

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA - BÉJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques

Option : Statistique et Analyse Décisionnelle

THÈME

Analyse stochastique des Caractéristiques du modèle
d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs

Présenté par:

- Daideche Rahma
- Bouandas Naziha

Soutenu publiquement, le 28 /06/2016 devant le jury composé de :

Mme	HAKMI. S	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Présidente.
Mr	BOUALEM. M	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia.	Rapporteur.
Mme	DJABALI. Y	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Examinatrice.

Promotion: 2015/2016

Table des matières

Introduction	1
1 Systèmes de files d'attente classiques et avec rappels	4
1.1 Introduction	4
1.2 Description du modèle d'attente classique	5
1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	5
1.4 Classification des systèmes d'attente :	5
1.5 Notation de Kendall	6
1.6 Les différentes disciplines de service	7
1.7 Mesures de performance d'une file d'attente	7
1.8 Les files d'attente markoviennes	8
1.8.1 Système d'attente M/M/1	8
1.9 Les files d'attente non markoviennes	10
1.9.1 Système d'attente M/G/1	10
1.10 Systèmes d'attente avec rappels	12
1.10.1 Description du modèle d'attente avec rappels	12
1.11 Files d'attente avec rappels et clients négatifs	13
1.12 Conclusion	14
2 Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques	15
2.1 Introduction	15
2.2 Propriétés générales des ordres partiels	16

2.2.1	ordre stochastique	18
2.2.2	ordre convexe	19
2.2.3	Ordre concave	22
2.2.4	Ordre en transformée de Laplace	23
2.2.5	Ordre en fonctions génératrices	25
2.2.6	Relations entre les ordres partiels	25
2.3	Modèles stochastiques et monotonie	26
2.3.1	Modèles stochastiques	26
2.3.2	Propriétés de monotonie	26
2.4	Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes	27
2.4.1	Opérateurs monotones et comparables	27
2.5	Distributions non-paramétriques	28
2.5.1	Relation avec les distributions paramétriques	30
2.5.2	Relation entre les classes de distributions non-paramétriques	30
2.6	Conclusion	31
3	Inégalités stochastique pour le système d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs	32
3.1	Introduction	32
3.2	Description du modèle	33
3.3	Chaîne de Markov induite	34
3.4	Notations	34
3.5	Inégalités préliminaires	35
3.5.1	Monotonie de la chaîne de Markov induite	46
3.5.2	Monotonie de l'opérateur de transition	47
3.6	Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système	54
3.7	Conclusion	56

Conclusion générale 57

Bibliographie 57

Introduction générale

Il est apparu ces dernières années dans la littérature des files d'attente avec rappels, des travaux portant sur les systèmes de files d'attente avec rappels caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté, les arrivées négatives, dont la présence dans le système de files d'attente avec rappels affecte ce dernier de différentes manières, à savoir : élimination individuelle, élimination par groupe, élimination d'une quantité aléatoire d'activité, le désastre(la catastrophe)[2].

La théorie analytique des modèles d'attente avec rappels s'avère d'une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables afin que le praticien puisse en bénéficier. Par ailleurs, on peut citer le degré de difficulté pour l'obtention de certaines caractéristiques dans quelques modèles tels que les modèles de files d'attente avec rappels et vacances, avec rappels et priorité, avec rappels et clients négatifs, avec rappels de distribution générale ayant deux types de clients. Cette difficulté réside essentiellement dans l'utilisation des inverses des transformées de Laplace-Stieljes et des distributions marginales. Pour pallier à toutes ces difficultés, les chercheurs ont recouru aux méthodes d'approximation qui permettent d'avoir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance. C'est pour toutes ces raisons, qu'on s'intéresse, dans notre étude, d'une manière particulière à la méthode de comparaison stochastique.

La méthode de comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour l'étude des performances de certains systèmes modélisés par des chaînes de Markov à temps continu ou discret. Ces études sont motivées par la difficulté d'obtenir des résultats de performance explicites pour la plupart de ces systèmes. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative. L'idée générale de cette méthode est de borner un système complexe par un nouveau système, plus simple à résoudre et fournissant des bornes qualitatives pour ces mesures de performance. Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques, tels que l'économie, la biologie, la recherche opérationnelle, la théorie de fiabilité, la théorie de décision, les files d'attente et les réseaux informatiques et de télécommunication [19, 24].

Les propriétés de monotonie et de comparabilité sont bien documentées dans la littérature. L'une de ces propriétés a été étudiée dans [21]. Les auteurs ont utilisé la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonie du système $M/G/1$ avec rappels suivant des ordres stochastiques donnés. En particulier, ils ont déterminé des bornes simples pour le nombre moyen de clients servis durant une période d'activité. Boualem et al. [11] ont étudié quelques problèmes de comparabilité et de monotonie pour l'analyse du système $M/G/1$ avec rappels constants et vacances du serveur en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques. Oukid et Aïssani [25] ont obtenu des bornes stochastiques pour les périodes d'activité et d'inactivité du serveur. Récemment, Boualem et al. [12] ont établi quelques approximations qualitatives pour le système $M/G/1$ avec rappels et Bernoulli feedback, en utilisant les propriétés qualitatives des chaînes de Markov par rapport aux taux d'arrivée, aux distributions du temps de service et aux paramètres de rappels. Le lecteur peut également consulter les références [13, 24] traitant de la même problématique.

Le but de notre travail est d'appliquer les méthodes de comparaison stochastiques, pour étudier les propriétés de monotonie du modèle $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs

relativement à l'ordre stochastique, convexe et à l'ordre de Laplace, afin d'obtenir des bornes simples pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite liée au modèle considéré.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Le premier Chapitre comprend des généralités sur les systèmes de files d'attente d'une manière générale et le système $M/G/1$ avec rappels en particulier. De plus, on a introduit la notion des clients négatifs.

Dans le deuxième Chapitre, on donne un aperçu sur la notion des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et de Laplace), ainsi que des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastiques. On présente aussi les classes de distributions d'âges issues de la théorie de la fiabilité.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude des inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et des clients négatifs. Egalement, on donne les conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe. De plus, on étudie la comparabilité des opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de deux systèmes $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, ainsi que la comparabilité des distributions stationnaires respectives de nombres de clients dans les deux systèmes. Finalement, on détermine les bornes stochastiques pour la distribution stationnaires de modèle considéré, et on termine par une conclusion générale et une bibliographie.

1 Systèmes de files

d'attente classiques et avec rappels

1.1 Introduction

La théorie des files d'attente, ou queues, est un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes logistiques et de communications. En quelques mots, cette théorie a pour objet l'étude des systèmes ou des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'obtenir un service. La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de files de clients désirant accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques ou, encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

les systèmes de files d'attentes sont très étudiés et une abondante littérature couvre ce sujet [7, 22].

1.2 Description du modèle d'attente classique

Une file d'attente ou queue est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de places d'attente d'un ou plusieurs serveurs et bien sûr de clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système. La description précédente d'une file d'attente, ne saurait capturer toutes les caractéristiques des différents modèles que comptent la littérature mais elle identifie les éléments principaux permettant la classification de la grande majorité des files d'attente simples.

1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état : $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n) = P(X = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

où, $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

1.4 Classification des systèmes d'attente :

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des spécifications suivantes :

- La nature stochastique du processus des arrivées, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.

- La distribution du temps de service.
- Le nombre s de serveurs (stations de service). On admet généralement que les temps de service correspondants suivent la même distribution et que les clients qui arrivent forment une seule file d'attente.
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file d'attente ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités. Dans ce cas, certains clients arrivant vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

1.5 Notation de Kendall

Un modèle de file d'attente est totalement décrit selon la notation de Kendall-Lee. Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles :

$A/B/s/N/K/C$

La signification de chacun de ces symboles est :

- A : nature du processus des arrivées;
- B : nature du processus de service;
- s : nombre de serveurs;
- N : capacité d'accueil de la file d'attente;
- K : taille de la population;
- C : discipline de service.

Dans la description des processus d'arrivée et de service, les symboles les plus courants sont :

- M : loi Exponentielle (memoryless);
- E : loi d'Erlang;
- γ : loi Gamma;
- D : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant);
- G : loi Générale (quelconque).

La forme abrégée est : $A/B/s$ signifie que N et M sont infinis.

1.6 Les différentes disciplines de service

La discipline de service décrit l'ordre avec lequel les arrivées dans le système vont accéder au service. Ces disciplines sont :

FIFO (First In First Out): Le premier arrivé est le premier servi,

LIFO (Last In First Out): Le dernier arrivé sera le premier servi,

Random (aléatoire): Les clients accèdent au serveur de manière aléatoire, indépendamment de l'ordre des arrivées,

1.7 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données. Ce calcul se fait le plus souvent pour le régime stationnaire uniquement et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- $L = E(X)$: nombre moyen de clients dans le système;
- L_q : nombre moyen de clients dans la file d'attente;
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système;
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans la file;
- U : taux d'utilisation de chaque serveur;
- S : le temps moyen de service;
- A : le temps moyen entre deux arrivées.

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivante :

- $L = \lambda W$ (formule de Little), où λ représente le taux d'arrivées.
- $L_q = \lambda w_q$;
- $w = w_q + \frac{1}{\mu}$, où μ représente le taux de service.
- $L = L_q + \rho$.

D'une manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté λ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant

être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter μ clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est s , une file est stable si et seulement si

$$\lambda < s\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1,$$

où, ρ est appelé l'intensité du trafic.

1.8 Les files d'attente markoviennes

Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (modèle $M/M/1$). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien $\{X(t), t \geq 0\}$ est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

1.8.1 Système d'attente M/M/1

Le système de files d'attente $M/M/1$ est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente. Le flot des arrivées est poissonnien de paramètre λ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ .

Régime transitoire

Soit $X(t)$ le nombre de clients présents dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, $X(t)$ est un processus markovien homogène.

Les probabilités d'état $P_n(t) = P[X(t) = n]$ peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov ci-dessous, connaissant les conditions initiales du processus.

$$\begin{cases} P_n'(t) = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \\ P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t). \end{cases}$$

Régime stationnaire

Sous la condition d'ergodicité du système $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, pour laquelle le régime stationnaire existe, il est aisé d'obtenir les probabilités stationnaires

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = (1 - \rho)\rho^n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.8.1)$$

$\pi = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelé distribution stationnaire, elle suit une loi géométrique.

