

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

*Université Abderrahmane Mira de Béjaïa*

*Faculté des Sciences Exactes*

*Département de Recherche Opérationnelle*



## Mémoire de Fin de Cycle

*En Vue d'Obtention du Diplôme Master 2 en Mathématiques Appliqués (M.A)*

*Option : Modélisation Mathématique et Technique de Décision (M.M.T.D)*

### Thème

---

**Approximation Fonctionnelle de Système d'Attente  
 $M/G/1/N$  avec Vacances Généralisées et Politique  
de Pannes  $NT$  'Startup' et 'Closedown'**

---

**Réalisé par :**

*Mr. CHOULAK Mourad*

*Mr. GHEDDOUCHE Fares*

**Encadré par :**

*Dr. ABBAS Karim*

**Soutenu devant le jury composé de :**

**Président :** M. BRAHMI Belkacem

**Examineur 1 :** Mme. HAMADOUCHE Naima

**Examineur 2 :** Mme. TAKHEDMIT Baya

**Invité :** M. OUAZINE Sofiane

**M.C.B** Université de Béjaïa

**M.C.B** Université de Béjaïa

**M.A.B** Université de Bouira

**Docteur** Université de Béjaïa

*Université de Béjaïa, Promotion : 2015/2016*

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

En premier lieu à mes parents, cher père et douce mère qui ont payé tout leurs vie d'amour, de sacrifices et de soutiens jusqu'à l'obtention de mon diplôme.

Chers parents, je vous remercie encore une fois d'avoir fait de moi un homme.

À mon cher frère Boubekeur et adorables soeurs, Leila, Lamia et en particulier la petite Nadjet.

À mes neveux : Ilyes, Ghilas et sans oublier ma nièce Rahil.

À mes cousins et cousines, mes oncles et tantes .

À mes chers amis en particulier : Lotfi, Abbas, Aimad, M<sup>d</sup>-Akli, Gigorta.

À mon binôme et sa famille.

À tous les étudiants de la *RO*.

À mes amis qui restent à mes côtés et souhaitent ma réussite.

À tous ceux qui j'ai oublié de citer.

Que le bon Dieu vous protège.

GHEDDOUCHE Fares.

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

À mon cher père

À ma douce mère.

À mon frère Elhadi.

À ma fiancée.

À mes tantes et oncles.

À mes cousins et cousines en particulier : Ayoub, Amina, Mohamed, Sofiane, Walid.

À mon binôme et sa famille.

À mes chers amis en particulier : Badis, Idir, Salah, Mehdi, Nazim, Lotfi, Anis.

À tous les étudiants de la *RO*.

À tous ceux qui j'ai oublié de citer.

CHOULAK Mourad.

# Remerciements

Nous aimerions remercier avant tout, **Dieu** Clément et Miséricordieux le Tout-Puissant, de nous avoir donné la force et la puissance pour pouvoir mener ce travail à terme.

Nous tenons à remercier le **Dr. ABBAS Karim**, notre promoteur pour ses précieux conseils et orientations tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions le **Dr. BRAHMI Belkacem**, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury.

Nous adressons nos vifs remerciements à **Mme. HAMADOUCHE Naima**, et **Mme. TAKHEDMIT Baya**, pour avoir accepté de juger ce travail.

Nous remercions le **Dr. OUAZINE Sofiane**, qui nous a fait l'honneur d'accepter notre invitation.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les files d'attente</b>	<b>3</b>
1.1 Processus stochastiques . . . . .	3
1.1.1 Chaînes de Markov . . . . .	4
1.1.2 Processus de Poisson . . . . .	5
1.2 Analyse des phénomènes d'attente . . . . .	7
1.2.1 Modèles Markoviens . . . . .	7
1.2.2 Modèles non Markoviens . . . . .	7
1.2.3 Représentation d'un système d'attente . . . . .	8
1.2.4 Classification des systèmes d'attente . . . . .	9
1.2.5 Lien avec les processus stochastiques . . . . .	9
1.2.6 La discipline de la file . . . . .	10
1.2.7 La notation de Kendall . . . . .	10
1.3 Caractéristiques d'un système d'attente . . . . .	11
1.4 Systèmes classiques de files d'attente . . . . .	11
1.4.1 Système $M/M/1$ . . . . .	11
1.4.2 Système $M/G/1$ . . . . .	13
1.4.3 Système d'attente $M/D/1/\infty$ . . . . .	16
1.5 Conclusion . . . . .	17
<b>2 Systèmes d'Attente avec Vacances et Serveur non fiable</b>	<b>18</b>
2.1 Les systèmes d'attente à interruptions de service . . . . .	18
2.2 Les systèmes d'attente avec pannes du serveur . . . . .	19
2.3 Les systèmes d'attente avec vacances . . . . .	19
2.3.1 Politique de vacances . . . . .	19
2.3.2 Propriété de décomposition stochastique des modèles avec vacances .	20

2.4	Système à serveur non fiable . . . . .	22
2.4.1	Système $M/M/1$ à serveur non fiable . . . . .	22
2.4.2	Système $M/G/1$ à serveur non fiable . . . . .	23
2.5	Synthèse bibliographique sur les systèmes d'attente avec vacances . . . . .	26
2.5.1	Système sous la T-règle de contrôle . . . . .	26
2.5.2	Systèmes sous la N-règle de contrôle . . . . .	27
2.5.3	Systèmes sous la N-règle de contrôle à vacation générale . . . . .	27
2.5.4	Files d'attente muni d'une règle de contrôle et d'un temps de relance général . . . . .	27
2.5.5	Files d'attente muni d'une règle de contrôle combinée $N$ et $T$ . . . . .	28
2.6	Conclusion . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov</b>	<b>30</b>
3.1	Rappels et notions . . . . .	30
3.1.1	Formules de Taylor . . . . .	32
3.1.2	Analyse du reste de développement . . . . .	32
3.2	Développements en séries de Taylor pour les chaînes de Markov . . . . .	34
3.2.1	Dérivées successives de la distribution stationnaire . . . . .	34
3.2.2	Matrice fondamentale d'une chaîne de Markov . . . . .	35
3.3	Conclusion . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Système <math>M/G/1</math> à serveur non fiable avec vacances généralisées</b>	<b>41</b>
4.1	Description et supposition du modèle . . . . .	42
4.2	Analyse du système . . . . .	43
4.2.1	La chaîne de Markov induite et matrice de transition . . . . .	44
4.2.2	Régime stationnaire et fonction génératrice . . . . .	45
4.3	Analyse du modèle d'attente $M/G/1/N$ . . . . .	47
4.4	Conclusion . . . . .	59
	<b>Conclusion générale</b>	<b>60</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>i</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>iii</b>

# Liste des tableaux

4.1	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1/5$ avec vacances et politique de panne $NT$ . . . . .	49
4.2	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1/5$ avec vacances et politique de panne $NT$ . . . . .	50
4.3	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/5$ avec vacances et politique de pannes $NT$ . . . . .	51
4.4	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E/1/5$ avec vacances et politique de pannes $NT$ . . . . .	52

# Table des figures

1.1	Représentation d'un système d'attente . . . . .	9
1.2	Modèle de file d'attente $M/D/1$ . . . . .	16
4.1	Probabilité de blocage en fonction de la capacité de la file $N$ . . . . .	53
4.2	Probabilité de blocage en fonction de l'intensité du trafic $\rho$ . . . . .	54
4.3	Probabilité de blocage en fonction de l'intensité du trafic $\rho$ . . . . .	54
4.4	Nombre moyen de clients dans le système en fonction de perturbation $\Delta$ . . .	55
4.5	Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la capacité $N$ . . . .	56
4.6	Temps moyen d'attente dans le système en fonction de $\Delta$ . . . . .	56
4.7	Temps moyen d'attente dans le système par rapport à la capacité $N$ . . . . .	57
4.8	Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la capacité $N$ et $\Delta$ de la file $M/M/1/N$ . . . . .	57
4.9	Probabilité de blocage par rapport à la capacité $N$ et $\Delta$ de la file $M/M/1/N$ .	58

# Introduction générale

Les origines du formalisme des files d'attente datent du début du XXème siècle et principalement des travaux de deux mathématiciens : le mathématicien danois Erlang avec ses travaux sur les réseaux téléphoniques et le russe Markov avec la création des modèles markoviens. C'est en 1909 que les bases de la théorie des files d'attente sont lancées, grâce à l'article du mathématicien danois Erlang "The theory of probabilities and telephone conversations". Les premiers résultats sont variés : Erlang observe le caractère poissonnien des arrivées des appels à un central téléphonique, et le caractère exponentiel des durées des appels ; il réussit à calculer de manière relativement simple la probabilité d'avoir un appel rejeté. La notion d'équilibre stationnaire d'un système d'attente est introduite pour la première fois.

Depuis les travaux de ce pionnier, les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outils puissants pour l'analyse et l'optimisation des performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques, les réseaux de transmission et les systèmes de transports, etc. En outre, l'analyse stochastique donne une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de file d'attente.

Peu de systèmes et réseaux de files d'attente ont une solution simple ou des résultats analytiques exploitables. Des solutions ont pu être obtenues pour certains cas particulier de systèmes de files d'attente. C'est pour cela, il est important de développer des méthodes d'approximation pour calculer numériquement les mesures de performance de tels systèmes. Parmi les méthodes les plus rencontrés en littérature, on peut citer celle de développement en série de Taylor des chaînes de Markov. Cette méthode générale se repose sur le principe de l'analyse de perturbation, qui consiste à étudier l'impact de la variabilité des paramètres du modèle sur la variabilité de sortie [30].

L'objet assigné à ce mémoire est d'appliquer la méthode des développements en séries de Taylor, pour l'analyse des performances du système  $M/G/1/N$  avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$ . Cette analyse cadrera aussi la sensibilité des différentes mesures de performance par rapport au paramètre perturbé.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres, une conclusion générale, une bibliographie et deux annexes. Dans le premier chapitre, nous présentons quelques rappels sur les systèmes de files d'attente classiques tout en définissant les modèles Markoviens et non Markoviens.

Le deuxième chapitre comprend une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec vacance et interruption de services, en particulier le modèle  $M/G/1$ . Plusieurs politiques de vacances et de pannes sont introduites.

Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques généralités sur les développements en séries de Taylor. Ce chapitre sera également consacré à établir les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire. Celles-ci sont obtenues en fonction de la matrice fondamentale de la chaîne en question. La présentation de ces résultats théoriques, nous permettra d'aborder l'application de cette approche au modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$ .

Le dernier chapitre consacré à la description détaillée du modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$  et à l'application de la méthode des développements en séries de Taylor sur ce dernier. Une analyse de sensibilité de certaines mesures de performance du modèle à étudier sera considérée tels que la probabilité de blocage, le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de service dans le système, où le processus du temps d'achèvement de service sera perturbé. Cette analyse sera supportée par plusieurs exemples numériques.

Le travail s'achève par une conclusion générale mettant l'accent sur les perspectives et les directions de recherches induites par les résultats obtenus dans ce travail. En annexes, nous présentons d'une manière assez détaillée toutes les procédures associées aux algorithmes que nous avons développés dans le cadre de ce travail.

# Chapitre 1

## Généralités sur les files d'attente

### Introduction

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie quotidienne. Ce phénomène se manifeste dans différentes situations : optimisation des stocks (gestion à flux tendu), gestion des avions au décollage ou à l'atterrissage, attente des clients à un guichet, ou bien encore traitement informatique de données par un serveur, etc. Dans l'ensemble, on s'intéresse essentiellement à deux grandeurs : le nombre de clients dans le système, et le temps passé par un client dans le système. Ce dernier se décompose en un temps d'attente et un temps de service.

Dans ce présent chapitre, nous introduisons les concepts généraux concernant les systèmes de files d'attentes et les processus aléatoires. Enfin nous donnerons quelques concepts et caractéristiques des systèmes de file d'attente, tout en abordant les files d'attentes Markoviennes et non Markoviennes.

### 1.1 Processus stochastiques

[17] Un processus stochastique  $\{X(t); t \in T\}$  est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire, à chaque instant  $t \in T$ .  $X(t)$  est donc une variable aléatoire.

Un processus stochastique peut être considéré comme une famille de variables généralement non indépendantes. L'ensemble des temps  $T$  peut être discret ou continu.  $X(t)$  définit l'état du processus à un instant donné  $t$ . L'ensemble noté  $S$  des valeurs que peut prendre le pro-

cessus à chaque instant est appelé espace d'états et peut, de même que  $T$ , être discret (fini ou infini) ou continu. En fonction des valeurs possibles de  $T$  et  $S$ , on classe les processus stochastiques de la façon suivante :

- processus à temps discret et à espace d'état discret ;
- processus à temps continu et à espace d'état discret ;
- processus à temps discret et à espace d'état continu ;
- processus à temps continu et à espace d'état continu.

### 1.1.1 Chaînes de Markov

[23] Une chaîne de Markov est une classe de processus aléatoire à temps discret qui permet une description mathématique de nombreux phénomènes aléatoire, rencontrés dans la pratique.

**Définition 1.1.1.** Un processus stochastique  $X = (X_n, n = 0, 1, \dots)$  dont l'espace des états  $E$  est fini ou infini dénombrable est une **chaîne de Markov** si pour tout  $k = \overline{0, n-1}$ ,  $i_k \in E$ ,  $(i, j) \in E \times E$  on a :

$$P_{ij}(n) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i]. \quad (1.1)$$

Le nombre réel  $P_{ij}(n)$  est alors appelé, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , probabilité de transition de la chaîne  $X$  à l'instant  $n$  de l'état  $i$  vers l'état  $j$ .

**Remarque 1.1.1.**

- (i) L'équation (1.1) est appelée "Propriété de Markov". Elle signifie que le futur est indépendant du passé et ne dépend donc que du présent.
- (ii) Si  $X$  est une chaîne de Markov à espace des états  $E$  telle que :

$$\forall n \geq 0, \forall (i, j) \in E \times E : \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j / X_0 = i].$$

Alors, la chaîne  $X$  est dite homogène dans le temps ou stationnaire.

- (iii) On vérifie que  $\forall (i, j) \in E \times E : P_{ij} \geq 0$  et  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$ . Ainsi, la matrice  $P = (P_{ij})_{i, j \in E}$  est dite matrice de transition à une étape de la chaîne de Markov homogène  $X$ .

**Définition 1.1.2.** Soit  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace continu  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Si pour tout  $x \in S, n \geq 1, y_k \in S$  avec  $k = \overline{0, n}$ , on a :

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq x / \xi_0 = y_0; \xi_1 = y_1; \dots; \xi_{n-1} = y_{n-1}) = \mathbb{P}(\xi_n \leq x / \xi_{n-1} = y_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors,  $\xi = \{\xi_i\}$  forment une chaîne de Markov à espace d'états continu  $S$ .

### 1.1.2 Processus de Poisson

Une chaîne à temps continu et espace d'état discret  $\{N(t)\}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si et seulement si :

1. Le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  est homogène dans le temps :

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \mathbb{P}(N(t) = k) = P_k(t), \forall s > 0, \forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  est à accroissement indépendant :

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k; N(s) = j) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k)\mathbb{P}(N(s) = j) = P_k(t)P_j(s).$$

3. De plus, on a :

$$P_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & , k \geq 2; \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & , k = 1; \\ 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & , k = 0. \end{cases}$$

Si le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  satisfait aux conditions citées ci-dessus, alors :

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

### Rappels

**Définition 1.1.3 :** *La loi de Poisson*

La loi de Poisson est une loi de probabilité qui s'applique aux événements rares : contrôles de qualité, probabilités de défaut de crédit, accidents...

La distribution de Poisson est construite avec un seul paramètre,  $\lambda$ , qui est à la fois la moyenne et la variance. On peut présenter cette distribution comme étant une approximation d'une loi binomiale lorsque l'effectif  $n$  tend vers l'infini et la probabilité d'occurrence  $p$  tend vers zéro.

La variable aléatoire  $X$  prend des valeurs positives entières  $k$ , telle que :

$$P(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = \lambda.$$

**Définition 1.1.4 :** *La loi Exponentielle*

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement.

Plus formellement, soit  $X$  une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène, d'espérance mathématique  $\mathbb{E}[X]$ .

