

Mémoire

Présenté par

Mr MEDJAHED Abdelouhab

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Thème

**ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI DE
DISCRETISATIONS ELEMENTS FINIS EN
ELASTICITE ENDOMMAGEABLE**

Soutenu le : 17 / 12 / 2015

Devant le Jury composé de :

Mr MAZA	Mustapha	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr BOUZERD	Hamoudi	Maître de conférences A	Univ. de Skikda	Examineur
Mr SEGHIR	Abdelghani	Maître de conférences A	Univ. de Bejaia	Examineur
Mr BECHEUR	Abdelhamid	Maître de conférences B	Univ. de Bejaia	Invité

Année Universitaire : 2014/2015

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu le bon Dieu qui m'a donné le courage, la volonté, et la patience pour mener à bien ce travail.

Je remercie mon encadreur Mr TAHAKOURT Abdelkader Professeur à l'université de Béjaia qui a accepté de prendre en charge mon travail de mémoire de magister.

Mes remerciements sont adressés également à Mr BECHEUR Abdelhamid Maître de conférences B à l'université de Béjaia pour son aide précieuse, ses encouragements et son soutien.

A tous les enseignants qui m'ont accordé leurs temps, leur éclairage scientifique et leur soutien moral durant ma formation théorique en post-graduation. Merci pour vos cours et conférences.

A messieurs les membres du jury qui ont accepté de disposer de leurs temps pour juger ce travail.

Je tiens à remercier mes parents, mon épouse, mes enfants, mon frère et mes sœurs, qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Liste des notations et symboles

A	Multiplicateur de Lagrange.
\mathbf{A}	Tenseur de souplesse.
A_k	Variables associées à V_k .
$[B]$	Matrice des déformations.
d	Opérateur de dérivée.
D	Variable d'endommagement isotrope.
D_t	Variable d'endommagement en traction.
D_c	Variable d'endommagement en compression.
$D_{\vec{n}}$	Variable d'endommagement dans une direction \vec{n} .
\det	determinant.
\tilde{D}_h	Champ lissé de variable d'endommagement.
e_i	Energie interne spécifique.
e	Erreur absolue globale.
E	Energie de déformation.
E_h	Energie de déformation éléments finis.
E_i	Energie interne.
E_{tot}	Energie totale.
E	Module de young.
$(e_h)_\sigma$	Erreur ponctuelle du champ des contraintes.
e_h	Erreur ponctuelle du champ des déplacements.
$\{F\}$	Vecteur des forces généralisées.
$\{f_d\}$	Densité de forces volumiques.
$\{F_d\}$	Densité surfacique d'efforts.
$[H]$	Matrice de Hooke.
H	Fonction d'Heavside.
h_E	Taille caractéristique de E.
\bar{h}_E	Taille caractéristique à déterminer.
h_Γ	Taille caractéristique de Γ
\mathbf{I}	Tenseur identité.
K	Energie cinétique.
$[K]$	Matrice de raideur globale.
L	Opérateur tangent.
l_c	Longueur caractéristique.
M	Point matériel.
n	Dimension de l'espace.

$[N]$	Matrice des fonctions de forme.
\vec{n}	Vecteur normal à une surface.
N_R	Nombre de cycles à rupture.
P	Degré d'interpolation.
P	Puissance.
P_e	Puissance des forces externes.
P_E	Taux de convergence par élément.
P_i	Puissance des forces internes.
Q	Taux de chaleur reçue.
\vec{q}	Vecteur flux de chaleur par conduction.
$\{q\}$	Taux de convergence de l'erreur.
$Q(u)$	Moyenne d'une composante du tenseur de contrainte sur ω
r	Densité volumique de production interne de chaleur à distance.
r_h	Résidu d'équilibre éléments finis.
r_E	Coefficient de modification de taille.
RVE	Elément de volume représentatif.
S	Entropie.
S	surface
s	Entropie spécifique.
$[T]$	Matrice des tensions.
T	Température.
t	Temps.
t_h	Résidu d'équilibre à l'interface entre deux éléments.
Tr	Trace.
$\{u\}$	Vecteur des déplacements nodaux.
$\{U\}$	Champ de déplacement.
$\{U_d\}$	Champ de déplacement imposé.
$\{U\}_{exact}$	Champ de déplacement exact.
$\{U_h\}$	Champ des déplacements éléments finis.
\hat{u}	Champ de déplacement cinématiquement admissible.
$\hat{\sigma}$	Champ de contraintes statiquement admissible.
V	Volume.
\vec{v}	Vecteur vitesse.
V_k	Variables internes.
V_r	Volume représentatif.
w	Fonction poids.
$[X]^T$	Transposée d'une matrice $[X]$.
x	Point de Gauss.
X_{ij}	Force thermodynamique associée à l'écroutissage cinématique.
Y	Taux de restitution d'énergie élastique.
Y_D	Seuil d'endommagement en traction.

z	force thermodynamique associée à l'écroutissage isotrope.
α	Ordre d'une singularité.
ρ	Masse volumique du matériau.
Ω	Domaine étudié.
Ω_e	Domaine élémentaire.
$\partial\Omega$	Partie du bord du domaine étudié.
ω	Zone locale d'intérêt d'un domaine Ω .
ϵ	Erreur estimée globale.
ϵ_e	Erreur estimée locale.
$\epsilon_E :$	Contribution à l'erreur d'un élément E.
$\epsilon_0 :$	Erreur prescrite.
ϵ^Q	Erreur en quantité d'intérêt.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations.
ε_{eq}	Déformation équivalente.
ε_{d0}	Déformation seuil d'endommagement.
$\{\varepsilon_h\}$	Champ des déformations éléments finis.
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	Tenseur des déformations élastiques.
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	Tenseur des déformations plastiques.
ψ	Potentiel énergie libre spécifique.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes.
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur des contraintes effectives.
σ_f	Contrainte de fermeture des fissures.
σ_{exact}	Champ des contraintes exactes.
σ_h	Champ de contraintes éléments finis.
$\tilde{\sigma}_h$	Champ lissé de contraintes.
φ	Potentiel de dissipation.
φ^*	Potentiel dual de dissipation.
δS	Section du RVE.
δS_D	Aire totale de la trace des défauts.
λ	Multiplicateur d'endommagement.
ν	Coefficient de Poisson.
κ	Coefficient de compressibilité.
μ	Coefficient module de cisaillement.
η	Variable de fermeture des fissures.
Θ	Indice d'effectivité.
Γ	Pourtour de l'élément.

Table des figures

1.1	Déformation irréversible en plasticité et en endommagement quasi-fragile d'après Jaques Besson et al (2010)	10
1.2	Représentation physique de l'endommagement d'après J.Lemaitre et R.Desmorat (2005)	18
2.1	Modèle de mazars, comportement en traction pure et compression pure	28
2.2	Courbe charge-déplacement du béton en traction direct d'après Jirasek (2002)	31
2.3	Courbe charge-déplacement du béton en flexion d'après Jirasek (2002)	32
2.4	Distributions des déformations d'après Kuhl et al (1999)	32
2.5	Courbes charge-déplacement d'après Kuhl et al (1999)	33
2.6	Distribution non locale des déformations d'après Kuhl et al (1999)	37
2.7	Courbes chargement déplacement en modèle à gradient d'après Kuhl et al (1999)	37
2.8	Décomposition en parties hydrostatique et déviatorique d'après B.Richard et al (2010)	42
2.9	Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux en tension d'après B.Richard et al (2010)	47
2.10	Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux en compression cyclique d'après B.Richard et al (2010)	48
3.1	Mise en évidence de l'erreur de pollution d'après J. Delmas (2008)	61
3.2	Géométrie de la structure utilisée par J. Delmas (2008)	62
3.3	Procédure de contrôle de l'erreur d'après F.Cugnon (2000)	64
3.4	Principe de la méthode h raffinement - déraffinement	64
3.5	Principe de la méthode h globale	65
3.6	Principe de la méthode -P	65

TABLE DES FIGURES

3.7	Principe de la méthode -R	66
4.1	Organigramme schématique du programme	74
5.1	Test de référence SENB d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	78
5.2	Test de référence DENB d'après Geers et al (2000)	78
5.3	Test brésilien d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000) .	79
5.4	Maillage initial, 1676 éléments, 1785 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB	80
5.5	Troisième maillage, 15084 éléments, 15409 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB	80
5.6	Sixième maillage, 60336 éléments, 60985 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB	81
5.7	Maillage initial, 9560 éléments, 9801 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB	81
5.8	Deuxième maillage, 38240 éléments, 38721 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB	81
5.9	Troisième maillage, 86040 éléments, 86761 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB	82
5.10	Maillage initial, 404 éléments, 229 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN	82
5.11	Troisième maillage, 4276 éléments, 2217 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN	83
5.12	Cinquième maillage, 11916 éléments, 6089 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN	83
5.13	Evolution de l'erreur relative globale en fonction du nombre d'éléments TEST SENB	84
5.14	Evolution de l'erreur relative globale en fonction du nombre d'éléments TEST DENB	85
5.15	Evolution de l'erreur relative globale en fonction du nombre d'éléments TEST BRESILIEN	85
5.16	Courbes de convergence TEST SENB	87
5.17	Courbes de convergence TEST DENB	88
5.18	Courbes de convergence TEST BRESILIEN	89
5.19	SENB maillage initial, 1036 éléments	90
5.20	SENB Distribution de l'endommagement	91
5.21	SENB Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 17.44 %	92
5.22	SENB Carte des tailles à prescrire pour le mailleur	92
5.23	SENB Nouveau maillage adapté, 864 éléments	93
5.24	SENB Distribution de l'endommagement après adaptation . .	93

TABLE DES FIGURES

5.25	SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 8.14 %	94
5.26	SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation au niveau de l'entaille	94
5.27	SENB Carte des tailles à prescrire pour le meilleur après adaptation	95
5.28	DENB maillage initial, 688 éléments	96
5.29	DENB Distribution de l'endommagement	96
5.30	DENB Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 15.45 %	97
5.31	DENB Carte des tailles à prescrire pour le meilleur	98
5.32	DENB Nouveau maillage adapté, 2591 éléments	98
5.33	DENB Distribution de l'endommagement après adaptation	99
5.34	DENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 7.64 %	99
5.35	DENB Carte des tailles à prescrire pour le meilleur après adaptation	100
5.36	Test brésilien, maillage initial, 95 éléments	101
5.37	Test brésilien, Distribution de l'endommagement	102
5.38	Test brésilien, Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 8.23 %	102
5.39	Test brésilien, Carte des tailles à prescrire pour le meilleur	103
5.40	Test brésilien, Nouveau maillage adapté, 340 éléments	103
5.41	Test brésilien, Distribution de l'endommagement après adaptation	104
5.42	Test brésilien, Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 5.13 %	104
5.43	Test brésilien, Carte des tailles à prescrire pour le meilleur après adaptation	105
5.44	Forme de la fissure en test SENB d'après E.Schlangen (1993)	106
5.45	Forme de la fissure en test DENB d'après Schlangen (1993)	107
5.46	SENB Maillage initial, 659 éléments d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	108
5.47	SENB Distribution de l'endommagement après adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	108
5.48	SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	108
5.49	SENB Maillage 3185 éléments d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	109
5.50	SENB Distribution de l'endommagement après une itération d'adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	109

TABLE DES FIGURES

5.51	SENB Carte des contributions à l'erreur après une itération d'adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	. 109
5.52	SENB Maillage 3924 éléments d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000) 110
5.53	SENB Distribution de l'endommagement après deux itérations d'adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	. 110
5.54	SENB Carte des contributions à l'erreur après deux itérations d'adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)	. 110

Table des matières

1	Thermodynamique des processus irréversibles et mécanique de l'endommagement : un bref rappel	9
1.1	Introduction	9
1.2	Thermodynamique des processus irréversibles	11
1.2.1	Premier principe	11
1.2.2	Deuxième principe	12
1.2.3	Condition d'admissibilité thermodynamique	13
1.2.4	Méthode de l'état local	14
1.3	Théorie d'endommagement	17
1.4	Types d'endommagement	20
1.5	Mesures de l'endommagement	21
1.5.1	Mesure par changement d'élasticité isotrope	22
1.5.2	Mesure par changement d'élasticité isotrope par ondes ultrasoniques	23
1.6	Couplage élasticité-endommagement	23
1.7	Conclusion	24
2	Les modèles de comportement endommageable	25
2.1	Introduction	25
2.2	Approche locale - modèle de Mazars	26
2.3	Approche non locale	29
2.3.1	Phénomène de localisation	29
2.3.2	Dépendance au maillage	31
2.3.3	Méthodes de régularisation	34
2.3.4	Modèle non locale de Mazars	38
2.3.5	Inconvénients de la méthode non locale	38
2.4	Effet unilatéral	39
2.4.1	Modèle de Laborderie	40
2.4.2	Modèle RICRAG	41
2.5	Conclusion	48

3	La méthode des éléments finis, estimation d'erreur et adaptation de maillages	50
3.1	Principe de la méthode des éléments finis	50
3.2	Méthode des éléments finis en élasticité linéaire	51
3.3	Estimation d'erreurs	53
3.4	Types d'estimateurs	53
3.4.1	Estimateur basé sur l'analyse duale	53
3.4.2	Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement	54
3.4.3	Estimateur basé sur les défauts d'équilibre en solution	56
3.4.4	Estimateur basé sur l'extrapolation de Richardson	58
3.4.5	Estimateur basé sur le lissage de champ de contraintes	58
3.4.6	Estimateurs d'erreur locale	60
3.5	Adaptation de maillage	63
3.5.1	Introduction	63
3.5.2	Techniques d'adaptation de maillage	63
3.6	Détermination d'une carte de tailles	66
3.7	Conclusion	68
4	Mise au point d'un indicateur d'erreur en milieu élastique endommageable	69
4.1	Introduction	69
4.2	Problème de référence	69
4.3	Définition de l'erreur	70
4.4	Mise au point de l'indicateur d'erreur	71
4.5	Conclusion	75
5	Essais numériques, validation sur des cas tests, et discussion des résultats	76
5.1	Introduction	76
5.2	Etude de convergence	80
5.3	Etude d'adaptation de maillage	90
5.4	Discussion des résultats	106
5.5	Conclusion	111

Introduction

Les dommages dans les structures sont simulés à l'aide de la théorie de la mécanique de l'endommagement. La méthode la plus utilisée pour la simulation en mécanique des structures est la méthode des éléments finis. Elle est sujette à l'apparition de plusieurs erreurs dont l'erreur de discrétisation est la plus importante. Cette dernière peut être quantifiée en utilisant des estimateurs d'erreur. A cet effet, un indicateur d'erreur basé sur le lissage des champs de contraintes et de variables d'endommagement sera implanté dans le code de calcul CAST3M. Par la suite, cet indicateur sera utilisé pour l'étude des structures bidimensionnelles.

Dans le souci de tenir compte de l'erreur de discrétisations et de calcul de l'endommagement de manière suffisante, nous proposons de construire cet indicateur basé sur la combinaison de deux termes. Le premier utilise la technique de recouvrement (ou de lissage) par groupes (ou Patch) d'éléments. Il s'agit de la technique connue sous le nom de la méthode SPR (Super convergent Patch Recovery method) due à Zienkiewicz et Zhu (1992). Le second tient compte de l'erreur obtenue au niveau de la différence entre la variable d'endommagement de référence (obtenue également par lissage) et celle obtenue numériquement par résolution éléments finis.

Par la suite, des études de validation sur des cas tests seront effectuées. Les résultats obtenus feront l'objet d'une discussion suivie d'une conclusion.

Ce mémoire s'articule en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons un bref rappel de la mécanique continue de l'endommagement qui à travers une variable D décrit l'évolution de la dégradation du matériau en utilisant des lois constitutives tirées par dérivation à partir d'un potentiel thermodynamique choisi.

Pour être physiquement acceptable, ces lois doivent s'inscrire dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles dont également un bref

rappel est présenté.

Dans le deuxième chapitre, nous avons adopté une démarche qui consiste à présenter des modèles de comportement endommageable au fur et à mesure que l'attention est tirée sur les phénomènes physiques et les problèmes numériques accompagnant les essais d'endommagement (phénomène de localisation des déformations, dépendance au maillage, effet unilatéral).

Le modèle de Mazars est largement utilisé dans la littérature. Il reste encore une base de développement pour d'autres modèles. Le modèle RICRAG lequel nous utiliserons dans nos simulations, est récent et très performant. Ces deux modèles sont détaillés dans le chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous évoquons le principe de la méthode des éléments finis qui nous permettra de discrétiser le problème. Des erreurs de discrétisation apparaissent dans la solution éléments finis, dont une estimation pour les quantifier est nécessaire. Une technique d'adaptation permet d'améliorer la solution éléments finis. Les types d'estimateurs et les différentes techniques d'adaptation sont mis en revue.

Dans le quatrième chapitre, nous développons la mise au point de l'indicateur d'erreur obtenu en utilisant la théorie de recouvrement de Zienkiewicz et Zhu et le lissage des champs solution éléments finis.

Dans le cinquième chapitre, l'indicateur d'erreur mis au point est testé. Une étude de convergence et une étude d'adaptation de maillage sont effectuées. A cet effet, des tests sur poutre SENB (Single Edge Notched Beam), sur poutre DENB (Double Edge Notched Beam), et sur essai brésilien sont utilisés.

Chapitre 1

Thermodynamique des processus irréversibles et mécanique de l'endommagement : un bref rappel

1.1 Introduction

Le phénomène d'endommagement a été défini par Chaboche (Lemaitre and Chaboche, 2004) comme étant des discontinuités surfaciques pour les microfissures ou volumiques pour les cavités.

