

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté de technologie

Département de génie mécanique

Mémoire

Présenté par

Kerkadi Samir

pour l'obtention du diplôme

Magister

Filière : Génie Mécanique

Option : Énergétique et Rhéologie

Thème

Modélisation et analyse de la propagation d'ondes dans les milieux
thermoélastiques linéaire, homogènes et isotropes

Le jury :

Mr. N. DAHMANI	Pr.U.A.M. Béjaia	Président
Mr. A. BOUDA	Pr.U.A.M. Béjaia	Examineur
Mr. S. BOUDRAHEM	Pr.U.A.M. Béjaia	Examineur
Mr.H. BECHIR	Pr.U.A.M. Béjaia	Rapporteur

Année universitaire 2010-2011

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu, le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la volonté afin de mener ce travail à terme.

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mon directeur de projet, Professeur **H. BECHIR**, pour m'avoir encadré et témoigné de sa confiance au cours de ces deux années. Le sujet qu'il a proposé m'a permis de vivre une belle expérience scientifique et donné envie de continuer à explorer ce domaine de recherche. Je tiens aussi à lui exprimer toute ma gratitude pour sa disponibilité et sa patience lorsqu'il fallait répondre à mes nombreuses questions. Enfin, je suis ravi d'avoir partagé cette aventure humaine avec lui et je ne saurai comment le remercier de m'avoir soutenu jusqu'au bout.

Je remercie vivement Monsieur **N. DAHMANI**, Professeur à l'université de Béjaia qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **A. BOUDA**, Professeur à l'université de Béjaia, d'avoir accepté d'examiner ce travail et participer au jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur **S. BOUDRAHEM**, Professeur à l'université de Béjaia pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie également toute ma famille pour le soutien moral qu'elle m'a apporté, tous mes collègues de Génie mécanique et de Physique ainsi que tous mes amis.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons développé une étude sur la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope. Le premier chapitre traite du comportement élastique linéaire. Le but est de bien définir les paramètres mis en jeu dans notre étude. Dans le deuxième chapitre nous avons développé une étude théorique sur la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope. Pour pouvoir coupler les équations mécanique et thermique et déduire une loi de comportement thermoélastique, un choix d'un potentiel thermodynamique s'est imposé. Ensuite nous avons développé l'équation de mouvement et éliminé la température en considérant les ondes planes.

L'équation séculaire est obtenue en mettant en évidence deux tenseurs caractéristiques : acoustique et isentropique. La résolution de cette équation aux valeurs propres nous a conduits aux vitesses de propagation dans le milieu. Ainsi deux cas sont étudiés : le premier concerne le régime isotherme (sans variation de température) ; notre formalisme général se réduit au cas classique conduisant à calculer deux vitesses d'ondes longitudinale et transversale. Dans le deuxième, nous considérons le régime non isotherme. Dans ce cas les tenseurs acoustique et isentropique sont différents. La recherche des valeurs propres est plus complexe nécessitant une résolution numérique sur Maple. Nous avons obtenu une solution pour laquelle le matériau est stable. Les variations de température induisent une dispersion des ondes dans le milieu.

Mots clés: Thermoélasticité linéaire, ondes, propagation, stabilité.

Abstract

This work studies the propagation of flat waves in an isotropic, homogenous, linear, and thermo-elastic milieu. The first chapter deals with the linear elastic behaviour so as to define the parameters to take into consideration in this study. The second chapter provides a theoretical analysis of the flat waves in an isotropic, homogenous, linear, thermo-elastic milieu. The choice of a thermo-dynamic potential has been necessary in order to couple the mechanic equation and the thermal one as well as to deduce the thermo-elastic behaviour. After that, the equation of the movement has been developed and the temperature eliminated while considering the flat waves.

The secular equation has been obtained, bringing into light two characteristic tensors: an acoustic and an isentropic one. The resolution of this right-valued equation has resulted in the spreading of the speed in the milieu. Hence, two cases have been studied. The first one concerns the isothermal system (with no temperature variation). The general formalism, here, confines to the classical case that leads to the calculation of two wave speeds: one longitudinal, the other transversal. The second case considers the non-isothermal system. In this case, the acoustic and isentropic tensors are different. The search for right values is more complex as it requires a Maple numerical resolution. We have, thence, come out with a solution for which the material is stable. The temperature variations cause the breaking up of the waves in the milieu.

Key – words: linear thermo-elasticity – waves – propagation - stability

ملخص

تتناول هذه الرسالة دراسة بث الأمواج المسطحة في وسط حراري مرن منتظم متجانس متساو التناسب في الجزء الأول تطرقنا إلى السلوك المرن المنتظم و الهدف هو تحديد الحالات الموضوعية للدراسة. أما في الجزء الثاني فلقد تناولنا دراسة نظرية حول بث الأمواج المسطحة في وسط حراري مرن منتظم متجانس و متساوي التناسب. للتمكين من تزواج المعادلتين الميكانيكية و الحرارية و تقليص قانون السلوك الحراري المرن التزام خيار احتمال تيرموديناميكي. و بعد ذلك أصلحنا معادلة التحرك مع إقصاء الحرارة معتبرين الأمواج المسطحة.

تحصلنا على المعادلة العلمانية باستخراج مشددتين خاصيتين سمعية و ايزننتروبيكية . أدى حل هذه المعادلة ذات القيم الصحيحة إلى سرعتين للبث في الوسط. لذا درسنا حالتين. الحالة الأولى تعني النظام المتساوي الحراري (بدون تغيير في درجة الحرارة). تتحدد شكلياتنا العامة في حالة كلاسيكية تؤدي إلى حساب سرعتين للأمواج الطولية و العرضية. في الحالة الثانية تطرقنا إلى النظام غير المتجانس الحراري. و في هذه الحالة كانت المشددتين السمعية و الازننتروبيكية مختلفة. كان البحث على القيم الصحيحة هنا أكثر صعوبة بحيث تطلب تحليلا عدديا على "مابل". فلقد وجدنا حلا بحيث كانت المادة ثابتة. أما التغيرات الحرارية فهي تؤدي إلى تشتت أو تبعثر الأمواج في الوسط.

الكلمات الداليلية: مرونة حرارية منتظمة- أمواج - بث - ثبات.

Sommaire

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I : Comportement élastique linéaire	
I.2 Comportement élastique : définition.....	2
I.2.1 Modélisation du comportement élastique : approche directe.....	3
I.2.1.1 Élasticité anisotrope.....	2
I.2.1.2 Élasticité isotrope.....	4
I.2.2 Modélisation du comportement élastique linéaire : approche indirecte.....	6
I.3 Notions de la thermodynamique des milieux continus.....	7
I.4 Comportement thermoélastique linéaire	8
I.4.1. q Équation de chaleur	9
I.4.1. Loi de Fourier	9
I.5 Dépendance des propriétés physiques en fonction de la température	10
Chapitre II : Propagation d'ondes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope	
II. 1. Position du problème.....	14
II.1.1.Équation locale du mouvement	14
II.1.2. Résolution : recherche des valeurs propres.....	17
II.1.2.1. Régime isotherme : ($\Delta T = 0$).....	17
II.1.2.1.1. Direction principale [1,0,0].....	18
II.1.2.1.2. Direction principale [0,1,0].....	19
II.1.2.1.3. Direction principale [0,0,1].....	19
II.1.2.1.4. Discussions et interprétations des résultats	20
II.1.2.2. Régime non isotherme : ($\Delta T \neq 0$).....	26
II.1.2.2.1. Direction principale [1,0,0].....	26
II.1.2.2.2. Direction principale [0,1,0].....	27
II.1.2.2.3. Direction principale [0,0,1].....	27
II.1.2.2.4. Discussions.....	29
Conclusion générale	31
Références bibliographique	32

Annexe

Définition des notations utilisées dans le mémoire

(C_0) : Configuration initiale ;

(C_t) : Configuration actuelle ;

$\overline{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy ;

$\overline{\varepsilon}$: Tenseur des déformations ;

\overline{F} : Opérateur gradient de la transformation;

\overline{C} : Tenseur de rigidité ;

\overline{K} : Tenseur de conductivité thermique ;

\overline{I} : Tenseur identité ;

δ_{ij} : Symboles de Kronecker.

$I_1(\overline{\varepsilon})$: Premier invariant du tenseur des déformations $\overline{\varepsilon}$;

$I_2(\overline{\varepsilon})$: Deuxième invariant du tenseur des déformations $\overline{\varepsilon}$;

$I_3(\overline{\varepsilon})$: Troisième invariant du tenseur des déformations $\overline{\varepsilon}$;

W : Potentiel élastique;

ψ : Potentiel thermodynamique;

ρ_0 : Masse volumique du solide dans la configuration de référence;

ρ : Masse volumique du solide dans la configuration actuelle ;

λ : Coefficients de Lamé;

μ : Module du cisaillement du matériau;

K : Coefficients de conductivité thermique ;

E : Module Young ;

ν : Coefficients de poisson ;

α : Coefficients de dilatation thermique ;

Définition des notations utilisées dans le mémoire

k : Module compressibilité;

c : Capacité calorifique du matériau

p : Pression hydrostatique;

T_0 : Température de référence ;

T : Température de l'état actuelle ;

ΔT : Ecart de température ;

s : Entropie massique ;

\bar{r} : Flux de chaleur échangé par rayonnement ;

\bar{q} : Flux de chaleur échangé par conduction ;

Introduction générale

Dans bon nombre d'applications technologiques (contrôle non destructif ; mesure des constantes de rigidités des matériaux ; ondes sismiques,...), on utilise la propagation d'ondes. En général, les approches classiques se limitent au domaine linéaire et au régime isotherme. L'objectif de ce travail consiste à étudier la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire. En effet, on cherche à évaluer l'effet de température sur les vitesses de propagation. Par conséquent, les champs de température et de déformation sont couplés.

Le travail est structuré de la manière suivante :

le premier chapitre est consacré aux rappels des généralités dans le cadre de l'élasticité linéaire suivi d'une étude bibliographique sur les lois de comportement élastique et thermoélastique dans le but de bien définir le cadre de notre étude.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude théorique de la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope, l'équation séculaire est ainsi obtenue. La recherche des valeurs propres nous conduit à évaluer l'effet de la température sur les vitesses de propagation des ondes planes. Ce chapitre est composé de deux parties : on se limite dans la première au régime isotherme, c'est-à-dire, on traite le cas classique de l'élasticité linéaire, la deuxième, on prend en compte l'effet de la variation de la température, c'est-à-dire, le régime non isotherme. Les différents résultats obtenus sont analysés et interprétés.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale suivie des perspectives pour la poursuite de ce travail.