Caractéristiques du système

- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$L = E(X) = \sum_{n \geq 0} n\pi_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n\rho^n.$$

D'où :

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (1.8.2)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \sum_{n \geq 1} (n - 1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (1.8.3)$$

○ Le temps moyen de séjour dans le système W et le temps moyen d'attente dans la file W_q sont obtenus à partir des formules de Little, ou des distributions du système :

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (1.8.4)$$

- Le temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (1.8.5)$$

1.9 Les files d'attente non markoviennes

En l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques: le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate.

1.9.1 Système d'attente M/G/1

Le flot des arrivées dans le système $M/G/1$ est poissonien de paramètre λ et la durée de service est distribuée selon une loi générale G de moyenne $\frac{1}{\mu}$. La particularité de ce système est que, contrairement au cas $M/M/1$, le processus $X(t)$ n'est pas markovien.

Chaîne de Markov induite et probabilités de transition

Soit X_n : le nombre de clients dans le système $M/G/1$ à la fin de service du $n^{\text{ième}}$ client.

Notons par $G(s)$ la distribution de la durée de service et par λ le paramètre de la distribution exponentielle régissant la durée entre deux arrivées consécutives.

Le processus $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $P = [P_{ij}]_{i,j \geq 0}$,

où :

$$p_{ij} = \begin{cases} P_j, & \text{si } i = 0; \\ P_{j-i+1}, & \text{si } i \geq 1; \end{cases} \quad (1.9.1)$$

avec:

$$P_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} dG(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En effet, si A_n est le nombre de clients qui entrent dans le système pendant le $n^{\text{ième}}$ service, on a:

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1} \quad \text{avec} \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n > 0, \\ 0, & \text{si } X_n = 0. \end{cases} \quad (1.9.2)$$

Ceci montre que X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} et non pas de X_{n-1}, X_{n-2}, \dots . Ce qui signifie que la suite $\{X(t), t \geq 0\}$ est markovienne, où $X(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Par ailleurs, $P(A_n = \frac{k}{t}) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, car le nombre de clients A_n qui entrent dans le système, est distribué suivant une loi de Poisson de paramètre (λt) . Et d'après le théorème des probabilités totale,

$$P(A_n = k) = P_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dG(t), \text{ où } P_k > 0, (k = 1, 2, \dots).$$

Régime stationnaire

Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite X_n , si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$. Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(z)$ [22] :

$$\Pi(z) = G^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{G^*(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (1.9.3)$$

où G^* représente la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service, et z est un nombre complexe vérifiant $|z| \leq 1$. La formule (1.9.3) est appelée formule de **Pollaczek-Khintchine** [26]. Son inversion, pour retrouver Π , est souvent difficile et nécessite des méthodes numériques.

Caractéristiques du système

o Le nombre moyen de clients dans le système :

Cette quantité peut être déterminée, en régime stationnaire, en utilisant la relation :

$$E(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \Pi'(z).$$

Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué.

Par contre, elle peut être obtenue aisément en utilisant la relation (1.9.2).

$$L = E(X_n) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(X)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.9.4)$$

Où $V(X)$ est la variance de la variable aléatoire X .

- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(X)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.9.5)$$

En utilisant la formule de Little, on obtient :

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W = \frac{1}{\mu} + \lambda \left(\frac{V(X) + 1/\mu^2}{2(1 - \rho)} \right). \quad (1.9.6)$$

- Le temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \lambda \left(\frac{V(X) + 1/\mu^2}{2(1 - \rho)} \right). \quad (1.9.7)$$

1.10 Systèmes d'attente avec rappels

Plusieurs situations d'attente ont la caractéristique que les clients doivent rappeler, pour une certaine raison, pour être servis. Quand le service d'un client est insatisfait, il doit rappeler jusqu'à l'accomplissement de son service. Ces modèles d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les monographies de Falin et Templeton (1997) [16], Artalejo et Gómez (2008)[5] et une classification bibliographique sur les systèmes avec rappels est donnée par Artalejo [3, 4].

1.10.1 Description du modèle d'attente avec rappels

Un système d'attente avec rappels est un système composé de s ($s \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'une file de capacité $N - s$ ($N \geq s$) et d'une orbite de capacité M . À l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera servi immédiatement et quittera le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans la file, le client le rejoindra. Par ailleurs, si un client arrive et trouve tous les serveurs et toutes les positions d'attente de la file occupés,

il quittera le système définitivement avec la probabilité $1 - p$, ou bien entre en orbite avec la probabilité p et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire. Les clients qui reviendront et rappelleront pour le service sont dits en "orbite". Cette dernière peut être finie ou infinie.

1.11 Files d'attente avec rappels et clients négatifs

Considérons une file d'attente avec un seul serveur et deux types d'arrivées: arrivées positives et arrivées négatives. Dans les systèmes avec rappels, si un client positif arrive et trouve le serveur occupé, il rejoint l'orbite et refait sa tentative ultérieurement pour avoir un service après un temps aléatoire. Autrement, s'il trouve le serveur libre, il reçoit son service et quitte le système. Si un client négatif arrive dans un système occupé, il élimine immédiatement un client positif de l'orbite s'il y a au moins un client. Autrement, si le serveur est libre il n'a aucun effet sur le système. Le concept des clients négatifs a été présenté par Gelenbe [17], qui a établi la solution sous forme de produit pour une file d'attente comprenant des arrivées négatives aussi bien que les arrivées positives.

Plusieurs possibilités différentes ont été introduites dans la littérature à ce sujet :

- **Elimination individuelle** : Si une arrivée négative entre dans un système d'attente non vide, elle éliminera un client positif. Une arrivée négative entrant dans un système vide est sans effet.

- **Elimination par groupe** : Une arrivée négative contraint un groupe de clients à quitter le système.

- **Le désastre (la catastrophe)** : L'arrivée négative a l'effet d'une catastrophe sur le système où elle entre. En d'autres termes, tous les clients sont automatiquement éliminés [6].

- **Elimination d'une quantité aléatoire d'activité** : Instantanément, à l'arrivée d'un client négatif, une quantité aléatoire d'activité est éliminée du système. La politique d'élimination d'une quantité aléatoire d'activité a été introduite par Boucherie et Boxma [15] dans le contexte du modèle $M/G/1$. Ce travail est une généralisation de celui de Jain

et Sigman [20] pour permettre aux arrivées négatives d'éliminer une quantité aléatoire d'activité qui n'est pas nécessairement un nombre entier de clients positifs.

1.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé et présenté les concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente (classiques et avec rappels). Notons que les rappels sont utilisés pour modéliser et évaluer les performances de différents systèmes réels. Les modèles d'attente développés ces dernières décennies tentent de prendre en considération les clients négatifs. Ces phénomènes affectent les caractéristiques de performance des systèmes réels.

Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques

2.1 Introduction

La complexité de l'étude de la majorité des systèmes de files d'attente a contraint les analystes à recourir à des méthodes d'approximation basées sur les inégalités stochastiques pour avoir des estimations qualitatives des caractéristiques du modèle étudié. Cela a motivé l'élaboration de la théorie des ordres stochastiques qui nous a permis l'étude du concept de monotonie des processus aléatoires. L'objectif de ces méthodes est l'approximation du modèle étudié par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions sont plus simples que celles du modèle étudié. Cela fournit des informations sur notre modèle, difficiles à avoir directement.

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs théorèmes, résultats, propriétés, corollaires et définitions qui sont à l'origine de la thèse de BOUALEM. M (Propriétés de décomposition stochastique dans les systèmes avec rappels)

2.2 Propriétés générales des ordres partiels

On appelle un ordre partiel, noté " \prec ", une relation binaire définie sur un ensemble D d'éléments a, b, c, \dots , satisfaisant les trois axiomes :

- (i) $a \prec a$ (réflexivité),
- (ii) si $a \prec b$ et $b \prec c$ alors $a \prec c$ (transitivité),
- (iii) si $a \prec b$ et $b \prec a$ alors $a = b$ (antisymétrie).

Notons que $a \prec b$ est équivalent à dire que $b \succ a$.

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur l'ensemble D de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ses sous-ensembles).

Pour les deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement) on a par convention :

$$F \prec G \iff X \prec Y.$$

On suppose que deux variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (iii) sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur D découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela on utilisera la distribution de Dirac, notée par $\Theta_c(\cdot)$, définie pour tous les nombres réels comme suit :

$$\Theta_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < c, \\ 1, & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Définition 2.2.1 Soit un ordre partiel donné " \prec " défini sur (un sous ensemble de) l'espace D des fonctions de répartition.

On dit que cet ordre possède la propriété :

- **(R)** : si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors $\Theta_a \prec \Theta_b$.
- **(E)** : si $F \prec G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.
- **(M)** : si $F \prec G$, alors $F^c \prec G^c$, $\forall c > 0$, où $F^c(x) = F(x/c)$, $\forall x$.

- (C) : si $F_1 \prec F_2$ alors $F_1 * G \prec F_2 * G$, où $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x-y)dG(y), i = 1, 2.$
- (W) : si F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement) alors :

$$\forall n, F_n < G_n \Rightarrow F < G.$$

Remarque 2.2.1 pour les deux variables aléatoires X et Y :

la propriété (M) assure que:

$$X \prec y \Leftrightarrow cX \prec cY \text{ pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété (C) assure que :

$$X_1 \prec X_2 \Rightarrow X_1 + Y \prec X_2 + Y$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété (E) assure que :

$$X \prec Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

On remarque que la propriété (E) découle des autres propriétés.

Proposition 2.2.1 Un ordre partiel \prec sur un ensemble (ou bien sur un sous ensemble de) D qui vérifie les propriétés (R), (M), (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).

Définition 2.2.2 pour une classe de fonctions réelles \mathfrak{S}_{\prec} , l'ordre partiel \prec défini sur l'ensemble (ou sur le sous ensemble de) D est dit généré par \mathfrak{S}_{\prec} si :

$$F \prec G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dG(x),$$

pour toute fonction f dans \mathfrak{S}_{\prec} , telle que les intégrales existent.

Définition 2.2.3 La classe Υ de fonctions réelles définies sur la droite réelle \mathbb{R} (resp. la demi-droite \mathbb{R}_+) est dite invariante par translation, si pour tout $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}_+$), lorsque $f \in \Upsilon$, on a aussi $f_a \in \Upsilon$, où f_a est la fonction définie par

$$f_a(x) = f(x+a), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

2.2.1 ordre stochastique

Définition 2.2.4 on dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$, lorsque

$$F(x) \geq G(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

On écrit aussi $X \leq_{st} Y$ (\leq_{st} noté aussi par l'ordre \leq_d).