Alors, la densité de probabilité de  $X$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0; \\ \frac{1}{\mathbb{E}[X]} e^{-\frac{t}{\mathbb{E}[X]}} & , t \geq 0. \end{cases}$$

La fonction de répartition est donné par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{t}{\mathbb{E}[X]}} & , t \geq 0. \end{cases}$$

**Définition 1.1.5 :** *La loi d'Erlang*

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi d'Erlang d'ordre  $k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) si elle est la somme de  $k$  variable aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_k$  et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . La densité de probabilité d'une Erlang d'ordre  $k$  est donnée par :

$$f(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

La fonction de répartition est ainsi donnée comme suit :

$$F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $k$  sont appelés respectivement paramètre d'échelle et de forme. pour cette distribution, nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{k}{\lambda}, \quad \sigma^2[X] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

**Définition 1.1.6 :** *La loi Hyper-Exponentielle*

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  réels positifs différents. Une variable aléatoire  $X$  continue a valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  suit une loi hyper-exponentielle d'ordre  $n$  et de paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  si sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} 1_{\mathbb{R}^+}(t),$$

où

$$a_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

## 1.2 Analyse des phénomènes d'attente

Le modèle général d'un système d'attente est interprété comme suit : des "clients" arrivent à un certain endroit et réclament un certain service. Les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires. Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée.

### 1.2.1 Modèles Markoviens

Les modèles markovien caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . L'évolution temporelle du processus markovien est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

### 1.2.2 Modèles non Markoviens

En l'absence de l'exponentialité ou lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien.

La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate, voire impossible ; on essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

- **Méthode des étapes d'Erlang** : Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformation de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étape.
- **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Élaborée par Kendall, et souvent utilisée, elle consiste à choisir une suite d'instants  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  (déterministes ou aléatoires) tels que la chaîne induite  $\{N_n, n \geq 0\}$ , où  $N_n = N(n)$ , est Markovienne et homogène.
- **Méthode des variables supplémentaires** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus  $\{N(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n), t \geq 0\}$ . Les variables  $A(t_k)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sont dites supplémentaires.
- **Méthode des événements fictifs** : Le principe est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.
- **Simulation** : C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel effectué sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant les lois gouvernant le système.

### 1.2.3 Représentation d'un système d'attente

Un système d'attente est composé d'un certain nombre (fini ou infini) de places d'attentes d'un ou plusieurs serveurs, les clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et enfin quittent le système. Cette situation est illustrée en Figure 1.1.

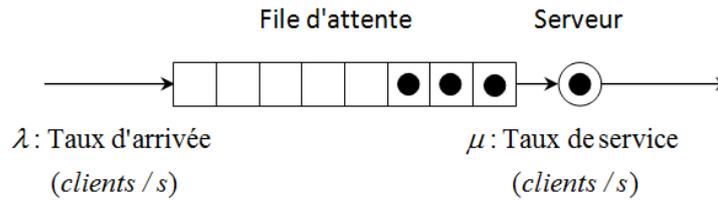


FIGURE 1.1 – Représentation d'un système d'attente

### 1.2.4 Classification des systèmes d'attente

Pour décrire une file d'attente, on doit donc se donner les éléments suivants [31] :

- **Processus d'arrivée** : Les clients arrivent au sein du système en décrivant un processus déterminé, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- **Processus de service** : La deuxième composante d'un système de files d'attente est la quantité de service demandée par un client, qui est définie par la distribution du temps aléatoire de service.
- **Nombre de serveurs** : Le nombre  $m$  de stations de service qui sont montées en parallèle.
- **Capacité  $N$  du système** : Si  $N \leq \infty$ , la file d'attente ne peut dépasser une longueur de  $(N - m)$  unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.
- **Discipline de service** : Une fois que le serveur devient libre, il choisit un client de la file suivant une politique ou discipline adoptée au sein du système.

### 1.2.5 Lien avec les processus stochastiques

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée de telle sorte à ce qu'il caractérise l'état du système. Le processus souvent considéré est  $(X(t))_{t \geq 0}$  : "nombre de clients se trouvant dans le système à l'instant  $t$ ". En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer :

- **Le régime transitoire** du processus stochastique  $X(t)$  ;  $t \geq 0$  défini par les probabilités d'état  $p_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$ . Les fonctions  $p_n(t)$  dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

- **Le régime stationnaire** du processus stochastique, défini par :

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \mathbb{P}(X = n); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 1.2.6 La discipline de la file

La *discipline de la file*, ou *discipline de service*, est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder à la ressource modélisée par le serveur. Les disciplines de service classiques, ainsi que leurs acronymes, sont :

- **FIFO** : acronyme anglais (*First In First Out*) : le premier arrivé, le premier servi ;
- **LIFO** : acronyme anglais (*Last In First Out*) : le premier arrivé, le dernier servi ;
- **RAND** : selection au hasard (aucune priorité), on y fait recourt lorsqu'il n'y a aucun critère pour ordonner les arrivées ;
- **Prioritaire relative** : un client accède au service selon sa priorité, de la plus forte à la plus faible ;
- **Prioritaire absolue** : le client dont le service est interrompu est remis en tête de la file.

### 1.2.7 La notation de Kendall

La notation suivante, introduite par Kendall et reprise par de nombreux auteurs, permet de ramener la description textuelle des différents éléments constituant une file d'attente simple à une formule symbolique.

Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles :

$$A/B/s/N/M/D.$$

La signification de chacun de ces symboles est [31] :

- A : nature du processus des arrivées ;
- B : nature du processus de service ;
- s : nombre de serveurs ;
- N : capacité d'accueil de la file d'attente ;
- M : taille de la population ;
- D : discipline de la file.

Les Symboles, les plus courants pour les arrivées et les services :

- M : loi Exponentielle (memory-less) ;
- E : loi d'Erlang ;

- $\Gamma$  : loi Gamma ;
- $D$  : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant) ;
- $G$  : loi Générale (quelconque).

La forme abrégée :  $A/B/s$  signifie que  $N$  et  $M$  sont infinies.

### 1.3 Caractéristiques d'un système d'attente

La théorie des systèmes d'attente a comme objectif d'en étudier les structures et de calculer les valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances d'un tel système à partir de la distribution stationnaire du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$  [31] :

- $L_s = \mathbb{E}[X]$  : nombre moyen de clients dans le système ;
- $L_q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- $W_s$  : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- $W_q$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file ;
- $\rho$  : taux d'utilisation de chaque serveur ;
- $1/\mu$  : durée moyenne de service ;
- $1/\lambda$  : intervalle de temps séparant deux arrivées consécutives.

Ces valeurs permettent de juger le comportement opérationnel d'un système d'attente. Elles sont liées entre elles par les relations suivantes :

$$L_s = \lambda W_s. \quad (1.2)$$

$$L_q = \lambda W_q. \quad (1.3)$$

Les formules (1.2) et (1.3) sont appelées formules de **Little**.

## 1.4 Systèmes classiques de files d'attente

### 1.4.1 Système $M/M/1$

Le système de files d'attente  $M/M/1$  est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attentes. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ .

### Régime transitoire

Les équations différentielles de *Chapman-Kolmogorov* associées au processus  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

La résolution de ces équations différentielles (recherche des  $p_n(t)$ ) est difficile. De ce fait, on ne s'intéressera qu'au calcul des probabilité limites.

### Régime stationnaire

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  dans le système d'équations précédent, on peut montrer que les limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \pi_n.$$

existent et sont indépendantes de l'état initial du processus et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p'_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ceci est vrai seulement si  $\rho = \lambda/\mu < 1$  (condition d'ergodicité).

On obtient alors, le système d'équation linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} \lambda \pi_0 = \mu \pi_1; \\ (\lambda + \mu) \pi_n = \lambda \pi_{n-1} + \mu \pi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

Sous la condition supplémentaire de normalisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1.$$

La résolution du système (1.5) par récurrence conduit à

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho; \\ \pi_n = \pi_0 \rho^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.6)$$

On remarque que les probabilités limites ne dépendent de  $\lambda$  et de  $\mu$  qu'à travers leur rapport  $\rho$ .

### Caractéristiques stationnaires du système $M/M/1$

L'une des importantes caractéristiques des systèmes de files d'attente est bien le nombre moyen de clients dans le système.

- Pour  $M/M/1$  cette caractéristique est donnée par :

$$L_s = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \quad (1.7)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\pi_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}. \quad (1.8)$$

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}. \quad (1.9)$$

- La durée moyenne d'attente d'un client dans la file :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}. \quad (1.10)$$

#### 1.4.2 Système $M/G/1$

Le flux des arrivées dans le système  $M/G/1$  est Poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est distribuée selon une loi générale  $\mathbb{H}$  de moyenne  $1/\mu$ .

Le processus stochastique décrivant l'évolution du nombre de clients dans le système n'est plus Markovien car le temps de service n'est plus sans mémoire.

On essaye alors de se ramener à un processus Markovien judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes citée précédemment.

#### La chaîne de Markov induite du système $M/G/1$

La méthode des variables auxiliaires s'applique aux systèmes  $M/G/1$  en complétant l'information sur  $X(t)$  par la variable  $\gamma_1(t)$  qui représente le temps de service déjà écoulé d'un client à l'instant  $t$ . Le processus bidimensionnel  $\{X(t), \gamma_1(t)\}_{t \geq 0}$  décrit complètement le système  $M/G/1$ . Le calcul de son régime transitoire fera intervenir des équations aux dérivées partielles. Pour éviter cela, la méthode de la chaîne de Markov induite ramène l'étude de ce processus au cas discret. En effet, en considérant les instants  $(d_n)$  de départ

du  $n^{ieme}$  client, le processus  $\{X(d_n), \gamma_1(d_n)\}_{n \geq 0}$  sera équivalent à  $X = (X_n, n \geq 0)$  puisque  $\gamma_1(d_n) = 0$ . Ainsi, la chaîne  $X = (X_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov à espace d'états discret où la variable aléatoire  $X_n$  représente le nombre de clients dans le système juste après l'instant  $(d_n)$ . Notons par  $E_n$  la nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le  $n^{ieme}$  client est servi. Les variables  $E_n$  sont indépendantes entre elles, leurs distributions commune est :

$$\mathbb{P}[E_n = k] = f_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} d\mathbb{H}(t), \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Donc

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

avec

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \geq 0; \\ 0 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

$X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $E_{n+1}$  et non des valeurs de  $\{X_{n-1}, X_{n-2}, \dots\}$ . La variable de  $X_n$  ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

Sa matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & f_0 & f_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

### Régime transitoire

Une méthode classique de description d'une chaîne de Markov est de calculer ses probabilité de transition  $p_{ji} = P(X_{n+1} = i / X_n = j)$ . Il est aisé de vérifier que la matrice des probabilité de transition  $P = (p_{ji})_{j,i \in \mathbb{N}}$  de la chaîne de Markov induite  $X$ , est donnée par :

$$P_{ji} = \begin{cases} P_{0i} = f_i & \text{si } i \geq 0; \\ P_{ji} = f_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1; \\ P_{ji} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque on peut passer de chaque état à n'importe quel état, il s'agit, par conséquent, d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si  $\rho < 1$ .

### Régime stationnaire

Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite  $X_n$ , si  $\rho = \lambda/\mu < 1$ .

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  tel que :

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i), \forall i \in \mathbb{N}.$$

existent et sont uniques et indépendantes des conditions initiales.

Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante  $g(z)$  :

$$g(z) = \frac{(z-1)\hat{\mathbb{H}}(\lambda - \lambda z)}{z - \hat{\mathbb{H}}(\lambda - \lambda z)}(1 - \rho). \quad (1.12)$$

où  $\hat{\mathbb{H}}$  représente la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = 1$ . La formule (1.12) est connue sous le nom de la première formule de *Pollatchek-Khinchine*.

### Les caractéristiques du système

- Le nombre moyen de clients dans le système

à partir de  $g'(1) = \mathbb{E}[X] = L_s$ , on obtient :

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + \mu^2\sigma^2). \quad (1.13)$$

où  $\sigma^2$  est la variance de la loi de durée de service  $\mathbb{H}(t)$

- Le nombre moyen de clients en attente

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + \mu^2\sigma^2). \quad (1.14)$$

à l'aide de la formule de Little, on obtient :

- Le temps d'attente d'un client dans la file

$$W_q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(1 + \mu^2\sigma^2). \quad (1.15)$$

- Le temps de séjour d'un client dans le système

$$W_s = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(1 + \mu^2\sigma^2). \quad (1.16)$$

### 1.4.3 Système d'attente $M/D/1/\infty$

Une file d'attente  $M/D/1/\infty$  (cas particulier d'une file  $M/G/1$ ), est un processus stochastique dont l'espace des états est l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , où la valeur correspond au nombre de client dans le système y compris celui en service. un tel système est caractérisé par [15] :

- Les inter-arrivées se produisent avec un taux  $\lambda$  selon un processus de Poisson.
- Les temps de services sont déterministes  $D$  avec  $(\mu = 1/D)$ .
- Un seul serveur, sert un client à la fois à l'avant de la file d'attente, selon une discipline (FIFO), lorsque le service est fini, le client quitte le système et le nombre de clients dans le système est réduit d'une unité.

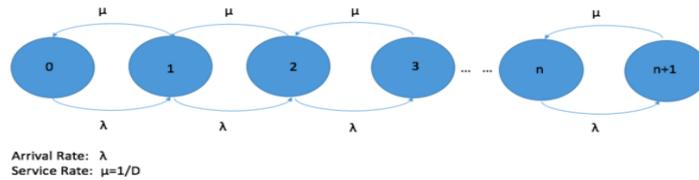


FIGURE 1.2 – Modèle de file d'attente  $M/D/1$

#### Matrice de transition

La matrice de probabilités de transition pour la file  $M/D/1$  est donnée par  $P$  comme ci dessous :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

avec

$$a_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}; \quad T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

## Mesure de Performances classiques

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L_s = \rho + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{1-\rho} \right). \quad (1.17)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{1-\rho} \right). \quad (1.18)$$

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W_s = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}. \quad (1.19)$$

- La durée moyenne d'attente d'un client dans la file :

$$W_q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}. \quad (1.20)$$

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques processus aléatoires et leurs lien avec les phénomènes d'attente. Nous avons également donné certains résultats sur les systèmes de files d'attente classiques tel que, les systèmes  $M/M/1$  et  $M/G/1$ .

# Chapitre 2

## Systemes d'Attente avec Vacances et Serveur non fiable

### Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté quelques modèles d'attente classiques, là où les clients qui arrivent, se font servir selon des règles de priorité données par un processus poissonnien. Vu l'apparition d'autres systèmes réels de plus en plus complexes, tels que le modèle  $M/G/1$  avec vacances et interruption de services, où les clients se font servir selon une loi générale, des chercheurs ont mis en évidence les limites de la théorie classique. Ce genre de système, peut être appliqué pour résoudre de nombreux problèmes pratiques, tels que la modélisation des systèmes de production et des systèmes informatiques.

### 2.1 Les systèmes d'attente à interruptions de service

Dans beaucoup de systèmes d'attente utilisés dans la modélisation des systèmes réels, le processus de service est sujet à des interruptions. Les interruptions peuvent être dues à des diverses causes :

- Pannes du serveur ;
- Possibilité de vacance du serveur ;
- Arrivée de clients de haute priorité.

## 2.2 Les systèmes d'attente avec pannes du serveur

La théorie des files d'attente classique supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant dans les situations réelles, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée.

Les pannes du serveur peuvent survenir aussi bien lorsque le serveur est libre que lorsqu'il est occupé par le service d'un client. On parle alors de panne passive et de panne active. Supposons que durant le service d'un client, le serveur tombe en panne.

Cette dernière peut être :

- **Panne conservatrice** : Le client reste au près du serveur et attend que ce dernier soit réparé, après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu.
- **Panne non conservatrice** : La partie de service déjà acquise est détruite après la réparation, le service reprend à zéro.
- **Pannes avec perte définitive du client** : Le client quitte la système.
- **Panne avec perte momentanée du client** : Le client quitte le serveur et entre en orbite.

## 2.3 Les systèmes d'attente avec vacances

Dans un modèle de files d'attente classique, les serveurs sont toujours disponibles. Cependant, dans beaucoup de systèmes d'attente pratiques, les serveurs peuvent devenir indisponibles pendant une période du temps due à une série de raisons. Cette période d'absence de serveur peut se représenter comme un fonctionnement supplémentaire du serveur, tant examiné pour assurer l'entretien, ou simplement faisant une pause.