Chapitre I

Comportement élastique linéaire.

Études bibliographique

I.1. Les lois de comportement (Lemaitre, 1985, J. Coirier, 2001).

La résolution d'un problème de mécanique nécessite la connaissance de la loi de comportement. D'une façon générale, une loi de comportement est une fonctionnelle de réponse du matériau permettant de définir un lien entre l'état de contrainte et l'histoire des transformations de ce matériau. Cette loi de comportement doit satisfaire trois principes : le principe de causalité, le principe d'action locale et le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle.

Le principe de causalité impose que l'état de contrainte en un point et au temps t ne dépend que de l'histoire de la transformation du matériau jusqu'au temps t . Le principe de l'action locale impose que l'état de contrainte en un point ne dépend que du voisinage de ce point. Ces deux principes sont vérifiés pour les matériaux matériellement simples, c'est-à-dire, pour lesquels l'état de contrainte ne dépend que de l'histoire du gradient de la transformation.

Enfin, le principe d'objectivité impose que la loi de comportement doit être indépendante de l'observateur ou du changement de référentiel.

I.2. Comportement élastique - définition

D'une façon générale, un milieu est dit élastique si son comportement ne dépend que de la position relative de la configuration actuelle (C_t) par rapport à une configuration privilégiée (qu'on peut toujours prendre comme configuration de référence ou naturelle dans laquelle le tenseur des contraintes est nul). En d'autres termes, pour un milieu élastique, l'état de contrainte actuel est entièrement déterminé par le gradient de la transformation à l'instant actuel et non par son histoire passée :

$$\bar{\sigma}(X, t) = \zeta[\bar{F}(X, t)] \quad (\text{I.1})$$

Où ζ est une fonctionnelle.

La fonctionnelle mémoire se réduit ainsi à une simple fonction et le tenseur des contraintes de Cauchy ne dépend pas du chemin suivi par la déformation mais par contre le travail fourni par cette contrainte en dépend généralement.

La loi de comportement des milieux élastiques, linéaires, homogènes et isotropes peut être obtenue de deux manières différentes : la première est l'approche directe qui consiste relier le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$ au tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$. La deuxième est indirecte, le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$ dérive d'un potentiel élastique.

I.2.1. Approche directe (J. Mandel, 1966, P. Le Tallec, 2006)

I.2.1.1. Élasticité linéaire anisotrope

En élasticité linéaire, la transformation subie par un élément à partir de l'état initial se ramène à un déplacement d'ensemble suivi d'une déformation pure. Cette déformation étant infiniment petite (du premier ordre, par définition) et le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$ est une fonction linéaire du tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$.

Dans une base cartésienne, la loi de comportement (loi de Hooke), est définie par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (I.2)$$

Où C_{ijkl} est le tenseur des modules d'élasticité d'ordre quatre, appelé aussi tenseur des rigidités élastiques du matériau.

On notera que les C_{ijkl} ne sont fonction que de la variable de l'espace \bar{X} alors que $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ peuvent être fonction des variables (\bar{X}, t) . Si les C_{ijkl} sont indépendants de \bar{X} alors le milieu est dit homogène.

Grâce à l'invariance due aux symétries matérielles, le nombre de constants élastiques lors de la permutation des indices, ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{klij}$) se réduit donc à 36 voire à 21 composantes sont indépendantes.

Voigt a introduit une notation simplifiée à deux indices, avec la convention d'équivalence entre un super-indice m et une paire d'indices associée ij :

$$(ij) \longrightarrow m \text{ et } (kl) \longrightarrow n$$

$$1 \leftrightarrow 11$$

$$2 \leftrightarrow 22$$

$$3 \leftrightarrow 33$$

$$4 \leftrightarrow 23$$

$$5 \leftrightarrow 31$$

$$6 \leftrightarrow 12$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n \quad (I.3)$$

On voit qu'on peut ranger les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations en deux vecteurs colonnes reliées par la matrice 6 x 6 des modules d'élasticité :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (I.4)$$

On pose :

$$\gamma_4 = 2\varepsilon_4 ;$$

$$\gamma_5 = 2\varepsilon_5 ; \quad (I.5)$$

$$\gamma_6 = 2\varepsilon_6 .$$

En introduisant les équations (I.5) dans l'équation (I.4), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix} \quad (I-6)$$

I.2.1.2. Elasticité linéaire isotrope

Par définition, un milieu est isotrope si toutes les directions de l'espace autour d'un point de ce milieu sont matériellement équivalentes (aucune direction de l'espace n'est privilégiée). La matrice des constantes élastiques se réduit aux neuf éléments dont seulement trois sont différentes : notées C_{11} , C_{13} et la troisième est en fonction des deux autres $\left(\frac{C_{11}-C_{13}}{2}\right)$. En notation de Voigt, la matrice de rigidité du matériau élastique, linéaire, homogène et isotrope s'écrit :

$$(C_{mn}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

En base cartésienne, la loi de Hooke peut s'exprimer en fonction des constantes de Lamé μ et λ :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} \delta_{ij} . \quad (\text{I.8})$$

A partir de l'équation (I.8), la matrice des rigidités élastiques s'écrit alors :

$$(C_{mn}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Par identification entre l'équation (I.7) et (I.9), on déduit :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu.$$

$$C_{13} = \lambda . \quad (\text{I.10})$$

On rappelle que les constantes de Lamé sont reliées aux modules d'élasticités de la manière suivante :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (\text{I.11})$$

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} . \quad (\text{I.12})$$

E : le module d'Young,

ν : est le coefficient de Poisson

La stabilité locale du milieu élastique linéaire, homogène et isotrope autour de l'état naturel se traduit par les inégalités suivantes :

$$2\mu + 3\lambda > 0 , \quad \text{et} \quad \mu > 0. \quad (\text{I.13})$$

$2\mu + 3\lambda > 0$, signifie que le matériau diminue de volume sous l'effet d'une compression, la seconde $\mu > 0$ signifie que le cisaillement s'effectue dans le sens de l'effort.

Ces conditions s'écrivent de manière équivalente :

$$E > 0 , \quad \text{et} \quad -1 < \nu < 1/2 . \quad (\text{I.14})$$

$E > 0$, signifie que l'allongement est positif, et $\nu=1/2$ correspond à un matériau incompressible.

$\nu = 0$ correspond au cas où la section de l'éprouvette ne varie pas, et $-1 < \nu < 0$ correspond aux matériaux dont la section augmente lors de traction (jamais observé).

I.2.2. Approche indirecte (P. Germain, 1995, S. Forest, M.Amestoy2007)

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$ peut être obtenu à partir d'un potentiel élastique définie par :

$$w(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} . \quad (\text{I.15})$$

En base cartésienne, on a :

$$w(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} . \quad (\text{I.16})$$

Telles que, à tout instant t, si $\bar{\epsilon}$ est le tenseur des déformations en ce point, le tenseur des contraintes en ce même point est calculé par :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial w(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}} . \quad (\text{I.17})$$

Où W est exprimé en fonction des 9 variables ϵ_{ij} considérées comme variables indépendantes.

On peut exprimer l'équation (I-13) sous une forme plus générale, en introduisant un potentiel thermodynamique Ψ massique défini par :

$$\rho_0 \psi = w . \quad (\text{I.18})$$

Où ρ_0 est la masse volumique du matériau dans la configuration initial.

$w(\bar{\epsilon})$ est une forme quadratique que l'on peut exprimer en fonction des invariants du tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$, définis par :

$$\rho_0 \psi = w[I_1(\bar{\epsilon}), I_2(\bar{\epsilon})] = \alpha I_1^2(\bar{\epsilon}) + \beta I_2(\bar{\epsilon}) . \quad (I.19)$$

$$I_1(\bar{\epsilon}) = \bar{\bar{I}} : \bar{\epsilon} . \quad (I.20)$$

$$I_2(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} (\bar{\bar{\epsilon}} : \bar{\epsilon}) . \quad (I.21)$$

La loi de comportement dérive alors du potentiel thermodynamique de la manière suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial \bar{\bar{\epsilon}}} = \frac{\partial w(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\bar{\epsilon}}} . \quad (I.22)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{\partial(W)}{\partial I_1(\bar{\epsilon})} \frac{\partial I_1(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\bar{\epsilon}}} + \frac{\partial(W)}{\partial I_2(\bar{\epsilon})} \frac{\partial I_2(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\bar{\epsilon}}} . \quad (I.23)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\alpha I_1 + \frac{\beta}{2} \bar{\bar{\epsilon}} . \quad (I.24)$$

Afin de retrouver la loi de Hooke exprimée en fonction des constantes de lamé, on pose :

$$\frac{\beta}{2} = 2\mu \Rightarrow \beta = 4\mu . \quad (I.25)$$

$$2\alpha = \lambda \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{2} . \quad (I.26)$$

Introduisons les équations (I.21) et (I.22) dans (I.20), on retrouve :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} . \quad (I.27)$$

I.3. Notions de thermodynamique des milieux continus (S. Forest, M. Amestoy 2007, J. Salençon, 2007)

La thermodynamique des milieux continus est décrite par deux principes qui ont un caractère universel :

Le premier principe, ou principe de la conservation de l'énergie qui introduit la notion d'énergie interne et de chaleur reçue. Ce principe se traduit localement par l'équation de l'énergie suivante :

$$\rho \dot{e} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\epsilon}} + \rho r - \text{div } \bar{q} \quad (I.28)$$

Le second principe auquel est attachée la notion de production d'entropie, se traduit localement par l'inégalité fondamentale suivante :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left(\frac{\bar{q}}{T} \right) - \left(\frac{r}{T} \right) \geq 0 . \quad (\text{I.29})$$

Où :

e et s expriment respectivement énergie interne et entropie massique,

\bar{q} est le vecteur flux de chaleur échangés par conduction,

r est une densité massique de production interne de chaleur à distance.

I.4. Comportement thermoélastique linéaire (S. Forest, M. Amestoy, 2007, J. Lemaitre, 2009)

Afin de coupler les effets mécanique et thermique, on doit déterminer la loi de comportement reliant les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\sigma}$, en tenant compte de l'effet de variation de la température. Pour y parvenir un potentiel thermodynamique de la forme suivante :

$$\rho_0 \psi = \frac{\lambda}{2} I^2(\bar{\epsilon}) + 2\mu II(\bar{\epsilon}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T I(\bar{\epsilon}) - \frac{\rho_0}{2T_0} \Delta T^2 , \quad (\text{I.30})$$

$$\Delta T = T - T_0 , \quad (\text{I.31})$$

Où :

T_0 : température de référence,

T : température à un instant postérieur,

ΔT : variation de température.