D'après Clavel (Clavel and Bompard, 2009), il résulte le plus souvent, de la combinaison de pics de chargements, d'effets de localisation et de défauts de microstructure.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, la mécanique d'endommagement continu CDM a pour but d'analyser les dommages des processus de rupture, à l'échelle mésoscopique et macroscopique.

A l'échelle microscopique, d'après Murakami (Murakami, 2012), l'endommagement se distingue dans les microcavités, microfissures ou de la décohésion dans la microstructure du matériau, l'ouverture d'une fissure est alors le résultat de la croissance et coalescence des cavités microscopiques.

Il est à noter que les notions de plasticité et d'endommagement n'ont pas la même signification physique. Les paramètres élastiques (raideur et coefficient de poisson) ne subissent aucune dégradation en plasticité où irréversibilité de l'évolution et non linéarité du matériau sont les principales caractéristiques. En endommagement, l'irréversibilité est due à la dégrada-

CHAPITRE 1. THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
ET MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT : UN BREF RAPPEL

tion du matériau où perte de rigidité s'établit progressivement et permet de quantifier le phénomène.

Jaques Besson, Georges Cailletaud, Jean louis Chaboche, Samuel Forest, Marc bletry , dans l'ouvrage (Besson et al., 2010) font la différence en terme d'irréversibilité de déformation qu'ils considèrent jouer un grand rôle en plasticité mais leur irréversibilité à l'échelle macroscopique n'est pas totale contrairement à l'endommagement qu'on peut supposer comme une détérioration définitive et les déformations irréversibles négligeables (figure 1.1).

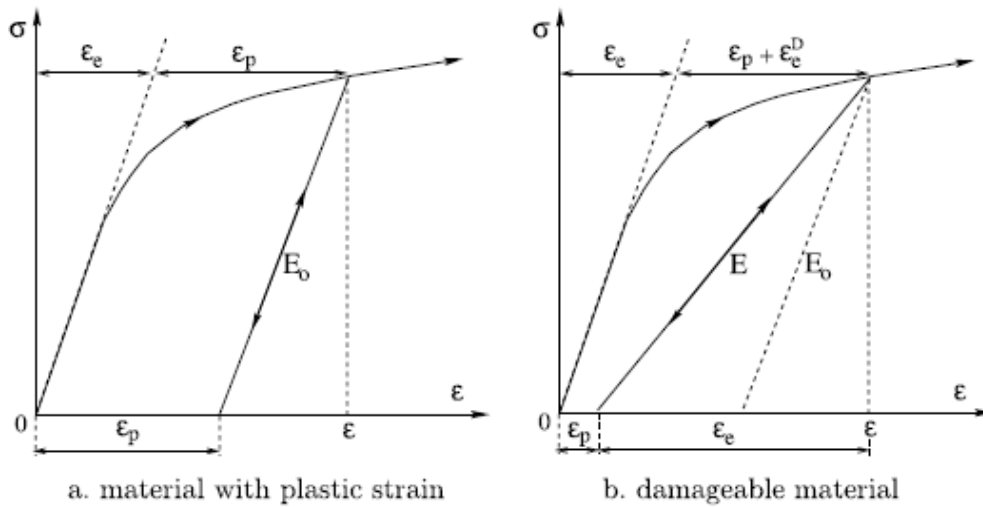


FIGURE 1.1 – Déformation irréversible en plasticité et en endommagement quasi-fragile d'après Jaques Besson et al (2010)

Suivant les cas de sollicitations l'un ou l'autre apparait principalement dans le matériau : l'endommagement en traction avec diminution de raideur, plasticité en compression avec croissance des déformations plastiques (Reymonard and Pijaudier-Cabot, 2005).

Pour que les lois constitutives soient physiquement valables, elles doivent respecter la condition d'admissibilité tirée du premier et deuxième principes de la thermodynamique.

1.2 Thermodynamique des processus irréversibles

1.2.1 Premier principe

Il stipule que dans tout processus, l'énergie totale du système est conservée si aucun travail n'est accompli et aucune chaleur n'est transférée de l'extérieur au système. L'existence de cette énergie totale est postulé comme suit (Asaro and Lubarda, 2006) :

$$\frac{d}{dt}E_{tot} = P_e + Q \quad (1.1)$$

Cette énergie totale est constituée d'une énergie cinétique K et d'une énergie interne E_i définies comme suit :

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v} \vec{v} dV \quad (1.2)$$

$$E_i = \int_{\Omega} \rho \cdot e_i \cdot dV \quad (1.3)$$

Où :

e_i étant la densité volumique d'énergie par unité de masse appelée énergie interne spécifique.

ρ masse volumique du matériau

P_e la puissance des forces externes

v la vitesse d'un point M sur la surface du système

P_i est la puissance des forces internes :

$$P_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV$$

Q est la chaleur reçue par le système, elle est donnée par l'expression :

$$Q = \int_{\Omega} r dV - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \vec{n} ds \quad (1.4)$$

Qu'on peut réécrire en vertu du théorème de la divergence :

$$Q = \int_{\Omega} r dV - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q} d\Omega \quad (1.5)$$

r : densité volumique de production interne de chaleur à distance

\vec{q} : vecteur flux de chaleur par conduction

\vec{n} : normale extérieur à $\partial\Omega$

En remplaçant les équations (1.2), (1.3), (1.5) dans l'équation (1.1), on obtient la forme du premier principe de la thermodynamique dans l'hypothèse des petites déformations :

$$\rho \dot{e}_i = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.6)$$

Appelée équation de l'énergie.

1.2.2 Deuxième principe

La formulation du deuxième principe de la thermodynamique repose sur deux autres variables, à savoir le champ scalaire de température T et la mesure du désordre microstructural du système S appelée entropie et définie par (Murakami, 2012) :

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \quad (1.7)$$

Où :

s : la densité volumique d'entropie par unité de masse appelée densité d'entropie spécifique.

On postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température T (Murakami, 2012) :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} ds \quad (1.8)$$

Qu'on peut réécrire en vertu du théorème de la divergence :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (1.9)$$

1.2.3 Condition d'admissibilité thermodynamique

A partir de l'expression du premier principe on a :

$$r = \rho \dot{e}_i - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.10)$$

représentant la densité de production de chaleur.

En substituant l'expression de r dans l'expression du deuxième principe de la thermodynamique et en tenant compte de l'identité

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\operatorname{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}$$

On obtient :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} (\rho \dot{e}_i - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \operatorname{div} \vec{q}) \geq 0 \quad (1.11)$$

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \dot{e}_i \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \vec{q} \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (1.12)$$

C'est la condition d'admissibilité thermodynamique.

En introduisant l'énergie libre spécifique (énergie libre d'Helmholtz) :

$$\psi = e - Ts \quad (1.13)$$

La condition (1.12) prend la forme d'une inégalité (Murakami, 2012) :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \vec{q} \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (1.14)$$

Appelée inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell.

Elle se simplifie dans le cas de déformation isotherme (T constante) à l'inégalité :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \frac{d\psi}{dt} \geq 0 \quad (1.15)$$

Le premier membre de l'inégalité représente la dissipation volumique dont une dissipation intrinsèque (ou mécanique) volumique $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\frac{d\psi}{dt} + s\frac{dT}{dt})$ et une autre dissipation thermique volumique $-\frac{\bar{q}^{\text{grad}T}}{T}$

L'inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell peut s'énoncer alors :
 La dissipation est non négative.

1.2.4 Méthode de l'état local

On définit un certain nombre de variables thermodynamiques appelées variables d'états que l'on choisit suivant les phénomènes physiques mis en jeu.

On peut classer les variables d'états en :

- Variables observables, représentant les phénomènes réversibles où l'état est défini uniquement à chaque instant, comme exemple nous citons la température T , la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$
- Variables internes, représentant les phénomènes dissipatifs en prenant en compte également l'histoire passée, comme exemple nous citons la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_p$

La méthode de l'état local postule que les variables d'états définissent à elles seules, sans leurs dérivées temporelles, l'état thermodynamique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné (Lemaitre and Chaboche, 2004) . Ce qui implique qu'il y'a succession d'états d'équilibre à chaque évolution du système. Ainsi à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell doit être satisfaite pour que le processus soit thermodynamiquement admissible.

Les variables d'état ne permettant pas de décrire directement les lois d'états, on postule alors l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent ces lois d'état.

CHAPITRE 1. THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
ET MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT : UN BREF RAPPEL

Soit le potentiel énergie libre spécifique :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_p, T, V_k)$$

dépendant des variables d'état observables $\boldsymbol{\varepsilon}, T$ et des variables internes $\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_p$ ainsi que d'autres variables cachées V_k utilisées pour les phénomènes tels que l'écroutissage, la rupture, l'endommagement...etc

En thermo-élasticité, on peut écrire le potentiel thermodynamique (Lemaitre and Chaboche, 2004)

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p, T, V_k).$$

Dérivant le potentiel et le remplaçant dans l'inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell, on tire les lois d'état en thermo-élasticité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \quad (1.16)$$

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.17)$$

Et par analogie :

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (1.18)$$

Où :

$\boldsymbol{\sigma}$ Tenseur des contraintes

S l'entropie

A_k Variables associées à V_k

On remarque que pour les variables d'état $\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_p, V_k$, on peut associer les variables $\boldsymbol{\sigma}, S, A_1, A_2, \dots, A_k$ appelées variables associées.

Le potentiel thermodynamique ψ ne permettant pas la description de l'évolution des variables internes au cours des processus dissipatifs, on postule alors l'existence d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{V}_k, \frac{\boldsymbol{q}}{T})$$

Où :

CHAPITRE 1. THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
ET MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT : UN BREF RAPPEL

$\dot{\epsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T}$ sont appelées variables flux.

En fonction des variables flux, l'expression de la dissipation positive c.à.d. l'inégalité de clausius - Duhem - truesdell prend la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} \dot{\epsilon}_p - A_k \dot{V}_k - \vec{g} \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.19)$$

En posant $g = \text{grad}T$ et en prenant en compte les lois d'état déjà établies.

Les variables $\boldsymbol{\sigma}, A_k, g$ dans cette inégalité sont appelées variables forces ou duales.

Compte tenu de la propriété de la normalité, les lois complémentaires s'expriment :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_p} \quad (1.20)$$

$$A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad (1.21)$$

$$\vec{g} = -\frac{\partial \varphi}{\partial (\frac{\vec{q}}{T})} \quad (1.22)$$

Grâce à la transformée de Legendre-Fenchel, un potentiel dual de φ est obtenu (Lemaitre and Chaboche, 2004).

soit : $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \vec{g})$

Avec :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \vec{g}) = \text{Sup}[(\boldsymbol{\sigma} \dot{\epsilon}_p - A_k \dot{V}_k - \vec{g} \frac{\vec{q}}{T}) - \varphi(\dot{\epsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T})] \quad (1.23)$$

Les potentiels φ, φ^* représentent une énergie dissipée sous forme de chaleur.

On peut réécrire les lois complémentaires en fonction du potentiel dual φ^* :

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} \quad (1.24)$$

$$-\dot{V}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad (1.25)$$

$$-\frac{\vec{q}}{T} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}} \quad (1.26)$$

Les tableaux suivants résument les variables utilisées dans le cadre thermodynamique :

variables d'état		variables associées
observables	internes	
ϵ		σ
T		S
	ϵ_e	σ
	ϵ_p	$-\sigma$
	V_k	A_k

TABLE 1.1 – Variables thermodynamiques d'après Lemaitre et Chaboche (2004)

Variables flux	Variables duales
$\dot{\epsilon}_p$	σ
$-\dot{V}_k$	A_k
$-\frac{\vec{q}}{T}$	$\vec{g} = \text{grad}T$

TABLE 1.2 – Variables de dissipation d'après Lemaitre et Chaboche (2004)

1.3 Théorie d'endommagement

L'état d'endommagement du matériau a été quantifié en utilisant le concept de Kachanov (Kachanov, 1986) et développé par Lemaitre et Chaboche (Lemaitre and Chaboche, 2004).

L'évolution du phénomène d'endommagement est quantifiée par le biais d'une variable scalaire D entre un état exempt de fissures et cavités à l'échelle microscopique et un état d'amorçage d'une fissure macroscopique. Lemaitre

CHAPITRE 1. THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
ET MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT : UN BREF RAPPEL

et Chaboche estiment l'ordre de grandeur de la fissure macroscopique à une valeur comprise entre 0.1 mm et 1 mm pour les métaux et polymères, 1 cm pour le bois et 10 cm pour le béton. (Lemaitre and Chaboche, 2004)

La variable D prend des valeurs réelles variant entre 0 à l'état vierge et 1 à l'état de rupture. Elle représente physiquement, la part des microvides ou des microfissures dans un élément de volume représentatif RVE (representative volume element).

Le volume représentatif est de l'ordre de $0.001mm^3$ pour les métaux et céramiques et de 10^6mm^3 pour les bétons. (Lemaitre and Desmorat, 2005)

Généralement, la variable d'endommagement D est définie par la densité surfacique des microvides et microfissures de la section du volume représentatif RVE de surface δS représenté par sa normale \vec{n} (figure 1.2) :

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (1.27)$$

Où :

δS_D est l'aire totale de la trace des défauts dans le plan contenant la section δS considérée.

$\delta S_D = \delta S - \delta \tilde{S}$ avec $\delta \tilde{S}$ aire résistante effective.

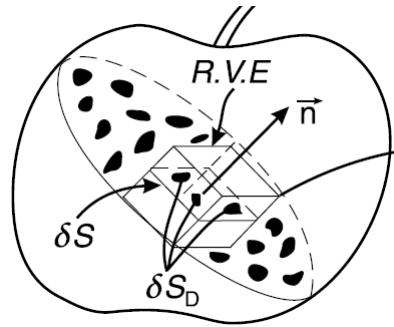


FIGURE 1.2 – Représentation physique de l'endommagement d'après J.Lemaitre et R.Desmorat (2005)

Mathématiquement, en faisant tendre δS vers 0, la variable D est la densité surfacique des discontinuités de la matière dans le plan normal à \vec{n} . (Lemaitre and Chaboche, 2004)

Si la valeur de D est identique quelque soit la direction du plan de section choisie, alors l'endommagement est dit isotrope. Dans ce cas, on écrit :

$$D_{\bar{n}} = D$$

Pour tenir compte de l'endommagement dans la loi de comportement d'un matériau dont l'élément de volume représentatif RVE de section saine (non endommagée) δS soumise à une force de compression F , on introduit la contrainte moyenne réellement appliquée appelée contrainte effective $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\delta S - \delta S_D} \quad (1.28)$$

La contrainte usuelle étant $\sigma = \frac{F}{\delta S}$

On a alors :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.29)$$

Lemaitre a proposé le principe d'équivalence en déformation où il postule :

Tout comportement à la déformation d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective. (Lemaitre and Chaboche, 2004)

Cordebois.J.P et F.Sidoroff (Cordebois and Sidoroff, 1979) ont proposé le principe d'équivalence en énergie élastique énonçant que l'énergie élastique d'un matériau non endommagé soumis à une contrainte effective $\tilde{\sigma}$ et une déformation effective $\tilde{\epsilon}_e$ est la même que celle du matériau soumis à une contrainte usuelle σ et une déformation usuelle ϵ_e c.à.d.

$$\frac{1}{2} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\epsilon}_e = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \epsilon_e \quad (1.30)$$

Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, la variable D est considérée comme une variable d'état, d'où l'on considère un potentiel thermodynamique ψ dépendant de D et de toutes les autres variables d'état (ϵ_e déformation élastique, T la température, V_k autres variables) :

$$\psi = \psi (\epsilon_e, T, D, V_k)$$

Le potentiel thermodynamique choisi permet d'exprimer la loi de comportement du matériau

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}$$

et la variable associée à l'endommagement notée Y :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$$

- Y est appelée taux de restitution d'énergie élastique. C'est l'énergie de déformation élastique dans l'état non endommagé.

La loi d'évolution de la variable d'endommagement dérive d'un pseudo-potentiel de dissipation φ . Celui-ci permet de calculer \dot{D} en fonction de Y (Lemaitre and Desmorat, 2005) :

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \quad (1.31)$$

$\dot{\lambda}$ est le multiplicateur d'endommagement.

Pour plus de détails sur la formulation thermodynamique consulter (Lemaitre and Chaboche, 2004) et la thermodynamique de l'endommagement (Lemaitre and Desmorat, 2005)

1.4 Types d'endommagement

L'endommagement peut être classé en :

- endommagement ductile observé dans le cuivre
- endommagement fragile dans les bétons, roches, céramiques, matériaux composés ... etc
- endommagement de fluage
- endommagement de fatigue
 - à cycle bas avec $N_R < 10^4$
 - à cycle très bas avec $N_R < 10^2$
 - à cycle haut avec $N_R > 10^5$
 - à cycle très haut avec $N_R > 10^6 10^7$
- endommagement fluage- fatigue
- endommagement d'impact (spall damage)

Avec :

N_R nombre de cycles causant la rupture d'un matériau soumis à un chargement cyclique.

Tous ces types d'endommagement sont le résultat de déformation élastique, ou élasto- plastique et l'endommagement est appelé endommagement élastique ou endommagement élasto-plastique, il peut être aussi visqueux ou visqueux - plastique quand il dépend du temps. (Murakami, 2012)

Ces types d'endommagement conduisent à une rupture brutale ou différée suivant des modes assez bien définis :

En cas de rupture brutale, on a un endommagement par cavitation, clivage, ou fragilisation par les métaux liquides (Hg, Ca, Ga, etc). En cas de rupture différée, on a un des endommagements par fragilisation, par impuretés, par hydrogène, par irradiation, fluage à haute température, fatigue, oxydation-corrosion, corrosion sous contrainte, fatigue- corrosion . L'endommagement peut être mixte (c.à.d. volumique et surfacique comme le fluage du béton et la fatigue -fluage). Le tableau TABLE 1.3 résume ces différents modes d'endommagement. Tous ces endommagements entraînent la formation de fissures macroscopiques.