### 2.3.1 Politique de vacances

Une politique de vacances peut se caractériser par trois règles [30] :

- **Règle de démarrage de vacances** : Il y a deux types majeurs de service, à savoir, exhaustif et non-exhaustif.
- **Règle d'arrêt de vacances** : Deux politiques sont importantes : les vacances multiples et les vacances simples.

- **Distribution de la durée des vacances :** On suppose souvent que les vacances de serveur sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) avec une fonction de répartition générale  $V(x)$ .

### 2.3.2 Propriété de décomposition stochastique des modèles avec vacances

Pour les modèles de type  $M/G/1$  avec vacances, la propriété en question a été établie pour la première fois par Fuhrmann et Cooper [27] à l'aide des outils de la théorie de renouvellement, puis confirmée par Doshi et Artalejo [05,17].

On distingue les vacances du serveur dans le cas d'un service exhaustif et celles dans le cas d'un service non-exhaustif. Dans la première situation, le serveur prend ses vacances lorsque le système est vide. En outre, le serveur est en vacances jusqu'à ce qu'il trouve (en revenant des vacances) au moins un client dans le système (vacances multiples), ou bien il prend une seule vacation après chaque période d'activité (vacances unique). Dans la seconde situation, le serveur est autorisé à prendre des vacances en présence des clients dans le système. Encore, la distribution des vacances peut être indépendante du processus de service, ou dépendante. Il est également possible que les durées des vacances sont mutuellement indépendantes, ou elles dépendent des vacances précédentes.

#### Cas d'un service exhaustif

##### Système de files d'attente $M/G/1$ avec vacance unique

[10] Considérons le système de files d'attente  $M/G/1$  décrit précédemment et supposons que à la fin d'une période d'activité interrompue, le serveur prend une vacation [26, 32, 35]. Ajoutons une suite de vacances  $\{V_k\}$  à la description du modèle  $M/G/1$ , et supposons qu'elle est indépendante du processus des arrivées et du processus de service. Il s'agit d'une suite composée de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées.

Notons par  $V(x)$  la fonction de répartition des durées de vacances. Et par  $\tilde{V}(s)$ ,  $Re(s) > 0$  sa transformée de Laplace-Stieltjes.

Supposons que le serveur revient au système après la vacation. A cet instant, s'il trouve des clients dans le système, il commence immédiatement une période d'activité jusqu'à ce que le système devient vide. Sinon, il attend le premier client qui arrive et puis commence une période d'activité. On s'intéresse au processus stochastique  $\{N(t); t \geq 0\}$ .

Où  $N(t)$  est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . Il n'est pas markovien. Par conséquent, on considère le système aux époques de la fin de vacances ou de l'achèvement du service.

Soient :

$\xi_n$  : l'instant où le service du  $n^{ieme}$  client s'achève ;

$q_n = N(\xi_n)$  : le nombre de clients dans le système après le  $n^{ieme}$  départ ;

$\nu_n$  : le nombre de clients arrivant dans le système durant le temps de service du  $n^{ieme}$  clients ;

$b$  : le nombre de clients qui arrivent pendant la vacation.

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{fin de vacance;} \\ 1 & \text{fin de service.} \end{cases}$$

Par conséquent à l'instant  $\xi_n$  la séquence  $\{(q_n, I_n)\}$  détermine une chaîne de Markov induite gouvernée par l'équation fondamentale suivante :

$$(q_{n+1}, I_{n+1}) = \begin{cases} (q_n + \nu_{n+1} - 1, 1) & q_n \geq 1; \\ (v_{n+1}, 1) & (q_n, I_n) = (0, 0); \\ (b, 0) & (q_n, I_n) = (0, 1). \end{cases}$$

Le vecteur  $\{(q_n, I_n) : q_n = 0, 1, 2, \dots; I_n = 0, 1\}$  décrit l'état du  $n^{ieme}$  époque, c'est-à-dire :

- si  $I_n = 0$ , alors  $q_n$  est le nombre de clients dans le système à l'instant de la fin de vacance ;
- si  $I_n = 1$ , alors  $q_n$  est le nombre de clients dans le système immédiatement après l'achèvement du service.

### Système de files d'attente $M/G/1$ avec vacances multiples

[10] Considérons le système de files d'attente  $M/G/1$  avec vacances. A présent, lorsque le serveur trouve le système vide à la fin des vacances, il prend immédiatement une autre vacance, et continue de cette manière jusqu'à ce qu'il trouve un client en attente à son retour des vacances.

Nous définissons une chaîne de Markov induite de la même manière que dans le cas précédent sauf que dans ce modèle l'état  $(0, 0)$  n'existe pas. Alors, à l'instant  $\xi_n$  l'équation fondamentale de la chaîne de Markov est :

$$(P_{n+1}, I_{n+1}) = \begin{cases} (q_n + v_{n+1} - 1, 1) & \text{si } q_n \geq 1; \\ (b^*, 0) & \text{si } (q_n, I_n) = (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $b^*$  est le nombre de clients présents à la fin de la période des vacances. Il est clair que :

$$P[b^* = j] = \frac{b_j}{1 - b_0} = \frac{b_j}{1 - \tilde{V}(\lambda)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

## 2.4 Système à serveur non fiable

### 2.4.1 Système $M/M/1$ à serveur non fiable

[10] Pour le système à serveur non fiable le plus simple.  $M/M/1$ , le flux des arrivées est poissoniens, de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ . Il y a un seul serveur sujet à des pannes.

Soit  $\alpha$  la durée de bon fonctionnement (ou la durée de vie) du serveur et  $\beta$  sa durée de service (ou la durée de renouvellement). On suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des variables aléatoires indépendantes entre elles, indépendantes des inter-arrivées  $e$  et des durées de service  $\tau$ . De plus, ces variables aléatoires sont des lois exponentielles de paramètres  $\theta$  et  $\sigma$  respectivement.

#### Régime transitoire

On peut décrire l'état du système par le processus aléatoire markovien.

$$S(t) = \{X(t), e(t); t \geq 0\},$$

où  $X(t)$  est "le nombre de clients présents dans le système à l'instant  $t, (t \geq 0)$ ", et :

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{Si le serveur est en bon état;} \\ 1, & \text{Si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

#### Régime stationnaire

Il est facile de vérifier que les probabilités stationnaires,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{0j} = P_{0j}, \quad j \geq 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{1j} = P_{1j}, j \geq 1.$$

Sont des solutions du système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} (\lambda + \theta)P_{00} = \mu P_{01} + \sigma P_{10}; \\ (\lambda + \mu + \theta)P_{0j} = \mu P_{0j} + \sigma P_{1j} + \lambda P_{0j-1}, \quad j \geq 1; \\ (\lambda + \sigma)P_{10} = \theta P_{00}; \\ (\lambda + \sigma)P_{1j} = \theta P_{0j} + \lambda P_{1j-1}, \quad j \geq 1. \end{cases}$$

Tel que, le système est résolu à l'aide de la méthode des fonctions génératrices. La condition d'ergodicité d'un tel système est de la forme :

$$\rho = \lambda \bar{\delta} = \lambda \left(1 + \frac{\theta}{\sigma}\right) < 1, \quad (2.2)$$

où  $\lambda \bar{\delta}$  est la durée moyenne de séjour du client auprès du serveur. Dans la relation (2.2), on comprends que pour les clients qui se trouvent en état d'attente, peu importe la partie du temps que le serveur consacre (au client en cours) au service pur et la partie consacrée aux réparations des pannes survenues durant le service. Ce qui lui importe, c'est de savoir au bout de combien de temps il sera capable à prendre en charge le client suivant. C'est pourquoi, le système considéré est équivalent à un système dont le serveur ne peut tomber en panne lorsqu'il est en fonctionnement et dont la durée de service est la variable aléatoire égale à la durée de séjour du client auprès du serveur (qui n'est pas forcément exponentielle).

La condition d'ergodicité d'un tel système est  $\lambda \bar{\delta} < 1$ .

### 2.4.2 Système $M/G/1$ à serveur non fiable

[10] Considérons un système  $M/G/1$  à un seul serveur sujet à des pannes aléatoires, c-à-d qu'elles peuvent survenir quand le serveur est occupé (pannes actives) ou quand le serveur est libre (pannes passives). Les clients arrivent selon une loi de Poisson de paramètre  $\mu$  et la durée de service est une variable aléatoire suivant une loi quelconque de fonction de répartition  $S(\cdot)$  qui admet une densité  $s(\cdot)$  et une moyenne  $1/\mu$ , ainsi sa fonction caractéristique est donnée par  $S^*(\cdot)$ . En plus, les arrivées des pannes auront lieu selon un processus de Poisson de taux  $\theta_0, \theta_1$  respectivement. Ainsi, si à un instant  $t$  fixé le serveur s'avère être libre et en bon état (nous dirons qu'il est disponible), [25, 26] alors, la probabilité pour qu'une panne se produise durant un petit intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  de durée  $\Delta t$  est :

$$\theta_0 \Delta t = o(\Delta t), \quad (\theta_0 > 0).$$

Cela signifie que, lorsque le serveur est libre, la durée de bon fonctionnement du serveur est de loi exponentielle de fonction de répartition  $D_0$ , telle que :

$$D_0(x) = 1 - e^{-\theta_0 x}.$$

Par contre, si à l'instant  $t$  le serveur est occupé par le service d'un certain client, alors, la probabilité de panne durant  $(t, t + \Delta)$  est égale à :

$$\theta_1 \Delta t = o(\Delta t), \quad (\theta_1 > 0).$$

La "réparation" de la panne (ou en d'autres termes, le renouvellement des propriétés initiales du serveur avant la panne) débute immédiatement après la panne et se déroule indépendamment du processus des arrivées.

La durée de réparation est une variable aléatoire de fonction de répartition  $R_0(x)$ , de paramètre  $r_0$ , (respectivement  $R_1(x)$  de paramètre  $r_1$ ) admettant des moments finis d'ordre un.

Supposons qu'un client se présente à un instant fixé arbitrairement. Si à cet instant le serveur est disponible, alors le serveur débute immédiatement à l'instant  $(t + 0)$  et sa durée est une variable aléatoire de loi arbitraire de fonction de répartition  $S(t)$ , et de moyenne  $(\bar{\tau} = \int_0^\infty x dH(x) < \infty)$ .

Si par contre, à l'instant  $t$  le serveur est bloqué (le serveur est en panne ou occupé), alors le client rejoint la file d'attente et attend son tour. Admettons maintenant, que durant le service d'un certain client  $C$ , le serveur tombe en panne. Le service de client est ainsi interrompu durant un certain temps qui sera consacré à la réparation de la panne.

Maintenant, à chaque client, en plus de la durée de service  $\tau$ , on peut associer une variable aléatoire  $\gamma$  qu'on appellera "durée de séjour" du client auprès de serveur. Cette variable aléatoire est égale à la durée de temps qui s'écoule entre l'instant où le serveur entame le service de client, jusqu'à l'instant où ce dernier quitte le système, son service étant achevé.

Ainsi, pour les pannes de nature conservatrices,  $\gamma$  est constituée de la durée factice de service  $\tau$ , à laquelle s'ajoutent les durées de réparation des pannes systématiques du serveur, survenues durant le temps  $\tau$ .

Notons par :

$$\begin{aligned} S^*(z) &= \mathbb{E}[e^{-z\tau}] = \int_0^\infty e^{-zx} dP(\tau < x); \\ H^*(z) &= \mathbb{E}[e^{-z\gamma}] = \int_0^\infty e^{-zx} dP(\gamma < x). \end{aligned}$$

Les transformées de Laplace-Stieltjes des fonctions de répartition des variables aléatoires  $\tau$  et  $\gamma$  respectivement. On montre dans [11] que :

$$H^*(z) = S^*(z + \theta_1 - \theta_2(1 - r_1)).$$

**Remarque 2.5.1 :** Il est montré que le système considéré est équivalent à un système dont le serveur est absolument fiable lorsqu'il est occupé par le service d'un certain client et dont la durée de service des clients est une variable aléatoire de même loi que  $\gamma$ .

En particulier, la condition d'ergodicité d'un tel système est de la forme

$$\rho = \lambda \bar{\gamma} = \int_0^\infty x d\mathbb{H}(\gamma < x) < 1.$$

**Définition 2.5.1 : (Période d'activité)**[20]

On appelle période d'activité, souvent appelée d'occupation dans la littérature francophone, comme étant l'intervalle de temps durant laquelle le serveur travaille d'une manière continue. Cette période peut contenir un nombre de temps de service. Plus précisément, c'est l'intervalle de temps  $(T1, T2)$ , où  $T1$  est l'instant d'arrivée d'un client dans le système vide et  $T2$  est l'instant où pour la première fois, après  $T1$ , le système redevient vide.

**Définition 2.5.2 : (Période de panne)**

Durant la période d'activité, le serveur est assujéti à tomber en panne. Dans ce cas, il rentre immédiatement en phase de réparation. Cet intervalle de temps qui s'écoule entre l'instant où le serveur tombe en panne et celui où il reprend son activité est appelé période de panne.

**Remarque 2.5.2 :** A cet effet, la période d'inactivité correspond à l'intervalle de temps où le serveur est indisponible pour différentes raisons telles que la période de vacance, période de panne, période de relance ou bien la file d'attente est vide.

**Définition 2.5.3 : (Temps d'achèvement)**

On appelle temps d'achèvement de service, l'intervalle aléatoire du temps entre l'instant du début de service d'un client et l'instant du début de service du client suivant. Cette période inclue la période de réparation car le serveur est assujéti à des pannes.

**Définition 2.5.4 : (Période d'achèvement)**

Après que le serveur soit réparé, il reprend à servir jusqu'à ce qu'il ne reste aucun client dans la file d'attente. Ainsi la durée de temps qui s'écoule entre la fin de la période d'inactivité

et l'instant où il ne reste aucun client dans la file est appelée période de complétion. Elle peut être représentée comme la somme des périodes d'activités et de périodes de pannes.

**Définition 2.5.5 : (Cycle d'activité)**

L'intervalle de temps composé de la période d'inactivité et la prochaine période d'achèvement est appelé cycle d'activité [20].

## 2.5 Synthèse bibliographique sur les systèmes d'attente avec vacances

Les systèmes d'attentes avec période de vacances, se posent naturellement dans la modélisation stochastique des systèmes de communications, les systèmes de fabrication/production et d'inventaires. Pour plus d'informations voir Doshi [5].

En général, afin de contrôler la longueur de la période de vacances on utilise soit la longueur de la file  $N$  appelé la N-règle et définie par Yadin et Naor [37] ou soit le temps  $T$  appelé la T-règle introduite par Heyman [8].

Des efforts considérables ont été consacrés à l'étude de ces types de modèles d'attentes, nous passons en revue des recherches bien connu et pour cela, cinq types de classification pour l'étude de ces politiques sont définies ci-dessous :

### 2.5.1 Système sous la T-règle de contrôle

Le serveur reste actif aussi longtemps qu'il y a au moins un client dans le système, mais lorsqu'il ne reste aucun client dans le système, le serveur devient indisponible et rentre dans une phase de vacation d'une durée fixée  $T$ .

Après la période de vacation de durée  $T$ , le serveur rejoint le système. Il commence alors à servir s'il y a au moins un client dans la file d'attente ; sinon, il part pour une autre période de vacation et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client présent dans la file d'attente. Ce type de politique de contrôle est appelée la T-règle. Si le serveur retourne d'une vacance et trouve la file d'attente vide, il exécute l'une des deux actions suivantes : (vacance unique et vacances multiples).

### 2.5.2 Systèmes sous la N-règle de contrôle

On considère que le serveur rentre dans une phase d'inactivité s'il n'est y a aucun client dans la file ; Sinon, s'il y a  $N$ , ( $N \geq 1$ ) ou plus de clients présents dans la file d'attente alors le serveur reprend son activité.

### 2.5.3 Systèmes sous la N-règle de contrôle à vacation générale

Pour certains systèmes de files d'attente munis d'une ou plusieurs règles de contrôles, dont la variable aléatoire qui correspond à la période de vacation suit une loi de probabilité générale, il est habituellement supposé que l'état du serveur (disponible ou indisponible) est complètement déterminé par le nombre de clients présents dans le système. Dans ce type de systèmes le serveur est en période de vacation aussi longtemps que le système est vide. A l'instant où le serveur revient d'une période de vacation et trouve au moins  $N$  (seuil prédéterminé) clients dans le système, il commence à servir immédiatement et exhaustivement. Ce type de règle de contrôles est appelé la N-règle de contrôle avec vacations.