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , et en notant par $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, i \in \mathbb{Z},$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, i \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que l'ordre stochastique \leq_{st} satisfait les axiomes de l'ordre partiel \prec .

Proposition 2.2.2 Si $F_1 \leq_{st} F_2$, alors il existe deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilité (Ω, A, P) pour lesquelles

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \forall \omega \in \Omega,$$

et

$$P(\omega : X_k(\omega) \leq x) = F_k(x) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Notons par $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe $\mathbb{R} \leq_{st}$ des fonctions \leq -monotones est confondue avec la classe $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathbb{R} \leq_{st} = \mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2.1 L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.2.1)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ pour laquelle l'intégrale existe, si et seulement si $F_1 \leq_{st} F_2$. Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.2.1) est vérifiée pour tout F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_{st} F_2$ uniquement si f est non décroissante.

Corollaire 2.2.1 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, avec $X \leq_{st} Y$, on a

$$\begin{aligned} E(X^r) &\leq E(Y^r), \quad (r \geq 0), \\ E(X^r) &\geq E(Y^r), \quad (r < 0), \end{aligned}$$

lorsque les espérances existent. Et si celles-ci sont bien définies

$$E(X^r) \leq E(Y^r), \quad (r = 1, 3, 5, \dots),$$

pour des variables quelconques (pas forcément non négatives).

2.2.2 ordre convexe

On note par : $x_+ = \max(0, x)$.

Définition 2.2.5 On dit que la variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire Y , de fonction de répartition G , et on écrit $X \leq_v Y$, ou bien $F \leq_v G$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} E((X - x)_+) &= \int_x^{+\infty} (t - x) dF(t) = \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1 - G(t)) dt = E((Y - x)_+), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies.

Dans le cas discret, on a :

$$X \leq_v Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}.$$

Une conséquence immédiate de cette définition :

si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty$ alors $F \leq_v G$.

En notant par $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$, l'inégalité (2.2.2) peut s'écrire comme suit :

$$\int_x^\infty \bar{F}(t) dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t) dt,$$

ou bien

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &= x + E((X - x)_+) \\ &\leq x + E((Y - x)_+) \\ &= E(\max(x, Y)), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Lorsque $E((x - X)_+)$ et $E((x - Y)_+)$ existent,

$$X \leq_v Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

En effet

$$\begin{aligned} E(X) - E(Y) &= E((Y - x)_+) - E((X - x)_+) - E((x - Y)_+) + E((x - X)_+) \\ &\geq E((x - X)_+) - E((x - Y)_+) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

De l'inégalité (2.2.3) découle la transitivité et l'antisymétrie de l'ordre convexe. Alors, c'est un ordre partiel sur les sous ensembles de D pour lesquels $\int_0^\infty t dF(t) < \infty$. Sans cette condition, la propriété de l'antisymétrie peut ne pas avoir lieu.

Pour une variable aléatoire X de moyenne finie m , il est clair que :

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &\geq E(\max(x, E(x))) \\ &= \max(x, m). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité (2.2.3), on a

$$m \leq_v X.$$

Il s'ensuit, d'après l'inégalité (2.2.3) que l'ordre convexe possède la propriété (R) et (M). D'après l'inégalité (2.2.2) on déduit que l'ordre convexe est généré par la famille

$$\mathfrak{F}_v = \{e_x; -\infty < x < +\infty\},$$

des fonctions e_x définies comme suit

$$e_x(t) = (t - x)_+ = \int_{-\infty}^t \Theta_x(u) du.$$

Puisque la classe \mathfrak{F}_v est invariante par translation, alors l'ordre convexe possède la propriété (C).

Notons par $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$, la classe des fonctions convexes et non-décroissantes.

Théorème 2.2.2 1. L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.2.4)$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si $F_1 \leq_v F_2$.

2. Pour une fonction donnée f , l'inégalité (2.2.4) a lieu pour toutes les fonctions F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_v F_2$ uniquement si f est une fonction convexe et non décroissante.

3. Si $F_1 \leq_v F_2$ et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.2.4) est vérifiée pour toute fonction convexe f donnée.

Corollaire 2.2.2 Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives telles que $X \leq_v Y$ on a

$$E(X^r) \leq E(Y^r), (r \geq 1),$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires X et Y telles que

$$E(X) = E(Y), \text{ et } X \leq_v Y,$$

alors

$$E(X^r) \leq E(Y^r), (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires telles que X et Y sont non négatives et $X \leq_v Y$, alors l'égalité $E(X^r) = E(Y^r)$ pour tout $r \geq 1$ implique l'égalité $X =_{st} Y$.

En effet

$$E(X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r(r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1 - F(y)) dy.$$

Cette propriété est l'analogue de la propriété suivante pour l'ordre stochastique

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \Rightarrow X =_{st} Y.$$

Proposition 2.2.3 *Supposons que les suites de variables aléatoires X_n et Y_n convergent faiblement vers X et Y (respectivement).*

si

$$\begin{aligned} E(X_+) &= E(Y_+) \text{ sont finis,} \\ E((X_n)_+) &\rightarrow E(X_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ E((Y_n)_+) &\rightarrow E(Y_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

et si $X_n \leq_v Y_n$, alors

$$X \leq_v Y.$$

2.2.3 Ordre concave

Définition 2.2.6 *On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est inférieure en moyenne de vie écoulée à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , c'est-à-dire, $X \leq_{cv} Y$ (ce qui est équivalent à $F \leq_{cv} G$, lorsque:*

$$\begin{aligned} E((x - X)_+) &= \int_{-\infty}^x (x - t) dF(t) = \int_{-\infty}^x F(t) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^x G(t) dt = E((x - Y)_+), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où les espérances mathématiques (les intégrales) sont bien définies.

par conséquent, si

$$F \leq_{st} G \text{ et } E(X) = E(\max(0, -X)) < \infty, \text{ alors } X \leq_{cv} Y.$$

Remarquons que l'ordre concave " \leq_{cv} " est un ordre partiel sur le sous ensemble de D des fonctions vérifiant $\int_{-\infty}^0 |t| dF(t) < \infty$ comme dans le cas de l'ordre convexe.

On observe d'après (2.2.5) que l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $-Y \leq_v -X$.

Si on a l'égalité $E(X) = E(Y)$, alors l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente $Y \leq_v X$.

Notons par $\mathfrak{R}_{cv}(\mathbb{R})$, la classe des fonctions concaves et non-décroissantes.

Théorème 2.2.3 1.l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dG(t), \quad (2.2.5)$$

est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathfrak{R}_{cv}(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies si et seulement si

$$F \leq_{cv} G.$$

2. Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.2.6) a lieu pour toutes les fonctions F et G telles que $F \leq_{cv} G$ seulement si f est concave et non décroissante.

3. Si $F \leq_{cv} G$ et leurs moyennes existent et sont égales alors, l'inégalité (2.2.6) est vérifiée pour toute fonction concave f donnée.

2.2.4 Ordre en transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire X est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité $f(x)$:

$$\hat{f}(x) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx,$$

où s est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour $Re(s) \geq 0$. La transformée de Laplace est notée aussi $L[f(x)]$.

Propriétés

• Si X et Y sont indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de Laplace de X et de Y ,

• $L[f'(x)] = s\hat{f}(s) - f(0),$

• $L[f''(x)] = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0),$

• $L\left[\int_0^x f(u) du\right] = \frac{\hat{f}(s)}{s},$

• Si $F(x)$ est la fonction de répartition de X et si $R(x) = 1 - F(x)$ alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{R}(s) = \int_0^{\infty} R(x) dx.$$

Définition 2.2.7 Pour deux variables aléatoires non négatives X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement), F est dite inférieure par rapport à l'ordre Laplacien à G , et on note $F \leq_L G$, si pour tout s positif on a l'inégalité suivante

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX) dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX) dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique.

Théorème 2.2.4 Soit une fonction f strictement monotone, alors $F \leq_L G$ implique

$$\int_0^{+\infty} f(t) dF(t) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dG(t).$$

Corollaire 2.2.3 1. Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, de fonctions de répartition F et G respectivement, telles que $F \leq_L G$ alors, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1 - E(\exp(-sX))}{s} \leq \frac{1 - E(\exp(-sY))}{s}, \quad \forall s > 0.$$

2. Lorsqu'on fait tendre s vers 0, on obtient le résultat suivant :

$$F \leq_L G \Rightarrow E(X) \leq E(Y),$$

lorsque les espérances existent.

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformée de Laplace.

Théorème 2.2.5 Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition F et G respectivement, alors :

$$F \leq_L G \Leftrightarrow E(f(x)) \leq E(f(y)),$$

pour toute fonction f strictement monotone, telle que les espérances existent.

2.2.5 Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $F \leq_g G$, si et seulement si :

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où,

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) z^n \text{ et } E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) z^n, \quad |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant $s = -\ln z$.

2.2.6 Relations entre les ordres partiels

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement.

Alors, on a les relations suivantes :

- Si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$.
- Si $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$.
- Si $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \Leftrightarrow G \leq_v F$.
- $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
- $F \leq_{cv} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
- Si $E(X) = E(Y)$ et $F \leq_v G \Rightarrow G \leq_L F \Rightarrow G \leq_g F$.
- $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.

2.3 Modèles stochastiques et monotonie

2.3.1 Modèles stochastiques

La modélisation est la représentation d'un système réel par un modèle mathématique. On parle de modèle stochastique lorsque les influences aléatoires sont prises en considération. Cette prise en compte du hasard et ses effets permet une meilleure compréhension des phénomènes réels et la résolution efficace de problèmes complexes. Plusieurs disciplines de la recherche opérationnelle reposent sur les probabilités et leurs applications. En particulier, les théories de files d'attente, de fiabilité et de gestion des stocks.

2.3.2 Propriétés de monotonie

Étudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est d'obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle Σ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i, \dots , décrivent son comportement.

Soit c_Σ une caractéristique dans Σ et soit C_Σ l'ensemble des valeurs possibles de c_Σ .