Pour plus de détails le lecteur peut consulter l'ouvrage (François et al., 2009) et également (Clavel and Bompard, 2009)

1.5 Mesures de l'endommagement

La densité surfacique des microdéfauts est mesurée indirectement par les quantités physiques qui subissent des changements au cours de l'évolution de l'endommagement et permettent à travers le couplage entre l'endommagement et l'élasticité (ou plasticité) d'évaluer la variable D . On peut citer le changement de densité, résistivité, vitesse des ondes ultrasoniques, limites de fatigue, comportement mécanique. (Chaboche, 1987)

Quant à la mesure directe, elle est faite par micrographie et nécessite des laboratoires bien équipés.

CHAPITRE 1. THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES
ET MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT : UN BREF RAPPEL

type de rupture	endommagement volumique	endommagement mixte	endommagement surfacique
brutale	cavitation ou clivage		fragilisation par les métaux liquides (Hg, Cd,)
Différée	fragilisation par impureté ou par hydrogène		oxydation corrosion ou corrosion sous contrainte
		fatigue - corrosion	
	Fluage à haute température	Fatigue fluage	fatigue
		Fluage du béton	
	Fragilisation par irradiation		

TABLE 1.3 – Différents modes d'endommagement d'après François et al., (2009)

1.5.1 Mesure par changement d'élasticité isotrope

Dans le cas d'endommagement isotrope, la loi d'élasticité uniaxiale en tension couplée à l'endommagement s'écrit en appliquant le principe d'équivalence en déformation :

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (1.32)$$

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (1.33)$$

où :

E : module de young du matériau sain

\tilde{E} : module de young du matériau endommagé (mesuré en rupture ductile)

A partir des équations (1.32) et (1.33), la variable d'endommagement est exprimée en perte de rigidité :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (1.34)$$

1.5.2 Mesure par changement d'élasticité isotrope par ondes ultrasoniques

la variable d'endommagement est donnée par :

$$D = 1 - \frac{(\tilde{v})^2}{(v)^2} \quad (1.35)$$

Avec :

v : vitesse de l'onde avant endommagement

\tilde{v} : vitesse de l'onde après endommagement

Autres méthodes (par changement d'élasticité anisotrope, changement de dureté, changement de champ élastique) peuvent être consultées dans l'ouvrage (Lemaitre and Desmorat, 2005)

1.6 Couplage élasticité-endommagement

La raideur d'un matériau est affectée par le phénomène d'endommagement. Ainsi, l'état d'endommagement des structures influence la solution des problèmes s'exprimant en termes de contraintes et déformations. Pour cela, on calcule les contraintes, déformations et endommagement en faisant un couplage entre l'élasticité et l'endommagement dans les problèmes d'évolution de l'endommagement. Selon Lemaitre et Chaboche (Lemaitre and Chaboche, 2004), on aboutit aux lois de comportement couplées en utilisant la notion de contrainte effective et le principe d'équivalence en déformations (présentés précédemment dans la section 1.3).

Cas de l'élasticité isotrope et endommagement isotrope :

On associe à la loi d'endommagement choisie la loi d'élasticité du matériau endommagé obtenu après substitution de la contrainte effective :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.36)$$

Où :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D} - \frac{\nu}{E} \frac{\text{Trace}(\boldsymbol{\sigma})}{1 - D} \mathbf{I} \quad (1.37)$$

\mathbf{A} : Tenseur de souplesse (ou de compliance).

\mathbf{I} : Tenseur identité

A noter que l'application de l'hypothèse d'isotropie est justifiée pour les matériaux métalliques, et un peu moins pour le béton. L'application de l'anisotropie est nécessaire pour les composites et les bois (Lemaitre and Chaboche, 2004).

1.7 Conclusion

La mécanique de l'endommagement continu permet l'évaluation de la dégradation irréversible des propriétés d'un matériau sous l'effet de différentes sollicitations. L'évolution de cette dégradation est décrite par une variable scalaire D dans le cas isotrope. La variable D peut être représentée par un tenseur dans le cas anisotrope. Un bref rappel de la théorie de de l'endommagement a été présenté.

La thermodynamique des processus irréversibles, pour sa part, constitue un cadre indispensable dans lequel les lois d'état (équations 1.16, 1.17, 1.18) peuvent être tirées à partir d'un potentiel thermodynamique bien choisi et l'inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell d'admissibilité thermodynamique (équation 1.14) doit être vérifiée pour que le modèle d'endommagement soit physiquement acceptable.

Chapitre 2

Les modèles de comportement endommageable

2.1 Introduction

L'évolution de l'endommagement d'un matériau se déroule d'une manière non linéaire d'un état vierge sans endommagement et celui où une fissure commence à apparaître, et suit une loi qui dépend de la classe de ce matériau. Ainsi, on distingue deux types de lois d'évolution :

- lois d'endommagement pour matériaux quasi fragiles
- lois d'endommagement pour matériaux ductiles

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles de comportement endommageable dont le choix se fera suivant les applications auxquelles ils sont destinés, et le type de chargement appliqué. Nous présentons d'abord les modèles en approche locale tel celui de Mazars. Nous abordons ensuite le phénomène de localisation et la nécessité de modèles régularisés. A cet effet le modèle de Bazant et Pijaudier-Cabot propose une approche non locale du modèle de Mazars. Une attention également est donnée à l'effet unilatéral que d'autres modèles tiennent en compte, le modèle RICRAG sera en particulier présenté.

Les lois d'évolution servent à construire les modèles. Citons comme exemple :

- La loi de Marigo (Marigo, 1981)

$$D = g(Y) \tag{2.1}$$

$$D = \left\langle \frac{Y - Y_D}{S_0} \right\rangle^{s_0} \tag{2.2}$$

Où $\langle . \rangle$ est défini tel que $\langle x \rangle = x$ si $x > 0$ et $\langle x \rangle = 0$ sinon

- La loi de Dantec et Ladvez (Ladveze and Dantec, 1992) pour les matériaux composites

$$D = g(Y)$$

$$D = \left\langle \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_D}}{S_0} \right\rangle \quad (2.3)$$

- La loi de Laborderie pour le béton (Laborderie, 1991)

$$D = g(Y)$$

$$D = 1 - \frac{1}{1 + \left\langle \frac{Y - Y_D}{S_0} \right\rangle^{s_0}} \quad (2.4)$$

- La loi de Mazars pour le béton (mazars, 1984)

$$D = D(\varepsilon_{eq}) \quad (2.5)$$

$$D_i = 1 - \frac{(1 - A_i)\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_i \exp(-B_i(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \quad (2.6)$$

avec :

D_i la variable d'endommagement en traction (i=1) ou en compression (i=2).

ε_{eq} la déformation équivalente.

S_0, s_0 paramètres dépendants du matériau et de la température.

Y_D, ε_{d0} seuils d'endommagement en traction

A_i, B_i paramètres d'endommagement.

2.2 Approche locale - modèle de Mazars

Plusieurs modèles (Marigo, Laborderie, Mazars, ...) ont été utilisés en approche locale. Nous présentons le modèle de Mazars (mazars, 1984) élaboré dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Le modèle de

Mazars s'appuie sur une seule variable interne scalaire D définie comme une combinaison de deux variables D_t, D_c . Ces dernières correspondent respectivement à l'endommagement en traction et en compression, afin de distinguer entre les deux modes d'endommagement. Le modèle est appliqué dans l'hypothèse d'un matériau isotrope. Donc, l'anisotropie caractérisant le matériau n'est pas prise en compte. Notons que le modèle de Mazars ne prend pas en compte également l'effet unilatéral (phénomène de refermeture des fissures), les éventuelles déformations plastiques, et les effets visqueux. (Hamon, 2013)

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)E\boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (2.7)$$

avec :

E la matrice de Hooke.

D la variable d'endommagement.

$\boldsymbol{\varepsilon}_e$ la déformation élastique.

D est la variable d'endommagement.

Mazars a introduit la notion de déformation équivalente notée ε_{eq} qui sert de guide pour l'évolution de l'endommagement et qui permet d'établir une équivalence entre l'état triaxial et l'état uniaxial. Dans l'expression de la déformation équivalente ε_{eq} , le modèle ne prend en compte que les déformations d'extension, vu qu'elles sont prépondérantes au cours de la fissuration du béton. A partir des valeurs propres positives du tenseur des déformations, la déformation équivalente indiquant l'état de tension dans le matériau, est définie par :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad (2.8)$$

où dans le repère principal du tenseur de déformations :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (2.9)$$

sachant que la partie positive $\langle \rangle_+$ est définie de telle sorte que si ε_i est la déformation principale dans la direction i :

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{si } \varepsilon_i \geq 0; \\ 0, & \text{si } \varepsilon_i \leq 0; \end{cases}$$

ε_{eq} définit la fonction de charge f telle que :

$$f = \varepsilon_{eq} - K(D) = 0 \quad (2.10)$$

avec

$$K(D) = \varepsilon_{d0} \text{ si } D = 0$$

ε_{d0} la déformation seuil d'endommagement.

Lorsque la déformation équivalente atteint cette valeur, l'endommagement s'active.

La variable D est donnée par la relation :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad (2.11)$$

β est un coefficient qui a été introduit ultérieurement pour améliorer le comportement en cisaillement. Usuellement sa valeur est fixée à 1.06. Les coefficients α_t et α_c réalisent un lien entre l'endommagement et l'état de traction ou de compression. Lorsque la traction est activée $\alpha_t = 1$ alors que $\alpha_c = 0$ et inversement en compression (figure 2.1).

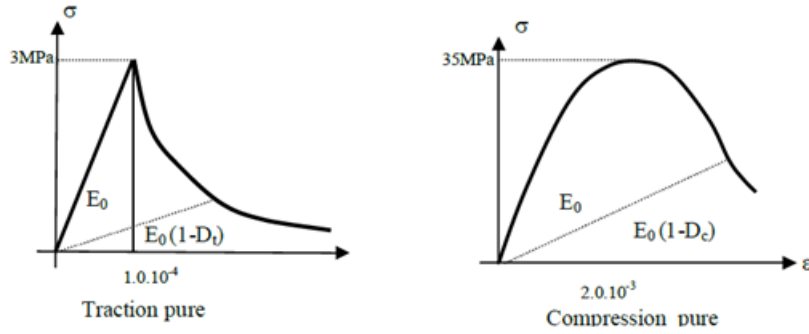


FIGURE 2.1 – Modèle de mazars, comportement en traction pure et compression pure

Les lois d'évolution des endommagements D_t et D_c s'expriment à partir de la déformation équivalente ε_{eq} :

$$D_t = 1 - \frac{(1 - A_t)\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_t \exp(-B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \quad (2.12)$$

$$D_c = 1 - \frac{(1 - A_c)\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_c \exp(-B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \quad (2.13)$$

avec A_t , A_c , B_t , et B_c , des paramètres matériaux à identifier.

Ces paramètres permettent de moduler la forme de la courbe contrainte-déformation. Ils sont obtenus à l'aide d'essais de traction et d'un essai de compression. (Mazars and Hamon, 2012)

Une variable γ est introduite dans le modèle de Mazars pour tenir compte de la sous-estimation de la résistance du béton en bi-compression.

La correction de la valeur de la déformation équivalente est faite lorsqu'au moins une contrainte principale est négative :

$$\varepsilon_{eq}(corrige) = \gamma \varepsilon_{eq} \quad (2.14)$$

Avec

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\sqrt{\langle \sigma_i \rangle_-^2}}{\sum_i \langle \sigma_i \rangle_-}, & \text{si au moins une contrainte effective est négative;} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

La contrainte effective principale $\langle \tilde{\sigma}_i \rangle_-$ est définie tel que :

$$\langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- = \begin{cases} \tilde{\sigma}_i, & \text{si } \tilde{\sigma}_i \leq 0; \\ 0, & \text{si } \tilde{\sigma}_i > 0; \end{cases}$$

L'introduction d'une variable interne Y a pour but d'améliorer le comportement en cisaillement (Hamon, 2013) :

$$Y = \text{Max}(\varepsilon_{d0}, \text{Max}(\varepsilon_{eq}(corrige))) \quad (2.15)$$

2.3 Approche non locale

2.3.1 Phénomène de localisation

La déformation et l'endommagement se localise dans une bande étroite juste avant la rupture du matériau. c'est le phénomène de localisation qui selon M.Clavel (Clavel and Bompard, 2009) est directement lié au caractère adoucissant des lois de comportement employées. Physiquement, l'hétérogénéité de la micro-structure du béton induit des interactions à distance entre

les fissures formées.(Askes, 2000)

Dans les modèles locaux où l'état de contrainte en un point matériel est décrit uniquement par les caractéristiques au point, la rupture est prédite sans dissipation d'énergie impliquant une localisation dans un volume nul, ceci a été démontré par Z.P.Bazant (Bazant, 1988) en 1988. Ce fait est physiquement inacceptable car l'énergie dissipée est l'une des mesures de la ductilité. Donc, l'environnement du point matériel où l'on définit l'état de contrainte, doit être pris en considération. Cela constitue l'idée de base à une approche non locale de l'endommagement.

Mathématiquement, la localisation rend le problème à résoudre mal posé car l'adoucissement cause une perte d'ellipticité des équations différentielles qui décrivent le processus de déformations .(Peerlings et al., 1996)

Numériquement, la localisation induit une dépendance de la solution au maillage inacceptable.

Dans le cas d'un matériau non visqueux, la loi de comportement peut s'écrire :

$$\dot{\sigma} = L : \dot{\epsilon} \quad (2.16)$$

Où :

L est l'opérateur tangent

L'analyse mécanique de la localisation, détaillée dans l'ouvrage (Clavel and Bompard, 2009), conduit à établir la condition d'existence d'une bande de localisation :

$$\det(\vec{n}L\vec{n}) = 0 \quad (2.17)$$

Où :

\vec{n} est le vecteur normal à la bande de localisation

Afin de tester la possibilité de l'apparition d'une bande localisée, il convient de rechercher le vecteur \vec{n} minimisant $\det(\vec{n}L\vec{n})$. On obtient alors un indicateur de localisation :

$$I_l = \min_{\vec{n}, \|\vec{n}\|=1} \det(\vec{n}L\vec{n}) \quad (2.18)$$

On pourra considérer qu'il y'a localisation dès que $I_l < 0$ et amorçage d'une bande dès que l'indicateur devient nul. (Clavel and Bompard, 2009)

2.3.2 Dépendance au maillage

Jirasek (Jirasek, 2002) a montré la dépendance des résultats numériques selon les lois locales de l'endommagement. Plus le nombre d'éléments finis est important, plus la réponse d'adoucissement post-pic devient fragile (figure 2.2) et (figure 2.3).

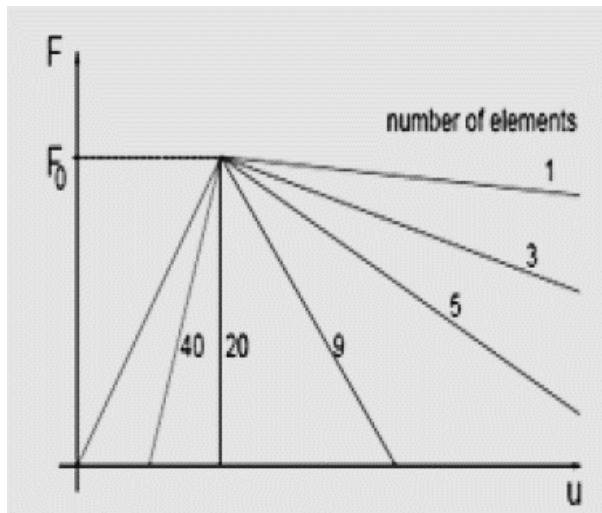


FIGURE 2.2 – Courbe charge-déplacement du béton en traction direct d'après Jirasek (2002)

Une autre simulation sur l'incapacité de reproduire correctement le phénomène de localisation des déformations a été démontré par (Kuhl and Ramm, 1999) en analysant une barre de 10 cm de long et 1 cm de hauteur sous un chargement de tension. Le résultat est illustré dans la figure 2.4, où les déformations tendent à se localiser dans des zones étroites gouvernées par le choix de la discrétisation.