### 2.5.4 Files d'attente muni d'une règle de contrôle et d'un temps de relance général

Le terme "relance (startup)" est associé au serveur et correspond au travail préparatoire nécessaire du serveur avant de commencer son service. Dans des situations réelles, le serveur a souvent besoin d'un temps de préparation afin de commencer à servir comme certaines machines qui ont besoin d'un temps d'allumage et de préchauffage avant de commencer à fonctionner [20].

### 2.5.5 Files d'attente muni d'une règle de contrôle combinée $N$ et $T$

Gakis et al [19] ont d'abord introduits le concept de la politique  $Min(N, T)$ , dans le cas où le serveur termine ces vacances soit, si  $N$  clients sont dans le système, où  $T$  unités de temps se sont écoulés depuis la fin d'une période de service.

Doganata [36] a d'abord examiné la politique  $NT$  d'un système d'attente  $M/G/1$  avec un serveur fiable et a dérivé des valeurs de mesures de rendement. Alfa et Frigui [2] ont étudiés la politique  $NT$  d'un système d'attente avec un serveur fiable et un temps de démarrage . Ils ont prouvés que le répartition de la période de vacances est de type phase. Alfa et Li [3] ont étudié séparément la politique  $NT$ , à la fois pour les files d'attentes  $M/G/1$  et  $M/M/m$  dans un système de fabrication pour la structure des coûts.

Récemment, Hur et al [28] ont optimisés le coût de fonctionnement d'un système d'attente  $M/G/1$  en utilisant la politique  $Min(N, T)$ . Ils ont dérivés la distribution de la taille du système à l'état stable, et ont mis en place une fonction de coût pour faire apparaître les caractéristiques de la fonction de coût.

La politique  $NT$  du modèle qu'on a choisie diffère de la politique  $NT$  des auteurs mentionnés ci-dessus. Nous allons prendre en compte la politique  $NT$  pour un système d'attente  $M/G/1$ , avec un serveur non fiable et un temps d'arrêt ou de fermeture lorsque le système est vide. De plus il doit effectuer un temps de démarrage avant de commencer sa période de service.

Les travaux de recherche mentionnés ci-dessus, ne se sont jamais intéressés à l'étude des cas impliquant des pannes de serveur, temps de démarrage et fermeture du serveur. Mais dans les situations réelles, beaucoup de système fonctionne que par intermittence. Le système sera, donc arrêté par un temps ou bien par l'absence de clients.

Par conséquent, il serait utile d'envisager les politiques de vacances, pour les modèles de files d'attentes dans lequel un serveur non fiable se caractérise par un temps de démarrage et fermeture du service.

## 2.6 Conclusion

Les modèles d'attente développés ces dernières décennies tentent de prendre en considération des phénomènes de vacances et d'interruption de service à la fois. Dans ce chapitre, nous avons donné certains résultats sur les systèmes complexes tel que les systèmes non fiables et les systèmes avec vacances, qui seront utiles par la suite dans la description de notre modèle.

# Chapitre 3

## Développement en séries de Taylor pour les chaînes de Markov

### Introduction

Depuis la publication de traité de Taylor, le développement en séries de Taylor est utilisé en analyse numérique. Que ce soit en équations différentielles, en systèmes non linéaires ou en systèmes de files d'attente. On aboutit souvent à l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point d'intérêt, dont l'expression analytique de cette fonction n'existe pas ou elle est difficile à manipuler, mais les dérivées successives de cette dernière sont connues au point d'intérêt. Pour cette raison, le développement en séries de Taylor, nous assure une approximation polynômial de la fonction considérée au voisinage du point d'intérêt.

Dans ce chapitre, nous allons utilisés le développement d'une nouvelle approche, basée sur les développements en séries de Taylor proposé par Ouazine et Abbas [29], où nous calculerons les dérivées d'ordre supérieure de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale, d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini.

### 3.1 Rappels et notions

Dans la suite de ce chapitre, nous allons être amenés à définir des notions d'analyse, qui nous seront utiles, pour bien mener le développement en séries de Taylor dans le cas des chaînes de Markov.

On commence par rappeler quelques définitions et théorèmes issus de l'analyse des fonctions réelles.

**Définition 3.1.1. (Continuité en un point)**

Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage d'un réel  $x_0$ .  $f$  est continue au point  $x_0$  si, et seulement si,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

où  $D_f$  est le domaine de définition de la fonction  $f$ .

**Définition 3.1.2. (Continuité sur un intervalle)**

Une fonction  $f$  est continue sur un intervalle ouvert  $I$  de son ensemble de définition si, et seulement si, elle est continue en tout point de  $I$ .

**Définition 3.1.3. (Dérivabilité en un point)**

$f$  est dérivable au point  $x_0$  si, et seulement si, la fonction

$$x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

a une limite finie au point  $x_0$ .

**Définition 3.1.4. (Dérivabilité sur un intervalle)**

Une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de son ensemble de définition si, et seulement si, elle est dérivable en tout point de  $I$ .

**Théorème 3.1.1.[7]**  $f$  est différentiable au point  $x_0$  si, et seulement si,  $f$  est dérivable en ce point et :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**L'espace des fonctions  $C^k(I)$**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Nous dirons que  $f$  est de classe  $C^1$  dans  $I$  si elle admet une dérivée  $f'$  en tout point de  $I$  et si celle-ci est une fonction continue sur  $I$ . Si  $f'$  est elle-même de classe  $C^1$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^2$ ; on peut alors attribuer à  $f$  une dérivée seconde continue  $f'' = (f')'$ . En poursuivant ainsi de proche en proche, on définit de façon évidente les dérivées successives, et la notion de fonction de classe  $C^k(I)$ , c'est-à-dire admettant dans  $I$  des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $k$  inclusivement.

### 3.1.1 Formules de Taylor

La formule de Taylor permet d'approximer une fonction suffisamment dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

#### Définition 3.1.5.[7]

Soient  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $x_0$  un point intérieur de  $I$ ,  $f \in C^n(I)$ . On appelle polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_0$  de  $f$ , le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k; \quad (3.1)$$

on appelle "reste de Taylor" d'ordre  $n$  en  $x_0$  de  $f$ , la fonction  $R_n$  définie sur  $I$  comme suit :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

**Remarque 3.1.1.** Initialement Taylor ne s'est pas vraiment préoccupé de la forme du reste, il faut attendre ses successeurs pour voir se développer une maîtrise du reste dans certaines conditions plus précises.

### 3.1.2 Analyse du reste de développement

L'idée relative au développement (3.1) consiste à remplacer une fonction  $f$  que l'on ne sait pas calculer (ou difficile à manipuler) par un polynôme, qui est facilement calculable. Mais si  $f(x)$  n'est pas calculable, alors bien sûr le reste  $R_n(x)$  ne l'est pas non plus.

Si on désire évaluer l'erreur d'approximation d'une fonction par son polynôme de Taylor, il faudrait donc calculer la série :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Remarque 3.1.2.** Le reste  $R_n(x)$  varie suivant les conditions de dérivabilité imposées à  $f$ .

De ce fait, il existe plusieurs formules du reste, parmi ces formules on cite.

Comme alternative du calcul de  $R_n(x)$  est de l'estimer ou de le majorer. Dans ce qui suit, nous présenterons quelques résultats concernant l'estimation du reste  $R_n(x)$ .

### 1. Formule de Taylor avec reste généralisé

**Théorème 3.1.2.**[22] Soient les deux fonctions  $f, g : I = [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

1.  $f \in C^n([a, b])$  et  $f^{(n)}$  dérivable sur  $]a, b[$ ;
2.  $g \in C([a, b])$  et  $g'$  dérivable sur  $]a, b[$ ; telle que  $\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$ .

Soit  $x_0 \in [a; b]$ , alors  $\forall x_0 \in [a, b], x \neq x_0$ , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x_0, x),$$

avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x_0, x) = 0$ ,

où

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n[g(x) - g(x_0)]}{n!g'(c)}, \quad (3.2)$$

et  $c$  est un point, strictement compris entre  $x$  et  $x_0$ .

La formule (3.2) de  $R_n(x_0, x)$  est appelée "reste généralisé".

### 2. Formule du reste de Young et de Peano

Le reste de Young est défini par la fonction "petit  $o$ " (Notation relative à Landou). En effet, celui-ci est donné par :

$$R_n(x_0, x) = o((x-x_0)^n).$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Le plus souvent, le reste de young s'écrit sous la forme de Peano :

$$R_n(x_0, x) = (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

### 3. Formule du reste de Lagrange

Le reste de Lagrange est défini par :

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où  $c$  est un point qui dépend de  $x_0$  et  $x$ .

#### 4. Formule du reste de Cauchy

Le reste de Cauchy est donné par :

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)(x - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta),$$

où  $0 < \theta < 1$ .

#### 5. Formule du reste de Laplace

Une autre forme du reste est celle de Laplace ou le reste intégral. Ce reste est donné comme suit :

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

#### 6. Formule de Mac-Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + R_n(x).$$

**Exemple 3.1.1.** Pour  $f(x) = e^x$ , la formule de *Mac – Laurin* s'écrit comme suit :

$$f(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

## 3.2 Développements en séries de Taylor pour les chaînes de Markov

Dans cette section, on propose une nouvelle approche basée sur les développements en séries de Taylor [32]. Cette dernière peut-être utilisée pour calculer plusieurs caractéristiques stationnaires relatives aux chaînes de Markov à espace d'états fini et à temps discret, en l'occurrence la distribution stationnaire, où les coefficients de la série de Taylor sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale appropriée à la chaîne de Markov.

### 3.2.1 Dérivées successives de la distribution stationnaire

On considère une chaîne de Markov  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  d'espace d'état  $S = \{0, 1, \dots, N\}$ . Soit  $P$  la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov  $X$ .  $P$  est une

matrice stochastique, avec  $p_{ij} \geq 0$ , et  $P_{j \in S} \sum_{i=1}^S p_{ij} = 1$ ,  $i = \overline{0, \dots, N}$ , pour tout  $i \in S$ . Soit  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  un vecteur unité, où la notation  $T$  signifie la transposée. On suppose que la chaîne de Markov  $X$  admet une unique distribution stationnaire, notée par  $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(N))$ .

Nous avons  $\pi P = \pi$  et  $\pi \times e = 1$ . Dans ce travail, on considère  $P$  comme étant une matrice qui dépend du paramètre  $\theta$ , qu'on notera par  $P_\theta$  et dénotant la distribution stationnaire de  $P_\theta$  par  $\pi_\theta$ . Par exemple,  $\theta$  peut être le taux des inter-arrivées ou le taux de vacances dans un modèle de file d'attente.

Dans ce qui suit et avant de présenter le résultat fondamental obtenu dans ce chapitre, qui concerne l'expression des dérivées de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale, nous introduisons la notion de la matrice fondamentale.

### 3.2.2 Matrice fondamentale d'une chaîne de Markov

Comme nous analysons des modèles de files d'attente à capacités finies (modéliser par des chaînes de Markov finies), nous introduisant une matrice très intéressante appelée "Matrice Fondamentale  $Z_\theta$ ", qui a été utilisée pour calculer les différentes caractéristiques stationnaires essentielles de la chaîne de Markov étudiée. La notion de "Matrice fondamentale" a été introduite, pour la première fois, par Kemeny et Snell [12], et ce dans le cadre de l'analyse de perturbation des chaînes de Markov. De sa part, Keilson [13] a pu élargir leur étude aux processus de Markov, où il a obtenu de différentes formules des premiers moments de certaines caractéristiques.

Les méthodes du calcul de  $Z_\theta$  ont été d'une grande importance. Précisément, une discussion générale sur le calcul de  $Z_\theta$  a été abordée dans [8]. Également dans [14], les auteurs ont considéré quelques approches du calcul stable de  $Z_\theta$ . De même, dans [33] un algorithme, basé sur la factorisation  $LU$  de la matrice  $(I - Z_\theta)$ , a été élaboré pour calculer  $Z_\theta$  tout en utilisant l'algorithme GTH (Grassman, Taksar et Heyman).

A l'origine, la matrice fondamentale  $Z_\theta$  est utilisée pour résoudre le système d'équations de la forme  $(I - Z_\theta)x = b$ , où  $b$  est connu. Puisque  $(I - P_\theta)$  n'est pas inversible, alors la matrice  $(I - Z_\theta)$  a été modélisée, tout en ajoutant la matrice  $\pi_\theta$ . Ce qui induit que l'inverse  $Z_\theta = (I - Z_\theta + \pi_\theta)^{-1}$  existe. Cette même matrice est appelée la matrice fondamentale

des chaînes de Markov ergodiques. Du point de vue pratique, cette définition consiste tout d'abord à calculer la distribution stationnaire  $\pi_\theta$ . Ce qui est envisageable dans le cadre de l'analyse de perturbation des chaînes de Markov ergodiques. Ceci est en adéquation avec la démarche qu'on abordera par la suite.

Dans cette partie, on se contente de rappeler quelques propriétés de la matrice fondamentale d'une chaîne de Markov ergodique.

**Théorème 3.2.1.** [12] Si  $P_\theta$  est une matrice de transition d'une chaîne de Markov finie et ergodique, alors la matrice inverse  $Z = (I - P_\theta + \pi_\theta)^{-1}$  existe, et :

(a)  $P_\theta Z_\theta = Z_\theta P_\theta$

(b)  $Z_\theta e = e$

(c)  $\pi_\theta Z_\theta = \pi_\theta$

(d)  $(I - P_\theta)Z_\theta = I - \Pi_\theta$

(e)  $Z_\theta = I + \sum_{i=1}^{\infty} (P_\theta^i - \Pi_\theta)$

**Remarque 3.2.1.** Avec l'obtention de la matrice  $Z_\theta$ , d'autres caractéristiques comme le temps moyen de premier passage peuvent être calculés [13].

On s'intéresse à l'obtention des dérivées successives d'ordre supérieur de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  dans le cas où  $\theta$  est le paramètre de contrôle. Ce qui nous permettra ensuite d'approcher la distribution stationnaire  $\pi_{\theta+\Delta}$  par un polynôme en fonction de  $\Delta$ . Par conséquent, l'évaluation numérique de  $\pi_\theta$  dans un voisinage du paramètre  $\theta$  est envisageable. Dans la suite, on donne la formule de la  $k^{ieme}$  dérivée de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$ , où on suppose que les probabilités de transition de  $P_\theta$  sont de classe  $C^k$ . Alors par l'utilisation de cette formule, on obtient le développement en séries de Taylor en  $\Delta$  de la distribution stationnaire  $\pi_{\theta+\Delta}$ , où leurs coefficients sont exprimés en fonction de la matrice fondamentale  $Z_\theta$  associée à la chaîne de Markov  $X$ .

Le théorème suivant établit la formule de la  $k^{ieme}$  dérivée de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  par rapport à  $\theta$  en fonction de la matrice fondamentale, qui est le principal résultat obtenu dans [30].

**Théorème 3.2.2.** [30]

Supposons que toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition  $P_\theta$  sont de classe  $C^k$  par rapport à  $\theta$ , où  $\theta$  est point intérieur d'un certain intervalle  $\Theta$ . Alors, la  $k^{ieme}$  dérivée de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$ , d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini, par rapport au paramètre  $\theta$  est donnée par :

$$\frac{d^k}{d\theta^k} \pi_\theta = \pi_\theta^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \pi_\theta^{(m)} P_\theta^{(k-m)} Z_\theta, \quad (3.3)$$

où  $P_\theta^{(n)}$  (resp.  $\pi_\theta^{(n)}$ ) est la matrice (resp. le vecteur) dont ses composantes sont les dérivées  $n^{ieme}$  des composantes de  $P_\theta$  (resp.  $\pi$ ) par rapport à  $\theta$ .

Un résultat équivalent à celui énoncé ci-dessus a été établi, en 2003, par Heidergott et Hordijk [4]. Ce résultat consiste à obtenir la sensibilité de la distribution stationnaire en fonction de la matrice de déviation  $D_\theta = Z_\theta - \Pi_\theta$ . La démarche suivie par ces auteurs est totalement différente de la notre. Plus précisément, ce résultat est donné par le Théorème suivant.