Pour une structure donnée et une distribution initiale U , c_Σ dépend uniquement des F_i , et on écrit

$$c_\Sigma = c_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in C_\Sigma.$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de c_Σ . Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de c_Σ par rapport aux F_i , i.e, la manière avec laquelle c_Σ est affectée par les changements en F_i . Parmi les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques on trouve la monotonie (i.e, si les F_i croissent dans un certain sens, alors c_Σ croît aussi).

2.4 Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

2.4.1 Opérateurs monotones et comparables

Soient (E, M) un espace probabilisable et P_M l'ensemble de toutes les mesures de probabilité définies sur M . Soient aussi les opérateurs τ , $\tau^{(1)}$ et $\tau^{(2)}$ définis de P_M dans P_M et l'ordre partiel " \prec " défini sur P_M .

Définition 2.4.1 *Un opérateur τ est dit \prec -monotone si pour toutes mesures de probabilités $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ appartenant à P_M telles que $p^{(1)} \prec p^{(2)}$, on a*

$$\tau p^{(1)} \prec \tau p^{(2)}.$$

L'opérateur $\tau^{(1)}$ est inférieur à $\tau^{(2)}$ si $\tau^{(1)}p \prec \tau^{(2)}p$ pour tout $p \in P_M$ et on écrit,

$$\tau^{(1)} \prec \tau^{(2)}.$$

Pour des applications aux processus de Markov homogènes, on s'intéresse à la comparabilité des distributions $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ définies par

$$p_n^{(k)} = (\tau^{(k)}p^{(k)})_n, \quad k = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

pour deux distributions initiales $p^{(k)}$ et les opérateurs $\tau^{(k)}$, pour $k = 1, 2$.

Théorème 2.4.1 *Soient $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ deux opérateurs définis sur P_M et $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ deux mesures de probabilité définies sur M , alors*

$$p^{(1)} \prec p^{(2)} \text{ implique } p_n^{(1)} \prec p_n^{(2)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

s'il existe un opérateur τ \prec -monotone défini sur P_M tel que

$$\tau^{(1)} \prec \tau \prec \tau^{(2)}.$$

Remarquons que ce théorème reste vrai, en général, pour les opérateurs définis dans un espace partiellement ordonné.

À présent, on considère les opérateurs de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$ d'espace d'état (E, M) . Les opérateurs de transition sont décrits par leurs fonctions de transition $p(x, \beta)$,

$$p(x, \beta) = P(X_{n+1} \in \beta / X_n = x), \quad x \in E \text{ et } \beta \in M,$$

ou bien, dans le cas où les processus sont à valeurs réelles, par leurs distributions de transition

$$p(x, y) = P(X_{n+1} < y / X_n = x), \quad x, y \in E \subseteq \mathbb{R}.$$

Maintenant, on donne des conditions sur les fonctions de transition, qui assurent la monotonie ou la comparabilité des opérateurs de transition.

Théorème 2.4.2 Les opérateurs de transition $\tau^{(1)}$ et $\tau^{(2)}$ satisfont l'inégalité $\tau^{(1)} \prec \tau^{(2)}$ si et seulement si leurs fonctions $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ satisfont

$$p^{(1)}(x, \cdot) \prec p^{(2)}(x, \cdot), \quad \forall x \in E.$$

2.5 Distributions non-paramétriques

Les notions de vieillissement et de relations d'ordre entre variables aléatoires sont étroitement liées. Nous présentons les principaux ordres permettant de comparer des variables aléatoires puis les notions de vieillissement. Cette présentation sera cependant partielle car l'activité scientifique sur ces sujets est importante. Il est donc difficile de prétendre faire un exposé exhaustif. L'un des états de l'art les plus récents sur ce sujet est [19, 23], mais on peut citer aussi [11, 18, 27].

En théorie de fiabilité, les classes de distributions nous renseignent sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de sa durée de vie résiduelle connaissant son âge (propriété qualitative). La connaissance de la classe (d'âge) de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision.

Dans cette section, sont présentées aussi les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité ces dernières années.

Les distributions non-paramétriques ont été introduites pour l'étude de certains problèmes en relation avec la théorie de fiabilité. Elles permettent ainsi de modéliser et caractériser des propriétés qualitatives telles que le vieillissement et le rajeunissement du système.

Ces distributions sont utilisées actuellement dans divers domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie (médecine), files d'attente, ordonnancement, théorie de décision, économie, gestion des stocks [24].

Définition 2.5.1 Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un élément, et soient F et F_τ leurs distributions respectives. On dit que F est :

- ◆ *NBU (New Better than Used)*, si $F_\tau \leq_{st} F$, ($0 < \tau < \infty$).
- ◆ *NWU (New Worse than Used)*, si $F \leq_{st} F_\tau$, ($0 < \tau < \infty$).
- ◆ *NBUE (New Better than Used in Expectation)*, si $E(X_\tau) \leq E(X)$, ($0 < \tau < \infty$).
- ◆ *NWUE (New Worse than Used in Expectation)*, si $E(X) \leq E(X_\tau)$, ($0 < \tau < \infty$).
- ◆ *IFR (Increasing Failure Rate)*, si $F_y \leq_{st} F_x$, ($0 \leq x < y < \infty$).
- ◆ *IFRA (Increasing Failure Rate in Average)*, si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ croissante, $t \geq 0$.
- ◆ *DFR (Decreasing Failure Rate)*, si $F_x \leq_{st} F_y$, ($0 \leq x < y < \infty$).
- ◆ *DFRA (Decreasing Failure Rate in Average)*, si $(-1/t) \log(1 - F(t))$ décroissante, $t \geq 0$.

- ◆ *IMRL (Increasing Mean Residual Life)*, si

$$E(X_\tau) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(u)) du, \text{ croissante } (0 < \tau < \infty).$$

- ◆ *DMRL (Decreasing Mean Residual Life)*, si

$$E(X_\tau) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_{\tau}^{+\infty} (1 - F(u)) du, \text{ décroissante } (0 < \tau < \infty).$$

Proposition 2.5.1 Soit la variable aléatoire X de fonction de répartition F ayant une moyenne finie m .

1. si F est NBU (resp. NWU), alors :

$$F \leq_{st} \exp(\lambda), \quad (\text{resp. } F \geq_{st} \exp(\lambda)),$$

pour un certain $\lambda \leq m^{-1}$ (resp. $\lambda \geq m^{-1}$), avec la possibilité d'avoir une égalité seulement si $F = \exp(m^{-1})$.

2. si F est NBUE (resp. NWUE), alors

$$F \leq_v \exp(m^{-1}), \quad (\text{resp. } F \geq_v \exp(m^{-1})).$$

2.5.1 Relation avec les distributions paramétriques

- La loi d'Erlang E_k est IFR
- La loi de Weibull $W(a)$, pour $a > 1$ (paramètre de la forme), est IFR.
- La loi de Weibull $W(a)$, pour $a \leq 1$, est DFR.
- La loi Gamma $\Gamma(a)$, avec $0 \leq a < 1$, est DFR.
- La loi exponentielle est à la fois IFR et DFR.
- La distribution Hyper-exponentielle H est DFR.

2.5.2 Relation entre les classes de distributions non-paramétriques

la figure 2.1 illustre les relations d'implication existantes entre certaines classes de distributions non-paramétriques.

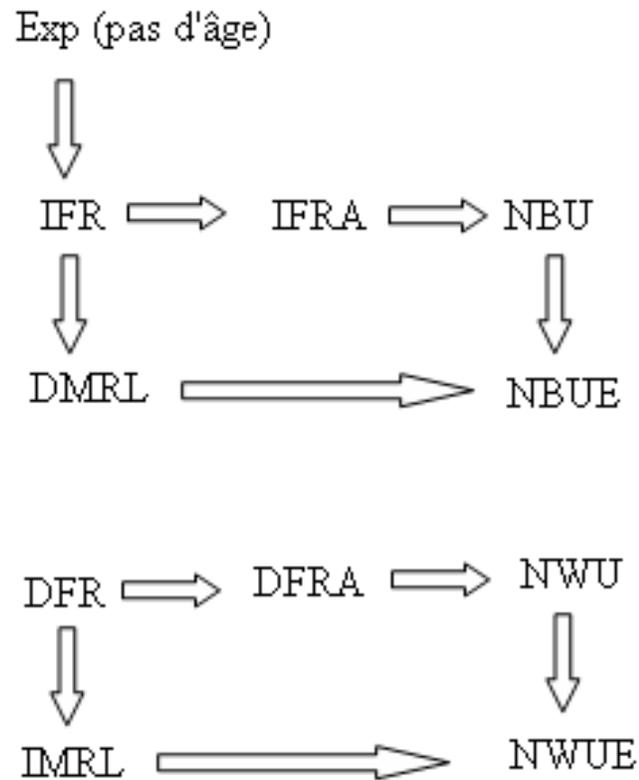


figure 2.1– Relation entre les classes de distributions d'âge

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques et la monotonie des processus stochastiques. On a donné aussi les classes de distributions d'âge issues de la théorie de la fiabilité. La méthode de comparaison stochastique sera appliquée, dans le chapitre suivant, au modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatives.

Inégalités stochastique pour le système d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés de monotonie et de comparabilité en utilisant les outils mathématiques de l'analyse qualitative pour l'étude des systèmes de files d'attente avec rappels et clients dits négatifs. Nous avons prouvé la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite. Nous avons également établi des conditions pour lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les probabilités stationnaires, associées à deux chaînes de Markov incluses, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastiques donnés.

3.2 Description du modèle

Considérons un système d'attente $M/G/1$ avec rappels à un seul serveur et clients négatifs. Les clients primaires positifs arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Si un client positif arrive et trouve le serveur inactif, commence son service immédiatement. Sinon, si le serveur est occupé, ce dernier entre en orbite et devient une source d'appels répétés et tentera sa chance après une durée de temps aléatoire, jusqu'à ce qu'il le trouve libre. Le temps entre les tentatives répétées successives est supposé être distribué suivant la loi exponentielle de paramètre $n\mu$, lorsque le nombre de clients en orbite est $n \in \mathbb{N}$. Les temps de service des clients positifs sont indépendants et identiquement distribués avec une fonction de distribution générale $G(x)$ et de fonction de densité de probabilité $g(x)$.

Après qu'un client positif est complètement servi, il quitte le système définitivement. En plus de l'arrivée des clients positifs et les rappels des clients en orbite. On suppose, en outre, que des clients négatifs, arrivent au système selon un processus de Poisson de taux $\delta > 0$. Le client négatif arrivant pendant le temps de service d'un client positif, supprimera ce dernier et à la fin de son service décide soit d'entrer en orbite avec la probabilité θ ($0 \leq \theta < 1$) ou de quitter le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta)$ [23].