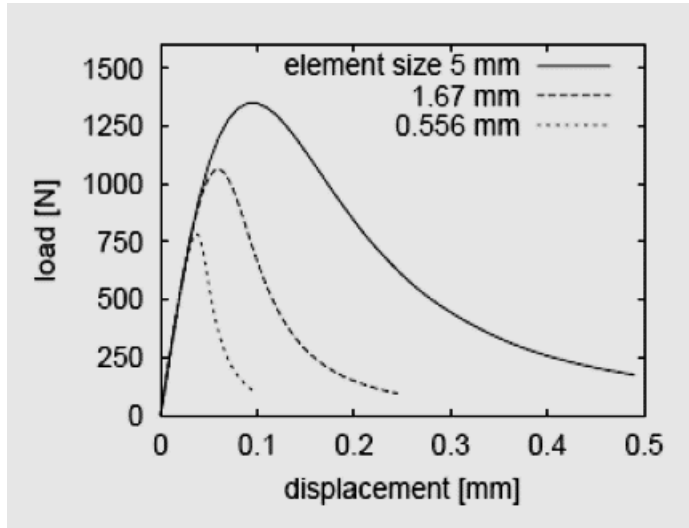


FIGURE 2.3 – Courbe charge-déplacement du béton en flexion d’après Jirasek (2002)

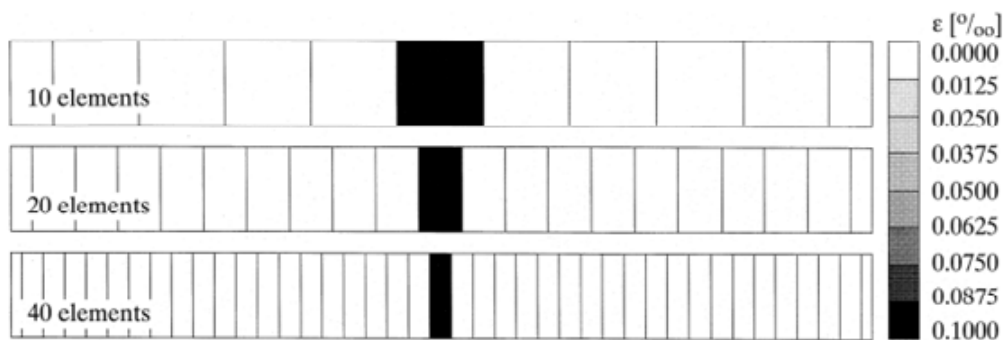


FIGURE 2.4 – Distributions des déformations d’après Kuhl et al (1999)

Des graphes chargement- déplacement pour une discrétisation avec 10, 20, 40 éléments ont été tracés dans la figure 2.5 où également la fragilité de l'échantillon croit avec le raffinement du maillage, ce qui est physiquement incorrect.

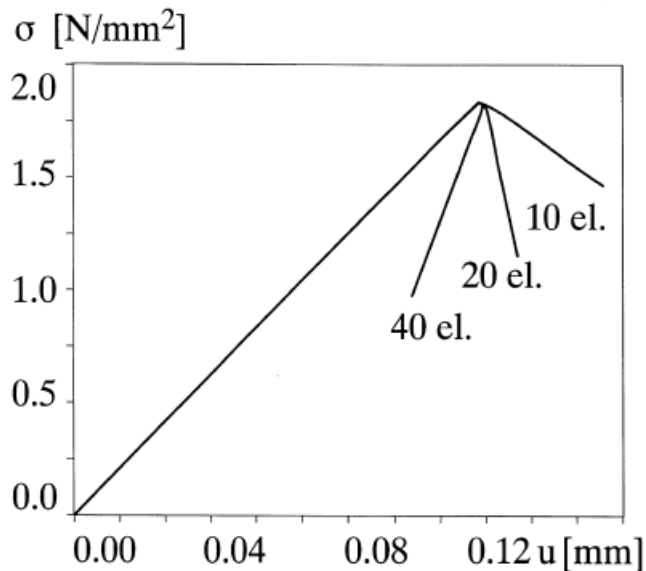


FIGURE 2.5 – Courbes charge-déplacement d'après Kuhl et al (1999)

La localisation de la déformation entraîne plusieurs inconvénients pour la simulation numérique selon des lois locales en se basant sur les principes de la mécanique des milieux continus :

- Perte de l'ellipticité dans l'équation représentative, cette dernière devient hyperbolique et ne peut pas être résolue par les conditions d'appui disponibles.
- Non convergence du résultat numérique et dépendance de celui-ci au maillage en éléments finis ; la bande de localisation de la déformation tend vers une épaisseur nulle quand le maillage devient de plus en plus fin.
- Phénomène "snap-back", l'énergie dissipée en cours d'endommagement du béton est nulle ou négative, ce qui n'est pas acceptable sur le plan physique. Les essais en laboratoire ont montré que la bande de la localisation de la déformation est finie et n'est donc pas nulle, comme cela est pourtant obtenu lors de calculs avec les lois locales. La largeur de cette bande dépend de la longueur caractéristique de la zone d'évolution de la rupture.

Afin de tenir compte de la localisation de la déformation, des techniques de régularisation doivent être introduites dans les modèles locaux d'endommagement. La régularisation consistant à rendre le modèle d'endommagement plus proche de la réalité physique. Numériquement, elle rétablit l'indépendance vis-à-vis de la discrétisation. Nous rappelons que cette indépendance fait défaut dans les modèles locaux.

2.3.3 Méthodes de régularisation

Les techniques utilisées pour régulariser les modèles en approche locale introduisent une information spatiale sous forme d'une longueur interne caractéristique du matériau. Différentes méthodes ont été utilisées, citons la méthode développée par Pijaudier-Cabot et al en 1987, (Bazant and Pijaudier-Cabot, 1987) et celle de Peerlings et al en 1996 (Peerlings et al., 1996).

Ces méthodes tiennent compte de la localisation de la déformation ainsi que des interactions entre les points matériels.

Les techniques les plus répandues dans la littérature sont :

- la technique non locale
- la technique du gradient

Afin de régulariser le modèle de Mazars local, Z.P. Bazant (Bazant, 1984), G. Pijaudier-Cabot (Bazant and Pijaudier-Cabot, 1987), Mazars (Mazars and Pijaudier-Cabot, 1989) ont introduit la technique non locale qui tient en compte l'environnement du point matériel, et cela en évaluant les valeurs moyennes des variables internes représentant l'état des points matériels avoisinant le point considéré.

Bazant Z et Jirasek M (Bazant and Jirasek, 2002) classe les modèles non locaux en :

— modèle non local integral :

La loi constitutive en un point prend en compte une moyenne pondérée d'une des variables d'état dans un voisinage du point d'intérêt.

— modèle non local de type gradient :

il prend en compte le voisinage du point et enrichit la relation constitutive locale avec le gradient de certaines variables d'état.

Les deux modèles font appel à une longueur caractéristique.

Les modèles de type gradient à leur tour peuvent être classés en :

— modèles à gradients explicite :

— modèles à gradient implicite :

Dans les modèles à gradients explicites, on introduit directement des termes de type gradient dans les lois constitutives pour générer un champ de déformation régularisées.

A partir d'un développement en série de Taylor proposé par Bazant et al (Bazant et al., 1984) :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon(x) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot (y_i - x_i) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (y_i - x_i)(y_j - x_j) + \dots \quad (2.19)$$

De Borst (DeBorst, 2002), après quelques transformations, propose une formule pour les déformations régularisées :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + c \cdot \nabla^2 \cdot \varepsilon \quad (2.20)$$

Avec :

$\bar{\varepsilon}$: la variable non locale des déformations.

ε : la variable locale des déformations.

Dans les modèles à gradients implicites, l'introduction des termes en gradients est faite implicitement en résolvant l'équation différentielle de helmholtz obtenue à partir du développement en série de Taylor (éq 2.19) :

$$\bar{\varepsilon} - c \cdot \nabla^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon \quad , \text{ sur } \Omega \quad (2.21)$$

En ajoutant des conditions aux limites de type Neumann :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial n} = 0 \quad , \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.22)$$

Où :

$\bar{\varepsilon}$: la variable non locale

ε : la variable locale

n la normale à la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω

c paramètre caractérisant le milieu, représentant le carré de la longueur caractéristique L_c :

$$c = L_c^2$$

La relation entre la longueur caractéristique L_c du modèle à gradient et celle du modèle non local intégral l_c a été donnée par Jason (Jason, 2004) d'après un test en flexion trois points :

$$L_c = \frac{l_c}{4}$$

D'après un test en traction effectué par Dufour et al. (Dufour et al., 2008) la relation est :

$$L_c = \frac{l_c}{2.55}$$

La simulation faite par Kuhl et Ramm (Kuhl and Ramm, 1999) en utilisant cette fois ci une approche non locale, souligne l'indépendance vis-à-vis du choix de la discrétisation (figure 2.6).

et également les courbes charge-déplacement (figure 2.7) où la fragilité de l'échantillon reste presque constante.

CHAPITRE 2. LES MODÈLES DE COMPORTEMENT ENDOMMAGEABLE

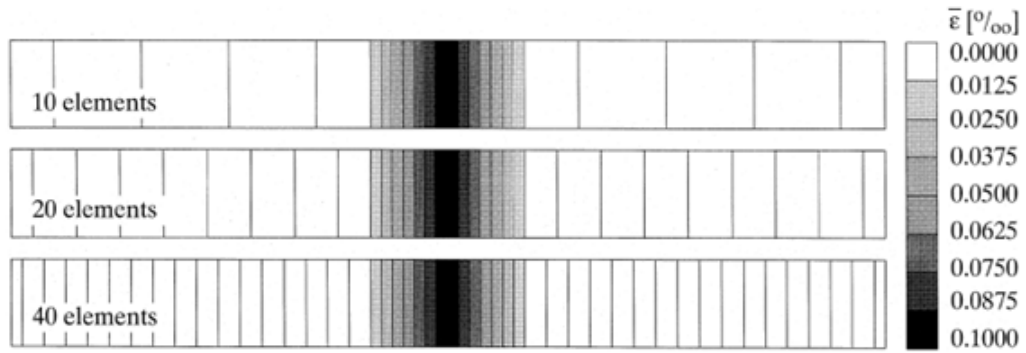


FIGURE 2.6 – Distribution non locale des déformations d'après Kuhl et al (1999)

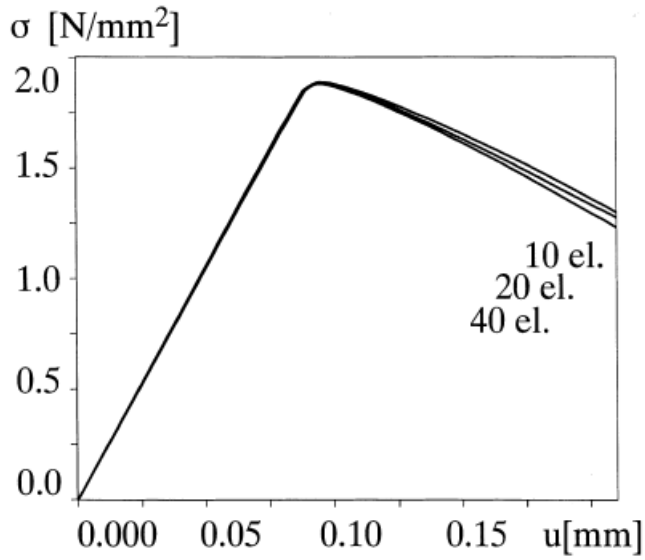


FIGURE 2.7 – Courbes chargement déplacement en modèle à gradient d'après Kuhl et al (1999)

2.3.4 Modèle non locale de Mazars

Bazant et Pijaudier-Cabot (Bazant and Pijaudier-Cabot, 1987) ont proposé une approche non locale du modèle de Mazars via l'introduction du concept de la moyenne pondérée de la déformation équivalente locale. Cette dernière devient non locale selon la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}(X) = \frac{1}{V_r(X)} \int_{\Omega} \psi(X - S) \varepsilon_{eq}(S) dS \quad (2.23)$$

$$V_r(X) = \int_{\Omega} \psi(X - S) \quad (2.24)$$

où Ω Volume de la structure X la position du volume infinitésimal $d\Omega$ V_r - Volume représentatif au point x (supposé fixe et isotrope) $\psi(X-S)$ - Fonction poids homogène et isotrope c.à.d. elle ne dépend que de la distance $\rho = |X - S|$, qui peut être une distribution Gaussienne (G. Pijaudier-Cabot and Pulikowski, 1991) :

$$\psi(X - S) = \exp\left(-\frac{4(\|X - S\|)^2}{l_c^2}\right) \quad (2.25)$$

Dans Bazant et Pijaudier-Cabot (1987) elle est définie :

$$\psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l_c^3} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2l_c^2}\right) \quad (2.26)$$

l_c : Longueur interne qui est un paramètre prenant en compte l'effet de non localité en déterminant le volume du voisinage sur lequel on opère la moyenne.

Le modèle de Bazant et Pijaudier-Cabot, a reconstruit le modèle de Mazars en approche non locale et a permis l'indépendance vis-à-vis du choix du maillage.

2.3.5 Inconvénients de la méthode non locale

les modèles non locaux originaux, même s'ils apportent une solution au problème de dépendance au maillage, présentent certains inconvénients (Suresh, 2013) :

- Le mauvais enclenchement de l'endommagement en pointe d'entaille.

- Une mauvaise représentation des interactions nonlocales dans la zone de fissuration.
- Traitement inadéquat des interactions au voisinage des bords.
- Croissance illimité de l'endommagement.

On signale aussi que d'après Rossi (Rossi, 1998), le choix de la longueur caractéristique n'est pas suffisamment justifié d'un point de vue de la physique et apparait plutôt comme un artifice numérique pour s'affranchir d'une certaine sensibilité au maillage. Et que d'après Plananas et al (Plananas et al., 2003), l'approche non locale est très sensible au choix de la fonction de pondération.

On peut citer aussi l'effet d'échelle (diminution de la résistance apparente d'une structure avec l'augmentation de sa taille) qui pose encore problème .

Certaines études récentes (Giry et al., 2011) ont montré qu'on doit changer la valeur de la longueur caractéristique d'un modèle au cours du chargement afin d'améliorer la description de l'évolution de la description des interactions non locales.

Ainsi, une modification a été apporté en 2012 par (Giry et al., 2011) dans le but de faire varier la longueur caractéristique, en introduisant un facteur fonction de l'état de contraintes.

La longueur caractéristique l_c est définie par :

$$l_c = \rho_0 \cdot l_{c_0} \tag{2.27}$$

où :

l_{c_0} une longueur caractéristique liée au matériau

ρ_0 un facteur dépendant de l'état de contraintes

2.4 Effet unilatéral

Une restauration de la raideur d'un matériau est observée lors de la re-fermeture de fissures, phénomène se développant sous chargements cycliques au cours de la compression. Terrien.M (Terrien, 1980) et Ramtani (Ramtani, 1990) ont déjà étudié ce phénomène expérimentalement.

2.4.1 Modèle de Laborderie

Le modèle de Mazars, ne prenant pas en compte l'effet unilatéral, laborderie en 91 (Laborderie, 1991) a introduit une fonction $f(\sigma)$ qui contrôle la fermeture des fissures et permet ainsi une bonne représentation du comportement cyclique.

L'ouverture des microfissures au cours de l'évolution de l'endommagement, génère des déformations anélastiques . à cet effet, la déformation totale ε est décomposé en des déformations élastiques ε^e et en des déformations anélastiques permanentes ε^e , exprimée comme suit :

$$\varepsilon^e = \frac{\langle \sigma \rangle_+}{E(1 - D_t)} + \frac{\langle \sigma \rangle_-}{E(1 - D_c)} + \frac{\nu}{E}(\sigma - tr(\sigma).I) \quad (2.28)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_t D_t}{E(1 - D_t)} \cdot f(\sigma) + \frac{\beta_c D_c}{E(1 - D_c)} \cdot I \quad (2.29)$$

Une décomposition également du tenseur des contraintes principales en partie positive $\langle \sigma \rangle_+$ et en partie négative $\langle \sigma \rangle_-$ a été envisagé.

L'utilisation de deux variables d'endommagement D_t, D_c du modèle de Mazars a été retenue.

Avec :

D_t : variable d'endommagement en traction D_c : variable d'endommagement en compression

La fonction f utilisée est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in] - \infty, -\sigma_f]; \\ x(1 + \frac{x}{2\sigma_f}), & \text{si } x \in] - \sigma_f, 0]; \\ x, & \text{si } x \in [0, \infty[; \end{cases} \quad (2.30)$$

où :

σ_f : un paramètre du modèle représentant la contrainte de refermeture des fissures.

Un développement dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversible a permis à Laborderie (Laborderie, 1991) d'écrire les variables internes sous la forme :

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i(Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad (2.31)$$

avec :

A_i , B_i : paramètres du matériau

Y_{0i} : seuil d'élasticité

($i = 1 , 2$)

L'implémentation du modèle de Laborderie présente de grandes difficultés en 2D et en 3D. le modèle RICRAG (Richard et al., 2010) a permis récemment l'implémentation en 2D et en 3D mais la prise en charge de l'effet unilatéral est partielle. un modèle plus récent de Richard, B et al (2013) (Richard and Ragueneau, 2013) promet de corriger ce défaut.

2.4.2 Modèle RICRAG

Ce modèle récemment développé par Benjamin Richard, Frederic Ragueneau, Christian Cremona, Lucas Adelaide, (Richard et al., 2010) basé sur l'hypothèse d'isotropie, se contente d'utiliser une seule variable qui peut être calculée sous chargements monotones ou cycliques, et même en comportement de traction-compression . d'ailleurs, C. Laborderie (Laborderie, 1991) a souligné que le fait d'utiliser deux variables d'endommagement dans le modèle de Mazars pour prendre en compte la dysmétrie du comportement en traction et en compression est en désaccord avec les principes de la thermodynamique.

Sous chargements cycliques, l'effet unilatéral et l'influence du glissement sont pris en compte dans les équations constitutives par décomposition de l'énergie de déformation en deux parties :

- Partie hydrostatique qui traite les effets unilatéraux.
- Partie déviatorique qui traite les frottements dus au glissement entre les surfaces fissurées.

Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversible et en utilisant un couplage élasticité - endommagement, le potentiel thermodynamique a été choisi par (Richard et al., 2010) comme suit :

$$\begin{aligned} \rho\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa}{3} ((1-D) \langle \varepsilon_{kk} \rangle_+^2 - \langle -\varepsilon_{kk} \rangle_+^2) \right. \\ \left. + 2(1-D)\mu \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \right. \\ \left. + 2D\mu (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^\pi) (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^\pi) \right. \\ \left. + \gamma \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right\} + H(z) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où :

κ, μ : coefficient de compressibilité et module de cisaillement

ε_{ij} : tenseur de déformation total de second ordre

ε_{ij}^d : tenseur de déformation déviatorique total de second ordre

D : variable d'endommagement

$\langle A_{ij} \rangle_+$ désigne la partie positive du tenseur $\langle A_{ij} \rangle$

Pour que le modèle soit thermodynamiquement admissible, il faut respecter l'inégalité de Clausius - Duhem - Truesdell :

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.33)$$

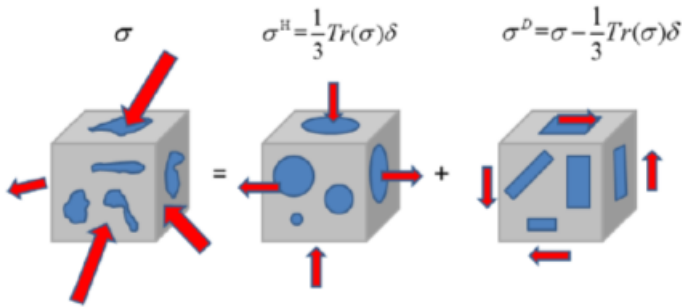


FIGURE 2.8 – Décomposition en parties hydrostatique et déviatorique d'après B.Richard et al (2010)

où :

σ_{ij} est le tenseur de contrainte de cauchy de second ordre

En remplaçant l'équation (2.32) dans l'équation (2.33), on obtient la condition d'admissibilité thermodynamique :

$$(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{\pi}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \dot{z}) \geq 0 \quad (2.34)$$

Les équations d'état dérive du potentiel thermodynamique donné par l'équation (2.32) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{K}{3} ((1-D) \langle \varepsilon_{kk} \rangle_+ - \langle -\varepsilon_{kk} \rangle_+) \delta_{ij} \\ + 2(1-D) \mu \varepsilon_{ij}^d + 2D \mu (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^{\pi}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\sigma_{ij}^{\pi} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{\pi}} = 2D \mu (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^{\pi}) \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{\partial \rho \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{K}{3} (\langle \varepsilon_{kk} \rangle_+^2) + 2\mu \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d \right. \\ \left. - 2\mu (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^{\pi}) (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^{\pi}) \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$X_{ij} = \frac{\partial \rho \psi}{\partial \alpha_{ij}} = \gamma \alpha_{ij} \quad (2.38)$$

$$z = \frac{\partial \rho \psi}{\partial z} = \frac{dH(z)}{dz} \quad (2.39)$$

où :

σ_{ij} : tenseur de contrainte de cauchy

σ_{ij}^π : tenseur de contrainte de second ordre due au frottement

Y : taux de restitution d'énergie

X_{ij} : force thermodynamique associée à l'écouissage cinématique

z : force thermodynamique associée à l'écouissage isotrope

L'évolution de la variable d'endommagement et la variable d'écouissage isotrope est donnée par :

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda}_d \quad (2.40)$$

$$\dot{z} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial z} = -\dot{\lambda}_d \quad (2.41)$$

où :

$$f_d = \bar{Y} - (Y_0 + z) \quad (2.42)$$

f_d étant une surface seuil introduite pour désactiver l'endommagement au cours du déchargement : si f_d est négative l'endommagement n'est pas activé, si f_d est positive l'endommagement est activé.

$$\bar{Y} = \beta Y_{dir} + Y_{ind} \quad (2.43)$$

$$Y_{dir} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{dir} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{dir} \quad (2.44)$$

$$Y_{ind} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{ind} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{ind} \quad (2.45)$$

CHAPITRE 2. LES MODÈLES DE COMPORTEMENT ENDOMMAGEABLE

E_{ijkl} : tenseur de Hooke de 4^{me} ordre

β : paramètre pour piloter la dissymétrie de la surface seuil entre la tension et la compression

ε_{ij}^{dir} : tenseur de tension direct

ε_{ij}^{ind} : tenseur de tension induit

obtenu par les formules :

$$\varepsilon_{ij}^{dir} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+)$$

$$\varepsilon_{ij}^{ind} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{dir}$$

H étant la fonction d'Heavside

\bar{Y} : variable d'énergie pilotant l'endommagement

Y_0 : le seuil initial

Pour tenir compte du comportement en tension - compression, Y est décomposé en deux mécanisme :

- Un mécanisme de tension direct Y^{dir}
- Un mécanisme de tension induit par la compression Y^{ind}

λ_d : multiplicateur de Lagrange

La fonction de consolidation a été choisie par B.Richard et al (Richard et al., 2010) pour pouvoir respecter la dissymétrie entre les réponses en tension et en compression et garder une seule variable d'endommagement :

$$\frac{dH(z)}{dz} = \frac{-1}{1+z} \left(\frac{H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+)}{A_{dir}} + \frac{1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+)}{A_{ind}} \right) \quad (2.46)$$

où :

A_{dir} : terme de fragilité en tension du matériau

A_{ind} : terme de fragilité en compression du matériau

Pour gérer le mécanisme de glissement, les lois d'écoulement ont pour expression (Richard et al., 2010) :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\pi} = \dot{\lambda}_{\pi} \cdot \frac{\partial \psi_{\pi}}{\partial \sigma_{ij}^{\pi}} \quad (2.47)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\dot{\lambda}_{\pi} \cdot \frac{\partial \psi_{\pi}}{\partial X_{ij}} \quad (2.48)$$

où :

$$\psi_{\pi} = \sqrt{\frac{3}{2}(\delta_{ij} - X_{ij})(\delta_{ij} - X_{ij}) + \frac{a}{2}X_{ij}X_{ij}}$$

étant le potentiel de dissipation

$\dot{\lambda}_{\pi}$: multiplicateur de Lagrange

δ_{ij} : la partie déviatorique du tenseur de contrainte de cauchy

$$a = a_0(1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+))$$

$$\gamma = \gamma_0(1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+))$$

a_0 , γ_0 : paramètres matériau en compression cyclique

Les paramètres a , γ sont introduit pour séparer les effets de frottement en traction et en compression qui ne donnent pas ensemble des résultats acceptables. (Richard et al., 2010)

Le modèle s'appuie sur une régularisation en approche non locale par utilisation d'une longueur caractéristique et en remplaçant le taux d'énergie d'endommagement local Y par \bar{Y}_{nl} en non local :

$$\bar{Y}_{nl}(x) = \frac{\int_{\Omega(x)} w(x-s) \bar{Y}(s) ds}{\int_{\Omega(x)} w(x-s) ds} \quad (2.49)$$

x désignant le point de Gauss

w la fonction poids

$\Omega(x)$ désignant un domaine autour de x déterminé par la longueur caractéristique l_c

La variable interne d'endommagement en non local est exprimée alors par :

$$D = 1 - \frac{1}{1 + (A_{dir} H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ + \langle \sigma_{ij} \rangle_+) + (A_{ind} (1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ + \langle \sigma_{ij} \rangle_+))) (\bar{Y}_{nl} - Y_0)}$$

D'après les figures 2.9 et 2.10, on remarque une bonne concordance entre les résultats numériques obtenus par Richard.B, et al (Richard et al., 2010) et les résultats expérimentaux obtenus en traction et en compression par Terrien (Terrien, 1980) et Ramtani (Ramtani, 1990).

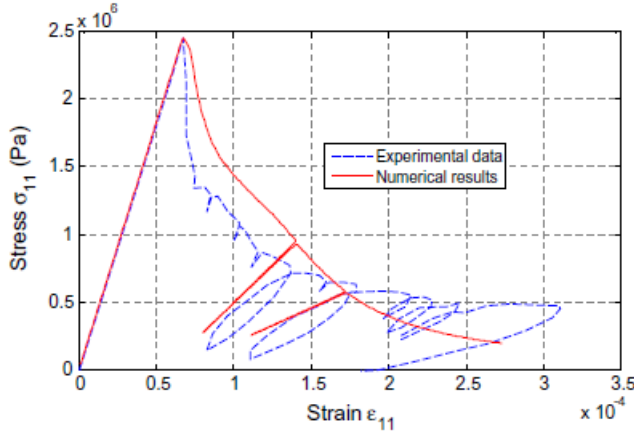


FIGURE 2.9 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux en tension d'après B.Richard et al (2010)

Récemment en 2013, Richard, B. et Ragueneau, F (Richard and Ragueneau, 2013) apportèrent une amélioration au modèle RICRAG en proposant un nouveau modèle qui traite les problèmes déjà posés, à savoir l'effet unilatéral pris partiellement en compte et l'absence d'effet d'hystérétique en traction.

En s'inspirant du modèle de Laborderie l'effet unilatéral est pris totalement en charge par l'introduction d'une variable de fermeture des fissures η

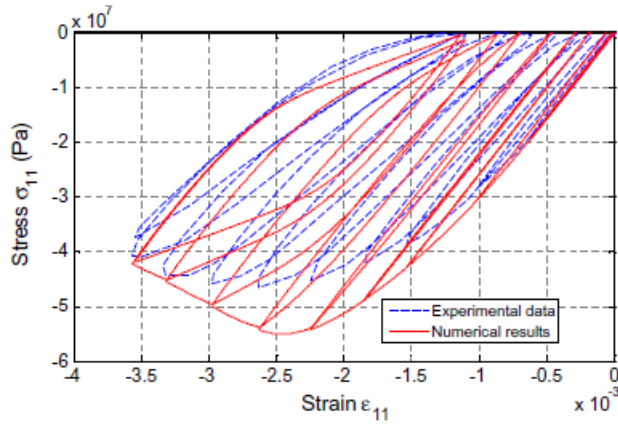


FIGURE 2.10 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux en compression cyclique d'après B.Richard et al (2010)

variant entre 0 quand les fissures sont fermées et 1 quand les fissures sont ouvertes ; elle est définie ainsi :

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_{kk} > 0 ; \\ 1 - \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_f}, & \text{si } \sigma_f \leq \sigma_{kk} \leq 0 ; \\ 0, & \text{si } \sigma_{kk} < \sigma_f ; \end{cases} \quad (2.50)$$

La variable est une fonction du tenseur de contrainte de Cauchy exprimée par :

$$\eta = 1 - \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_f} \quad (2.51)$$

Où :

σ_f : la contrainte de fermeture des fissures, paramètre caractérisant le matériau.

2.5 Conclusion

Le modèle de Mazars largement évoqué dans la littérature a été remodelé, amélioré par plusieurs auteurs, pour tenir compte des différents phénomènes accompagnant l'endommagement et les difficultés numériques engendrées lors

CHAPITRE 2. LES MODÈLES DE COMPORTEMENT ENDOMMAGEABLE

de la simulation (modélisation des déformations, dépendance au maillage, effet unilatéral, ...).

Ainsi le modèle de Mazars en approche locale, le modèle Laborderie, et le modèle RICRAG ont été présentés et l'attention est attirée sur les différents problèmes s'y rattachant.

Par ailleurs notre choix a été porté sur le modèle récent dit RICRAG qui prend en charge la majorité des phénomènes présentés.

Chapitre 3

La méthode des éléments finis, estimation d'erreur et adaptation de maillages

3.1 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser un domaine continu en sous domaines (éléments finis), les éléments en question peuvent être des éléments unidimensionnels, bidimensionnels, tridimensionnels ou axisymétriques suivant leurs géométries. On obtient ainsi un domaine discret dont on définit pour chacun de ses éléments une approximation de la solution :

$$\{\tilde{u}(M)\} = \sum \{a_i\} \cdot [\Phi_i(M)], \quad \forall M(x, y, z) \in \mathcal{D}. \quad (3.1)$$

$[\Phi_i(M)]$: fonctions définies à priori par exemple des fonctions polynomiales ou trigonométriques

$\{a_i\}$: coefficients inconnus

L'approximation $\{\tilde{u}(M)\}$ définit alors une approximation du vecteur $\{u(M)\}$ aux nœuds de l'élément en utilisant les fonctions $[\Phi_i(M)]$. Une telle formulation d'éléments finis est appelée formulation déplacement quand le vecteur $\{u(M)\}$ représente un champ déplacement. D'autres formulations sont obtenues en choisissant une approximation portant sur un champ de contraintes (formulation en contraintes) ou sur les deux champs déplacements et contraintes (formulation hybride ou mixte).

3.2 Méthode des éléments finis en élasticité linéaire

Afin de décrire la méthode en élasticité linéaire, on considère un solide occupant un domaine Ω soumis à une densité de forces volumiques $\{f_d\}$. Un champ de déplacement $\{U\} = \{U_d\}$ est imposé sur une partie de son bord $\partial_1\Omega$. Egalement une densité surfacique d'efforts $\{F_d\}$ est imposé sur une autre partie du bord $\partial_2\Omega$. On définit l'interpolation discrétisant le champ des déplacements ainsi :

$$\{U_h\} = [N].\{u\} \quad (3.2)$$

Avec :
 $\{U_h\}$ le champ des déplacements éléments finis, $[N]$ la matrice des fonctions de forme, $\{u\}$ vecteur des déplacements nodaux.

Les équations de compatibilité sont tirées à partir des déformations $\{\varepsilon_h\}$:

$$\{\varepsilon_h\} = [L].\{U_h\} \quad (3.3)$$

$$= [L].[N].\{u\} \quad (3.4)$$

$$= [B].\{u\} \quad (3.5)$$

Avec : $[L]$ l'opérateur différentiel.
On appelle $[B] = [L].[N]$ la matrice des déformations. La loi de Hooke permet d'exprimer les équations constitutives du matériau :

$$\{\sigma_h\} = [H].\{\varepsilon_h\} \quad (3.6)$$

$$= [H].[B].\{u\} \quad (3.7)$$

$$= [T].\{u\} \quad (3.8)$$

Avec : $[H]$ la matrice de Hooke.
On appelle $[T] = [H].[B]$ la matrice des tensions.

L'énergie de déformation interne est donnée par l'expression :

$$E_{int}(\{U_h\}) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \{\sigma_h\}^T \cdot \{\varepsilon_h\} \cdot d\Omega \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} ([H].[B].\{u\})^T \cdot [B].\{u\} \cdot d\Omega \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot \int_{\Omega} ([B]^T \cdot [H] \cdot [B]) \cdot d\Omega \cdot \{u\} \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} \quad (3.12)$$

On appelle $[K] = \int_{\Omega} ([B^T] \cdot [H] \cdot [B]) \cdot d\Omega$ la matrice de raideur globale

Le potentiel des forces extérieures est :

$$P_{ext}(\{U_h\}) = - \int_{\Omega} \{U_h\} \cdot \{f_v\} \cdot d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \{U_h\} \cdot \{F_d\} \cdot dS \quad (3.13)$$

$$= -\{u\}^T \cdot \left[\int_{\Omega} [N]^T \cdot \{f_v\} \cdot d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} [N]^T \cdot \{F_d\} \cdot dS \right] \quad (3.14)$$

$$= -\{u\}^T \cdot \{F\} \quad (3.15)$$

On appelle $\{F\} = \int_{\Omega} [N]^T \cdot \{f_v\} \cdot d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} [N]^T \cdot \{F_d\} \cdot dS$

Le vecteur des forces généralisées (ou nodales)

Calculons l'énergie potentielle totale :

$$E_p(\{U_h\}) = \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} - \{u\}^T \cdot \{F\} \quad (3.16)$$

En minimisant l'énergie potentielle totale :

$$\frac{\partial E_p(\{U_h\})}{\partial \{u\}} = 0 \quad (3.17)$$

$$[K] \cdot \{u\} - \{F\} = 0 \quad (3.18)$$

En imposant des conditions aux limites, on obtient la solution éléments finis après résolution du système linéaire :

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (3.19)$$

Ce système représente les équations d'équilibre discrétisées. La solution élément finis consiste à présent à trouver les déplacements nodaux $\{u\}$ au lieu du champ déplacement $\{u(M)\}$. Il suffit d'utiliser des méthodes directes comme celle de Crout ou itératives comme celle de Gauss-Seidel pour résoudre le système linéaire.

Ainsi, nous avons remplacé un système continu par un système discrétisé équivalent et des équations aux dérivées partielles généralement sans solution analytique en système d'équations algébriques qu'on peut résoudre.

3.3 Estimation d'erreurs

La méthode des éléments finis est sujette à l'apparition de plusieurs erreurs dues soit au modèle utilisé, soit au calcul numérique comme les erreurs d'arrondi ou d'intégrations numériques ou encore à la discrétisation. Dans cette thèse, on s'intéresse aux erreurs de discrétisation en élasticité et celles dues au phénomène d'endommagement. Le résultat des simulations par éléments finis est beaucoup influencé par la discrétisation. Une attention particulière doit être donnée à l'estimation des erreurs de discrétisation pour pouvoir utiliser telles simulations. On distingue deux types d'estimation d'erreur, l'une à priori avant les calculs éléments finis et l'autre à posteriori après calculs éléments finis. Nous traiterons des estimations à posteriori vu que celles à priori n'ont une valeur que qualitative. On estime l'erreur globalement, et on note l'estimation :

$$\epsilon \approx \|e_h\|_{\Omega} \quad (3.20)$$

Avec : $\|e_h\|_{\Omega}$ l'évaluation de l'erreur sous forme de norme énergétique :

$$\|e_h\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} (e_h)_{\sigma}^T \cdot H^{-1} \cdot (e_h)_{\sigma} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

On peut aussi estimer l'erreur localement sur chaque élément et on note l'estimation :

$$\epsilon_e \approx \|e_h\|_{\Omega_e} \quad (3.22)$$

Avec : Ω_e le volume de l'élément e

$$\|e_h\|_{\Omega_e} = \left[\int_{\Omega_e} (e_h)_{\sigma}^T \cdot H^{-1} \cdot (e_h)_{\sigma} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

$(e_h)_{\sigma}$ étant l'erreur ponctuelle du champ des contraintes.

$$(e_h)_{\sigma} = \sigma_{exact} - \sigma_h \quad (3.24)$$

3.4 Types d'estimateurs

3.4.1 Estimateur basé sur l'analyse duale

Un estimateur basé sur l'analyse duale a été proposé par Fraeijs de Veubeke en 1965 (Veubeke, 1965) :

En utilisant deux modèles différents, l'un cinématiquement admissible et l'autre statiquement admissible, on obtient une borne supérieure et une borne

inférieure pour l'énergie de déformation exacte.