**Théorème 3.2.3.** [4] Soit  $\theta \in \Theta$  et soit  $\theta \in \Theta$  un intervalle ouvert contenant  $\theta$ . Supposons que les composantes de la matrice de probabilités de transition  $P_\theta$  sont  $n$  fois dérivable par rapport au paramètre  $\theta$ . Alors, la dérivée d'ordre  $n$  de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  par rapport au paramètre  $\theta$  est donnée par :

$$\pi_\theta^{(k)} = \pi_\theta K_\theta(k), \quad (3.4)$$

$$K_\theta(k) = \sum_{\substack{1 \leq m \\ l_i \leq k \\ l_1 + \dots + l_m = k}} \frac{k!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{i=1}^m \left( P_\theta^{(i)} D_\theta \right). \quad (3.5)$$

Dans la suite, on propose une approche numérique pour calculer la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  en quelques valeurs de  $\theta$  et on montre comment cette distribution stationnaire peut être calculer, dans le cas où le paramètre de contrôle  $\theta$  change dans un certain intervalle. Spécifiquement, on approchera  $\pi_{\theta+\Delta}$  par un polynôme en fonction  $\Delta$ . Ainsi, par supposition que les probabilités de transition  $P_\theta(i, j)$  sont suffisamment régulières par rapport à  $\theta$  (la condition du **théorème 3.2.2**), alors la distribution stationnaire  $\pi_{\theta+\Delta}$  peut être approchée par un polynôme de Taylor, donné sous la forme suivante :

$$\pi_{\theta+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)}, \quad (3.6)$$

où  $\pi_{\theta}^{(k)}$  est la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $\pi_{\theta}$  par rapport à  $\theta$ . Pour  $n \geq 0$ , on appelle :

$$H_{\theta}(n, \Delta) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)}. \quad (3.7)$$

Approximation de Taylor d'ordre  $n$  de  $\pi_{\theta+\Delta}$  en  $\theta$ ,

$$T_{\theta}(k, \Delta) = \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\theta}^{(k)}. \quad (3.8)$$

La représentation explicite des dérivées de la distribution stationnaire  $\pi_{\theta}$  d'ordre inférieur est donnée par [30] :

$$\pi'_{\theta} = \pi_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta},$$

et

$$\pi_{\theta}^{(2)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta} + 2\pi_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta} (P'_{\theta} Z_{\theta})^2; \quad (3.9)$$

la seconde dérivée peut être écrite comme suit :

$$\pi_{\theta}^{(2)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta} + 2\pi'_{\theta} P'_{\theta} Z_{\theta},$$

de la même façon, nous obtenons la troisième dérivée :

$$\pi_{\theta}^{(3)} = \pi_{\theta} P_{\theta}^{(3)} Z_{\theta} + 3\pi_{\theta}^{(2)} P'_{\theta} Z_{\theta} + 3\pi'_{\theta} P_{\theta}^{(2)} Z_{\theta}. \quad (3.10)$$

**Remarque 3.2.2.** Pour toute fonction de coût  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I = \{0, 1, \dots, N\}$ , on peut analyser la sensibilité de la caractéristique stationnaire  $\eta_{\theta} = \pi_{\theta} f$ , relative à la chaîne de Markov par rapport au paramètre  $\theta$ . Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$\eta_{\theta+\Delta} = \pi_{\theta+\Delta} f = \sum_{i \geq 0} f(i) \times \pi_{\theta+\Delta}(i), \quad (3.11)$$

où  $\pi_{\theta+\Delta}(i)$  est ensuite approchée par la  $i^{\text{ieme}}$  composante de  $H_\theta(n, \Delta)$ .

**Remarque 3.2.3.** Dans le cas des systèmes d'attente à capacités finie, si nous choisissons la fonction de coût comme étant l'application identique, i.e.  $f(i) = i$ , on obtient par définition la sensibilité du nombre moyen de clients dans le système. Dans ce cas (3.11) devienne :

$$\begin{aligned} L_{\theta+\Delta} &= \pi_{\theta+\Delta} f \\ &= \sum_{i=0}^N \pi_{\theta+\Delta}(i) \times i. \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Remarque 3.2.4.** On peut aussi choisir la fonction de coût  $f$  comme fonction indicatrice sur  $i = k$ , i.e.

$$f(i) = 1_{\{i=k\}} \begin{cases} 1 & \text{si } i = k; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $0 \leq k \leq N$ . Pour ce choix, nous obtiendrons l'estimation de la sensibilité de la probabilité que  $X$  est égale à  $k$ . Particulièrement, pour  $k = N$ , nous obtiendrons, par exemple, l'estimation de la mesure de performance relative aux modèles de files d'attente à capacité finie, qui est la probabilité de blocage  $P_b$ . En d'autres termes, nous obtiendrons :

$$P_b = P(i = N) = \pi_{\theta+\Delta} f = \pi_{\theta+\Delta}(N).$$

En utilisant l'estimation du nombre moyen de clients dans un système d'attente  $L_{\theta+\Delta}$  (voir (3.12)), on peut facilement déduire le temps moyen d'attente dans le système (à flux d'entrées Markovien) comme suite :

$$W_{\theta+\Delta} = \frac{L_{\theta+\Delta}}{\lambda^*},$$

où  $\lambda^* = \lambda(1 - P_b)$  est le taux effectif des inter-arrivées.

**Remarque 3.2.5.** Notons bien, que la représentation des dérivées de la distribution stationnaire est différente de celle présentée dans [18] et [4]. En fait, le résultat donné dans le (**théorème 3.2.2**), est différent du Théorème 1 dans [18]. Cependant, dans ce dernier

résultat (Théorème 1 dans [18]), les dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  par rapport à  $\theta$  sont établies en fonction de la matrice de déviation  $D_\theta$ , et celles introduites dans le (**théorème 3.2.2**), sont exprimées en termes de la matrice fondamentale  $Z_\theta$ . Ce nouveau résultat est adapté à la classe des problèmes étudiés dans notre travail. D'autre part, pour plus de précision, la relation entre les deux matrices est donnée comme suit :

$$Z_\theta = \Pi_\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (P_\theta^n - \Pi_\theta) = \Pi_\theta + D_\theta. \quad (3.13)$$

Numériquement, nous allons calculer la matrice fondamentale  $Z_\theta$  par inversion, utilisant le fait que  $Z_\theta = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$ . Cependant, dans [18] pour calculer la matrice de déviation les auteurs ont utilisé (3.13), *i.e.*  $D_\theta = Z_\theta - \Pi_\theta$ , qui est plus coûteuse en termes de complexité algorithmique. En plus, cette approche est plus facile à appliquer et surmonte les restrictions imposées par certaines méthodes comme celle établie dans [4], qui nécessite l'ergodicité géométrique de la chaîne de Markov par rapport à une certaine norme particulière correspondante à la fonction Lyapunov. Cette condition est souvent difficile à vérifier, même pour des systèmes simples.

### 3.3 Conclusion

Ce chapitre représente le cœur de notre travail. Nous avons obtenu une formule récursive du calcul de la sensibilité de la distribution stationnaire, relative à une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini. Un seul paramètre a été perturbé. Celle-ci nous a permis de développer une nouvelle approche basée sur les séries de Taylor.

Dans le chapitre prochain nous allons utiliser ces résultats pour la perturbation de la distribution stationnaire du modèle d'attente  $M/G/1/N$  à serveur non fiable avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$  'startup' et 'closedown', en considérant plusieurs distributions de temps d'achèvement du service et en discutant les performances de chacun de ces derniers.

# Chapitre 4

## Systeme $M/G/1$ à serveur non fiable avec vacances généralisées

### Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle  $M/G/1$  avec vacances et politique de pannes avec temps de fermeture (closedown) du serveur, dans lequel la longueur de la période de vacances est contrôlée soit par le nombre d'inter-arrivées pendant la période de vacances ou bien par une minuterie. Après avoir servis tous les clients présents dans la file de manière exhaustive, le serveur est à l'arrêt pour cause de fermeture. À la fin du temps d'arrêt, le serveur prend immédiatement des vacances. Notons que la période de vacances est contrôlée par deux paramètres de seuil  $N$  et  $T$ .

La deuxième partie de ce chapitre consiste à évaluer les différentes mesures de performance du modèle d'attente  $M/G/1$  avec vacances interruptions de service, et ce en utilisant l'approche de développement en séries de Taylor. Ainsi une analyse numérique de cette file d'attente sera considérée.

#### Nomenclature

$N$  : Capacité de la file pour laquelle le serveur sort de vacances.

$T$  : Temps d'attente de clients prioritaires depuis la fin du service.

$S(t)$  : Fonction de distribution du temps de service  $S$ .

$R(t)$  : Fonction de distribution du temps de réparation  $R$ .

$H(t)$  : Fonction de distribution du temps d'achèvement de service.

$U(t)$  : Fonction de distribution du temps de lancement du serveur.

$f_k$  : Probabilité que  $k$  clients arrivent pendant les vacances.

$\varphi_k$  : Probabilité d'avoir  $k$  clients pendant le temps de vacances généralisées.

$F(z)$  : Fonction génératrice de  $f_k$ .

$\varphi(z)$  : Fonction génératrice de  $\varphi_k$ .

## 4.1 Description et supposition du modèle

Considérons le modèle de file d'attente  $M/G/1$  avec vacances généralisées, où la fin de la période de vacances est contrôlée par deux paramètres de seuil  $N$  et  $T$ . La description de ce modèle est donnée comme suit : Le serveur termine ses vacances dès que le nombre des arrivées est  $N$ , ou le temps d'attente du client principal atteint une unité  $T$  depuis la fermeture du serveur.

1. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Le temps de service fourni par le serveur est une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée notée ( $S$ ), avec une fonction de distribution générale  $S(t)$ . Si à un instant quelconque, un client arrive, il passe directement en station de service. L'arrivée des clients forme une seule file d'attente, basée sur l'ordre de ses derniers. Le serveur peut servir qu'un client à la fois.
2. L'occurrence des pannes de serveur forment un processus de Poisson de paramètre  $\alpha$ . A chaque fois que le serveur est soumis à une rupture, il est immédiatement réparé. Le temps de la réparation est une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée ( $R$ ), avec une fonction de distribution générale  $R(t)$ .
3. Dans le cas où le serveur est opérationnel et tombe en panne, il est envoyé à la réparation et le client qui était en service devrait attendre la réparation du serveur pour compléter le reste de son service. Immédiatement après que le serveur soit réparé, il commence à servir les clients jusqu'à ce que le système soit vide, notons que le temps de service est cumulatif. Un client qui arrive et qui trouve le serveur occupé ou en panne doit attendre dans la file jusqu'à ce qu'il soit à nouveau opérationnel. Bien qu'aucun service ne se produise pendant la période de la réparation du serveur, les clients continuent à arriver selon un processus de Poisson.

4. À chaque fois que le système devient vide, le serveur est automatiquement désactivé par un temps de fermeture. Lorsque le nombre d'arrivées dans la file atteint un seuil prédéterminé  $N$ , où que le temps d'attente le plus élevé du client principal atteint une unité  $T$  depuis le temps de la fermeture, le serveur est immédiatement réactivé et est temporairement indisponible. Il a besoin d'un temps de lancement avec une longueur aléatoire  $U$  avant le service initial. Dès que le serveur finit le lancement, il commence à servir les clients de la file jusqu'à ce que la file devienne vide.
5. Si un client arrive pendant un temps de fermeture, le service commence directement sans satisfaire les conditions de vacances  $NT$  et sans un temps de lancement [20].

## 4.2 Analyse du système

Avant d'analyser ce système, on se réfère à certains résultats du système d'attente  $M/G/1$  à serveur non fiable classique. Soit  $H$  une variable aléatoire représentant le temps d'achèvement d'un client (la  $n^{ième}$  arrivée), c'est l'intervalle de temps où le serveur commence à servir le client (la  $n^{ième}$  arrivée) jusqu'à la fin de son service, qui comprend aussi le temps de réparation du serveur causée par les probables pannes durant le temps de service de la clientèle (le temps du service de la  $n^{ième}$  arrivée). Pour ce modèle, Gaver [9] et Tang [34] ont établi que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H] &= \mathbb{E}[S](1 + \alpha\mathbb{E}[R]), \\ \mathbb{E}[H^2] &= (1 + \alpha\mathbb{E}[R])^2\mathbb{E}[S^2] + 2\mathbb{E}[S]\mathbb{E}[R^2], \\ \rho_H &= \lambda\mathbb{E}[H] = \rho(1 + \alpha\mathbb{E}[R]),\end{aligned}$$

où  $\rho = \lambda\mathbb{E}[S]$ .

Maintenant, nous considérons un système d'attente  $M/G/1$  dans lequel le serveur peut tomber en panne sachant qu'il est opérationnel, et peut prendre des vacances généralisées lorsque le système est vide.

Nous appelons une **période de oisiveté**, un intervalle de temps où le serveur est non disponible (pour plusieurs raisons). L'intervalle du temps quand le serveur fonctionne de façon continue est appelé une **période d'activité**. Une **période de vacances** peut contenir plusieurs vacances, tout comme une période d'activité peut contenir un certain nombre

de temps de service. Au cours de la période d'activité, le serveur peut tomber en panne et il est immédiatement pris en charge par un réparateur. Cela est appelé la **période de panne**. Après que le serveur soit réparé, il revient pour fournir le service jusqu'à ce qu'il ne reste aucun client dans le système. La **période d'achèvement** peut être représentée comme la somme de toutes les périodes d'activités et périodes de pannes. L'intervalle du temps constitué d'une période de oisiveté et une période d'achèvement est appelé un **cycle d'activité**.

Pour analyser ce système, notons par

$a_k$  : la probabilité que  $k$  clients arrivent durant le temps d'achèvement, avec :

$$a_k = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dH(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Où,  $H(t)$  est fonction de temps de  $H$ .

$\varphi$  : distributions de probabilité d'avoir  $k$  clients durant le temps de vacation généralisée.

#### 4.2.1 La chaîne de Markov induite et matrice de transition

On considère l'évaluation du nombre de clients présents dans le système à un instant  $t$ , représenté par le processus stochastique  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  avec  $X(t)$  représente la taille du système à l'instant  $t$ , où le client en service est pris en compte.

Soit la suite de variables aléatoires  $T_{n=1,2,\dots}$  où  $T_n$  représente, pour tout  $n = 1, 2, \dots$  l'instant de départ du  $n^{\text{eme}}$  client, après que son service soit accompli. A présent, considérons le processus  $L = X(T_n)_{n=1,2,\dots}$  induit par le processus stochastique  $X$  qu'on notera par :

$$L = \{L_n = X(T_n)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Avec  $L_n$ , le nombre de clients dans le système après le  $n^{\text{ieme}}$  départ. La séquence de variables aléatoires  $L_n; n = 1, 2, 3, \dots$  constitue une chaîne de Markov.

Comme dans le système classique de file d'attente  $M/G/1$ ; pour ce système, les probabilités de transition à une étape  $p_{ji} = Pr[L_{n+1} = i / L_n = j]$ , pour tout  $(j, i) \in E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \times E$ , sont données comme suit :

$$P_{ji} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{i+1} \varphi_k a_{i-j+1} & \text{si } j = 0, i \geq 0, \\ a_{i-j+1} & \text{si } i \geq j - 1, \\ 0 & \text{si } j \geq 1, 0 \leq i < j - 1. \end{cases}$$

$$P_{ji} = \begin{pmatrix} \varphi_1 a_0 & \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_0 & \varphi_1 a_2 + \varphi_2 a_1 + \varphi_3 a_0 & \cdots & \sum_{k=1}^{i+1} \varphi_k a_{i-k+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{i-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{i-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons en premier,  $f$  comme le nombre de clients qui arrivent au cours de chaque vacance, et  $\varphi$  comme le nombre de clients qui arrivent au cours d'une période de vacances. Les distributions de probabilité et leurs fonctions génératrices pour  $f$  et  $\varphi$  sont données comme suit [20] :

$$\begin{aligned} f_k &= Pr[f = k], k = 0, 1, 2, \dots, \\ \varphi_k &= Pr[\varphi = k], k = 1, 2, 3, \dots, \\ F(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k Z^k \text{ et } \varphi(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k Z^k, \end{aligned}$$

avec

$$\varphi_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, T = 0, 1, 2, \dots.$$

Une période de vacance commence seulement quand il n'y a pas de clients dans le système (service exhaustif). Le nombre  $\varphi$  de clients qui arrivent pendant une période de vacance généralisée (**période de oisiveté**) peut dépendre du processus des arrivées pendant la période de vacance généralisée.