En utilisant l'équation (I.18), on obtient ainsi la loi de comportement thermoélastique linéaire sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\bar{\epsilon}) \bar{\mathbb{1}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \bar{\mathbb{1}} . \quad (\text{I.32})$$

En base cartésienne, la loi de comportement thermoélastique linéaire est :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \delta_{ij} . \quad (\text{I.33})$$

A l'aide de l'équation (I.29), on peut calculer l'entropie massique de la façon suivante :

$$s = (-) \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial(\Delta T)} = (-) \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial T} . \quad (\text{I.34})$$

$$s = (3\lambda + 2\mu)\alpha \epsilon_{kk} + \rho_0 c \frac{\Delta T}{T_0} . \quad (\text{I.35})$$

I.4.1. Equation de chaleur

La loi de comportement contient le terme température qui évolue dans le milieu, il est nécessaire d'introduire les équations qui gouvernent l'effet thermique. On utilise pour cela l'équation de la chaleur qui est une forme particulière de l'équation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique). Dans le contexte infinitésimal, le bilan local d'énergie s'écrit :

$$\rho_0 \dot{\epsilon} + \text{div} \bar{q} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} + \rho_0 r \quad (\text{I.36})$$

En introduisant l'énergie libre et les lois d'état élastique, on obtient l'équation de la chaleur :

$$T \dot{s} + \text{div} \bar{q} = \rho_0 r \quad (\text{I.37})$$

I.4.2. La loi de Fourier

On suppose que la loi de Fourier soit vérifiée, on écrit :

$$q_i = -\bar{K} T_{,j} \quad (\text{I.38})$$

Où \bar{K} est le tenseur de conductivité thermique,

Pour les matériaux isotropes, la conductivité est isotropique :

$$\bar{K} = -K \bar{I} \quad (\text{I.39})$$

$$q_{i,j} = -K T_{,ij} \quad (\text{I.40})$$

Où :

K : coefficient de conductivité thermique,

\bar{I} : Tenseur identité.

En introduisant la loi de conduction thermique de Fourier, le bilan d'entropie s'écrit :

$$\rho_0 c \dot{T} + \underbrace{3\alpha T_0 \dot{\epsilon}_{pp}}_{\text{couplage thermomécanique}} - K \Delta T = \rho_0 r \quad (\text{I.41})$$

II.5. Dépendance des propriétés physiques en fonction de la température (J. Lemaitre, 2009)

Les caractéristiques des matériaux : le module d'élasticité, le coefficient de dilatation thermique, la masse volumique, chaleur massique...etc. dépendent de la température. Cependant, cette dépendance est négligée autour d'un état à la température de référence T_0 , à condition de satisfaire $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$, les coefficients du matériau sont considérés comme constants. Les figures suivantes montrent l'évolution de quelques caractéristiques des matériaux en fonction de la température

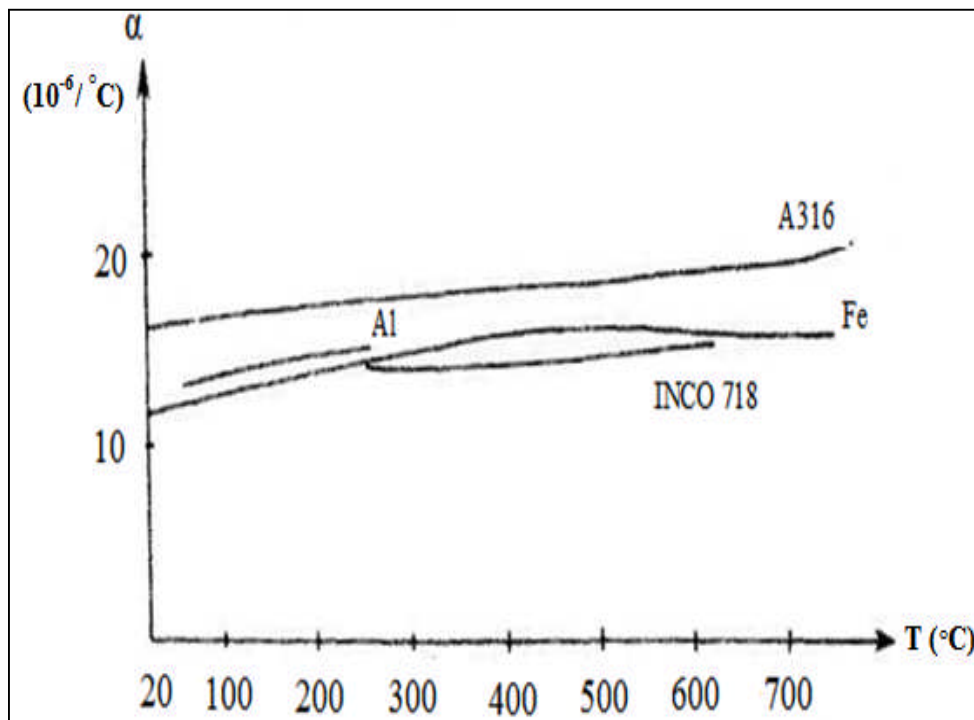


Fig. I.1 : Evolution du coefficient de dilatation α en fonction de la température

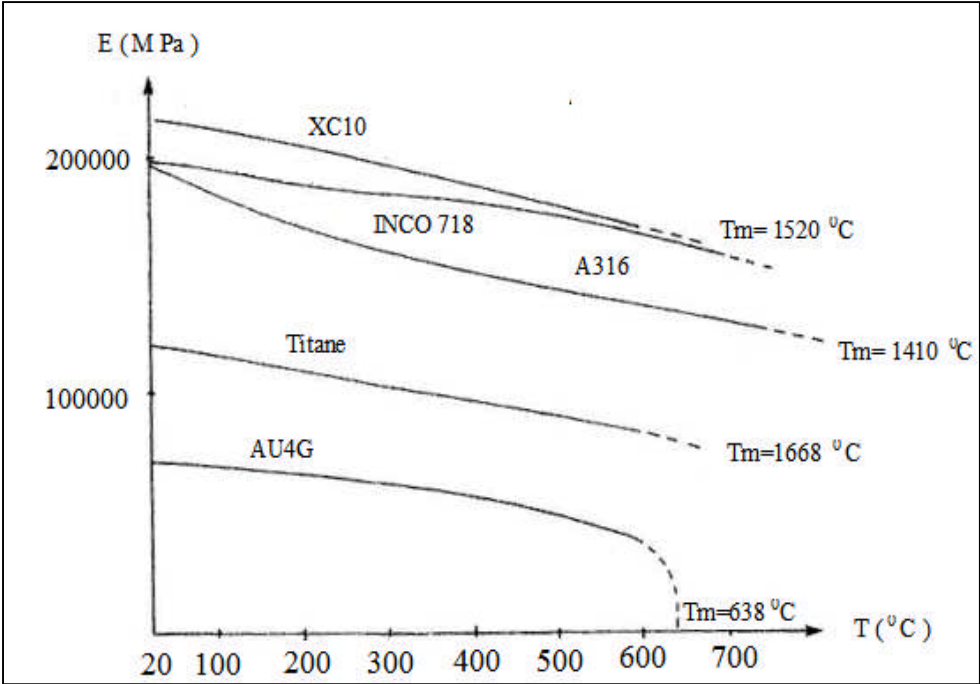


Fig. I.2: Evolution du module de Young E en fonction de la température

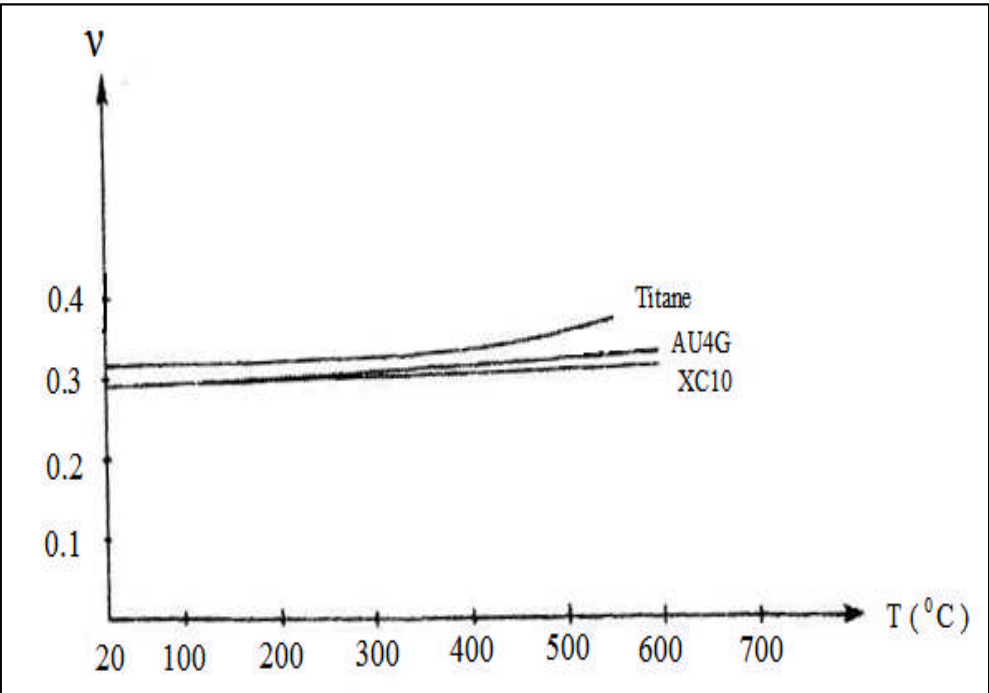


Fig. I.3 : Evolution du coefficient de Poisson en fonction de la température

Coefficients de Lamé

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Module d'Young et coefficient de Poisson

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Relations entre les différents modules d'élasticité isotrope

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Module de compressibilité

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-\nu)}$$

Stabilité du solide élastique

$$2\mu + 3\lambda > 0$$

$$\mu > 0$$

Et

$$-1 < \nu < 1/2$$

$$E > 0$$

Tab. I.1. Récapitulatif de l'élasticité linéaire isotrope.

premier principe

$$\rho \dot{e} = \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} + \rho r - \operatorname{div} \bar{q}$$

second principe

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left(\frac{\bar{q}}{\bar{T}} \right) - \left(\frac{r}{\bar{T}} \right) \geq 0$$

Equation de chaleur :

$$\rho c \dot{T} + \underbrace{3k\alpha T_0 \dot{\varepsilon}_{pp}}_{\substack{\text{couplage} \\ \text{thermomécanique}}} - K \Delta T = \rho_0 r$$

Le potentiel élastique

$$\rho_0 \psi = \frac{\lambda}{2} I^2(\bar{\varepsilon}) + 2\mu II(\bar{\varepsilon}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T I(\bar{\varepsilon}) - \frac{\rho_0}{2T_0} \Delta T^2$$

Loi de comportement thermoélastique

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbf{1}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \bar{\mathbf{1}}$$

Entropie massique

$$s = (3\lambda + 2\mu)\alpha \varepsilon_{kk} + \rho_0 c \frac{\Delta T}{T_0}$$

Tab. I.2. Récapitulatif de la thermoélasticité linéaire isotrope.