L'énergie de déformation exacte est approchée par la moyenne arithmétique des énergies qu'on calcule pour les deux modèles à partir de la même discrétisation.

Le fait d'utiliser deux modèles différents sur le même maillage rend la méthode plus coûteuse.

3.4.2 Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement

L'erreur en relation de comportement basée sur les travaux de Ladveze en 1975 (Ladveze, 1975) est définie à partir de deux champs construits auparavant :

- un champ de déplacement cinématiquement admissible \hat{u}
- un champ de contraintes statiquement admissible $\hat{\sigma}$

Le couple admissible $(\hat{u}, \hat{\sigma})$ est construit à partir de la solution éléments finis approchée $(\{U_h\}, \sigma_h)$ non admissible. Selon la formulation utilisée pour les éléments, uniquement l'une des composantes du couple $(\{U_h\}, \{\sigma_h\})$ est admissible. pour la formulation en déplacement, le champ $\{U_h\}$ est cinématiquement admissible mais le champ $\{\sigma_h\}$ n'est pas statiquement admissible.

Il constitue soit une solution exacte s'il vérifie la relation de comportement :

$$\hat{\sigma} = H.\varepsilon(\hat{u}) \quad (3.25)$$

Ou bien

$$\hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u}) = 0 \quad (3.26)$$

Soit une solution approchée si :

$$\hat{\sigma} \neq H.\varepsilon(\hat{u}) \quad (3.27)$$

Ou bien

$$\hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u}) \neq 0 \quad (3.28)$$

On peut définir la quantité non nulle $e = \hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u})$ comme erreur en relation de comportement.

Cette erreur nous permet d'apprécier la qualité de la solution éléments finis, elle est mesurée par la norme en énergie :

$$e = \|\hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u})\|_{\Omega} \quad (3.29)$$

appelée erreur absolue globale

On peut associer à cette erreur, une erreur relative globale :

$$\epsilon = \frac{\|\hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u})\|_{\Omega}}{\|\hat{\sigma} + H.\varepsilon(\hat{u})\|_{\Omega}} \quad (3.30)$$

La contribution locale de chaque élément est :

$$\epsilon_e = \frac{\|\hat{\sigma} - H.\varepsilon(\hat{u})\|_{\Omega_e}}{\|\hat{\sigma} + H.\varepsilon(\hat{u})\|_{\Omega_e}} \quad (3.31)$$

de telle sorte que :

$$\epsilon^2 = \sum_{\Omega} \epsilon_e^2 \quad (3.32)$$

Signalons que des techniques de construction de champs admissibles ont été développées par certains auteurs comme Ladeveze, Pelle, et Gastine (Gastine et al., 1992).

La qualité de l'estimateur d'erreur peut être mesurée par l'indice d'effectivité défini par :

$$\Theta = \frac{\epsilon}{\|e_h\|_{\Omega}} \quad (3.33)$$

Lorsque $\Theta \geq 1$ l'estimateur est dit garanti. L'erreur estimée ϵ est alors une borne stricte de l'erreur vraie. Les erreurs de discrétisation éléments finis sont toujours majorées par l'erreur en relation de comportement (Θ est toujours supérieur ou égale à 1), ce qui constitue un atout majeur. Cependant, l'inconvénient de l'utilisation des estimateurs fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement reste leur coût et la difficulté de leur implémentation.

3.4.3 Estimateur basé sur les défauts d'équilibre en solution

Localement, les équations d'équilibre pour un modèle cinématiquement admissible ne sont pas vérifiées, car le champ de contraintes n'est pas statiquement admissible. Ce qui est traduit dans chaque élément par un résidu r_h :

$$r_h = \operatorname{div}\sigma_h + f_d \quad (3.34)$$

On remarque aussi qu'à l'interface entre deux éléments, apparaît des discontinuités du champ de contraintes. Ce qui est traduit pour une face entre deux éléments E_1, E_2 , appartenant à $\partial_2\Omega$ (mentionné dans la section 3.2) par un résidu t_n :

$$t_n = \sigma_h \cdot n_{E_1} - F_d \quad (3.35)$$

et pour une face n'appartenant pas à $\partial\Omega$ par :

$$t_n = \sigma_{h_1} \cdot n_{E_1} - \sigma_{h_2} \cdot n_{E_2} \quad (3.36)$$

Ces résidus r_h, t_n sont les défauts d'équilibre dont on se sert pour estimer l'erreur de discrétisation par la norme énergétique de l'erreur :

$$\|e_h\|_{\Omega}^2 = \sum_E \int_{\Omega_e} r_h \cdot e_h \cdot d\Omega_e - \int_{\Gamma} t_n \cdot e_h \cdot d\Gamma \quad (3.37)$$

Avec :

$$e_h = (U_{exact} - U_h) \text{ non nulle sur } \partial_1\Omega$$

e_h étant l'erreur ponctuelle du champ des déplacements.

Γ le pourtour de l'élément E de domaine Ω_e .

Plusieurs estimateurs basés sur les résidus d'équilibre ont été développés par des auteurs, citons Babuska (Babuska and Rheinbolt, 1978), Kelly (Kelly, 1984), Ainsworth (Ainsworth and Oden, 1992), (Ainsworth and Oden, 1993), (Ainsworth and Oden, 1997)

Il existe deux types d'estimateurs basés sur les défauts d'équilibre en solution :

Les estimateurs explicites qui se basent directement sur l'équation des résidus éq 3.34 et les estimateurs implicites qui se basent quant à eux, sur la

résolution de certains problèmes définis localement.

Estimateurs explicites :

Ils sont basés sur le résidu obtenu à partir de l'équation de la norme énergétique de l'erreur sur les défauts d'équilibre en solution :

$$R = \sum_E \int_{\Omega_e} r_h \cdot e_h \cdot dE - \int_{\Gamma} t_n \cdot e_h \cdot d\Gamma$$

A partir de ces estimateurs, l'erreur vraie a été majorée par Babuska et Rheinboldt (Babuska and Rheinboldt, 1979) sous la forme :

$$\|e_h\|_{\Omega} = C \cdot \left[\sum_E h_E^2 \cdot \|r_h\|^2 + \sum_E h_{\Gamma}^2 \cdot \|t_n\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

Où :

C : une constante à déterminer, généralement choisie selon Gerasimov et al (Gerasimov et al., 2012), égale à 1

h_E : taille caractéristique de E

h_{Γ} : taille caractéristique de Γ

Γ étant le pourtour de l'élément E .

$\|r_h\|^2$: norme des résidus intérieurs

$\|t_n\|^2$: norme des résidus de frontière

L'expression $\left[\sum_E h_E^2 \cdot \|r_h\|^2 + \sum_E h_{\Gamma}^2 \cdot \|t_n\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ représente l'erreur estimée

Estimateurs implicites :

Ils sont basés sur l'utilisation de l'équation de la norme énergétique de l'erreur sur les défauts d'équilibre en solution éq 3.37 en approche locale au niveau d'un élément ou d'un patch d'éléments.

Babuska et Rheinboldt (Babuska and Rheinboldt, 1978) ont introduits des estimateurs par patch d'éléments, tandis que Demkowicz (Demkowicz et al.,

1984), (Demkowicz et al., 1985), des estimateurs par élément.

Avec ce genre d'estimateurs, l'erreur vraie est évaluée d'une façon plus précise que les estimateurs explicites mais malheureusement leur coût est beaucoup plus grand.

3.4.4 Estimateur basé sur l'extrapolation de Richardson

Cet estimateur est basé sur la détermination d'une loi de convergence empirique de l'erreur globale en utilisant la procédure de Richardson qui consiste à effectuer au moins trois analyses éléments finis puis calculer l'énergie de déformation de chaque solution éléments finis :

$$E_h = \frac{1}{2} \cdot \|U_h\|_{\Omega}^2 \quad (3.39)$$

On obtient l'estimation de l'erreur de discrétisation :

$$e = E - E_h \quad (3.40)$$

E étant l'énergie de déformation asymptotique de référence déduite de la résolution d'un système d'équation. On retrouve tel estimateur dans (Babuska and Szabo, 1982)

Cette méthode est réputé pour sa précision mais le fait d'utiliser trois maillages éléments finis, la rend très coûteuse.

3.4.5 Estimateur basé sur le lissage de champ de contraintes

Version ZZ1 :

En s'appuyant sur la constatation qu'ont fait Hinton et Campbell en 1975 (Hinton and Campbell, 1974) que la solution éléments finis oscillait autour de la solution exacte et qu'en certain points appelés points de superconvergence les deux solutions coïncidaient, l'approximation de la contrainte exacte est obtenue en construisant un champ de contrainte lissé de degré supérieur. (Zienkiewicz and Zhu, 1987)

Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est construit en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}_h$ et le champ éléments finis σ_h , en remplaçant le champ exact σ_{exact} par un champ lissé $\tilde{\sigma}_h$, on définit alors un indicateur global :

$$\theta^2 = \int_{\Omega} Tr[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h).K^{-1}.(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)].d\Omega \quad (3.41)$$

et un estimateur local pour les éléments E de Ω :

$$\theta_e^2 = \int_E Tr[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h).K^{-1}.(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)].dE \quad (3.42)$$

Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est obtenu par résolution du système linéaire :

$$M.\bar{\sigma}_h = b \quad (3.43)$$

Avec :

$\bar{\sigma}_h$ les valeurs nodales déterminées par la minimisation de :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h).K^{-1}.(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h).d\Omega \quad (3.44)$$

$$M = \int_{\Omega} N^T.N.d\Omega \quad (3.45)$$

$$b = \int_{\Omega} N^T.\sigma_h.d\Omega \quad (3.46)$$

N la matrice des fonctions de base tel que :

$$\tilde{\sigma}_h = N.\bar{\sigma}_h \quad (3.47)$$

La méthode ZZ1 est couteuse, la résolution du système linéaire (éq 3.43) doit se faire sur chacune des composantes du tenseur de contrainte.

Version ZZ2 ou méthode SPR (super convergence patch recovery) :

La version ZZ1 étant très couteuse, Zienkiewicz et Zhu en 1992 (Zienkiewicz and Zhu, 1992) ont adopté la technique locale de recouvrement qui consiste à évaluer le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ à partir d'un ensemble d'éléments finis appelés PATCHS et en utilisant la notion de superconvergence des points d'intégrations.

Un patch est l'ensemble des éléments connectés à un nœud.

Pour chaque patch, on définit une approximation :

$$\tilde{\sigma}_h = P.a_s \quad (3.48)$$

Où : P les termes polynomiaux appropriés a_s les coefficients inconnus des monômes correspondants

on obtient le coefficients a_s par la résolution du système linéaire :

$$A.a_s = b \quad (3.49)$$

Avec :

$$A = \sum_{i=1}^N P^T(x_i, y_i).P(x_i, y_i) \quad (3.50)$$

$$b = \sum_{i=1}^N P^T(x_i, y_i).\sigma_h(x_i, y_i) \quad (3.51)$$

N étant le nombre total des points d'intégration des éléments du patch

(x_i, y_i) les coordonnées des points d'intégration

L'implémentation de ces méthodes dans les codes de calcul éléments finis est simple, ce qui leurs confère une large utilisation.

L'erreur vraie ne pouvant être majorée, ces estimateurs ne constituent que des indicateurs d'erreur, très utile pour les processus d'adaptation de maillage.

3.4.6 Estimateurs d'erreur locale

Les ingénieurs concepteurs dans les bureaux d'études s'intéressent généralement à déterminer des grandeurs localisées sur des zones spécifiques de la structure, d'où l'intérêt de développer des estimateurs d'erreur locale vu que ceux de l'erreur globale restent limités par leur caractère global vis-à-vis de la structure.

Dans ce cadre, des estimateurs d'erreur en pollution ont été introduits par Babuska et al, (Babuska et al., 1994), Huerta et Diez (Huerta and Diez, 2000), et des estimateurs en quantité d'intérêt ont été développés par Becker et Rannacher (Becker and Rannacher, 1996). Josselin Delmas quant à lui a développé un indicateur d'erreur en quantité d'intérêt dans le cadre d'adaptation de maillage (Delmas, 2008).

Estimateurs d'erreurs en pollution

L'erreur définie sur une zone d'intérêt locale est constituée de l'erreur due à la discrétisation de la zone elle-même et d'une erreur due à la discrétisation du reste de la structure appelée erreur de pollution.

La mise en évidence de cette erreur de pollution a bien été illustrée par les graphes de la figure 3.1 obtenus d'après l'étude de la convergence de l'erreur en norme d'énergie par Josselin Delmas (Delmas, 2008). L'étude a été faite sur la structure représentée sur la figure 3.2

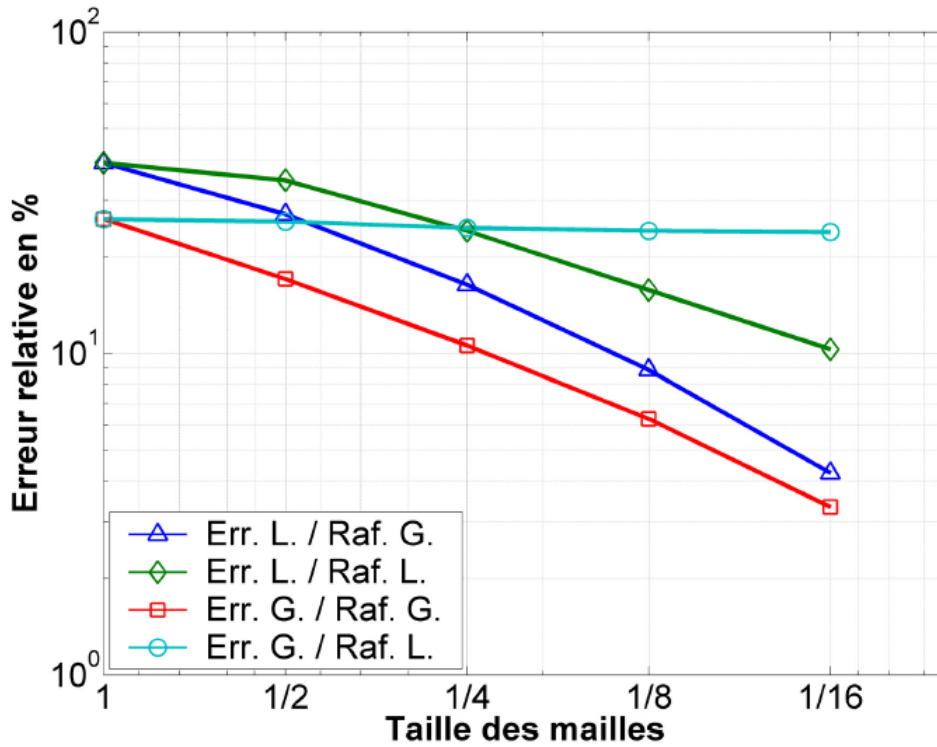


FIGURE 3.1 – Mise en évidence de l'erreur de pollution d'après J. Delmas (2008)

Différentes méthodes ont été utilisées pour estimer l'erreur de pollution notamment par Babuska et al 1995 (Babuska et al., 1995) et Huerta et Diez (Huerta and Diez, 2000), mais on peut s'en passer en employant les estimateurs en quantité d'intérêt.

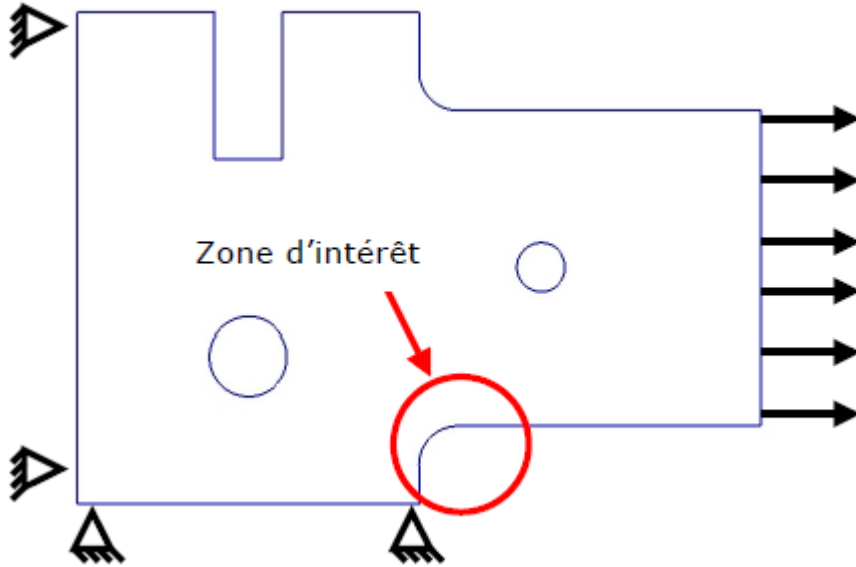


FIGURE 3.2 – Géométrie de la structure utilisée par J. Delmas (2008)

Estimateurs en quantité d'intérêt

Une quantité d'intérêt est une quantité physique définie sur une zone d'intérêt d'une structure, elle peut être une moyenne de déplacement ou une moyenne de contrainte par exemple, elle est caractérisée par une fonctionnelle :

Pour zone locale d'intérêt d'un domaine Ω

$$Q(u) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} u_x \cdot d\Omega \quad (3.52)$$

Où :

$Q(u)$ la moyenne d'une composante de déplacement sur ω

$|\omega|$ la mesure de la zone d'intérêt

$$Q(u) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} \cdot d\Omega \quad (3.53)$$

Où :

$Q(u)$ la moyenne d'une composante du tenseur de contrainte sur ω

L'erreur en quantité d'intérêt est donnée par :

$$\epsilon^Q = Q(u) - Q(u^h) \quad (3.54)$$

3.5 Adaptation de maillage

3.5.1 Introduction

Afin de minimiser les erreurs dues à la discrétisation au moindre coût possible, des techniques de calculs et contrôle de ces erreurs ont été mise au point. Ces techniques s'appellent adaptation de maillage. elles suivent des procédures qui consiste à évaluer les erreurs de discrétisation commises sur un maillage relativement grossier, puis à effectuer une nouvelle évaluation à partir des résultats de la précédente évaluation. Cette procédure est répétée jusqu'à obtenir une discrétisation optimale dont l'erreur est inférieure à une erreur prescrite. A chaque étape, une carte de tailles ou de degré d'interpolation sur laquelle s'appuie la nouvelle discrétisation doit être déterminée. Dans ce contexte, Cugnon (Cugnon, 2000) a dressé le schéma de la Procédure de contrôle de l'erreur représentée sur la figure 3.3

3.5.2 Techniques d'adaptation de maillage

Il existe plusieurs techniques qui sont basé soit sur la taille des éléments, soit sur le degré d'interpolation dans les éléments, ou une relocalisation des nœuds.