Les temps entre les arrivées des clients positifs, clients négatifs, les temps de rappels des clients en orbite et les temps de service sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. D'après cette description, l'état du système à un instant arbitraire t peut être décrit par le processus stochastique à temps continu

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{C(t), N(t), \zeta(t); t \geq 0\},$$

où,

$N(t)$: est le nombre de clients en orbite à l'instant t .

$C(t)$: est une variable aléatoire qui désigne l'état du serveur:

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre,} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

si $C(t) = 1$, alors $\zeta(t) > 0$ représente le temps de service écoulé du client positif en service et $\zeta(t) = 0$ si $C(t) = 0$.

Dans ce qui suit, nous négligeons $\zeta(t)$ et on considère que $\{C(t), N(t); t \geq 0\}$; dont l'espace d'état $S = \{0,1\} \times \mathbb{Z}_+$.

3.3 Chaîne de Markov induite

Soit $\tau_i, i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ qui représente les instants de départs des clients, c'est-à-dire, l'instant d'achèvement du service du $i^{\text{ème}}$ client positif, ou bien celui de $i^{\text{ème}}$ client positif en service qui est éliminé par un client négatif. Soit $N_i = N(\tau_i+), i \in \mathbb{Z}_+$, est le nombre de clients en orbite juste avant l'instant de départ τ_i . Alors la suite $\{N_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ des variables aléatoires constitue une chaîne de Markov avec un espace d'état \mathbb{Z}_+ , qui est la chaîne de Markov induite pour notre système de files d'attente.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov induite soit ergodique.

Théorème 3.3.1 *l'inégalité*

$$\theta(1 - \beta^*(\delta)) + \frac{\lambda[1 - \beta^*(\delta)]}{\delta} < 1,$$

est une condition nécessaire et suffisante d'ergodicité de notre système de files d'attente avec clients négatifs [5].

Où,

$$\beta^*(\delta) = \int_0^{+\infty} e^{-\delta x} g(x) dx,$$

est la transformée de Laplace de $g(x)$.

3.4 Notations

Dans cette section, on utilise la théorie générale des ordres partiels (voir Chapitre 2) pour l'étude des propriétés de monotonie du système d'attente $M/G/1$ avec rappels et

clients négatifs relative aux ordres : stochastique " \leq_{st} ", Laplacien " \leq_L " et convexe " \leq_v " .

On introduit les notations suivantes :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs, pour $i = 1, 2$:

$\lambda^{(i)}$: taux d'arrivées des clients positifs Σ_i .

$\mu^{(i)}$: taux de rappels dans Σ_i .

$\theta^{(i)}$: la probabilité que le client négatif interrompu décide de rejoindre l'orbite.

$\delta^{(i)}$: taux d'arrivées des clients négatifs .

$G^{(i)}(u)$: la distribution de temps de service.

$k_n^{(i)}$: le nombre de nouvelles arrivées de clients positifs durant le service du $n^{\text{ème}}$ client dans Σ_i .

$h_n^{(i)}$: le nombre de clients négatifs qui arrivent durant le service du $n^{\text{ème}}$ client dans Σ_i .

$\pi_m^{(i)}$: la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i .

3.5 Inégalités préliminaires

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans les deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs $\{k_m^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ et $\{h_m^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ sont comparables suivant les ordres partiels : stochastique, convexe et en transformée de Laplace.

Lemme 3.5.1 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs :*

$$Si \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\},$$

où

$$k_m^{(i)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^m \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{m!} \exp\{-\delta^{(i)}u\} dG^{(i)}(u), \quad i = 1, 2 \text{ et } m \geq 0,$$

Preuve. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$.

Par définition de l'ordre stochastique \leq_{st} , on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} k_n^{(2)} = \bar{k}_m^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \bar{k}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} dG^{(1)}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} dG^{(1)}(u) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^n \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} dG^{(2)}(u) = \bar{k}_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.5.1), on considère la fonction suivante

$$f_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n \exp\{-\lambda u\}}{n!} \exp\{-\delta u\}. \quad (3.5.2)$$

En prenant sa dérivée par rapport à u , on obtient :

$$\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u} = \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right].$$

Donc $f_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en $u \in I = \left[0, \frac{n}{\lambda + \delta}\right]$, $\forall \lambda > 0, \delta > 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - (\lambda + \delta) \frac{\lambda u (\lambda u)^{n-1}}{n(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\left(\lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right) \left(1 - \frac{(\lambda + \delta)u}{n} \right) \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} [r(u) g(u)],
 \end{aligned}$$

telle que $r(u) = \lambda \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\}$ est une fonction positive pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.

Pour que $\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u}$ soit positive, il faut que:

$$\begin{aligned}
 g(u) \geq 0 &\Leftrightarrow n - u(\lambda + \delta) > 0, \\
 &\Leftrightarrow u < \frac{n}{(\lambda + \delta)}, \quad \forall \lambda > 0, \delta > 0, n \geq m \geq 1 \text{ et } u \in \mathbb{R}^+.
 \end{aligned}$$

On conclut que $\frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u}$ est positive si et seulement si $u < \frac{n}{(\lambda + \delta)}$.

La dérivée par rapport à λ est:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \lambda} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - u \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m+1}^{+\infty} u \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \\
 &\quad + u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \\
 &= u \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} > 0, \quad \forall u \geq 0 \text{ et } \forall m \geq 1.
 \end{aligned}$$

Donc la fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante par rapport à λ .

La dérivée par rapport à δ s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta} &= -u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} \\
 &= -u \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} < 0, \quad u \in \mathbb{R}^+, \lambda > 0.
 \end{aligned}$$

Cette fonction est décroissante par rapport à δ et comme $f_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en u et $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$, alors à l'aide du Théorème 2.2.1 donné dans le chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.3)$$

D'autre part, puisque la fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est monotone par rapport à λ et δ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, on a

$$\int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} f_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.4)$$

Par conséquent, des inégalités (3.5.3) et (3.5.4), l'inégalité (3.5.1) est vérifiée par transitivité. ■

Lemme 3.5.2 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs :

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{-(1)} \leq_{st} \bar{G}^{-(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_{st} \{h_m^{(2)}\},$$

où

$$\begin{aligned} h_m^{(i)} &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^m \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{m!} \exp\{-\delta^{(i)}u\} \delta^{(i)} [1 - G^{(i)}(u)] du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^m \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{m!} \exp\{-\delta^{(i)}u\} \delta^{(i)} d\bar{G}^{-(i)}(u), \quad i = 1, 2 \text{ et } m \geq 0. \end{aligned}$$

Preuve. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $\bar{G}^{-(1)} \leq_{st} \bar{G}^{-(2)}$.

La démarche à suivre est similaire à celle de lemme 3.5.1.

$$\begin{aligned} \{h_m^{(1)}\} \leq_{st} \{h_m^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{h}_m^{(1)} = \sum_{n=m}^{+\infty} h_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} h_n^{(2)} = \bar{h}_m^{(2)} \\ \bar{h}_m^{(1)} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta^{(1)} d\bar{G}^{(1)}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^n \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta^{(1)} d\bar{G}^{(1)}(u) \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^n \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{n!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} \delta^{(2)} d\bar{G}^{(2)}(u) = \bar{h}_m^{(2)}. \quad (3.5.5)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.5.5), on considère la fonction suivant :

$$g_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n \exp\{-\lambda u\}}{n!} \exp\{-\delta u\} \delta \quad (3.5.6)$$

La dérivée par rapport à δ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n \exp\{-u(\lambda + \delta)\}}{n!} (1 - \delta u) \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} [g_1(u) g_2(u)], \quad u \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

telle que $g_1(u) = \frac{(\lambda u)^n \exp\{-u(\lambda + \delta)\}}{n!}$, est une fonction positive pour tout $u \in \mathbb{R}^+$. Pour que $\frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta}$ satisfait la condition $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, il faut que $g_2(u) = (1 - \delta u)$ soit négative:

$$1 - \delta u < 0.$$

Donc, la fonction $\frac{\partial g_m(u, \lambda, \delta)}{\partial \delta}$ est décroissante pour tout $\delta \in [\frac{1}{u}, +\infty[$, tel que $u \in [0, \frac{n}{\lambda + \delta}]$, et comme $g_m(u, \lambda, \delta)$ est une fonction croissante en u et $\bar{G}^{(1)} \leq_{st} \bar{G}^{(2)}$, alors à l'aide du théorème 2.2.1, donnée dans le Chapitre 2, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.7)$$

D'autre part, puisque la fonction $g_m(u, \lambda, \delta)$ est monotone par rapport à λ et δ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$, on a

$$\int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} g_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.8)$$

Par conséquent, des inégalités (3.5.7) et (3.5.8), l'inégalité (3.5.5) est vérifiée par transitivité. ■

Lemme 3.5.3 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs,

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } G^{(1)} \leq_v G^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v , on a :

$$\begin{aligned}
 \{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\} &\Leftrightarrow k_m \stackrel{=(1)}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{k}_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{k}_n^{(2)} \stackrel{=(2)}{=} k_m \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^l \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} dG^{(1)}(u) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^l \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} dG^{(2)}(u) \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u), \tag{3.5.9}
 \end{aligned}$$

avec

$$f_n(u, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}) = \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^l \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(i)}u\}. \tag{3.5.10}$$

La fonction $f_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante par rapport à λ et δ , alors la fonction définie par:

$$\bar{f}_m(u, \lambda, \delta) = \sum_{n=m}^{+\infty} f_n(u, \lambda, \delta) \text{ l'est aussi. D'autre part, on a}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \left[\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\
 &= \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right), \quad n \geq 2. \tag{3.5.11}
 \end{aligned}$$

On cherche la monotonie de la fonction $\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2}$. Pour $\lambda u \geq 1$, on a

$$\begin{cases} (\lambda u)^n \geq (\lambda u)^{n-2}, \forall n \geq 2, \\ (\lambda u)^{n-1} \geq (\lambda u)^{n-2}, \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.5.12}$$

De plus,

$$\frac{1}{(n-2)!} > \frac{1}{(n-1)!} > \frac{1}{n!}, \quad n \geq 2. \tag{3.5.13}$$

En utilisant les inégalités (3.5.12), on trouve que :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right),$$

en utilisant (3.5.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &\geq \sum_{n=m}^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} (\lambda u)^{n-2} \left(\frac{\lambda^2}{n!} - \frac{2\lambda(\lambda + \delta)}{n!} + \frac{(\lambda + \delta)^2}{n!} \right) \\ &\geq \delta^2 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^{n-2}}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq 0, \forall \lambda \geq 0, \delta \geq 0.$$

pour $\lambda u < 1$, on trouve:

$$\begin{cases} (\lambda u)^{n-1} > (\lambda u)^n, \forall n \geq 1, \\ (\lambda u)^{n-2} > (\lambda u)^n, \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \delta^2 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \geq 0.$$

Par conséquent, $\bar{f}_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante et convexe par rapport à la variable u .