### 4.2.2 Régime stationnaire et fonction génératrice

Dans le but de montrer la convergence de la chaîne de Markov vers un régime stationnaire, il est nécessaire de déterminer une condition suffisante pour l'ergodicité de la chaîne de Markov. Dans ce cas, le régime stationnaire de la chaîne de Markov existe et notons alors les distributions de probabilité d'état stationnaire par  $\pi_k$  : probabilité d'avoir  $k$  clients dans le système à la fin de service d'un client [20].

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr[L_n = k]; \forall k = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.1)$$

Le régime stationnaire existe sous la condition suivante [20] :

$$\rho_H = \lambda \mathbb{E}[H] = \lambda \mathbb{E}[S](1 + \alpha \mathbb{E}[R]) < 1, \quad (4.2)$$

où  $\rho_H$  représente l'intensité du trafic. Par conséquent, sous la condition (4.2), la chaîne de Markov homogène admet une unique distribution de probabilités stationnaires  $\pi = \{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Celle-ci est l'unique solution du système infini d'équations linéaires suivant :

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1. \quad (4.3)$$

D'où, on obtient :

$$\pi_k = \pi_0 \sum_{j=1}^{k+1} \varphi_j a_{k-j+1} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k-j+1}. \quad (4.4)$$

En multipliant l'équation (4.4) par  $z^k$  et en sommant sur  $k = 0, 1, 2, \dots$ , nous obtenons alors [20] :

$$\Pi(z) = \pi_0 \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j Z^{j-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k-j+1} Z^{k-j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z^{j-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k-j+1} Z^{k-j+1} \quad (4.5)$$

$$= \frac{\pi_0 \varphi(z) H^*(\lambda - \lambda z)}{z} + \frac{(\Pi(z) - \pi_0) H^*(\lambda - \lambda z)}{z}, \quad (4.6)$$

où  $H^*(.)$  est *LST* de  $H$  et  $\Pi(z)$  est la fonction génératrice de la distribution de probabilité stationnaire  $\pi$ .

À cet effet, notons la fonction génératrice de  $\varphi$  et la transformée de Laplace de  $H$  respectivement comme suit :

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i z^i, \quad (4.7)$$

$$H^*(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dH(t), \quad (4.8)$$

et

$$\Pi(z) = \frac{\pi_0 [1 - \varphi(z)] H^*(\lambda - \lambda z)}{H^*(\lambda - \lambda z) - z}. \quad (4.9)$$

La condition de normalisation  $\Pi(1) = 1$ , nous donne :

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho_H}{\mathbb{E}[\varphi]}. \quad (4.10)$$

et cette dernière relation montre que la condition (4.2) est aussi nécessaire [20]. D'où la condition (4.10) est une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit ergodique.

Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire est donné par [20] :

$$\mathbb{E}[L] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(\varphi - 1)]}{2\mathbb{E}[\varphi]} + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[H^2]}{2(1 - \rho_H)} + \rho_H. \quad (4.11)$$

### 4.3 Analyse du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec vacances généralisées et politique de pannes $NT$

À la différence de la section précédente, où on a présenté quelques résultats analytiques concernant le modèle d'attente  $M/G/1/\infty$  avec vacance généralisée et politique de pannes  $NT$ . Dans cette section, nous entreprendrons une autre démarche pour l'analyse du même modèle à capacité finie, et ce en utilisant l'approche basée sur les développements en série de Taylor. Ainsi, on explorera particulièrement la sensibilité des performances du modèle d'attente considéré par rapport au service du client et à la période de vacances, qui est contrôlée par deux paramètres de seuil  $N$  et  $T$ . nous fournissons une série de résultats numériques pour différentes performances du modèle. Les résultats obtenus sont exhibés dans des tableaux et des figures. Tous les calculs ont été réalisés avec le logiciel Matlab.

Dans l'analyse des performances d'un système de files d'attente, le processus de service des clients dans le système joue un rôle très important. En effet, la détermination du processus de service est nécessaire pour la maîtrise de l'espace d'attente. Cependant, dans la plupart des situations, le processus du temps service dans un système de files d'attente est souvent différent du processus de Poisson. Dans ce sens, nous avons considéré quatre types de distributions du temps d'achèvement de service du  $n^{ieme}$  client à savoir : (1) Déterministe (D); (2) Exponentielle (M); (3) Hyper-exponentielle ( $H_2$ ); (4) Erlang (E).

Pour ces distributions, nous obtenons les différents coefficients de variation (CV) [30] :

1. **Déterministe** : Le processus déterministe a le coefficient de variation  $CV = 0$  ;
2. **Exponentielle** : Le processus de Poisson a le coefficient de variation  $CV = 1$  ;
3. **Hyper-exponentielle** : Le processus hyper-exponentielle a le coefficient de variation  $CV \geq 1$ . Dans notre cas, nous supposons que la fonction de densité de la distribution

$H$  est définie comme suit :

$$f(t) = q\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-q)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0,$$

où,  $0 \leq q \leq 1$  et  $\lambda^{-1} = q\lambda_1^{-1} + (1-q)\lambda_2^{-1}$ .

En changeant les valeurs du paramètre  $q$ , on peut obtenir différentes valeurs de  $CV$ .

Le coefficient de variation,  $CV$ , correspondant à cette distribution est donné par :

$$CV = \sqrt{\frac{1 + (2q - 1)^2}{1 - (2q - 1)^2}}.$$

4. **Erlang** : Les valeurs du coefficient de variation de la loi d'Erlang d'ordre deux varient entre  $1/\sqrt{2}$  et 1. La fonction de densité correspondante à cette distribution est donnée par :

$$f(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t})}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad t \geq 0.$$

Posons  $\lambda^{-1} = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}$  pour  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . De plus, si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda$ , ceci réduit à la distribution d'Erlang régulière de moyenne  $\lambda$ . En d'autres termes, sa densité est définie comme suit :

$$f(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Ainsi, le coefficient de variation de cette distribution est donné par :

$$CV = \sqrt{\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Dans le Tableau 4.1, nous présentons les résultats numériques obtenus pour la file d'attente  $M/D/1/N$  avec vacances généralisées et une politique de pannes  $NT$ . En fixant les valeurs des différents paramètres : le taux du service est déterministe, avec  $T_1 = 0.5$ ,  $T = 6$ , la capacité d'attente dans le système  $N = 5$ , l'ordre du développement en série de Taylor est  $k = 3$ . Tous les résultats numériques sont exhibés avec 6 décimales. Le paramètre de perturbation varie entre 0 et 0.1 ( $0 \leq \Delta \leq 0.1$ ). Le coefficient de variation associé à la loi Déterministe est  $CV = 0$ .

La distribution stationnaire représentant le nombre de clients dans le système, en variant les valeurs du taux de service, est donnée en tableau 4.1.

$\Delta/\pi$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
0	0.042184	0.114665	0.197006	0.281084	0.365059
0.01	0.041591	0.113622	0.196194	0.281339	0.367252
0.02	0.041004	0.112578	0.195372	0.281584	0.369459
0.03	0.040421	0.111536	0.194541	0.281584	0.369459
0.04	0.039844	0.110494	0.193700	0.282041	0.373919
0.05	0.039272	0.109452	0.192850	0.282253	0.376171
0.06	0.038704	0.108412	0.191990	0.282454	0.378438
0.07	0.038142	0.107373	0.191121	0.282643	0.380719
0.08	0.037585	0.106335	0.190243	0.282822	0.383014
0.09	0.037033	0.105298	0.189355	0.282988	0.385323
0.1	0.036486	0.104263	0.188459	0.283143	0.387646

TABLE 4.1 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d’attente  $M/D/1/5$  avec vacances et politique de panne  $NT$

Dans le deuxième exemple, on considère le modèle d’attente  $M/M/1/N$  avec vacances et une politique de pannes  $NT$ . Le tableau 4.2, présente les valeurs de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d’attente  $M/M/1/N$ . Dans ce cas, les différents paramètres de ce modèle sont finis comme suit :  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 4$ ,  $T = 6$  et  $N = 5$ .

$\Delta/\pi$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
0	0.124216	0.186316	0.217310	0.232588	0.239567
0.01	0.123862	0.186094	0.217313	0.232791	0.239938
0.02	0.123508	0.185871	0.217315	0.232995	0.240308
0.03	0.123155	0.185648	0.217317	0.233199	0.240679
0.04	0.122803	0.185425	0.217318	0.233402	0.241050
0.05	0.122451	0.185201	0.217318	0.233605	0.241421
0.06	0.122101	0.184977	0.217318	0.233809	0.241793
0.07	0.121751	0.184752	0.217317	0.234012	0.242165
0.08	0.121403	0.184526	0.217315	0.234216	0.242538
0.09	0.121055	0.184300	0.217312	0.234419	0.242911
0.1	0.120707	0.184074	0.217309	0.234622	0.243285

TABLE 4.2 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente  $M/M/1/5$  avec vacances et politique de panne  $NT$

Les résultats numériques relatifs à la distribution stationnaire du modèle d'attente  $M/H_2/1/N$  sont exhibés en tableau 4.3, où on a fixé les paramètres du modèle comme suit :  $\lambda = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $T = 6$ ,  $q = 0.3$ .

Le coefficient de variation associé aux valeurs fixées est  $CV = 1.18$

$\Delta/\pi$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
0	0.070425	0.135429	0.199290	0.264098	0.330755
0.01	0.070013	0.134941	0.199008	0.264299	0.331736
0.02	0.069603	0.134455	0.198728	0.264500	0.332711
0.03	0.069195	0.133972	0.198450	0.264701	0.333680
0.04	0.068790	0.133490	0.198172	0.264902	0.334644
0.05	0.068386	0.133010	0.197897	0.265104	0.335602
0.06	0.067984	0.132532	0.197622	0.265305	0.336554
0.07	0.067584	0.132056	0.197350	0.265507	0.337501
0.08	0.067186	0.131582	0.197079	0.265709	0.338442
0.09	0.066790	0.131109	0.196809	0.265911	0.339378
0.1	0.066396	0.130639	0.196541	0.266114	0.340308

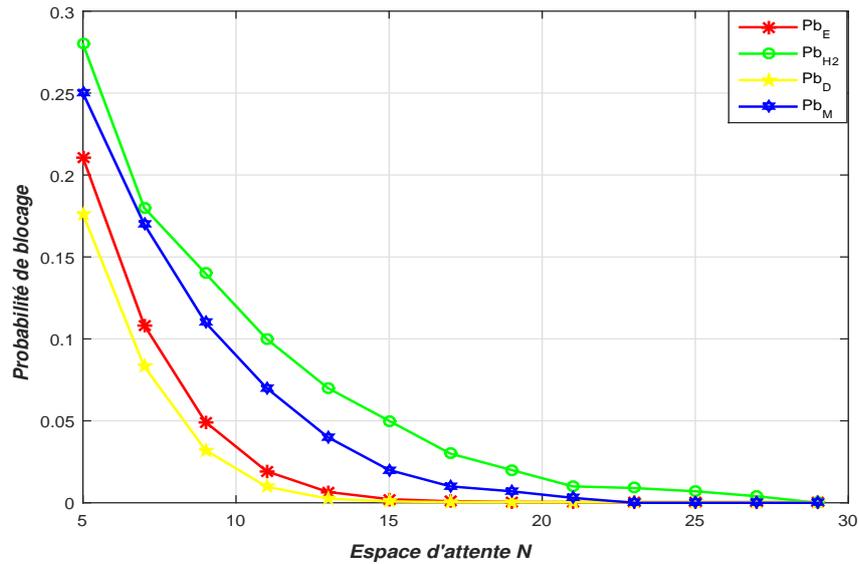
TABLE 4.3 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d’attente  $M/H_2/1/5$  avec vacances et politique de pannes  $NT$

Finalement, dans le Tableau 4.4, nous présentons les résultats obtenus pour la distribution stationnaire associée au modèle d’attente  $M/E/1/N$ , avec  $\lambda = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $T = 6$ ,  $N = 5$ .

$\Delta/\pi$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$
0	0.002736	0.013683	0.053818	0.199760	0.730000
0.01	0.002675	0.013448	0.053223	0.198872	0.731780
0.02	0.002615	0.013217	0.052635	0.197987	0.733543
0.03	0.002557	0.012992	0.052055	0.197106	0.735288
0.04	0.002500	0.012770	0.051482	0.196228	0.737018
0.05	0.002445	0.012553	0.050916	0.195354	0.738730
0.06	0.002390	0.012340	0.050358	0.194483	0.740426
0.07	0.002338	0.012131	0.049807	0.193616	0.742107
0.08	0.002286	0.011926	0.049263	0.192752	0.743771
0.09	0.002236	0.011724	0.048726	0.191893	0.745419
0.1	0.002187	0.011527	0.048195	0.191037	0.747052

TABLE 4.4 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d’attente  $M/E/1/5$  avec vacances et politique de pannes NT

Dans la figure 4.1, nous présentons le comportement de la probabilité de blocage  $P_b$  en ce qui concerne le changement de la capacité d’attente du système  $N$ . Dans ce cas, nous avons fixé le taux des inter-arrivées  $\lambda = 2$ . Les valeurs des autres paramètres sont les mêmes que ceux fixés dans les tableaux précédents. Les résultats numériques obtenus sont illustrés en 4.1. Il est évident de voir que l’augmentation de la capacité d’attente du système  $N$  engendre la diminution de la probabilité de blocage  $P_b$ , et ce pour les quatre types de distributions du temps d’achèvement de service. En effet, à chaque fois que la capacité du système  $N$  est plus grande, moins de clients sont refoulés

FIGURE 4.1 – Probabilité de blocage en fonction de la capacité de la file  $N$ .

Maintenant, nous fixons  $N = 5$  et nous nous intéressons à la variation de la probabilité de blocage  $P_b$  par rapport à l'intensité du trafic  $\rho = \lambda \setminus \mu$ . Les valeurs de  $\rho$  varient de 0,5 à 1,5, tout en perturbant la valeur de  $\lambda$  et en considérant les quatre types de distributions du temps d'achèvement de services que nous avons déjà considérés dans les exemples numériques précédents, et ce pour les mêmes valeurs des paramètres fixés pour la figure 4.2. Ainsi, d'après les résultats obtenus, on remarque que les valeurs de la probabilité de blocage augmentent pour chaque pas de  $\rho$  et cela à cause de l'augmentation des taux d'arrivées dans la file d'attente.

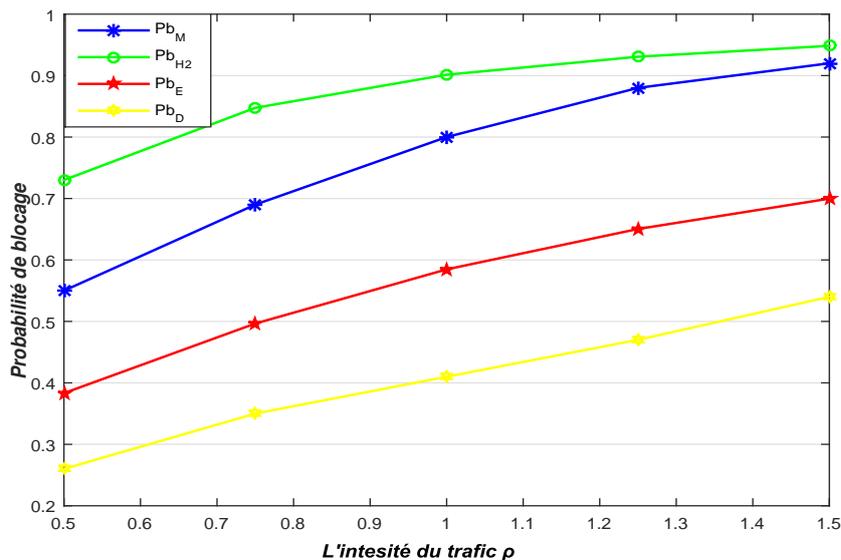


FIGURE 4.2 – Probabilité de blocage en fonction de l'intensité du trafic  $\rho$ .