Méthode -h

Elle existe sous deux formes :

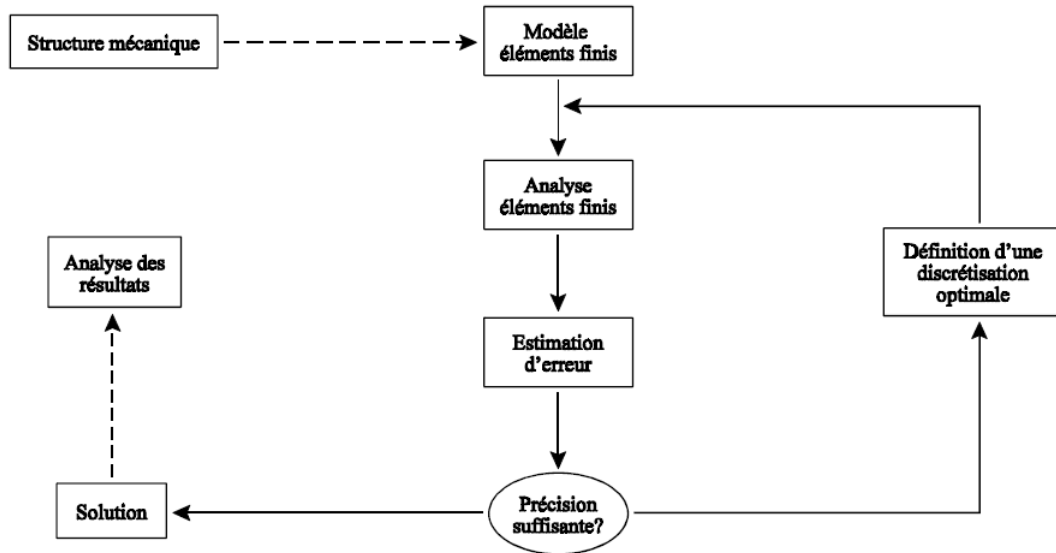


FIGURE 3.3 – Procédure de contrôle de l'erreur d'après F.Cugnon (2000)

a- méthode h-raffinement déraffinement elle consiste à subdiviser ou à regrouper les éléments du maillage initial.(Babuska and Szabo, 1982)

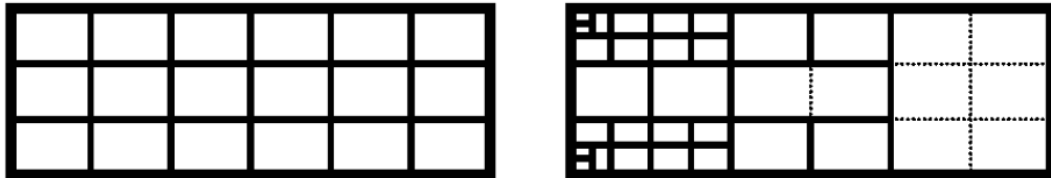


FIGURE 3.4 – Principe de la méthode h raffinement - déraffinement

b- méthode de remaillage global en utilisant une carte de tailles définie à partir des estimation d'erreurs d'un maillage initial, on crée un nouveau maillage plus précis.

Méthode -P

Elle consiste à augmenter le degré d'interpolation dans les éléments sans apporter aucun changement au maillage initial. Elle existe sous deux formes :

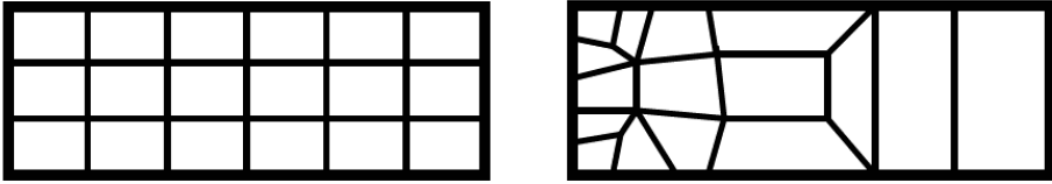


FIGURE 3.5 – Principe de la méthode h globale

-Méthode P uniforme : On augmente le degré d'interpolation de tous les éléments du maillage.

-Méthode p adaptative : On augmente le degré d'interpolation uniquement dans certaines zones du maillage initial.

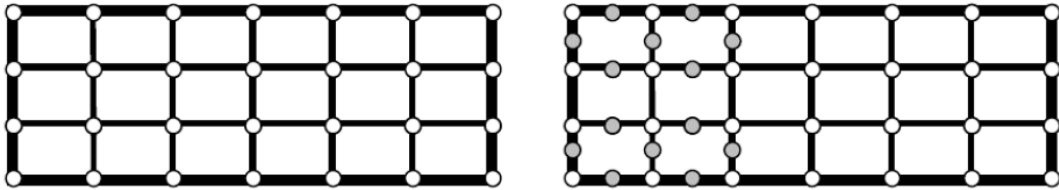


FIGURE 3.6 – Principe de la méthode -P

Méthode -hp

Babuska 1986 (Babuska, 1986) et Zienkiewicz et al 1989 (Zienkiewicz et al., 1989), ont combinés la méthode -h et la méthode -p pour avoir une méthode nouvelle qui tient compte à la fois des changements de maillage et des changements d'interpolation.

Méthode -R

Elle consiste à relocaliser les nœuds d'un maillage sans changer leur nombre et sans changer de connectivité, de telle façon à minimiser les erreurs de discrétisation.

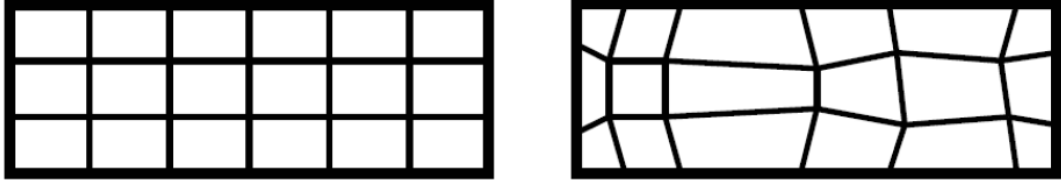


FIGURE 3.7 – Principe de la méthode -R

3.6 Détermination d'une carte de tailles

La détermination est faite globalement en estimant l'erreur globale, et localement en utilisant une carte des contributions à l'erreur de chaque élément du maillage. Elle est faite dans le but d'atteindre une précision donnée pour l'erreur de discrétisation fixée à l'avance par l'utilisateur. Le maillage obtenu est considéré alors un maillage optimal dont la taille des éléments h_E est déterminée en calculant sur chaque élément E du maillage initial, un coefficient de modification de tailles r_E :

$$r_E = \frac{\bar{h}_E}{h_E} \quad (3.55)$$

Où :

h_E : La taille de l'élément E, à modifier.

\bar{h}_E la taille de l'élément E, à déterminer.

En recalculant r_E en fonction de taux de convergence q de l'erreur :

$$\epsilon = O(h^q)$$

On obtient pour une dimension n du problème, dans le cas d'une solution suffisamment régulière :

$$r_E = \frac{\epsilon_0^{\frac{1}{q}}}{\epsilon_E^{\frac{2}{2. q+n}} \cdot \left[\sum_E \epsilon_E^{\frac{2n}{2. q+n}} \right]^{\frac{1}{2. q}}} \quad (3.56)$$

Où :

ϵ_E : la contribution de l'élément E.

ϵ_0 : l'erreur prescrite.

Dans le cas où la solution présente des singularités ou des zones à forts gradients de contraintes, on utilise un taux de convergence P_E par élément tel que :

$$\epsilon_E = C(h^{P_E})$$

Les coefficients P_E ont été définis par Rougeot (Pelle and Rougeot, 1989) ainsi :

Si l'élément E est connecté à une singularité d'ordre α

$$P_E = \alpha$$

Pour autres éléments

$$P_E = P$$

P étant le degré d'interpolation utilisé.

En introduisant un multiplicateur de Lagrange A , les coefficients de modification de tailles sont calculés cette fois ci en présence de singularité par :

$$r_E = \left[\frac{n}{2 \cdot A \cdot q_E \cdot \epsilon_E^2} \right]^{\frac{1}{2 \cdot q_E + n}} \quad (3.57)$$

Le multiplicateur de Lagrange A est obtenu par résolution de l'équation :

$$\sum_E \left[\left[\frac{n}{2 \cdot A \cdot q_E} \right]^{\frac{2q_E}{2 \cdot q_E + n}} \cdot \epsilon_E^{\frac{2n}{2 \cdot q_E + n}} \right] - \epsilon_0^2 = 0 \quad (3.58)$$

par la méthode de Newton (Becheur, 2008)

Coorevits (Coorevits,), dans le cadre des travaux du laboratoire de mécanique et CAO de Saint Quentin, a mis au point une procédure de détection des singularités qui consiste à comparer, pour chaque nœud i , l'erreur moyenne locale des éléments connectés au nœud i à l'erreur moyenne sur l'ensemble de la structure, ainsi un nœud est considéré singulier si :

$$\bar{m}^i \geq \beta \cdot \bar{M} \quad (3.59)$$

Où :

\bar{m}^i l'erreur locale moyenne des éléments connectés au nœud i
 \bar{M} l'erreur moyenne sur l'ensemble de la structure

Avec :

$$\bar{m}^i = \sqrt{\frac{\sum_{E \text{ connecté } i} \epsilon_E^2}{\sum_{E \text{ connecté } i} Mes(E)}}$$

$$\bar{M} = \sqrt{\frac{\sum_{E \in \text{structure}} \epsilon_E^2}{\sum_{E \in \text{structure}} Mes(E)}}$$

β un coefficient fixé ainsi :

Pour les éléments finis linéaires :

$\beta = 2$, en dimension 2

$\beta = 3$, en dimension 3

Pour les éléments finis quadratiques :

$\beta = 2$, en dimension 2

$\beta = 2$, en dimension 3

$Mes(E)$: est la surface en 2D ou bien le volume en 3D de l'élément E .

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de la méthode des éléments finis laquelle permet de discrétiser un système continu et d'obtenir un système d'équations algébrique qu'on peut résoudre numériquement.

Pour quantifier et contrôler les erreurs de discrétisation engendrées par la solution éléments finis, nous avons passé en revue les types d'estimateurs et les différentes techniques d'adaptation de maillage.

Chapitre 4

Mise au point d'un indicateur d'erreur en milieu élastique endommageable

4.1 Introduction

Nous proposons de construire un nouvel indicateur d'erreur pour les milieux élastiques endommageables. Pour tenir compte du couplage élasticité-endommagement nécessaire pour tels milieux, cet indicateur est basé sur la combinaison des erreurs de discrétisation et celles de l'endommagement. Des techniques de lissage dont la technique de lissage par patchs d'éléments connue sous le nom de méthode SPR (super convergent patch recovery) ou méthode de recouvrement due à Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz and Zhu, 1992), seront utilisées pour construire cet indicateur. Le choix est porté sur cette méthode pour sa facilité d'implémentation dans un code de calcul par éléments finis.

Dans la présente étude nous traiterons uniquement des structures bidimensionnelles subissant des dommages sous chargements monotones.

4.2 Problème de référence

Il consiste à réécrire la même formulation en élasticité classique en utilisant le principe d'équivalence en déformation qui stipule que tout comportement à la déformation d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective comme énoncé dans (Lemaitre

and Chaboche, 2004).

On soumet un solide occupant un domaine Ω soumis à un champ de volume f_d , à un champ de déplacement imposée $U = U_d$ sur une partie de son bord $\partial_1\Omega$ et également à une densité surfacique d'efforts F_d sur une autre partie du bord $\partial_2\Omega$

Il s'agit de trouver le couple (u, σ) tels que :

u vérifie les conditions cinématiques :

$$u = u_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \quad (4.1)$$

σ satisfait les équations d'équilibre :

$$\text{div}\sigma[u(D)] + f_d = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2)$$

(u, σ) vérifie la loi de comportement :

$$\sigma[u(D)] = H[u(D)].\epsilon[u(D)] \quad (4.3)$$

4.3 Définition de l'erreur

Soit le couple (u, σ) solution exact du problème de référence .

Soit le couple (u_h, σ_h) solution éléments finis en déplacement du problème de référence tels que le champ u_h vérifie (4.1) et :

$\forall V_h$ de type éléments finis

$$- \int_{\Omega_e} \text{Tr}[\epsilon(u_h)^T . K . \epsilon(V_h)] d\Omega_e + \int_{\Omega_e} f_d V_h d\Omega_e + \int_{\partial_2\Omega_e} F_d V_h dS = 0 \quad (4.4)$$

Le champ de contrainte est calculé par la loi de comportement :

$$\sigma_h[u(D)] = H[u_h(D)].\epsilon_h[u_h(D)] \quad (4.5)$$

On rappelle que dans la méthode éléments finis formulée en déplacements, le champ approché σ_h ne vérifie pas les équations d'équilibre (4.2)

On définit l'erreur exacte associée à chaque triplet solution éléments finis (u_h, σ_h, D_h) la quantité :

$$e = \left[\|\sigma - \sigma_h\|_{\Omega}^2 + \int_{\Omega} (D - D_h)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Avec :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T . H^{-1}(\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

La relation vérifie les deux propriétés suivantes :

1- Pour chaque triplet (u_h, σ_h, D_h) solution éléments finis, la quantité e est nulle si (u_h, σ_h, D_h) est la solution exacte du problème de référence.

2- Pour chaque triplet (u_h, σ_h, D_h) solution éléments finis, l'erreur est positive ou nulle.

4.4 Mise au point de l'indicateur d'erreur

Puisqu'on ne connaît pas, généralement la solution exacte, on l'approche alors par la construction, à partir de la solution éléments finis, d'un champ de contraintes lissé de degré supérieur et d'un champ variable endommagement lissé de degré supérieur. On utilise pour cela, la propriété de superconvergence : La solution éléments finis oscille autour de la solution exacte et en certains points appelés points de superconvergence les deux solutions coïncident (Hinton and Campbell, 1974), ainsi que les techniques de lissage dont la plus connue est celle du recouvrement SPR (Super Convergent Patch Recovry) proposé par zienkiewicz (Zienkiewicz and Zhu, 1987), (Zienkiewicz

and Zhu, 1992)

On peut donc remplacer le premier terme de l'expression (4.6) par :

$$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\Omega}^2 \quad (4.8)$$

Avec :

$$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^T \cdot H^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

et remplacer le deuxième terme par :

$$\int_{\Omega} (\tilde{D}_h - D_h)^2 d\Omega \quad (4.10)$$

Ainsi à partir de l'expression (4.6), on peut définir un indicateur d'erreur :

$$e = \left[\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\Omega}^2 + \int_{\Omega} (\tilde{D}_h - D_h)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

Où :

$\tilde{\sigma}_h$ et \tilde{D}_h les champs lissés de contraintes et variables d'endommagement respectivement.

L'erreur e s'annule si et seulement si (σ_h, D_h) est la solution exacte du problème de référence.

Généralement, l'estimation de l'erreur est faite en utilisant une expression donnant l'erreur relative ϵ permettant d'évaluer la qualité globale de la solution éléments finis.

On définit notre indicateur d'erreur en terme d'erreur relative ainsi :

$$\epsilon = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\Omega}^2}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\Omega}^2} + \frac{\int_{\Omega} (\tilde{D}_h - D_h)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (\tilde{D}_h + D_h)^2 d\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Avec :

$$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^T \cdot H^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

$$\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h + \sigma_h)^T \cdot H^{-1} (\tilde{\sigma}_h + \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

ϵ : erreur globale

On définit également l'erreur élémentaire ϵ_E qui exprime la contribution locale d'un élément E du maillage associé à Ω , à l'erreur globale ϵ par :

$$\epsilon_E = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_E^2}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_E^2} + \frac{\int_E (\tilde{D}_h - D_h)^2 d\Omega}{\int_E (\tilde{D}_h + D_h)^2 dE} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Tels que :

$$\epsilon^2 = \sum_E \epsilon_E^2 \quad (4.16)$$

L'indicateur d'erreur est implémenté suivant le diagramme schématique représenté sur la figure 4.1. A cet effet, une procédure de calcul d'erreur appelée (CALLER) a été créée. Le programme utilise la procédure CALLER pour obtenir l'erreur globale. Celle-ci est alors comparée à l'erreur prescrite par l'utilisateur. L'implémentation de l'indicateur d'erreur est faite dans CAST3M. Ce dernier est un logiciel de calcul pour la mécanique des structures et des fluides. Il utilise la méthode des éléments finis. Il intègre un solveur, une interface graphique pour l'affichage des résultats, et un mailleur. Plusieurs modèles sont implantés dans le code, ainsi on peut choisir le modèle adéquat à notre problème. Le langage de programmation employé est le GIBIANE. Sa syntaxe peut prendre l'une des formes suivantes :

DIRECTIVES OPERANDES.