D'après le Théorème 2.2.4, voir le Chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.15)$$

Et on obtient, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{f}_m(u, \lambda, \delta)$ par rapport à λ et δ , le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) dG^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{f}_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) dG^{(2)}(u). \quad (3.5.16)$$

Finalement, l'inégalité (3.5.9) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.5.15) et (3.5.16). ■

Lemme 3.5.4 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs,

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{-(1)} \leq_v \bar{G}^{-(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_v \{h_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Par définition de l'ordre convexe \leq_v , on a :

$$\begin{aligned} \{h_m^{(1)}\} \leq_v \{h_m^{(2)}\} &\Leftrightarrow \overset{=(1)}{h_m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{h}_n^{(1)} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{h}_n^{(2)} = \overset{=(2)}{h_m} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}u)^l \exp\{-\lambda^{(1)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(1)}u\} \delta d\bar{G}^{(1)}(u) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}u)^l \exp\{-\lambda^{(2)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(2)}u\} \delta d\bar{G}^{(2)}(u) \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(1)}(u) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\bar{G}^{(2)}(u), \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

avec

$$g_n(u, \lambda^{(i)}, \delta^{(i)}) = \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}u)^l \exp\{-\lambda^{(i)}u\}}{l!} \exp\{-\delta^{(i)}u\} \delta. \quad (3.5.18)$$

La fonction $g_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante par rapport à λ et δ , alors la fonction définie par:

$$\begin{aligned} \bar{g}_m(u, \lambda, \delta) &= \sum_{n=m}^{+\infty} g_n(u, \lambda, \delta) \text{ l'est aussi. D'autre part, on a} \\ \frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \delta \left[\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \right] \\ &= \delta \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\lambda^2 \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} - 2\lambda(\lambda + \delta) \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + \delta)^2 \frac{(\lambda u)^n}{n!} \right). \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

On cherche la monotonie de la fonction $\frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2}$, en suivant le même raisonnement que le lemme 3.4.3, on trouve

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_m(u, \lambda, \delta)}{\partial u^2} \geq \delta^3 \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} \geq 0.$$

Par conséquent, $g_m(u, \lambda, \delta)$ est croissante et convexe par rapport à la variable u .

D'après le Théorème 2.2.4, du Chapitre 2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(1)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.20)$$

Et grâce à la monotonie de la fonction $\bar{g}_m(u, \lambda, \delta)$ par rapport à λ et δ , on trouve que:

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(1)}, \delta^{(1)}) d\bar{G}^{(2)}(u) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_m(u, \lambda^{(2)}, \delta^{(2)}) d\bar{G}^{(2)}(u). \quad (3.5.21)$$

Finalement, l'inégalité (3.5.17) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.5.20) et (3.5.21). ■

Lemme 3.5.5 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs.

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{(1)} \leq_L \bar{G}^{(2)} \text{ alors } \{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Pour prouver que l'inégalité $\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\} \Leftrightarrow \tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.5.22)$$

par définition on a :

$$\begin{aligned}
 k(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} k_m z^m \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} z^m dG(u) \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u z)^m}{m!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} dG(u) \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp\{-u[(\lambda + \delta) - \lambda z]\} dG(u) \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp\{-u(\delta + \lambda(1 - z))\} dG(u) = \tilde{G}(\delta + \lambda(1 - z)).
 \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{k_m^{(1)}\} \leq_L \{k_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes :

$$k^{(1)}(z) \geq k^{(2)}(z).$$

De plus, on a

$$G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \Rightarrow \tilde{G}^{(1)}(s) \geq \tilde{G}^{(2)}(s), \forall s \geq 0.$$

En particulier, pour $s = \delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)$, on obtient

$$\tilde{G}^{(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)). \quad (3.5.23)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ impliquent l'inégalité suivante :

$$\tilde{G}^{(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{G}^{(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1 - z)). \quad (3.5.24)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5.22) découle des inégalités (3.5.23) et (3.5.24). ■

Lemme 3.5.6 Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs.

$$\text{Si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \text{ et } \bar{G}^{-(1)} \leq_L \bar{G}^{-(2)} \text{ alors } \{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}.$$

Preuve. Pour prouver que l'inégalité $\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$h^{(1)}(z) \geq h^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\delta \tilde{G}^{\sim(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \tilde{G}^{\sim(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence suivante :

$$\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\} \iff \delta \tilde{G}^{\sim(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \tilde{G}^{\sim(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.5.25)$$

par définition on a:

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} h_m z^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m}{m!} \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\} \delta z^m d\bar{G}(u) \\ &= \delta \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u z)^m}{m!} \exp\{-(\lambda + \delta)u\} d\bar{G}(u) \\ &= \delta \int_0^{+\infty} \exp\{-(\delta + \lambda(1-z))u\} d\bar{G}(u) = \delta \tilde{G}^{\sim}(\delta + \lambda(1-z)). \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{h_m^{(1)}\} \leq_L \{h_m^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir le résultat suivant, pour les fonctions génératrices correspondantes

De plus, on a

$$\bar{G}^{(1)} \leq_L \bar{G}^{(2)} \Rightarrow \delta \tilde{G}^{\sim(1)}(s) \geq \delta \tilde{G}^{\sim(2)}(s), \forall s \geq 0.$$

En particulier pour $s = \delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)$, on obtient

$$\delta \tilde{G}^{\sim(1)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \tilde{G}^{\sim(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.5.26)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ impliquent l'inégalité suivante :

$$\delta \tilde{G}^{\sim(2)}(\delta^{(1)} + \lambda^{(1)}(1-z)) \geq \delta \tilde{G}^{\sim(2)}(\delta^{(2)} + \lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.5.27)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5.25) découle des inégalités (3.5.26) et (3.5.27). ■

3.5.1 Monotonie de la chaîne de Markov induite

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite pour le système $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs sont données par la formule suivante:

$$P_{n,m} = \begin{cases} k_m + (1 - \delta_{0m})\theta h_{m-1} + (1 - \theta)h_m, & \text{si } n = 0 \text{ et } m \geq 1, \\ \frac{n\mu}{\lambda+n\mu} [k_0 + (1 - \theta) h_0], & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m = n - 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda+n\mu} [k_{m-n} + \theta h_{m-n-1} + (1 - \theta) h_{m-n}] \\ \quad + \frac{n\mu}{\lambda+n\mu} [k_{m-n+1} + \theta h_{m-n} + (1 - \theta) h_{m-n+1}], & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m \geq n - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5.28)$$

Avec

$$\begin{aligned} k_m &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\}}{m!} dG(u), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ h_m &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\}}{m!} \delta [1 - G(u)] du, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda u)^m \exp\{-\lambda u\} \exp\{-\delta u\}}{m!} \delta d\bar{G}(u). \end{aligned}$$

Et δ_{kn} est la fonction Delta de Kronecker, telle que

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Soit l'opérateur de transition τ de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $\tau_p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n p_{nm}.$$

Les deux Théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe

3.5.2 Monotonie de l'opérateur de transition

Théorème 3.5.1 *L'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$.*

Preuve. *Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante:*

$$\bar{p}_{n-1m} \leq \bar{p}_{nm}, \quad \forall n, m, \quad (3.5.29)$$

1^{er} cas:

On montre que

$$\bar{p}_{n-1m} \leq \bar{p}_{nm}, \quad \forall n = 0, m \geq 0,$$

Si $n = 0$ et $m \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} P_{nm} &= k_m + (1 - \delta_{0m})\theta h_{m-1} + (1 - \theta)h_m, \\ \bar{p}_{nm} &= \sum_{l \geq m} p_{nl} = \sum_{l \geq m} [k_m + (1 - \delta_{0l})\theta h_{l-1} + (1 - \theta)h_l] \\ &= \bar{k}_m + \theta \bar{h}_{m-1} + (1 - \theta)\bar{h}_m \\ &= \bar{k}_m + \theta \bar{h}_{m-1} + (1 - \theta)\bar{h}_m \\ &= \bar{k}_m + \theta (h_{m-1} + \bar{h}_m) + \bar{h}_m - \theta \bar{h}_m \\ &= \bar{k}_m + \theta h_{m-1} + \bar{h}_m. \end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue, on trouve

$$\bar{p}_{n-1m} = \sum_{l \geq m} \bar{p}_{n-1l} = \bar{k}_m + \theta h_{m-1} + \bar{h}_m. \quad (3.5.30)$$

Finalement, on trouve

$$\bar{p}_{n-1m} - \bar{p}_{nm} \geq 0,$$

2^{ème} cas: $n \geq 1$ et $m = n - 1$, on a

$$p_{nm} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} k_0 + \frac{n\mu(1 - \theta)}{\lambda + n\mu} h_0,$$

et

$$\begin{aligned}\bar{p}_{nm} &= \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}k_0 + \frac{n\mu(1-\theta)}{\lambda + n\mu}h_0, \\ \bar{p}_{n-1m} &= \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu}k_0 + \frac{(n-1)(1-\theta)\mu}{\lambda + (n-1)\mu}h_0\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\bar{p}_{nm} - \bar{p}_{n-1m} &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] k_0 + \left[\frac{n\mu(1-\theta)}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)(1-\theta)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] h_0 \\ &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] k_0 + \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] (1-\theta) h_0 \\ &= \left[\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] [k_0 + (1-\theta)h_0] \\ &= \frac{\lambda\mu}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} [k_0 + (1-\theta)h_0] \geq 0.\end{aligned}$$