Chapitre II

Propagation d'ondes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope.

II. 1. Position du problème

On s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope, dont le but est d'étudier l'effet de la température sur les vitesses de propagation.

II.1.1. Equation locale du mouvement

L'équation locale de mouvement dans les configurations eulérienne s'exprime par la relation suivante :

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \rho \bar{f} = \rho \bar{u} . \quad (\text{II.1})$$

Si on néglige les forces de volume, l'équation de mouvement se réduit à :

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \rho \bar{u} . \quad (\text{II.2})$$

Après projection dans une base cartésienne on aboutit à :

$$\sigma_{ij,j} = \rho u_{i,tt} . \quad (\text{II.3})$$

On suppose que le domaine de température exploré autour de la position d'équilibre reste limité (une dizaine de degré par exemple), par conséquent, la dilatation thermique peut être supposée négligeable. Ainsi, la variation de volume est insignifiante, c'est-à-dire, $\rho \approx \rho_0$

$$\sigma_{ij,j} = \rho_0 u_{i,tt} . \quad (\text{II.4})$$

Où

ρ : La masse volumique du matériau dans la configuration actuelle ;

ρ_0 : La masse volumique du matériau dans la configuration de référence ;

\bar{u} : Vecteur déplacement ;

\bar{f} : Force massique.

On rappelle que le tenseur des contraintes de Cauchy est (cf.I.32) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T\delta_{ij} . \quad (\text{II.5})$$

Les composantes du tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites difformations (H.P.P) sont définies de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (\text{II.6})$$

En combinant les équations (II.4), (II.5) et (II.6), on aboutit à (cf. Annexe) :

$$\mu(u_{i,jj} + u_{i,jj}) + \lambda u_k \delta_{ik} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_j \delta_{ij} = \rho_0 u_{i,tt} . \quad (\text{II.7})$$

L'équation (II.7) est une équation aux dérivées partielles fortement non linéaire. Pour la résoudre, il est nécessaire d'éliminer la température et l'exprimer en fonction du champ de déplacement.

Afin de résoudre cette équation, on suppose que le milieu est infini. En d'autres termes, l'hypothèse des ondes planes est vérifiée, on considère alors les champs de déplacement et de température de la forme suivante :

$$(\bar{u}, T) = (U^{(0)}, T^{(0)})e^{i[k(\bar{n}\cdot\bar{x}) - \omega t]} = (U^{(0)}, T^{(0)})e^{i[k(\bar{n}\cdot\bar{x}) - \omega t]} = (U^{(0)}, T^{(0)})e^{ik[(\bar{n}\cdot\bar{x}) - vt]} \quad (\text{II.8})$$

Où : $i^2 = -1$, i est un nombre complexe ; k , le nombre d'onde , ω est une fréquence circulaire (pulsation), \bar{n} est un vecteur unitaire indiquant la direction de propagation de l'onde et v : la vitesse de propagation.

En introduisant l'équation (II.8) dans l'équation (II.7), on obtient :

$$[\mu(\delta_{ik} + n_i n_k) + \lambda n_i n_k]u_k + \frac{iv}{\omega}(3\lambda + 2\mu)\alpha n_i T = \rho_0 v^2 \delta_{ik} u_k . \quad (\text{II.9})$$

Afin d'éliminer le terme de la température T dans l'équation (II.9), on utilise le bilan d'entropie (cf. éq (I.32) et (I.33).), et on néglige le rayonnement de la chaleur ($r=0$). La température s'exprime de la manière suivante :

$$T \frac{T_0 \omega v (3\lambda + 2\mu) \alpha n_k}{[-K \omega n_i n_j + i c \rho_0 v^2]} u_k . \quad (\text{II.10})$$

On remplace le terme T dans l'équation (II.9), on obtient une équation matricielle de la forme suivante :

$$\left\{ (K\omega)[\rho_0 v^2 \delta_{ik} - (\lambda + \mu)n_i n_k + \mu \delta_{ik}] - i c \rho_0 v^2 \left[\rho_0 v^2 \delta_{ik} - [(\lambda + \mu)n_i n_k + \mu \delta_{ik} + \frac{T_0}{\rho_0 c} v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 n_i n_k] \right] \right\} u_k = 0. \quad (\text{II.11})$$

Introduisons les tenseurs acoustique isotherme et isentropique définis respectivement par :

$$\tilde{Q}_{ik} = (\mu + \lambda)n_i n_k + \mu \delta_{ik}. \quad (\text{II.12})$$

$$\hat{Q}_{ik} = \tilde{Q}_{ik} + T_0 (\rho_0 c)^{-1} (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 n_i n_k. \quad (\text{II.13})$$

L'équation (II.11), s'écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$\{ \rho_0 v^2 [\hat{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}] + i(K\omega)c^{-1} \rho_0 v^2 [\tilde{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}] \} u_k = 0. \quad (\text{II.14})$$

La détermination des vitesses de propagation d'ondes se ramène alors à la résolution de l'équation aux valeurs propres (Scott, 1989) (Chadwick et al. 1992).

$$\rho_0 v^2 \det(\hat{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}) + i(K\omega)c^{-1} \det(\tilde{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}) = 0. \quad (\text{II.15})$$

Dans le domaine linéaire, les modes propres sont orthogonaux. Par conséquent, les directions de propagation sont les directions principales. Ainsi, les termes non diagonaux des tenseurs acoustique et isentropique sont nuls, d'où :

On pose :

$$\rho_0 v^2 = X. \quad (\text{II.16})$$

$$f(X) = (\tilde{Q}_{11} - X)(\tilde{Q}_{22} - X)(\tilde{Q}_{33} - X). \quad (\text{II.17})$$

$$g(X) = (\hat{Q}_{11} - X)(\hat{Q}_{22} - X)(\hat{Q}_{33} - X). \quad (\text{II.18})$$

L'équation aux valeurs propres (II.15) s'écrit :

$$X \cdot g(X) + i(K\omega)c^{-1}f(X) = 0 \quad . \quad (\text{II.19})$$

II.1.2. Résolution : recherche des valeurs propres

La résolution de l'équation (II.19) permet d'étudier deux cas différents :

II.1.2.1. Régime isotherme : ($\Delta T = 0$)

Pour ce cas le coefficient de dilatation thermique est nul ($\alpha=0$), et le tenseur acoustique est égal au tenseur isentropique, cela nous conduit à étudier le cas classique de l'élasticité linéaire isotrope

$$\tilde{Q}_{ik} = \hat{Q}_{ik}. \quad (\text{II.20})$$

D'où :

$$f(X) = g(X). \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.19) se réduit à :

$$Xf(X) + i(K\omega)c^{-1}f(X) = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$(X + i(K\omega)c^{-1})f(X) = 0 \quad (\text{II.23})$$

Il existe deux possibilités pour résoudre l'équation précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(X) = 0 \\ (X + i(K\omega)c^{-1}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.24.a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(X) = 0 \\ (X + i(K\omega)c^{-1}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.24.b})$$

On peut remarquer que l'équation (II.24.a) se réduit au cas classique de l'élasticité linéaire. L'évaluation des composantes du tenseur acoustique $\hat{Q}_{11}, \check{Q}_{22}$ et \tilde{Q}_{33} , nécessitent de préciser les directions de propagation des ondes. On s'intéresse essentiellement aux directions principales [1,0,0], [0,1,0] et [0,0,1]. Les valeurs propres correspondant à des ondes couplées n'induisent pas d'informations supplémentaires car le milieu est élastique linéaire.

II.1.2.1.1. Direction principale [1,0,0]

A partir de l'équation (II.25.a), on obtient :

$$(\tilde{Q}_{11} - X)(\tilde{Q}_{22} - X)(\tilde{Q}_{33} - X) = 0, \quad (\text{II.25})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\tilde{Q}_{11} - X) = 0 \\ (\tilde{Q}_{22} - X) = 0 \\ (\tilde{Q}_{33} - X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Q}_{11} = X \\ \tilde{Q}_{22} = X \\ \tilde{Q}_{33} = X \end{cases}, \quad (\text{II.26})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[1,0,0] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{11}}{\rho_0}}, \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{cases} v_T^{(1)}[0,1,0] = v_T^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{22}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{33}}{\rho_0}}, \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

avec :

$$\tilde{Q}_{11} = \lambda + 2\mu, \quad (\text{II.29})$$

$$\tilde{Q}_{22} = \tilde{Q}_{33} = \mu. \quad (\text{II.30})$$

Introduisons l'équation (II.29) et (II.30) dans l'équation (II.27) et (II.28), on obtient:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[1,0,0] = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}, \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{cases} v_T^{(1)}[0,1,0] = v_T^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

avec:

v_L : vitesse longitudinale,

v_T : vitesse transversale.