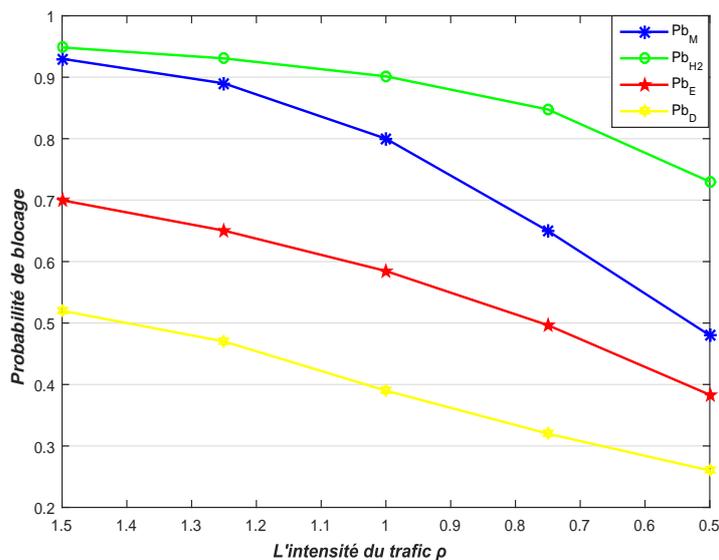


FIGURE 4.3 – Probabilité de blocage en fonction de l'intensité du trafic  $\rho$ .

À la différence de la figure précédente, la figure 4.3 montre la réciproque de la Figure précédente, à chaque fois que le taux des inter-arrivées décroît, la probabilité de blocage est moins importante.

Par la suite, nous supposons que la capacité du système est fixée à  $N = 5$  et nous allons illustrer le comportement du nombre moyen de clients dans le système  $L_s(\Delta)$  en fonction de la perturbation  $\Delta$ ,  $0 \leq \Delta \leq 0.1$ , à chaque fois que le paramètre de perturbation  $\Delta$  augmente, on remarque que le nombre moyen de clients dans la file augmente. Ce constat est valable pour les quatre types de distributions qu'on a considéré. Voir la figure 4.4.

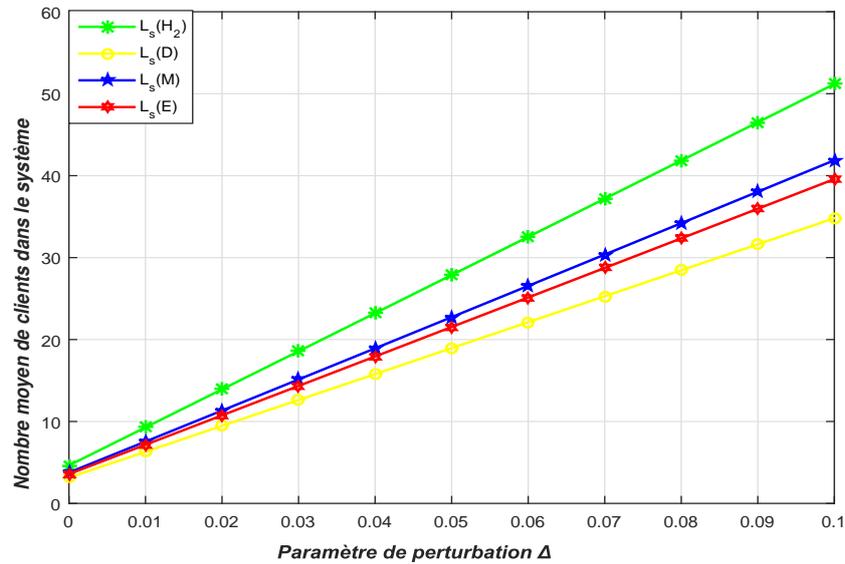


FIGURE 4.4 – Nombre moyen de clients dans le système en fonction de perturbation  $\Delta$ .

Nous illustrons maintenant les nombres moyens de clients dans le système en faisant varier la capacité du système de 5 à 20. On remarque qu'à chaque fois que  $N$  augmente, le nombre moyen de clients est plus important. Cela est montré en figure 4.5. Ceci est justifié par le fait que plus on augmente la capacité d'attente, plus le nombre de clients dans le système augmente.

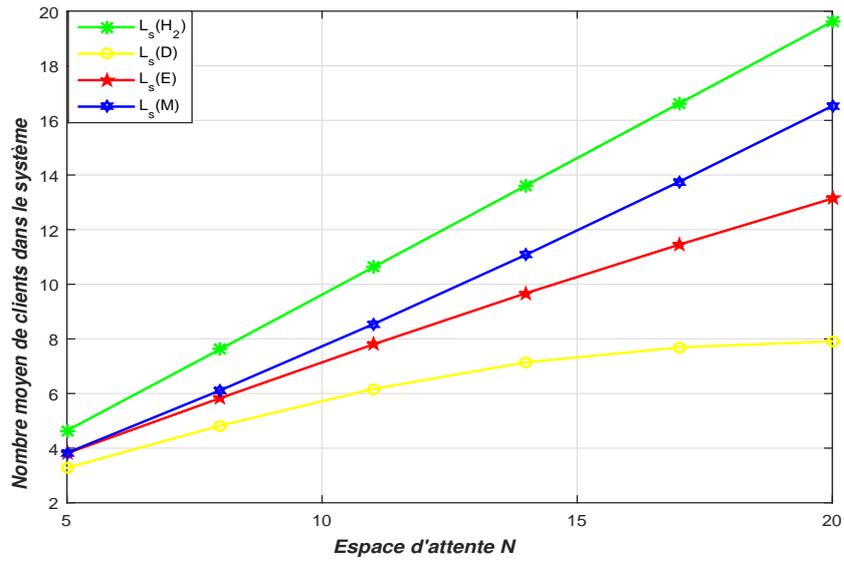


FIGURE 4.5 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la capacité  $N$ .

Concernant la variation du temps moyen d'attente dans le système  $W_s$  en fonction de la variation du taux de service, on constate que  $W_s$  augmente à chaque fois que la valeur du taux de service croit. Les résultats numériques sont illustrés en figure 4.6.

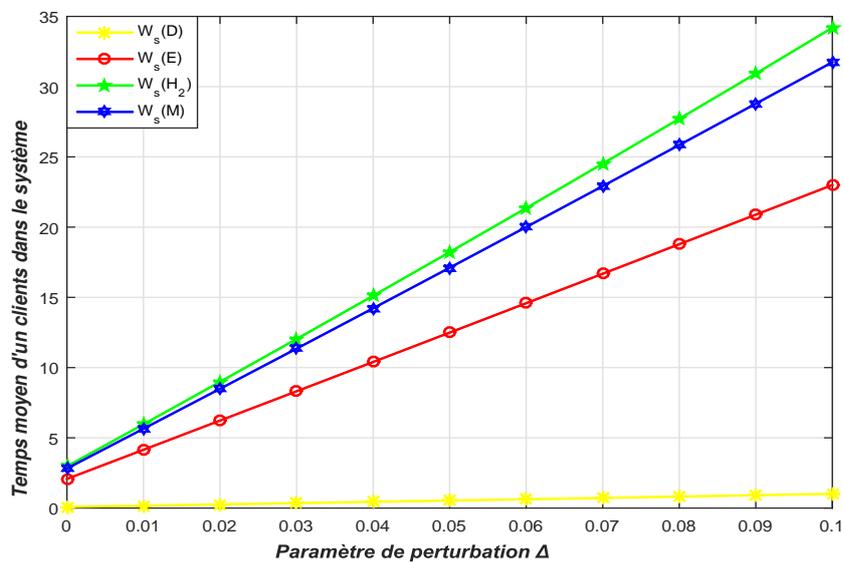


FIGURE 4.6 – Temps moyen d'attente dans le système en fonction de  $\Delta$ .

Dans la figure 4.7, nous supposons que la capacité du système  $N$  varie. On voit bien que le temps moyen d'attente dans le système  $W_s$  est croissant. Cela est tout à fait logique, compte tenu de l'accroissement du nombre de clients dans la file.

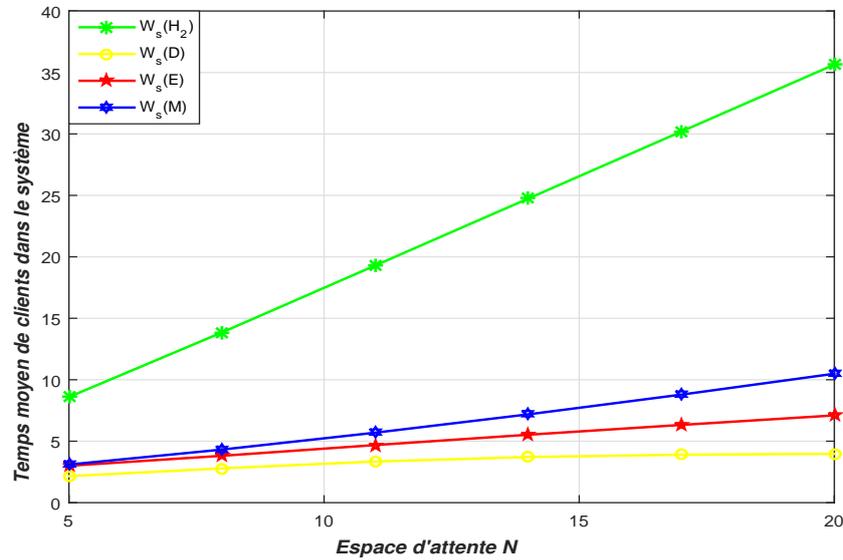


FIGURE 4.7 – Temps moyen d'attente dans le système par rapport à la capacité  $N$ .

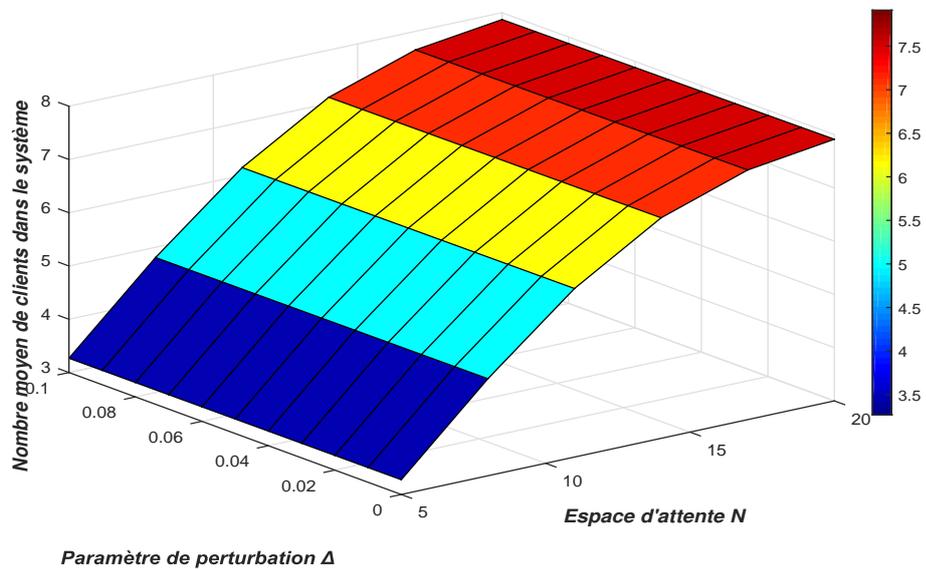


FIGURE 4.8 – Nombre moyen de clients dans le système par rapport à la capacité  $N$  et  $\Delta$  de la file  $M/M/1/N$ .

La figure 4.8, illustre le nombre moyen de clients dans le système  $L_s(\Delta)$  en fonction de la capacité du système  $N$  et  $\Delta$  pour la file d'attente  $M/M/1/N$  avec politique de pannes  $NT$ . On remarque qu'à chaque fois que  $N$  et  $\Delta$  croient, le nombre moyen de clients dans le système augmente. Cela est due à l'augmentation du taux des inter-arrivées et la capacité du système à accueillir plus de clients.

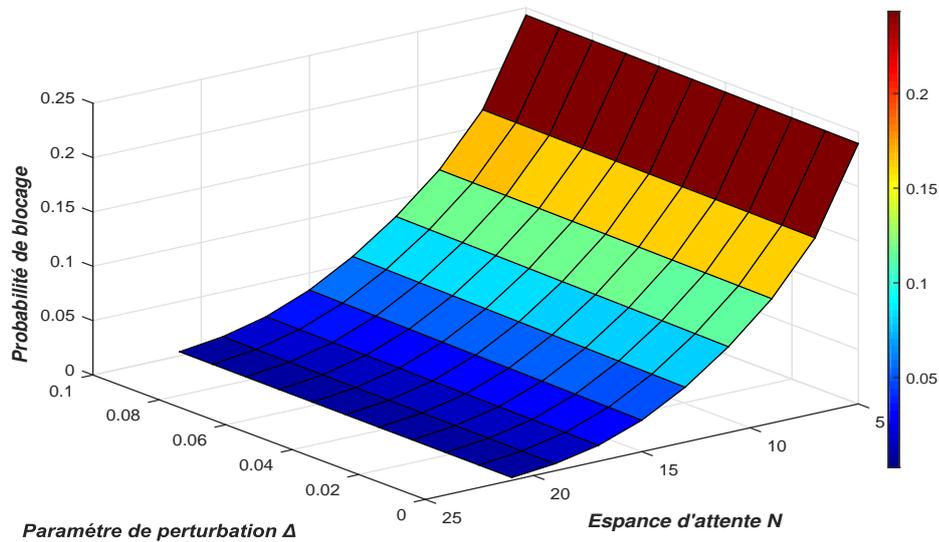


FIGURE 4.9 – Probabilité de blocage par rapport à la capacité  $N$  et  $\Delta$  de la file  $M/M/1/N$ .

Dans la figure 4.9, nous essayons de représenter la probabilité de blocage en fonction de deux paramètres  $N$  et  $\Delta$ , tels que ces deux derniers varient respectivement de 5 à 20 et de 0 à 0.1. Comme nous le montre la figure, la probabilité de blocage  $P_b$  diminue à chaque fois que la capacité du système et  $\Delta$  augmente d'un pas.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré une analyse numérique de la file d'attente  $M/G/1/N$  avec vacances et interruptions de service, et ce en utilisant l'approche de développement en série de Taylor des chaînes de Markov (Ouazine et Abbas AMM 2016) [29].

En particulier, une analyse de sensibilité des différentes mesures de performance du modèle en question a été également considérée. Cela nous a permis de juger la robustesse de ces performances par rapport à la perturbation du taux des inter-arrivées. De même, cette analyse est supportée par plusieurs exemples numériques en illustrant les comportements de nombre moyen de clients dans le système, la probabilité de blocage et le temps moyen de séjour par rapport à la perturbation des paramètres du modèle d'attente étudié.

# Conclusion générale

L'analyse des performances de nombreux systèmes réels conduit à la formulation et l'étude des modèles de files d'attente. Cependant, les processus stochastiques induits par l'analyse de ces systèmes sont généralement très difficiles à traiter par des méthodes analytiques. Ainsi, la résolution est complexe ou possède des solutions qui ne sont pas facilement interprétable afin que le praticien puisse en bénéficier. De même, on peut citer le degré de difficulté pour obtenir certaines mesures de performances de quelques modèles de files d'attente, tels que les modèles d'attente avec vacances et avec rappels. Dans l'optique de Pallier à cette difficulté, on fait recours à des méthodes d'approximation, où leurs algorithmes de résolution restent encore à développer et à améliorer du point de vue numérique.

Parmi ces méthodes d'approximation, on peut citer celle de développements en séries de Taylor des chaînes de Markov, qui est une méthode flexible et applicable à une large classe de systèmes de files d'attente. En effet, elle est devenue un outil important pour l'analyse des systèmes stochastiques pouvant être écrits par des chaînes de Markov, tout en mettant l'accent sur l'analyse de perturbation. Particulièrement, l'application de cette approche nous permet d'éviter l'utilisation de transformées de Laplace et / ou des techniques d'inversion numériques, qui sont principalement utilisées dans la littérature.

L'avantage de la méthode de développements en séries de Taylor étant donné un nombre fini de dérivées d'ordre supérieur, cela nous permet d'évaluer les fonctions de performance d'un certain modèle comme étant une fonction du paramètre d'intérêt. Dans ce cas, une telle mesure de performance est représentée sous forme polynômiale, ce qui facilite leurs manipulations mathématiques (optimisation, analyse de sensibilité, etc).