3^{ème} cas: $n \geq 1$ et $m > n - 1$

$$\begin{aligned}p_{nm} &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}k_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}k_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}\theta h_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}(1-\theta)h_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\theta h_{m-n} \\ &\quad + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}(1-\theta)h_{m-n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_{nm} &= \sum_{l \geq m} p_{nl} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}\bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}\theta\bar{h}_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}(1-\theta)\bar{h}_{m-n} \\ &\quad + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\theta\bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}(1-\theta)\bar{h}_{m-n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}\bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu} \left[h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} \right] \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}(1-\theta)\bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\theta\bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}(1-\theta)\bar{h}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \left[k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} \right] + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \left[h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \right] \\ &+ \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}\theta \left[h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \right] + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu}(1-\theta)\bar{h}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda + n\mu\theta}{\lambda + n\mu}h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\bar{p}_{nm} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu}k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu}h_{m-n-1} + \frac{\lambda + n\mu\theta}{\lambda + n\mu}h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1}. \quad (3.5.31)$$

Avec un raisonnement analogue, on trouve

$$\bar{p}_{n-1m} = \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+2} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n} + \frac{\lambda + (n-1)\mu\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n+1} + \bar{h}_{m-n+2}.$$

et

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm} - \bar{p}_{n-1m} &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \bar{k}_{m-n+1} - \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} \\ &+ \frac{\lambda + n\mu\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} - \frac{\lambda\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n} - \frac{\lambda + (n-1)\mu\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n+1} - \bar{h}_{m-n+2} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + k_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n+2} - \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n+1} - \bar{k}_{m-n+2} \\ &+ \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} + \frac{\lambda + n\mu\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + h_{m-n+1} + \bar{h}_{m-n+2} \\ &- \frac{\lambda\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n} - \frac{\lambda + (n-1)\mu\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n+1} - \bar{h}_{m-n+2} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + k_{m-n+1} - \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} \\ &+ \frac{\lambda + n\mu\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n} + h_{m-n+1} - \frac{\lambda\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n} - \frac{\lambda + (n-1)\mu\theta}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} k_{m-n} + \left[\frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] k_{m-n+1} + \frac{\lambda\theta}{\lambda + n\mu} h_{m-n-1} \\ &+ \left[\frac{\lambda^2(1-\theta) + \lambda\mu(n-1) + n(n-1)\mu^2\theta}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)} \right] h_{m-n} \\ &+ \left[\frac{(n-1)(1-\theta)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \right] h_{m-n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.5.29) est vérifiée pour tout n et m .

En conclusion, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre " \leq_{st} ". ■

Théorème 3.5.2 L'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe.

C'est-à-dire, pour deux distributions quelconque $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante: $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$.

Preuve. Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{p}_{nm} \leq \bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m}, \quad \forall n, m, \quad (3.5.32)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{nm} &= \sum_{l \geq m} \bar{p}_{nl} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n} \\
 &+ \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n+1} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \left[\bar{k}_{m-n} - \bar{k}_{m-n} \right] + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \left[\bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} \right] + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n} \\
 &+ \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \left[\bar{h}_{m-n} - \bar{h}_{m-n} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n} \\
 &+ \frac{\lambda(1 - \theta) + n\mu\theta}{\lambda + n\mu} \bar{h}_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (k_1 - \theta) \bar{h}_{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n} \\
 &= \bar{k}_{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} - \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{n-1m} &= \bar{k}_{m-n+1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} \theta \bar{h}_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \\
 &- \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n+1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{n+1m} &= \bar{k}_{m-n-1} - \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-1} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\mu} \theta \bar{h}_{m-n-2} + \bar{h}_{m-n-1} \\
 &- \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n-1},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m} - 2\bar{p}_{nm} &= \bar{k}_{m-n-1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1} + \bar{k}_{m-n-1} - \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} \bar{k}_{m-n-1} \\
 &- 2\bar{k}_{m-n} + 2\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\mu} \theta \bar{h}_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \\
 &- \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\mu} \theta \bar{h}_{m-n-2} + \bar{h}_{m-n-1} \\
 &- \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n-1} - 2\frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \bar{h}_{m-n-1} - 2\bar{h}_{m-n} \\
 &+ 2\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1 - \theta) \bar{h}_{m-n}
 \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m} - 2\bar{p}_{nm} &= \bar{k}_{m-n+1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} \left[\bar{k}_{m-n} - k_{m-n} \right] + \left[\bar{k}_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n} + \bar{k}_{m-n} \right] \\
 &\quad - \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} \left[k_{m-n-1} + \bar{k}_{m-n} \right] - 2\bar{k}_{m-n} + 2\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \bar{k}_{m-n} + \bar{h}_{m-n+1} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + (n-1)\mu} \theta \bar{h}_{m-n} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} (1-\theta) \left[\bar{h}_{m-n} - h_{m-n} \right] \\
 &\quad + \left[\bar{h}_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} + \bar{h}_{m-n} \right] + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\mu} \theta \left[h_{m-n-2} + \bar{h}_{m-n-1} \right] \\
 &\quad - \frac{(n+1)\mu}{\lambda + (n+1)\mu} (1-\theta) \left[h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} \right] - 2\bar{h}_{m-n} \\
 &\quad - 2\frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \theta \left[h_{m-n-1} + \bar{h}_{m-n} \right] + 2\frac{n\mu}{\lambda + n\mu} (1-\theta) \bar{h}_{m-n},
 \end{aligned}$$

finalemt, on obtient

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m} - 2\bar{p}_{nm} &= \frac{(n-1)\mu}{\lambda + (n-1)\mu} k_{m-n} + \left[\frac{\lambda(\lambda + n\mu)}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] k_{m-n-1} \\
 &\quad + \left[\frac{2\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] \bar{k}_{m-n} \\
 &\quad + \frac{\lambda\theta}{\lambda + (n+1)\mu} h_{m-n-2} + \frac{(n-1)\mu(1-\theta)}{\lambda + (n-1)\mu} h_{m-n} \\
 &\quad + \left[\frac{\lambda^2(1-\theta) + (n-\theta)\lambda\mu + n(n+1)\mu^2\theta}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] h_{m-n-1} \\
 &\quad + \left[\frac{2\mu^2}{(\lambda + n\mu)(\lambda + (n-1)\mu)(\lambda + (n+1)\mu)} \right] \bar{h}_{m-n} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{p}_{n-1m} + \bar{p}_{n+1m} - 2\bar{p}_{nm} \geq 0, \quad \forall m \geq 0, \quad n \geq 1$$

Alors, l'opérateur de transition τ est monotone par rapport à l'ordre convexe. ■

Maintenant, on considère Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs ayant les paramètres suivants : $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement. Notons par $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de chaque système.

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.5.3 *si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_{st} \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, pour une distribution quelconque p , on a $\tau^{(1)}p \leq_{st} \tau^{(2)}p$.*

Preuve. *D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique,*

$$\bar{p}_{nm}^{-(1)} \leq \bar{p}_{nm}^{-(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m. \quad (3.5.33)$$

Ce qui revient à montrer:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm}^{-(1)} &= k_{m-n}^{-(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \theta^{(1)} h_{m-n-1}^{(1)} \\ &\quad + h_{m-n}^{-(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} (1 - \theta^{(1)}) h_{m-n}^{(1)} \\ &\leq k_{m-n}^{-(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{(2)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} h_{m-n-1}^{(2)} \\ &\quad + h_{m-n}^{-(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n}^{(2)} = \bar{p}_{nm}^{-(2)} \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

D'après le Lemme 3.5.1, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_{st} \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \quad (3.5.35)$$

D'autre part,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ alors } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}} \text{ ou } \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \geq \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}}. \quad (3.5.36)$$

En outre, du fait que la fonction $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , l'inégalité suivante a lieu :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad (3.5.37)$$

De plus, $\theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}$, donc

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \theta^{(1)} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)}. \quad (3.5.38)$$

De même, la fonction $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ est croissante alors:

$$\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \geq \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}}, \quad (3.5.39)$$

de plus,

$$\theta^{(1)} \leq \theta^{(2)} \text{ implique que } (1 - \theta^{(1)}) \geq (1 - \theta^{(2)}),$$

donc

$$-\frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} (1 - \theta^{(1)}) \leq -\frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}). \quad (3.5.40)$$

Des inégalités (3.5.38), (3.5.40) et (3.5.35) on obtient :

$$\begin{aligned} & k_{m-n}^{-(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \theta^{(1)} h_{m-n-1}^{(1)} \\ & + h_{m-n}^{-(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} (1 - \theta^{(1)}) h_{m-n}^{(1)} \\ & \leq k_{m-n}^{-(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} h_{m-n-1}^{(1)} \\ & + h_{m-n}^{-(1)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n}^{(1)} \\ & = \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{-(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n+1}^{-(1)} \\ & + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} h_{m-n-1}^{-(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n}^{-(1)} \\ & + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} h_{m-n}^{-(1)} + \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n+1}^{-(1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $G^{(1)}(u) \leq_{st} G^{(2)}(u)$ alors l'inégalité (3.5.33) est vérifiée. ■

Théorème 3.5.4 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}$, $\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)}$ et $G^{(1)}(u) \leq_v G^{(2)}(u)$ alors $\tau^{(1)} \leq_v \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, que pour une distribution quelconque p , on a $\tau^{(1)}p \leq_v \tau^{(2)}p$.

Preuve. D'après le Théorème 2.4.2, nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre convexe,

$$\overset{=}{P}_{nm}^{(1)} \leq \overset{=}{P}_{nm}^{(2)}, \quad \forall 0 \leq n \leq m.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \overset{=}{P}_{nm}^{(1)} &= \overset{=}{k}_{m-n}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \overset{=}{k}_{m-n}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \theta^{(1)} \overset{=}{h}_{m-n-1}^{(1)} \\ &+ \overset{=}{h}_{m-n}^{(1)} - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} (1 - \theta^{(1)}) \overset{=}{h}_{m-n}^{(1)} \\ &\leq \overset{=}{k}_{m-n}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \overset{=}{k}_{m-n}^{(2)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} \overset{=}{h}_{m-n-1}^{(2)} \end{aligned}$$

$$+h_{m-n}^{(2)} - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n}^{-(2)} = P_{nm}^{(2)}. \quad (3.5.41)$$

En effet, d'après le Lemme 3.5.3, on a :

$$\{k_m^{(1)}\} \leq_v \{k_m^{(2)}\}, \quad \forall m \geq 0. \quad (3.5.42)$$

D'après les inégalités (3.5.37) et (3.5.40), l'inégalité(3.5.42) on obtient le résultat final suivant:

$$\begin{aligned} & - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} k_{m-n}^{-(1)} + k_{m-n}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} \theta^{(1)} h_{m-n-1}^{-(1)} \\ & - \frac{n\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + n\mu^{(1)}} (1 - \theta^{(1)}) h_{m-n}^{-(1)} + h_{m-n}^{(1)} \\ & \leq - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} k_{m-n}^{-(2)} + k_{m-n}^{(2)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} \theta^{(2)} h_{m-n-1}^{-(2)} \\ & - \frac{n\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + n\mu^{(2)}} (1 - \theta^{(2)}) h_{m-n}^{-(2)} + h_{m-n}^{(2)}. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur τ est monotone par rapport a l'ordre convexe. ■

3.6 Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

Les deux Théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs, par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe.