II.1.2.1.1. Direction principale [0,1,0]

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[0,1,0] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{22}}{\rho_0}} & \text{(II.33)} \\ v_T^{(1)}[1,0,0] = v_T^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{11}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{33}}{\rho_0}} & \text{(II.34)} \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{Q}_{22} = \lambda + 2\mu \quad \text{(II.35)}$$

$$\tilde{Q}_{11} = \tilde{Q}_{33} = \mu \quad \text{(II.36)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[0,1,0] = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}} & \text{(II.37)} \\ v_T^{(1)}[1,0,0] = v_T^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} & \text{(II.38)} \end{cases}$$

II.1.2.1.1. Direction principale [0,0,1]

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{22}}{\rho_0}} & \text{(II.39)} \\ v_T^{(1)}[1,0,0] = v_T^{(1)}[0,1,0] = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{11}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{22}}{\rho_0}} & \text{(II.40)} \end{cases}$$

Avec :

$$\tilde{Q}_{33} = \lambda + 2\mu, \quad \text{(II.41)}$$

$$\tilde{Q}_{11} = \tilde{Q}_{22} = \mu, \quad \text{(II.42)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_L^{(1)}[0,0,1] = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}, \\ \text{(II.43)} \end{cases}$$

$$v_T^{(1)} [1, 0, 0] = v_T^{(1)} [0, 1, 0] = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (\text{II.44})$$

II.1. 3. Discussions et interprétations des résultats

D'un point de vue physique trois ondes peuvent se propager dans le milieu isotrope :

- une onde longitudinale de vitesse $v_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$ qui est obtenue en considérant la direction de propagation et direction principale sont confondues.
- deux ondes transversales (ou de cisaillement) de vitesse $v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ pour lesquelles les directions de propagation sont perpendiculaire à la direction des ondes longitudinale.

Puisque les coefficients de Lamé, et en particulier μ sont toujours positifs, il s'ensuit que la vitesse v_L plus grand à v_T .

On peut exprimés les vitesses v_L et v_T de la manière suivante :

$$v_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (\text{II.45})$$

$$v_T = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1+\nu)}}. \quad (\text{II.46})$$

Le rapport $\frac{v_L}{v_T}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{v_L}{v_T} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{\rho_0(1-2\nu)}} \quad (\text{II.47})$$

Le tableau (II.1) rassemble les valeurs des deux vitesses v_L et v_T , qui dépendent des coefficients de Poisson, de module de Young, et de la masse volumique (qui figure aussi dans le tableau (II.1)), pour quelques matériaux. il permet aussi de constater la pertinence de la conclusion précédente $v_L > v_T$.

Matériaux	P_0 (Kg/m ³)	ν	E(MPa)	v_L (m/s)	v_T (m/s)
Béton	2500	0.2	47000	5109	2798
Acier	7800	0.3	200000	7022	3140
Nickel	8900	0.31	210000	6884	3000
Aluminium	2700	0.33	70000	7571	3121
Caoutchouc	900	0.49	100	19245	192

Tab. (II.1) : valeurs des deux vitesses v_L et v_T , pour des différents matériaux.

La figures (II.1), montre la variation du rapport des deux vitesses (v_L / v_T) en fonction du coefficient de Poisson ν , cette dernière nous permet de confirmer que $v_L > v_T$, et de constater que :

Pour les matériaux (Béton, Acier, Nickel et Aluminium) les vitesses longitudinales et transversales sont de même ordre de grandeurs cependant, pour le caoutchouc (cas limite $\nu = 0.5$), la vitesse longitudinale v_L est infinie et $v_T \ll v_L$. Physiquement, il n'existe pas une vitesse infinie. En d'autres termes, notre approche est mise en défaut. En effet, la loi de comportement du matériau doit tenir compte de l'effet de la pression hydrostatique (ou multiplicateur de Lagrange) inconnue.

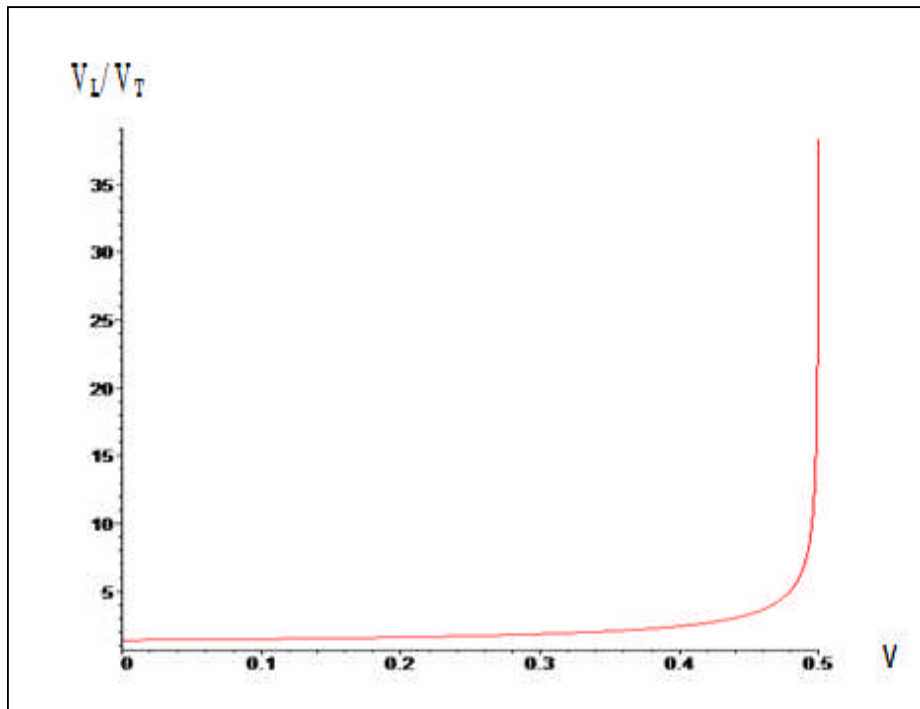


Fig. (II.1) : rapport des deux vitesses (v_L / v_T) en fonction du coefficient de Poisson

D'après les résultats obtenus, on peut conclure que les valeurs propre sont réelles (milieu non dispersif), donc les vitesses de phases sont réelles aussi. Les ondes longitudinales ne se propagent pas dans les milieux incompressibles ($v_L \rightarrow \infty$).

Revenons aux solutions de l'équation(II.24.b).

$$(X + i(K\omega)c^{-1}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{K\omega}{\rho_0 c}} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]. \quad (\text{II.48})$$

Cette solution s'écrit sous la forme suivante :

$$v^{(2)} = v_R + i v_I, \quad (\text{II.49})$$

Avec :

v_R : Partie réelle de la vitesse,

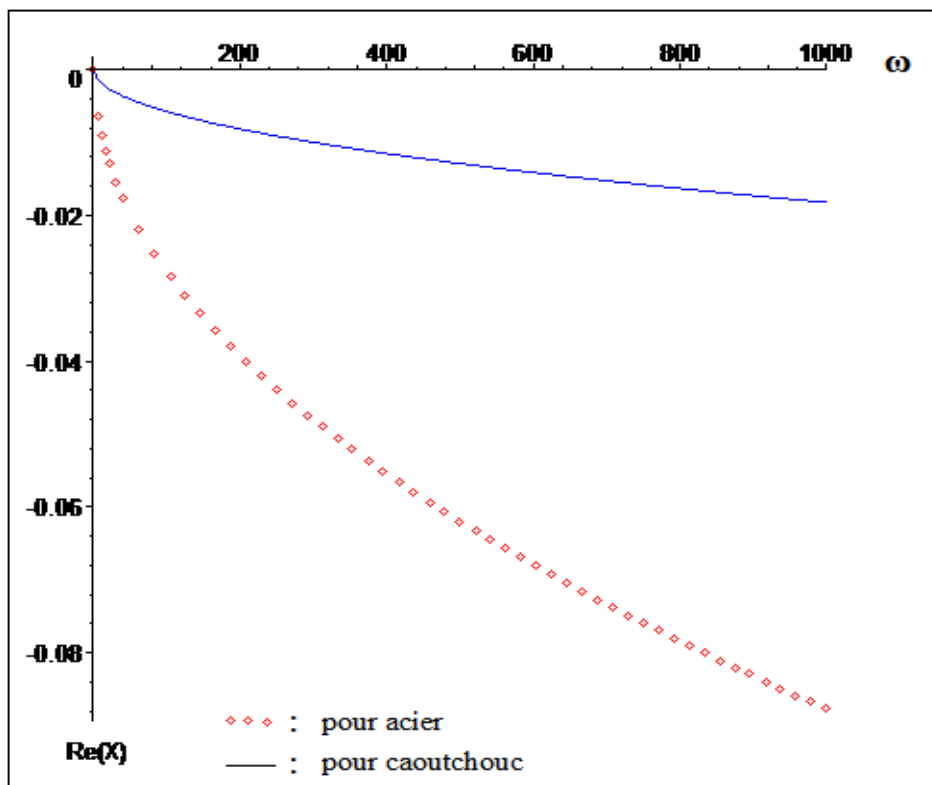
v_I : Partie imaginaire de la vitesse.

Par identification on obtient :

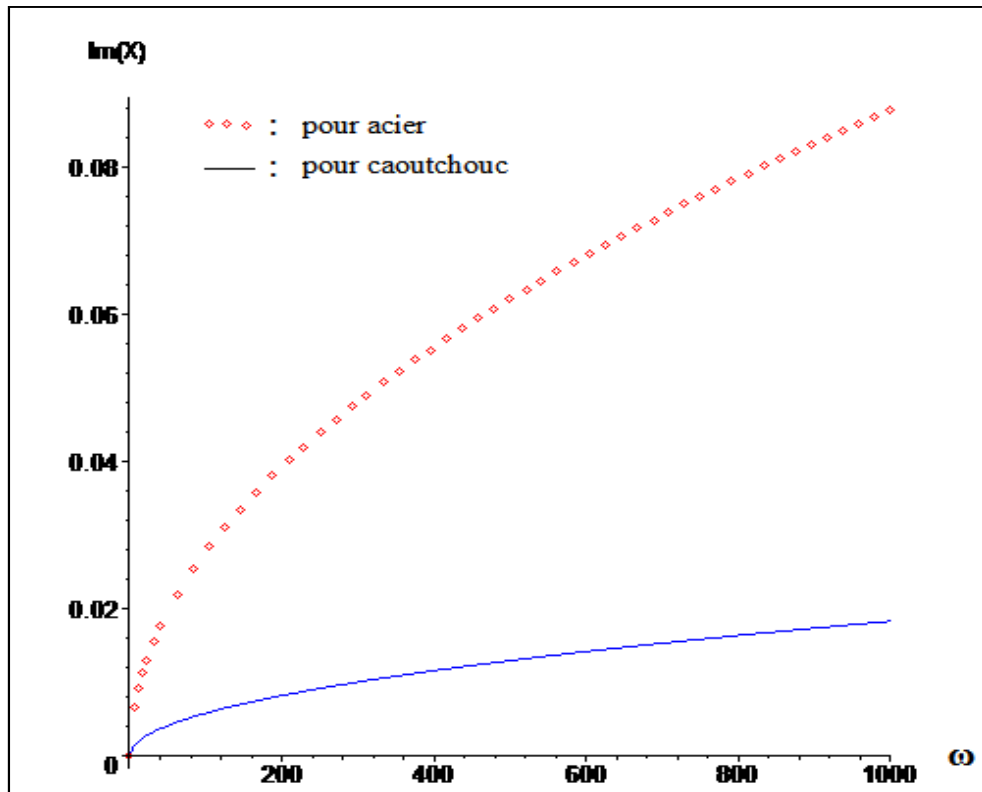
$$v_R^{(2)} = \sqrt{\frac{K\omega}{\rho_0 c}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right). \quad (\text{II.50})$$

$$v_I^{(2)} = \sqrt{\frac{K\omega}{\rho_0 c}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right). \quad (\text{II.51})$$

La figures (II. 2) et (II. 3) illustre la variation des parties réelles et imaginaires de la vitesse $v^{(2)}$ en fonction de la pulsation ω pour deux matériaux (acier et caoutchouc). Les valeurs de $\text{Re}\{v^{(2)}\}$ sont toujours négatives et celle de $\text{Im}\{v^{(2)}\}$ sont positives.