La contribution majeure de ce travail consiste à utiliser le développement d'une nouvelle approche, basée sur les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov établie par Ouazine et Abbas [29], pour l'analyse du système complexe  $M/G/1/N$  avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$ . A l'aide de ce développement nous avons pu évaluer plusieurs performances de notre système à savoir : La distribution stationnaire, la probabilité de blocage, le nombre moyen de clients dans le système et enfin le temps moyen de séjour d'un client dans le système.

Nous nous sommes intéressés à cet effet, aux mesures de performances de ce modèle, pour différentes perturbations de certains paramètres numérique et fonctionnelles. Plus précisément, les paramètres numériques perturbés sont la distribution de la durée de service généralisé  $H(t)$  (l'achèvement), la capacité  $N$  du système et enfin le taux des inter-arrivées.

Les résultats obtenus dans le cadre de ce mémoire ouvrent de nombreuses perspectives :

1. Application d'une autre méthode d'approximation. Par exemple la méthode de stabilité forte.
2. Etude des systèmes de files d'attente  $M/G/1$  à serveur non fiable et vacances généralisées et service par groupe.
3. Etude d'autres systèmes de files d'attentes à serveur non fiable avec vacances généralisées, en introduisant d'autres paramètres fonctionnels tels que : les priorités, les rappels.
4. Élargir l'applicabilité de la même approche à l'analyse des autres modèles et réseaux de files d'attente.

# Bibliographie

- [1] A. Florin (**2014**). Les Probabilités du Bonheur, et les Applications des Processus de Markov et de Levy dans les Mathématiques financières, Files d'attente et Fiabilité. Université de Pau, pp. 32-35.
- [2] A. S. Alfa, I. Frigui (**1996**). Discrete  $NT$ -policy single server queue with Markovian arrival process and phase type service, Eur. J. Operat. Res. 88 pp. 599-613.
- [3] A. S. Alfa, W. Li, (**2000**). Optimal  $(N, T)$ -policy for  $M/G/1$  system with cost structures, Perform. Evaluat. 42 pp. 265-277.
- [4] B. Heidergott, and A. Hordijk (**2003**). Taylor series expansions for stationary Markov chains. Advances in Applied Probability. 35 pp. 1046-1070.
- [5] B. T. Doshi (**1986**). Queueing systems with vacations. A survey-Queueing Systems. 1 pp. 29-66.
- [6] B. Taylor (**1969**). Methodus Incrementorum Directa et Inversa. [Direct and Reverse Methods of Incrementation]. London (1715), pp. 21-23. (Proposition VII, Theorem 3, Corollary. 2). Translated into English in D.J. Struik, A Source Book in Mathematics 1200-1800 (Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press ). pp. 329-332.
- [7] D. J. Mercier (**2003**). Formules de Taylor. Applications. IUMF de Guadeloupe, France.
- [8] D. P. Heyman, and A. Reeves (**1989**). Numerical solution of linear equations arising in Markov chain models, ORSA Journal on Computing. 1 pp. 52-60.
- [9] D. P. Gaver (**1962**). A waiting line with interrupted service including priorities. J. Roy. Stat. Soc, B25 pp. 73-90.
- [10] É. Pardoux (**2006**). Processus de Markov et applications. Edition Dunod, pages 103-108.
- [11] F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, and F. G. Palacios (**1975**). Open closed and mixed networks with different classes of customer. JACM 22 (2) pp. 248-268.
- [12] J. G. Kemeny, and J. L. Snell (**1960**). Finite Markov Chains, Van Nostrand, New York.

- 
- [13] J. Keilson (**1979**). Markov Chain Models-Rarity and Exponentiality. Springer-Verlag, New York.
- [14] J. L. Barlow (**2000**). Stable computation with the fundamental matrix of a Markov chain. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 22 pp. 230-241.
- [15] J .M. Garcia, O. Burn, D. Gauchard (**2002**). Solution analytique transitoire de  $M/D/1/N$ . Journal of Applied Probability. 39 (4) pp. 853-864.
- [16] J. R. Artalejo, T. Phung-Duc (**2013**). Single server retrial queues with two way communication, Applied Mathematical Modelling. 37 pp. 1811-1822.
- [17] J. R. Artalejo, T. Phung-Duc (**2011**). Markovian single server retrial queues with two way communication, In : Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, p. Seoul, pp. 1-7.
- [18] K. Abbas, B. Heidergott, and D. Aissani (**2013**). A functional approximation for the  $M/G/1/N$  queue. Discrete Event Dynamic Systems. 23 pp. 93-104.
- [19] K. G. Gakis, H.K. Rhee and B.D. Sivazlian (**1995**). Distributions and first moments of the busy and idle periods in controllable  $M/G/1$  queueing models with simple and dyadic policies, Stochast. Anal. Applic. 13 (1) pp. 47-81.
- [20] Ke. Jau-Chuan (**2006**). On  $M/G/1$  system under  $NT$  policies with breakdowns, startup and closedown, pp. 49-66.
- [21] L. Kleinrock (**1993**). On the modeling and analysis of computer networks, proceedings of the IEEE. pp. 15-17.
- [22] M. F. Neuts (**1978**). Markov chains with applications in queueing theory, with have a matrix geometric invariant probability vector. Advances in Applied Probability. 10 pp. 185-212.
- [23] M. Lefebvre (**2005**). Cours et exercices de probabilité appliquées, presses intl, polytechnique, pp. 2-4.
- [24] P. Brémaud (**1999**). Markov Chains : Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. Springer, USA.
- [25] R. J. Boucherie, O. J. Boxma, and K. Sigman (**1997**). A note on negative customers,  $GI/G/1$  workload and risk processes. Probability in the Engineering and Informational Sciences. 11 pp. 305-311.
- [26] S. Fuhrmann (**1984**). A note on the  $M/G/1$  queue with server vacations. Operations Research, 32 pp. 1368-1373.
-

- 
- [27] S. Fuhrmann et R.B. Cooper (**1985**). Stochastic decomposition in the  $M/G/1$  queue with generalized vacations. *Operations Research*. 33 (5) pp. 1117-1129.
- [28] S. Hur, J. Kim, C. Kang (**2003**). An analysis of the  $M/G/1$  system with  $N$  and  $T$  policy, *Appl. Math. Model.* 27 pp. 665-675.
- [29] S. Ouazine, and K. Abbas (**2016**). Development of Computational Algorithm fo Multiserver Queue with Renewal Input and Synchronous Vacation. *Applied Mathematical Modelling*. 40 pp. 1137-1156.
- [30] S. Ouazine (**2016**). Approche des Développements en Séries de Taylor pour l'Approximation Fonctionnelle des Systèmes de Files d'Attente, (Thèse de Doctorat : Univ. de Bejaia)
- [31] T. M. Liebling, D. Werra and J. F. Heche (**2003**). Recherche opérationnelle pour ingénieurs tome 02, Presses polytechniques et universitaires romandes. pp. 105-110.
- [32] T. J. Ou (**1984**). On the  $M/G/1$  queue with additional inputs. *J. Appl. Prob*, pp. 21 :129-142.
- [33] W. K. Grassmann, M. I. Taksar and D. P. Heyman (**1985**). Regenerative analysis and steady state distributions. *Operational Research*. 33 pp. 1107-1116.
- [34] Y. H. Tang, (**1997**). A single-server  $M/G/1$  queueing system subject to breakdowns-some reliability and queueing problem, *Microelectron. Reliab.* 37 (2) pp. 315-321.
- [35] Y. Levey et U. Yechiali (**1975**). Utilization for the idle time in an  $M/G/1$  queueing system. *Management Science*. 22 pp. 202-211.
- [36] Y. N. Doganata (**1990**).  $NT$ -vacation policy for  $M/G/1$  queue with starter, in : E. Arıkan (Ed.), *Communication, Control, and Signal Processing*, Elsevier Science, Amsterdam. pp. 1663-1669.
- [37] Yadin, P. Naor (**1963**). Queueing systems with a removable service station. *Oper.Res.Quart.* 14 pp. 393-405.

# Annexe A

## Coefficient de variation

Le coefficient de variation  $CV$  est une mesure relative de la dispersion des données autour de la moyenne. Le coefficient de variation se calcule comme le ratio de l'écart-type rapporté à la moyenne, et s'exprime en pourcentage. Il permet de comparer le degré de variation d'un échantillon à un autre, même si les moyennes sont différentes.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu},$$

où  $\sigma$ , représente l'écart-type de l'échantillon et  $\mu$ , la moyenne de l'échantillon.

## Fonction génératrice

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète non négative telle que  $P(X = n) = p(n), n \in \mathbb{N}$ . La fonction génératrice  $P_X(z)$  de  $X$  est définie par :

$$P_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} p(n).$$

Du fait que  $p(n) \geq 0$  et que  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$ , la fonction  $P_X(z)$  est définie pour  $Z$  tel que  $|Z| \leq 1$  ( $Z$  une variable complexe).

$$P_X(0) = p(0), P_X(1), P_X'(1) = \mathbb{E}(X).$$

Et d'une manière générale,

$$P_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)),$$

où l'exposant ( $k$ ) désigne la dérivée  $k^{ieme}$ . Soit  $Z = X + Y$  la somme de deux variables aléatoires indépendantes discrètes  $X$  et  $Y$ . Alors

$$P_z(z) = P_X(z) + (1 - q)P_Y(z).$$

Lorsque  $Z$  a une probabilité  $q$  d'être égale à  $X$  et une probabilité  $1 - q$  d'être égale à  $Y$ , alors

$$P_z(z) = qP_X(z) + (1 - q)P_Y(z).$$

## Transformée de Laplace-Stieltjes

La transformée de Laplace-Stieltjes est définie par

$$\tilde{X}(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sX} dF(x), \quad s \geq 0.$$

Avec, une variable aléatoire non négative  $X$  de fonction de répartition  $F(\cdot)$ .

Lorsque la variable aléatoire admet une densité de probabilité  $f(\cdot)$ , la transformée se simplifie à :

$$\tilde{X}(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sX} f d(x).$$

Notifions que  $|\tilde{X}(s)| \leq 1$  pour tout  $s = a + ib$ , tel que  $a \geq 0$ .

$$\tilde{X}(0) = 1, \quad \tilde{X}'(0) = -\mathbb{E}(X), \quad \tilde{X}^{(k)}(0) = (-1)^k \mathbb{E}(X^k).$$

Où l'exposant  $(k)$  désigne la dérivée  $k^{ieme}$ . Soit  $Z = X + Y$  la somme de deux variables aléatoires indépendantes discrètes  $X$  et  $Y$ . Alors,

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{X}(s) \cdot \tilde{Y}(s).$$

Lorsque  $Z$  a une probabilité  $q$  d'être égale à  $X$  et une probabilité  $1 - q$  d'être égale à  $Y$ , alors

$$\tilde{Z}(s) = q\tilde{X}(s) + (1 - q)\tilde{Y}(s).$$

# Annexe B

## Environnement MATLAB

La plate-forme MATLAB est optimisée pour résoudre les problèmes scientifiques et techniques. Logiciel MATLAB, basé sur les matrices, est le moyen le plus naturel au monde pour exprimer les mathématiques computationnelles. Les graphiques intégrés permettent de visualiser facilement les données afin d'en dégager des informations. En effet, MATLAB est un système interactif et convivial de calcul numérique et de visualisation graphique destiné aux ingénieurs et scientifiques qui possède un langage de programmation à la fois puissant et simple. De plus, il intègre des fonctions d'analyse numérique, de calcul matriciel, etc.

## Procédure de calcul

1<sup>ère</sup> procédure : *Perturbation de la distribution stationnaire*  $\pi_{(\lambda+\Delta)}$

1. Programmer la matrice de transition du modèle étudié avec des lois de temps d'achèvement de service différents : Erlang, Hyper-exponentielle, Déterministe, exponentielle.
2. Déterminer  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_2$  représentant respectivement (première, seconde et troisième dérivée) des matrices de transition pour chaque loi.
3. Calculer la distribution stationnaire en fixant les paramètres pour chaque loi (Voir chapitre 04).
4. Programmer et calculer la matrice fondamentale pour les quatre distributions.
5. Programmer le développement en série de Taylor pour l'ordre  $k = 03$ .
6. Evaluer la distribution stationnaire  $\pi_{(\lambda+\Delta)}$  en se basant sur l'étape 05.
7. Les résultats trouvés sont donnés sous forme de tableau dans le chapitre 04.

**2<sup>ieme</sup> procédure : Probabilité de blocage  $P_b$  par rapport à la capacité de la file  $N$** 

1. Nous Faisons varier la capacité du système  $N$ .
2. Pour chaque  $N$ , calculons la distribution stationnaire pour les 04 distributions tout en fixant les autres paramètres.
3. La probabilité de blocage  $P_b$ , représente le dernier élément de chaque vecteur de la distribution stationnaire.
4. Nous obtenons à la fin de cette opération, 04 vecteurs de probabilité de blocage. Un pour chaque loi.
5. La figure appropriée est illustrée dans le dernier chapitre.

**3<sup>ieme</sup> procédure : Probabilité de blocage  $P_b$  par rapport à la perturbation de  $\rho$** 

1. Dans ce cas, on fixe  $N = 5$  et perturbons le taux des inter-arrivés avec  $\rho = 0.5 : 0.2 : 1.5$ .
2. Pour chaque valeur de  $\rho$ , calculons la matrice de transition, la distribution stationnaire pour les quatre distributions et la probabilité de blocage.
3. À la fin de cette procédure, nous obtenons 04 vecteurs de probabilité de blocage.

**4<sup>ieme</sup> procédure : Nombre moyen de clients et Temps moyen dans le système par rapport à  $N$** 

1. Nous Faisons varier le  $N$ ,  $N = 5 : 2 : 20$ . (avec un pas de 2).
2. Pour chaque  $N$  et pour les 04 distributions, nous calculons les distributions stationnaire et probabilités de blocages pour chacune d'entre elles. (en fixant les autres paramètres).
3. Le nombre moyen de clients est donné par :

$$L_s(\lambda + \Delta) = \sum_{i=1}^N i \times \pi_{\lambda+\Delta}(i).$$

4. Le temps moyen de clients dans le système est donné par :

$$W_s(\lambda + \Delta) = \frac{L_{\lambda+\Delta}}{\lambda(1 - P_b)}.$$

5. Les figures de  $L_s$  et  $W_s$  sont représentées dans le dernier chapitre.

**5<sup>ème</sup> procédure : Nombre moyen de clients et Temps moyen de séjour dans le système par rapport à  $\Delta$** 

1. Dans ce cas, c'est le  $\Delta$  qui varie.  $\Delta = 0 : 0.01 : 0.1$  (avec un pas de 0.01).
2. Reprenons la 1<sup>ère</sup> procédure à l'étape 06 et considérons les distributions stationnaires perturbées pour chaque distribution.
3. Calculons  $L_s$  et  $W_s$  pour chaque pas de  $\Delta$  et pour les 04 distributions.
4. Les résultats sont donnés sous forme de figures.

**6<sup>ème</sup> procédure : Nombre moyen de clients dans le système par rapport à  $N$  et  $\Delta$** 

1. Dans cette procédure, on fait varier deux paramètres  $N$  et  $\Delta$  à la fois :  $N = 5 : 2 : 20$ ,  $\Delta = 0 : 0.01 : 0.1$  et on fixe une distribution ; dans notre cas, la loi exponentielle.
2. Nous calculons la distribution stationnaire en faisant varier les inter-arrivés et la capacité du système  $N$ , puis la probabilité de blocage et enfin  $L_s$  et  $W_s$ , tout en fixant les autres paramètres.
3. Nous obtenons une figure très intéressante en 3D.

## *Résumé*

Dans ce mémoire, nous avons réalisé une analyse numérique du modèle d'attente  $M/G/1/N$  avec vacances généralisées et politique de pannes  $NT$ , 'startup' et 'closedown', et ce en utilisant une nouvelle approche basée sur les développements en séries de Taylor des chaînes de Markov. De plus, une analyse de sensibilité des mesures de performance du modèle en question par rapport à la variation du taux des inter-arrivées a été également abordée. Spécifiquement, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de certaines mesures performance; telles que la distribution stationnaire, la probabilité de blocage, le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système. Plusieurs exemples numériques ont été considérés afin de montrer l'efficacité de l'approche utilisée.

**Mots clés :** : Chaîne de Markov ; Système d'attente avec vacances et pannes du serveur ; Matrice fondamentale ; Développement en série de Taylor.