Théorème 3.6.1 *On considère Σ_1, Σ_2 deux systèmes de files d'attente M/G/1 avec rappels et clients négatifs, ayant les paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \theta^{(1)}, \delta^{(1)}, G^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \theta^{(2)}, \delta^{(2)}, G^{(2)}$ respectivement, et soient $\pi_i^{(1)}, \pi_i^{(2)}$, les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivante ont lieu*

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \theta^{(1)} \leq \theta^{(2)} \text{ et } G^{(1)}(u) \leq_w G^{(2)}(u),$$

alors, on a aussi l'inégalité suivante sur la distribution stationnaire

$$\{\pi_i^{(1)}\} \leq_w \{\pi_i^{(2)}\}, \quad \text{où } w = st \text{ (ou } v \text{)}.$$

3.6. Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

Preuve. D'après le Théorème 3.5.4, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $\theta^{(1)} \leq \theta^{(2)}$ et $G^{(1)} \leq_w G^{(2)}$ implique $\tau^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}$. C'est-à-dire, pour une distribution quelconque p , on a l'inégalité suivante :

$$\tau^{(1)}p \leq_w \tau^{(2)}p. \quad (3.6.1)$$

Par hypothèse, on a $G^{(1)} \leq_w G^{(2)}$ alors d'après le Théorème 3.5.2 (resp. Le Théorème 3.5.4), l'opérateur τ associé à la chaîne de Markov incluse, du deuxième système, est monotone. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}$, $p_2^{(2)}$ telle que $p_1^{(2)} \leq_w p_2^{(2)}$, on a

$$\tau^{(2)}p_1^{(2)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.6.2)$$

Cependant, de l'inégalité (3.6.1), on obtient

$$\tau^{(1)}p_1^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(1)}. \quad (3.6.3)$$

Il existe une probabilité $p_2^{(1)}$ telle qu'on ait l'inégalité suivante

$$\tau^{(2)}p_1^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(2)}. \quad (3.6.4)$$

En combinant les inégalités (3.6.3) et (3.6.4), on obtient le résultat suivant

$$\tau^{(1)}p_1^{(1)} \leq_w \tau^{(2)}p_2^{(2)}, \quad (3.6.5)$$

pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$, $p^{(2)}$.

L'inégalité (3.6.5), peut être réécrite de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}p_l^{(1)} &= P\left(Z_l^{(1)} = i\right) \\ &\leq_w P\left(Z_l^{(2)} = i\right) = \tau^{(2)}p_l^{(2)}, \end{aligned}$$

quand $l \rightarrow \infty$, on a $\left\{\pi_i^{(1)}\right\} \leq_w \left\{\pi_i^{(2)}\right\}$, pour $i \in \mathbb{N}$. ■

Théorème 3.6.2 Si pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, la distribution de temps de service est NBUE (New Better than Used Expectation), (respectivement NWUE-New Worse than Used in Expectation), alors la distribution stationnaire du

nombre de clients dans ce système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et clients négatifs.

Preuve. Considérons un système de files d'attente $M/M/1$ avec rappels et clients négatifs, du serveur avec les mêmes paramètres : taux d'arrivée λ , taux de rappels μ , la probabilité de rejoindre l'orbite θ , temps moyen de service β_1 que le système $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, mais avec un temps de service exponentiellement distribué avec de taux $\theta = \frac{1}{\beta_1}$.

$$G^*(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\beta_1}}, & \text{si } u \geq 0, \\ 0, & \text{si } u < 0. \end{cases} \quad (3.6.6)$$

D'après la proposition 2.4.1, si $G(u)$ est NBUE (respectivement NWUE), alors

$$G(u) \leq_v G^*(u). \quad (3.6.7)$$

Et comme $G(u) \leq_v G^*(u)$, alors d'après le Théorème 3.6.1, on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et clients négatifs, est inférieure (respectivement supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et clients négatifs. ■

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons trouvé des conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un client dans deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, sont comparables et on a montré la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne Markov induite par rapport aux ordres stochastique et convexe. De plus, nous avons obtenu que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, est majorée (respectivement minorée) par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/M/1$ avec rappels et clients négatifs si la distribution de temps de service est NBUE (respectivement NWUE).

Conclusion générale

Le phénomène de répétition de demandes du service est étudié par la théorie de files d'attente avec rappels. Nous nous sommes intéressés aux modèles avec rappels et clients négatifs.

Nous avons aussi étudié quelques problèmes de comparabilité pour l'analyse du système $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, en utilisant la méthode de comparaison stochastique. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes.

Ceci nous a permis d'obtenir les conditions qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov induite.

Nous avons aussi établi des conditions sous lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires de deux chaînes de Markov incluses associées à deux systèmes $M/G/1$ avec rappels et clients négatifs, ayant la même structure mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe.

Parmi les perspectives de recherche citons:

- Extension de ce travail en ajoutant les vacances au serveur en appliquant la même méthode.
- Appliquer la méthode de comparaison stochastique pour étudier les propriétés de monotonie du notre modèle relativement à l'ordre de Laplace et concave.

Bibliographie

- [1] Aïssani. D and Aïssani. A (2005), Méthodes statistiques en fiabilité. Cours de Post Graduation "Statistiques des Processus Aléatoires", Université de Constantine
- [2] Artalejo. J. R and A. Gomez-Corall (1999), Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters, RAIRO perations Research 33,371-382
- [3] Artalejo. J. R (1999), A classical bibliography of research on retrial queues : progress in 1990-1999. Queueing Systems 7,187-211
- [4] Artalejo. J. R (1999), Accessible bibliography on retrial queue. Mathematical and Computer Modelling 30,1-6
- [5] Artalejo. J. R and Gomez-Correl. A (2008), Retrial queueing system : A computation approach. Berlin, Springer Edition
- [6] Artalejo. J. R and Gomez-Correl. A (1999), On a single server queue with negative arrivals and request repeated. Journal of Applied Probability 36,907-918.
- [7] Baynat. B (2000), Théorie des files d'attente, des chaîne de Markov aux réseaux à forme produit, Hermes Sciences Publications, Paris
- [8] Boualem. M, Aïssani. D and Djellab. N (2005), Bornes pour la distribution stationnaire de la file M/G/1 avec rappels et vacances, Actes du Colloque International COSI'05 (2^{ème} Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information), Béjaia, 558-570

-
- [9] Boualem. M and Aïssani. D (2006), Bornes stochastiques pour les caractéristiques du modèle M/G/1 avec rappels et vacances, Actes de la Conférence ROADEF.(7^{ème} Congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision), Lille, [http // www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme. html](http://www2.lifl.fr/ROADEF2006/programme.html)
- [10] Boualem. M and Aïssani. A (2004), Inégalités pour les systèmes de files d'attente avec rappels et vacances du serveur. Actes du Colloque International MSS (Modélisation Statistique et Stochastique), U.S.T.H.B.ISBN : 978-9947-0-173, Alger,52-57
- [11] Boualem. M, Djellab. N and Aïssani. D (2009), Stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues with vacations and constant retrial policy, International Journal MCM (Mathematical and Computer Modelling), Doi : 10.1016/j. mcm. 2009.03.009, ElsevierEd, 50.207-212
- [12] Boualem. M and Djellab. N and Assani. D (2012), Stochastic approximations and monotonicity of a single server feedback retrial queue, Mathematical Problems in Engineering, (2012), Article ID 536982, 1-13
- [13] Boualem. M, Djellab. N and Assani. D (2014), Stochastic bounds for a single server queue with general retrial times. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 40(1), 183-198
- [14] Boualem. M (2014), Insensitive bounds for the stationary distribution of a single server retrial queue with server subject to active breakdowns. Advances in Operations Research, 2014 Article ID 985453,1-12
- [15] Boucherie, R. J. and Boxma, O. J. (1996). The workload in the M/G/1 queue with work removal. Probability in the Engineering and Informational Sciences 10, 261–277.
- [16] Falin. G. I and Templeton. J. G. C(1997), Retrial Queues. Chapman and Hall, London
- [17] Gelenbe. E(1991), Queueing networks with negative and positive customers and product form solution, J. Appl. Probab. 28, 656-663

- [18] Genedenko. B, Beliaev. Y and Soloviev .A (1972), Méthodes Mathématiques en théorie de la fiabilité. Chapman and Hall, London
- [19] Gine. E, Houdre. C and Nualart. D(2003), Stochastic inequalities and applications, Progress in Probability 56, Birkhauser
- [20] Jain. G and K. Sigman (1996). Pollaczek-Khintchine formula for M/G/1 queue with desasters. Journal of Applied Probability 33,1191-1200
- [21] Khalil. Z and Falin. G (1994), Stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues, Oper. Res. Lett, 16,285-290
- [22] Kleinrock. L (1975), Queueing systems-Theory and Applications, John Wiley and Sons, Inc, 1
- [23] Krishna Kumar. B, Pavai Madheswari . S and Anantha Lakshmi. S. R (2013), An M/G/1 Bernoulli feedback retrial queueing system with negative customers Oper Res Int J 13:187-210 DOI 10.1007/s12351-011-0107-5
- [24] Müller. A and Stoyan. D(2002), Comparison methods for stochastic models and risk, John Wiley and Sons, LTD
- [25] Oukid. N and Aissani. A (2009), Bounds on busy period for queues with breakdowns, Advances and Applications in Statistics, 11, 137-156
- [26] Ruegg. A (1989), Processus Stochastiques, Presses Polytechniques Romandes
- [27] Shaked. M and Scha Ntikumar. J. G (1994), Stochastic orders and their applications. Probability and Mathematical Statistics