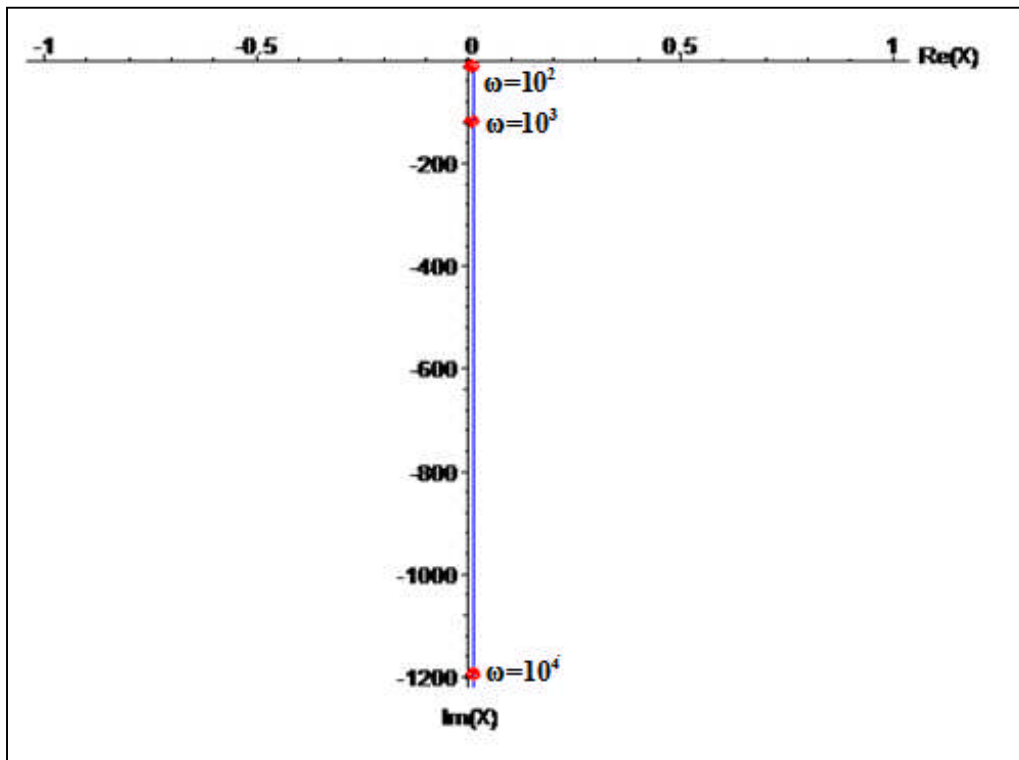


Fig(II.2): variation de v_R en fonction de ω .

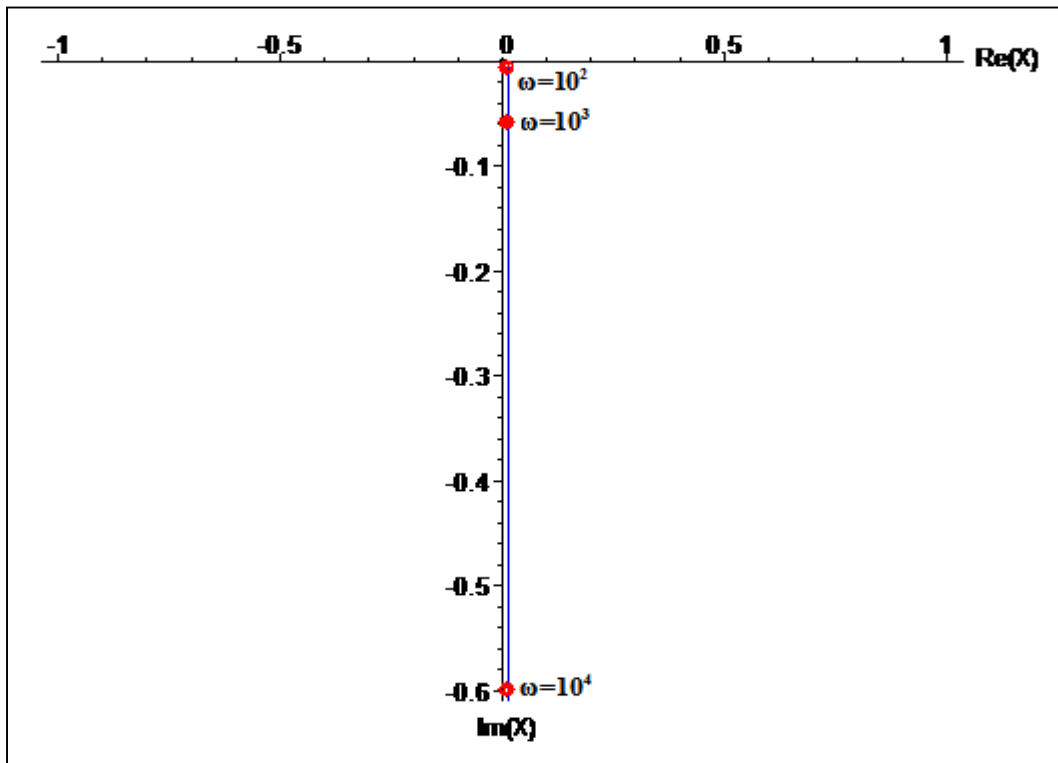


Fig(II.3): Variation de v_{lm} en fonction de ω .

On représente dans le plan complexe ($\text{Re}\{X\}$, $\text{Im}\{X\}$), les figures (II.4 et II 5), d'après cette dernière, on constate pour n'importe quelle pulsation ω , la réponse se situe dans le cadran (I). Car ($\text{Re}(X^{(1)}) \geq 0$ et $\text{Im}(X^{(1)}) \leq 0$), le matériau est stable selon (Scott, 1989), donc les ondes se propagent en s'atténuant fortement.



Fig(II.4): Variation de $\text{Im}(X)$ en fonction de $\text{Re}(X)$ (pour acier).



Fig(II.5): Variation de $\text{Im}(X)$ en fonction de $\text{Re}(X)$ (pour caoutchouc).

II.1.2.2. Régime non isotherme : ($\Delta T \neq 0$).

Pour ce cas, le coefficient de dilatation thermique est non nul ($\alpha \neq 0$), et les tenseurs acoustique et isentropique, sont différents cela nous conduit à résoudre l'équation (II.19) suivante :

$$X \cdot g(X) + i(K\omega)c^{-1}f(X) = 0 \quad (\text{II.52})$$

Afin de résoudre l'équation (II.52), on doit préciser les directions de propagation ainsi que les composantes des tenseurs acoustique et isentropique.

II.1.2.2.1. Direction principale [1,0,0]

D'après l'équation (II.52), on obtient :

$$X(\widehat{Q}_{11} - X)(\widehat{Q}_{22} - X)(\widehat{Q}_{33} - X) + i (K\omega)c^{-1}(\widetilde{Q}_{11} - X)(\widetilde{Q}_{22} - X)(\widetilde{Q}_{33} - X) = 0 \quad (\text{II.53})$$

avec :

$$\widehat{Q}_{11} = \lambda + 2\mu + T_0 (\rho_0 c)^{-1}(3\lambda + 2\mu)^2\alpha^2. \quad (\text{II.54})$$

$$\widehat{Q}_{22} = \mu. \quad (\text{II.55})$$

$$\widehat{Q}_{22} = \mu. \quad (\text{II.56})$$

II.1.2.2.2. Direction principale [0,1,0],

On obtient la même équation (II.53) :

avec :

$$\widehat{Q}_{11} = \mu. \quad (\text{II.57})$$

$$\widehat{Q}_{22} = \lambda + 2\mu + T_0 (\rho_0 c)^{-1}(3\lambda + 2\mu)^2\alpha^2. \quad (\text{II.58})$$

$$\widehat{Q}_{33} = \mu. \quad (\text{II.59})$$

II.1.2.2.3. Direction principale [0,0,1]

On obtient la même équation (II.53) :

avec :

$$\widehat{Q}_{11} = \mu. \quad (\text{II.60})$$

$$\widehat{Q}_{22} = \mu. \quad (\text{II.61})$$

$$\widehat{Q}_{33} = \lambda + 2\mu + T_0 (\rho_0 c)^{-1}(3\lambda + 2\mu)^2\alpha^2. \quad (\text{II.62})$$

Pour chaque direction choisie, on calcule les composantes \widehat{Q}_{11} , \widetilde{Q}_{22} , \widetilde{Q}_{33} , \widehat{Q}_{11} , \widehat{Q}_{22} et \widehat{Q}_{33} et on les introduit dans l'équation (II.53). La résolution de cette dernière s'effectue

numériquement car elle n'admet pas de solution analytique. On utilise pour cela le logiciel Maple, et nous aboutissons à quatre solutions complexes de la forme suivante :

$$X^{(n)} = X^{(n)}_R + i X^{(n)}_{Im}, \quad (n=1..4). \quad (II.63)$$

On rassemble dans les tableaux (II.2 et II.3), les résultats ainsi obtenues.

