Tiling Dynamics : Introduction to Self-inducing structures*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, France, 2017.

[29] F. Urrutia, *Les mots sturmiens*, (4/02/2011). Consulté le (05/2022) sur : `https://www.irif.fr/~carton/Enseignement/Complexite/ENS/Redaction/2010-2011/florent.urrutia.pdf`.

[30] M. Viana and K. Oliveira, *Foundations of ergodic theory, Cambridge studies in advanced mathematics*, 151, Cambridge University Press, 2016.

[31] C. Walkden, *Ergodic Theory : Notes de cours*, University of Manchester, (01/2018). Consulté le (30/05/2022) sur : `http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2018-2-TeoErg/N_Walkden_ergodic_theory.pdf`.