$X^{(n)}$ ω	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$\omega = 0$	0	$0,99 \cdot 10^7$	$0,99 \cdot 10^7$	$0,69 \cdot 10^{11}$
$\omega = 10$	$0,15 \cdot 10^{-13} - i 8,5 \cdot 10^{-4}$	$0,99 \cdot 10^7 + i 0,14 \cdot 10^{-7}$	$0,99 \cdot 10^7 - i 0,14 \cdot 10^{-7}$	$0,69 \cdot 10^{11} - i 1,2$
$\omega = 10^2$	$0,15 \cdot 10^{-11} - i 8,5 \cdot 10^{-3}$	$0,99 \cdot 10^7 + i 0,14 \cdot 10^{-6}$	$0,99 \cdot 10^7 - i 0,14 \cdot 10^{-6}$	$0,69 \cdot 10^{11} - i 12$
$\omega = 10^3$	$0,15 \cdot 10^{-9} - i 8,5 \cdot 10^{-2}$	$0,99 \cdot 10^7 + i 0,14 \cdot 10^{-5}$	$0,99 \cdot 10^7 - i 0,14 \cdot 10^{-5}$	$0,69 \cdot 10^{11} - i 120$
$\omega = 10^4$	$0,15 \cdot 10^{-7} - i 8,5 \cdot 10^{-1}$	$0,99 \cdot 10^7 + i 0,14 \cdot 10^{-4}$	$0,99 \cdot 10^7 - i 0,14 \cdot 10^{-4}$	$0,69 \cdot 10^{11} - i 1200$

Tab. (II.2) : Valeurs des $X^{(n)}$ pour l'acier ($E=2 \cdot 10^5$ MPa, $\rho_0=7800$ Kg/m³, $\nu=0.3$).

$X^{(n)}$ ω	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
$\omega = 0$	0	37286	37286	$0,6 \cdot 10^8$
$\omega = 10$	$0,35 \cdot 10^{-15} - i 3,7 \cdot 10^{-5}$	$37286 - i 0,2224$	$37286 + i 0,2224$	$06 \cdot 10^8 - i 5,6 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 10^2$	$0,35 \cdot 10^{-13} - i 3,7 \cdot 10^{-4}$	$37286 - i 0,2224$	$37286 + i 0,2224$	$06 \cdot 10^8 - i 5,6 \cdot 10^{-3}$
$\omega = 10^3$	$0,35 \cdot 10^{-13} - i 3,7 \cdot 10^{-3}$	$37286 - i 0,2224$	$37286 + i 0,2224$	$06 \cdot 10^8 - i 5,6 \cdot 10^{-2}$
$\omega = 10^4$	$0,35 \cdot 10^{-9} - i 3,7 \cdot 10^{-2}$	$37286 - i 0,2224$	$37286 + i 0,2224$	$06 \cdot 10^8 - i 5,6 \cdot 10^{-1}$

Tab. (II.3) : Valeurs des $X^{(n)}$ pour le caoutchouc ($E=10^2$ MPa, $\rho_0=900$ Kg/m³, $\nu=0.49$).

II.1.2.2.4. Discussions

Les solutions $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ et $X^{(4)}$ sont écartées dans notre discussion car du point de vue physique ces solutions sont inacceptables. En effet, pour une pulsation nulle ($\omega=0$), les valeurs numériques de ces solutions ne sont pas nulles. En d'autres termes, il existe dans le milieu en quelque sorte une onde « résiduelle » d'origine physique inexpliquée.

La solution $X^{(1)}$ est à retenir, car ($\text{Re}(X^{(1)}) \geq 0$ et $\text{Im}(X^{(1)}) \leq 0$), donc le matériau est stable selon (Scott, 1989), les ondes peuvent se propager dans le milieu thermoélastique.

On montre sur les figures (II.6 et II.7), dans le plan complexe la représentation de la solution $X^{(1)}$.

La vitesse de propagation se présente sous forme complexe $v^{(1)}(\omega) = v_R^{(1)}(\omega) + i v_{Im}^{(1)}(\omega)$,

On peut constater que la vitesse dépend de la pulsation ω , c'est-à-dire, le milieu est dispersif. Conformément aux travaux de (Chadwick, 1964). Ainsi, la vitesse de phase devient une vitesse de groupe. Afin de déterminer $v_R^{(1)}(\omega)$ et $v_{Im}^{(1)}(\omega)$, on fait une résolution numérique et on aboutirait à deux solutions correspondantes à des ondes qui se propagent en s'atténuant.

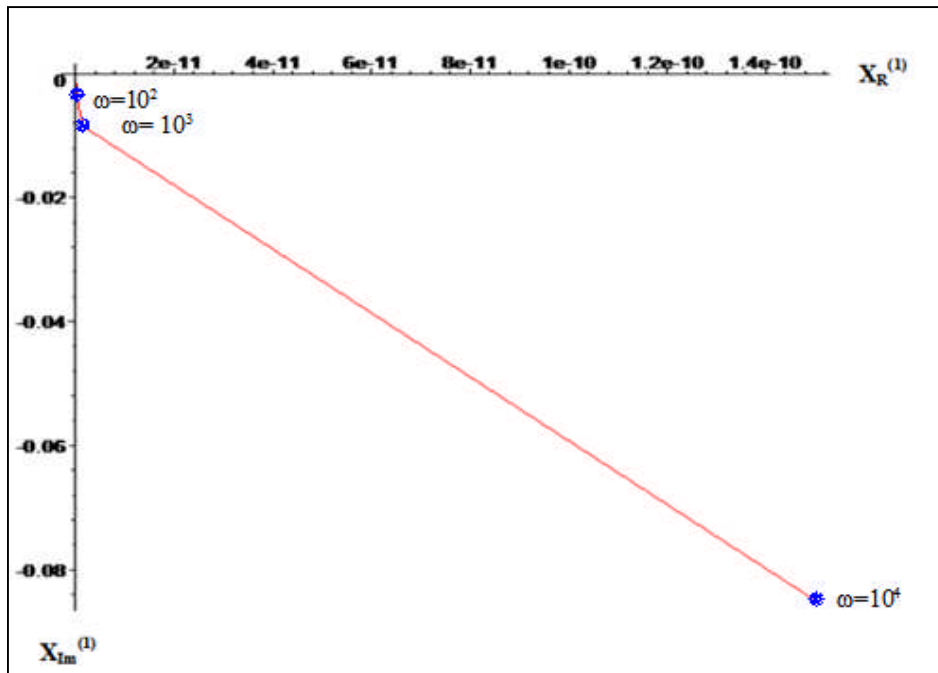


Fig (II.6): Variation de $X_{Im}^{(1)}$ en fonction de $X_R^{(1)}$, pour l'acier.

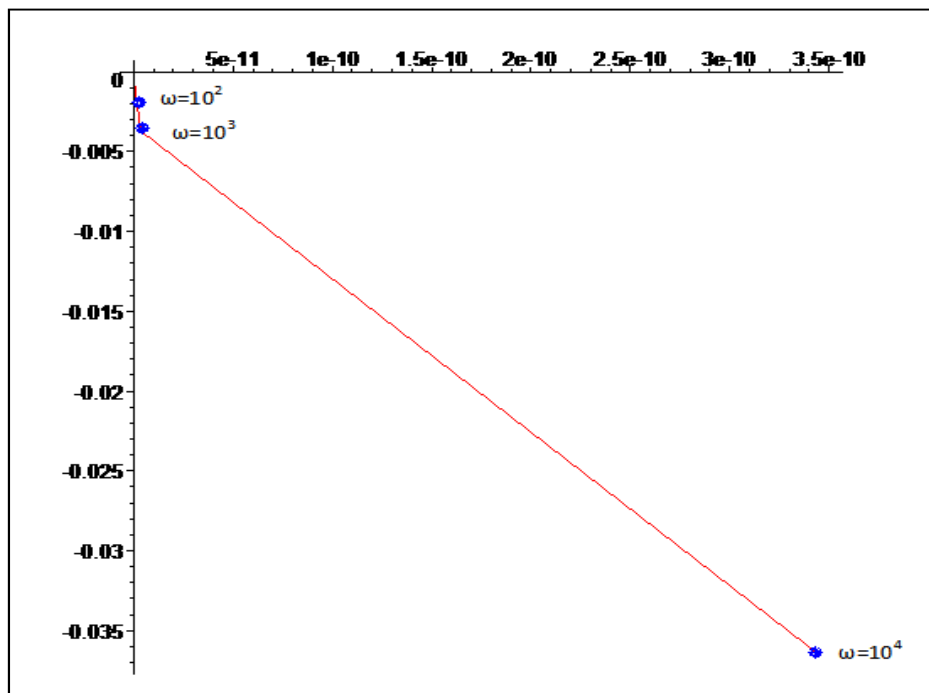


Fig. (II.7) : Variation de $X_{Im}^{(1)}$ en fonction de $X_R^{(1)}$, pour le caoutchouc.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons développé une étude sur la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope.

Ainsi, ce travail s'inscrit dans le cadre de la généralisation de la propagation d'ondes dans les milieux élastique isotrope.

Nous avons constaté que les variations de la température conduit à rendre le milieu élastique dispersif. Par conséquent les ondes peuvent se propager en s'atténuant.

Nous relevons en régime isotherme, les vitesses longitudinales sont infinies pour les milieux incompressibles. Ce paradoxe doit être levé, en considérant l'interaction ondes- phonons. Par Conséquent, la loi de Fourier n'est pas convenable et doit être modifiée. Un nombre de théories ont été développée dans ce cadre, (cf. P. Prasad et al. 2010).

Cette étude peut être reprise en tenant compte de la modification à apporter à la loi de Fourier.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

Chadwick, P., 1964. Thermoelasticity. The dynamical theory. In progress in solid mechanics Sneddon. J. N. and Hill, R. (Eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 265-328

Chadwick, P., Scott, N.H., 1992. Linear dynamical stability in constrained thermoelasticity I. Deformation-temperature constraints. Q. JI Mech. Appl. Math., Vol. 45, Pt. 4.

Coirier, J., 2001. Mécanique des milieux continus. Dunod.

Forest, S., Amestoy, M.; 2007. Cours de mécanique des milieux. Ecole des mines de paris.

Germain, P., 1995. Cours de mécanique des milieux continus. Paris. Masson.

Lemaitre, J., 1985. Cours de mécanique des milieux continus. Paris. Dunod.

Lemaitre, J., Chaboche, J. L., Benallal, A., Desmorat, R., 2009. Cours de mécanique des matériaux solides. Paris. Dunod.

Le Tallec, P., 2006. Cours de mécanique des milieux continus. Ecole polytechnique.

Mandel, J., 1966. Cours de mécanique des milieux continus. Les grands classiques.

Prasad, R., Kumar, R., Mukhopadhyay, S., 2010. Propagation of harmonic plane waves under thermoelasticity with deal phase-lags. International journal of Eng.Sci: doi: 10.1016/j.ijengsci. 2010.04.011.

Royer , D., 1974. Ondes élastiques dans les solides. Paris. Masson.

Salençon, J., 2002. Cours de mécanique des milieux continus. Thermoélasticité. Edition ecole polytechnique.

Scott, N.H., 1989. A theorem in thermoelasticity and its application to linear stability. Proc. R. Soc. London A 424, 143-153

Annexe

On définit un potentiel thermodynamique de la manière suivante :

$$\rho_0 \psi = \frac{\lambda}{2} I^2(\bar{\epsilon}) + 2\mu II(\bar{\epsilon}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T I(\bar{\epsilon}) - \frac{\rho_0}{2T_0} \Delta T^2, \quad (1)$$

La loi de comportement dérive alors du potentiel thermodynamique de la manière suivante :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial \bar{\epsilon}} \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial I} \frac{\partial I(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{\partial(\rho_0 \psi)}{\partial II} \frac{\partial II(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}}. \quad (3)$$

$$I(\bar{\epsilon}) = \bar{I} : \bar{\epsilon} \quad (4)$$

$$II(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} : \bar{\epsilon}) \quad (5)$$

Introduisons l'équation (4) et (5) dans (3) on obtient :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (6)$$

Les composantes du tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites déformations (H.P.P) sont définies de la manière suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7)$$

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k}) = u_{k,k} \quad (8)$$

Introduisons l'équation (7) et (8) dans (6) on obtient :

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (9)$$

L'équation locale de mouvement s'exprime par la relation suivante :

$$\sigma_{ij,j} = \rho u_{i,tt} \quad (10)$$

A partir de l'équation (9) et (10), on obtient :

$$\sigma_{ij,j} = \mu (u_{i,jj} + u_{i,jj}) + \lambda u_{k,kj} \delta_{ik} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T_j \delta_{ij} \quad (11)$$

A l'état initial T_0 est constante donc :

$$\Delta T_j = (T - T_0)_{,j} = T_{,j} \quad (12)$$

l'équation (11), devient :

$$\mu(u_{i,jj} + u_{i,jj}) + \lambda u_{k,kj} \delta_{ik} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_j \delta_{ij} = \rho_0 u_{i,tt} \quad (13)$$

En introduisant l'équation du mouvement sous forme d'onde plane qui est définie par :

$$(\bar{u}, T) = (U^{(0)}, T^{(0)}) e^{i[k(\bar{n}\cdot\bar{x}) - \omega t]} = (U^{(0)}, T^{(0)}) e^{i[k(\bar{n}\cdot\bar{x}) - \omega t]} = (U^{(0)}, T^{(0)}) e^{ik[(\bar{n}\cdot\bar{x}) - vt]} \quad (14)$$

A partir de l'équation (14), on calcule les termes suivants :

$$u_{i,jj} = - \frac{\omega^2}{v^2} n_j n_j u_i \quad (15)$$

$$u_{j,ij} = - \frac{\omega^2}{v^2} n_i n_j u_j \quad (16)$$

$$T_j = \frac{i\omega}{v} T n_j \quad (17)$$

$$u_{i,tt} = - \omega^2 u_i \quad (18)$$

On remplace les termes précédents dans l'équation (13), on obtient :

$$\mu \left(- \frac{\omega^2}{v^2} n_j n_j u_i - \frac{\omega^2}{v^2} n_i n_j u_j \right) - \lambda \frac{\omega^2}{v^2} n_j n_k u_k \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T n_j \delta_{ij} = - \omega^2 \rho_0 u_i \quad (19)$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} [\mu (n_j n_j u_i + n_i n_j u_j) + \lambda n_j n_k u_k \delta_{ij}] + \frac{i\omega}{v} (3\lambda + 2\mu)\alpha T n_j \delta_{ij} = \omega^2 \rho_0 u_i \quad (20)$$

On pose :

$$u_i = u_k \delta_{ik} \quad (21)$$

$$u_j = u_k \delta_{jk} \quad (22)$$

L'équation (20), devient :

$$\frac{\omega^2}{v^2} [\mu (u_k \delta_{ik} + n_i n_k u_k) + \lambda n_i n_k u_k] + \frac{i\omega}{v} (3\lambda + 2\mu)\alpha T n_j \delta_{ij} = \omega^2 \rho_0 u_i \quad (23)$$

$$[\mu (\delta_{ik} + n_i n_k) + \lambda n_i n_k] u_k + \frac{i v}{\omega} (3\lambda + 2\mu)\alpha n_i T = \rho_0 v^2 \delta_{ik} u_k \quad (24)$$

Afin d'éliminer le terme de la température T dans l'équation (7), en utilisant la loi de Fourier et l'équation de chaleur

$$q_{i,j} = -K T_{,ij} . \quad (25)$$

$$T\dot{s} + \text{div } \bar{q} = \rho_0 r . \quad (26)$$

On néglige le rayonnement de la chaleur ($r = 0$) l'équation (26) devient :

$$T\dot{s} + \text{div } \bar{q} = 0 . \quad (27)$$

A partir de l'équation (3), on calcule l'entropie s de la manière suivante :

$$s = - \frac{\partial(\rho_0 \Psi)}{\partial T} \quad (28)$$

$$s = (3\lambda + 2\mu)\alpha u_{k,k} + \rho_0 c \frac{\Delta T}{T_0} \quad (29)$$

$$\dot{s} = (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \frac{\Delta \dot{T}}{T_0} \quad (30)$$

$$\Delta \dot{T} = \overbrace{(\dot{T} - \dot{T}_0)} \quad (31)$$

A l'état initial on suppose que la température est indépendante du temps

$$\Delta \dot{T} = \dot{T} \quad (32)$$

$$\dot{s} = (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \frac{\dot{T}}{T_0} \quad (33)$$

$$T_0 \dot{s} = T_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \dot{T}$$

L'équation de chaleur devient :

$$KT_{,ij} = T_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \dot{T} \quad (34)$$

$$T_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \dot{T} - KT_{,ij} = 0 \quad (35)$$

$$T_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} + \rho_0 c \dot{T} - KT_{,ij} = 0 \quad (36)$$

$$T_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{u}_{k,k} = KT_{,ij} - \rho_0 c \dot{T} \quad (37)$$

$$T_0 \frac{\omega^2}{v} (3\lambda + 2\mu)\alpha n_k u_k = \left[-K \frac{\omega^2}{v^2} n_i n_j - i \omega \rho_0 c \right] T \quad (38)$$

$$T = \frac{T_0 \omega v (3\lambda + 2\mu)\alpha n_k}{\left[-K \omega n_i n_j + i c \rho_0 v^2 \right]} \quad (39)$$

Introduisons l'équation (39) dans (24), on obtient :

$$[\mu(\delta_{ik} + n_i n_k) + \lambda n_i n_k] u_k + i \frac{T_0 v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{[-K\omega n_i n_j + ic\rho_0 v^2]} n_i n_k u_k = \rho_0 v^2 \delta_{ik} u_k \quad (40)$$

On pose :

$$K n_i n_j = K \quad (41)$$

$$[\mu(\delta_{ik} + n_i n_k) + \lambda n_i n_k] u_k + i \frac{T_0 v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{[-K\omega + ic\rho_0 v^2]} n_i n_k u_k = \rho_0 v^2 \delta_{ik} u_k \quad (42)$$

$$[(\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}] u_k + i \frac{T_0 v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{[-K\omega + ic\rho_0 v^2]} n_i n_k u_k = \rho_0 v^2 \delta_{ik} u_k \quad (43)$$

$$\left\{ [(\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}] + i \frac{T_0 v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{[-K\omega + ic\rho_0 v^2]} n_i n_k - \rho_0 v^2 \delta_{ik} \right\} u_k = 0 \quad (44)$$

$$\{ [(\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}] [-K\omega + ic\rho_0 v^2] + i T_0 v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 n_i n_k - [-K\omega + ic\rho_0 v^2] \rho_0 v^2 \delta_{ik} \} u_k = 0 \quad (45)$$

$$\left\{ (K\omega) [\rho_0 v^2 \delta_{ik} - (\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}] - ic\rho_0 v^2 \left[\rho_0 v^2 \delta_{ik} - [(\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik} + \frac{T_0}{\rho_0 c} v^2 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 n_i n_k] \right] \right\} u_k = 0. \quad (46)$$

On pose

$$\tilde{Q}_{ik} = (\mu + \lambda) n_i n_k + \mu \delta_{ik} \quad (47)$$

$$\hat{Q}_{ik} = \tilde{Q}_{ik} + T_0 (\rho_0 c)^{-1} (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 n_i n_k \quad (48)$$

L'équation (46), devient :

$$\{ (K\omega) [\rho_0 v^2 \delta_{ik} - \tilde{Q}_{ik}] - ic\rho_0 v^2 [\rho_0 v^2 \delta_{ik} - \hat{Q}_{ik}] \} u_k = 0 \quad (49)$$

$$\{ \rho_0 v^2 [\hat{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}] + i(K\omega) c^{-1} \rho_0 v^2 [\tilde{Q}_{ik} - \rho_0 v^2 \delta_{ik}] \} u_k = 0 \quad (50)$$

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons développé une étude sur la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope. Le premier chapitre traite du comportement élastique linéaire. Le but est de bien définir les paramètres mis en jeu dans notre étude. Dans le deuxième chapitre nous avons développé une étude théorique sur la propagation des ondes planes dans un milieu thermoélastique linéaire, homogène et isotrope. Pour pouvoir coupler les équations mécanique et thermique et déduire une loi de comportement thermoélastique, un choix d'un potentiel thermodynamique s'est imposé. Ensuite nous avons développé l'équation de mouvement et éliminé la température en considérant les ondes planes.

L'équation séculaire est obtenue en mettant en évidence deux tenseurs caractéristiques : acoustique et isentropique. La résolution de cette équation aux valeurs propres nous a conduits aux vitesses de propagation dans le milieu. Ainsi deux cas sont étudiés : le premier concerne le régime isotherme (sans variation de température) ; notre formalisme général se réduit au cas classique conduisant à calculer deux vitesses d'ondes longitudinale et transversale. Dans le deuxième, nous considérons le régime non isotherme. Dans ce cas les tenseurs acoustique et isentropique sont différents. La recherche des valeurs propres est plus complexe nécessitant une résolution numérique sur Maple. Nous avons obtenu une solution pour laquelle le matériau est stable. Les variations de température induisent une dispersion des ondes dans le milieu.

Mots clés: Thermoélasticité linéaire, ondes, propagation, stabilité.