Exemple : TRACE MAILLAGE

RESULTATS = OPERATEUR OPERANDES.

Exemple : LIGNE = DROITE P1 P2

Le premier exemple utilise la directive TRACE pour visualiser un maillage

CHAPITRE 4. MISE AU POINT D'UN INDICATEUR D'ERREUR EN MILIEU ÉLASTIQUE ENDOMMAGEABLE

qui est donné en opérande. Le deuxième exemple construit l'objet LIGNE reliant entre deux points P1 et P2, DROITE est alors l'opérateur qui s'applique sur les opérandes P1 et P2. Les différentes directives et opérateurs sont répertoriés dans le site de CAST3M ([ww-cast3m.cea.fr/](http://www-cast3m.cea.fr/)).

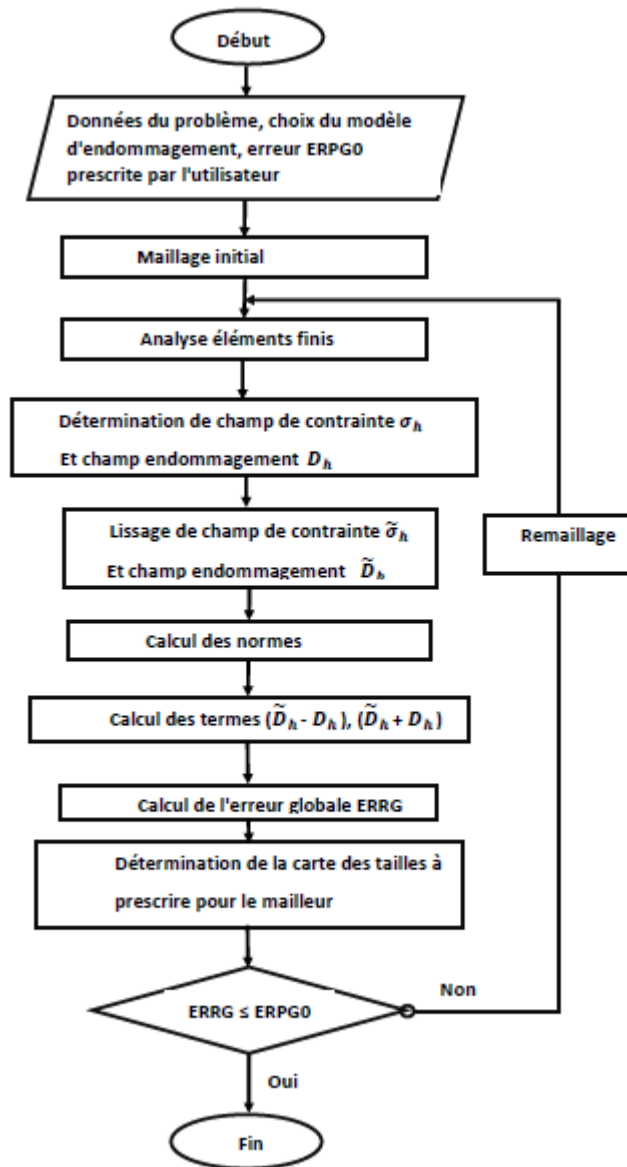


FIGURE 4.1 – Organigramme schématique du programme

4.5 Conclusion

Un indicateur d'erreur basé sur la combinaison des erreurs de discrétisation et celles de l'endommagement a été construit. En tenant compte du couplage élasticité - endommagement, l'indicateur peut être appliqué aux milieux élastiques endommageables soumis à des chargements monotones. Grâce à la méthode de recouvrement due à Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz and Zhu, 1992), l'indicateur d'erreur a été facilement implémenté dans le code CAST3M pour les cas bidimensionnels. L'implémentation a été faite de manière à permettre un processus adaptatif afin de diminuer l'erreur de discrétisation.

Chapitre 5

Essais numériques, validation sur des cas tests, et discussion des résultats

5.1 Introduction

Les problèmes liés à l'endommagement, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, présentent des non linéarités matérielles dues à l'adoucissement. Ils sont résolus en adoptant des modèles qui à moindre coût de calcul, arrivent à surmonter les difficultés numériques de la non convergence des résultats.

Notre choix a été porté sur l'utilisation du modèle récent RICRAG implanté dans CAST3M, qui semble assez robuste comparativement à celui de Mazars le plus courant.

En effet, l'une des difficultés rencontrées avec le modèle de Mazars consiste en la nécessité d'un nombre important de sous pas de chargement pour obtenir la convergence.

Quant au modèle RICRAG largement détaillé dans le chapitre 2 (page 41), nous avons évoqué dans le même chapitre le phénomène de localisation et la dépendance au maillage s'y rapportant, à travers les essais effectués par (Kuhl and Ramm, 1999) qui démontrent bien la nécessité d'une régularisation. A cet effet, nous adoptons une démarche en non locale, prise en charge par le modèle RICRAG en introduisant le concept de la moyenne pondérée du taux de restitution d'énergie d'endommagement :

$$\bar{Y}_{nl}(x) = \frac{\int_{\Omega(x)} w(x-s)\bar{Y}(s)ds}{\int_{\Omega(x)} w(x-s)ds} \quad (5.1)$$

Expression qui doit remplacer celle en locale.

Dans les simulations effectuées, on s'est limité au chargements quasi - statique, en adoptant l'hypothèse des petites déformations pour des structures bidimensionnelles.

Nous avons défini les conditions aux limites sous forme de chargement imposé.

Par ailleurs, avant toute adaptation de maillage, il faut connaître les propriétés de convergence en h - raffinement de l'indicateur d'erreur mis au point. Pour cela, on procède à une étude de convergence. Avec un maillage très régulier d'éléments quadrilatéraux Qua4, et en variant le nombre d'éléments en raffinant le maillage. L'évolution de l'erreur relative globale est tracée en fonction de la taille des éléments (ou de leur nombre) du maillage.

Une fois les propriétés de convergence sont connues, nous procédons à l'implantation de l'indicateur d'erreur mis au point. Le logiciel CAST3M développé au commissariat de l'énergie atomique CEA en France sera utilisé à cette fin. Nous allons également, utiliser une technique d'adaptation de maillage dans le but de diminuer les coûts de calculs. Elle consiste à minimiser les erreurs de discrétisation pour le minimum d'éléments possibles.

L'indicateur d'erreur mis au point a été testé en utilisant trois essais numériques :

- Essai sur poutre SENB (single edged notched beam) (figure 5.1). Ce test a été expérimentalement réalisé par A.Carpinteri et al (Carpinteri et al., 1993), et par E. Schlangen (Schlangen, 1993). J. Bobinski et al (Bobinski and Tejchman, 2005) l'ont utilisé pour modéliser le comportement du béton en non local.

- Essai sur poutre DENB (double edged notched beam) (figure 5.2). Pour l'étude de l'endommagement et la propagation de fissure dans le béton, le test DENB a été utilisé numériquement par Geers et al (Geers et al., 2000).

- Essai brésilien (figure 5.3).

Dans le cadre d'estimation d'erreur et d'adaptation de maillage, le test SENB a été utilisé par A.Huerta (Huerta et al., 2002) ainsi que A.Rodriguez (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000). Quant au test brésilien, il a été utilisé par A.Rodriguez-Ferran, A.Huerta (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000).

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS, ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

La géométrie de la poutre telle que représentée dans la figure 5.1 est la même que celle représentée par A.Huerta (Huerta et al., 2002) et A. Rodriguez (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000).

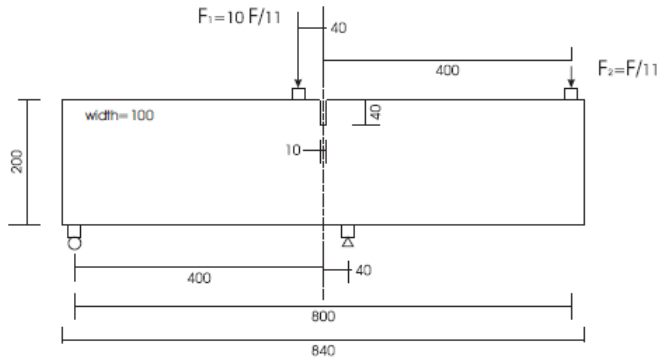


FIGURE 5.1 – Test de référence SENB d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

La géométrie de la poutre telle que représentée dans la figure 5.2 est la même que celle représentée par M.G.D Geers et al, (Geers et al., 2000). La poutre est d’une épaisseur de 37.5 mm et les plateaux de chargement de 20 mm de largeur.

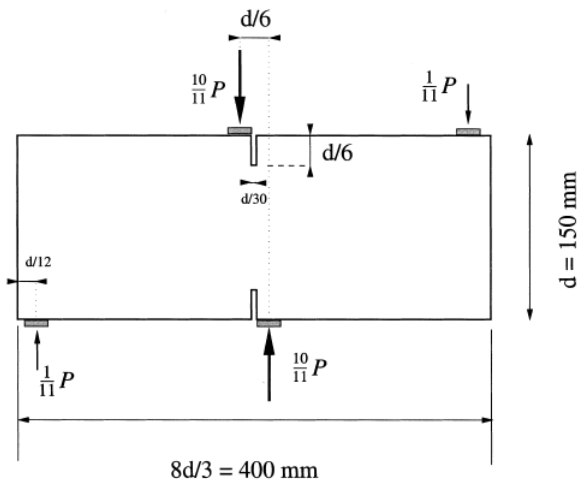


FIGURE 5.2 – Test de référence DENB d’après Geers et al (2000)

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS, ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

L'essai brésilien est un test très répandu qui est utilisé dans les laboratoires pour déterminer la résistance à la traction du béton.

La géométrie de la poutre telle que représentée dans la figure 5.3 est la même que celle représenté par A. Rodriguez et A.Huerta (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000). Les valeurs du rayon de la poutre R et la largeur de la plaque de chargement B ont été fixés : $R = 40$ mm, $B = 10$ mm.

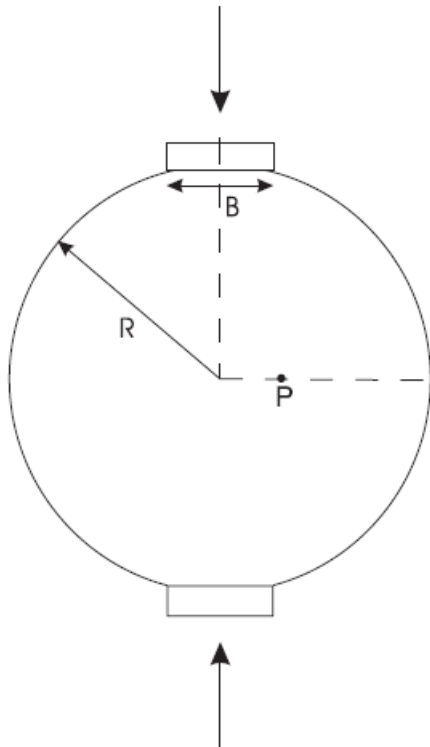


FIGURE 5.3 – Test brésilien d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

Les paramètres du matériau utilisés dans nos tests sont définis dans le tableau (Table 5.1).

E (Pa)	ν	A_{Dir}	A_{Ind}	γ_0	a_0	Ft
$280 \times 10^{+8}$	0.2	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-4}	$7.0 \times 10^{+9}$	7.0×10^{-7}	$3.6 \times 10^{+6}$

TABLE 5.1 – Paramètres du matériau

Où : E module de Young, ν Coefficient de Poisson, A_{Dir} Fragilité en traction, A_{ind} Fragilité en compression, γ_0 et a_0 Modules d'écroutissage, Ft Résistance en traction.

5.2 Etude de convergence

En adoptant des maillages réguliers où la taille des éléments est constante, on estime l'erreur relative. Les maillages successifs sont obtenus à partir du maillage initial en divisant successivement le coté de chaque élément par un entier (1, 2, 3, etc). Quelques exemples de maillages utilisés sont donnés sur les figures (figure 5.4, figure 5.5, figure 5.6) pour le test SENB, (figure 5.7, figure 5.8, figure 5.9) pour le test DENB, et (figure 5.10, figure 5.11, figure 5.12) pour le test brésilien. Notons que pour les maillages utilisés en test brésilien, notre choix des TRI3 est motivé par la forme circulaire de l'éprouvette qui s'adapte mieux aux éléments triangulaires qu'aux éléments quadrangulaires.

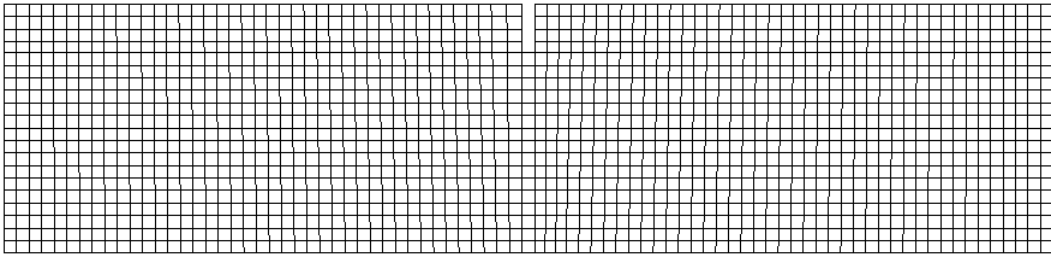


FIGURE 5.4 – Maillage initial, 1676 éléments, 1785 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB

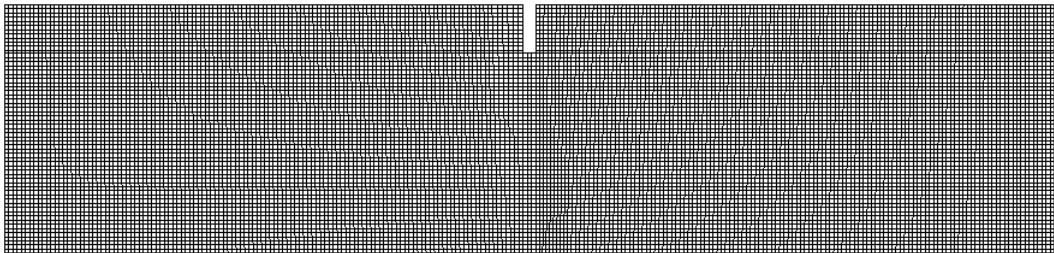


FIGURE 5.5 – Troisième maillage, 15084 éléments, 15409 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB

Les simulations sur les poutres utilisées dans nos essais, nous ont permis d'obtenir les courbes de l'évolution de l'erreur relative globale en fonction du nombre d'éléments. Les courbes sont représentées sur les figures (5.13, 5.14, 5.15). Nous remarquons une allure décroissante des ces courbes. En effet, l'erreur relative globale (ERRG) est en nette diminution avec le raffinement de maillage.

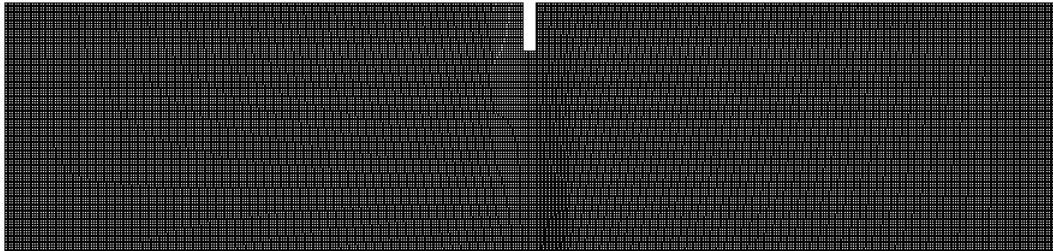


FIGURE 5.6 – Sixième maillage, 60336 éléments, 60985 nœuds. TEST DE CONVERGENCE SENB

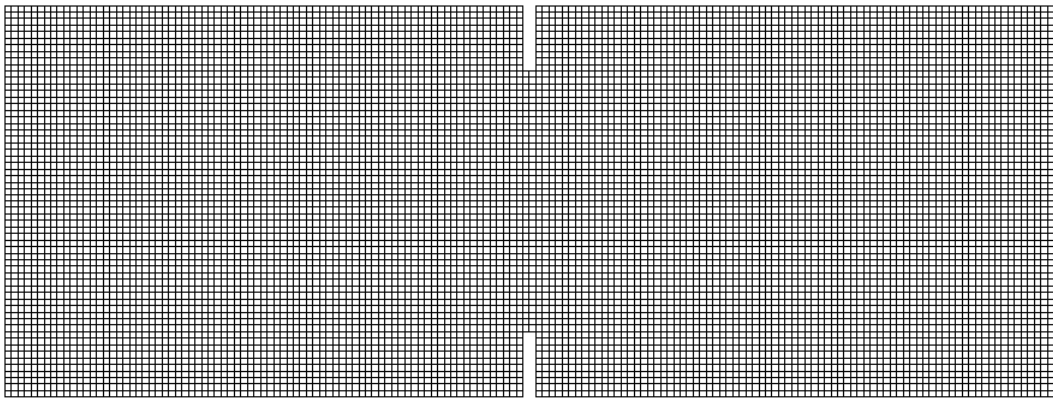


FIGURE 5.7 – Maillage initial, 9560 éléments, 9801 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB

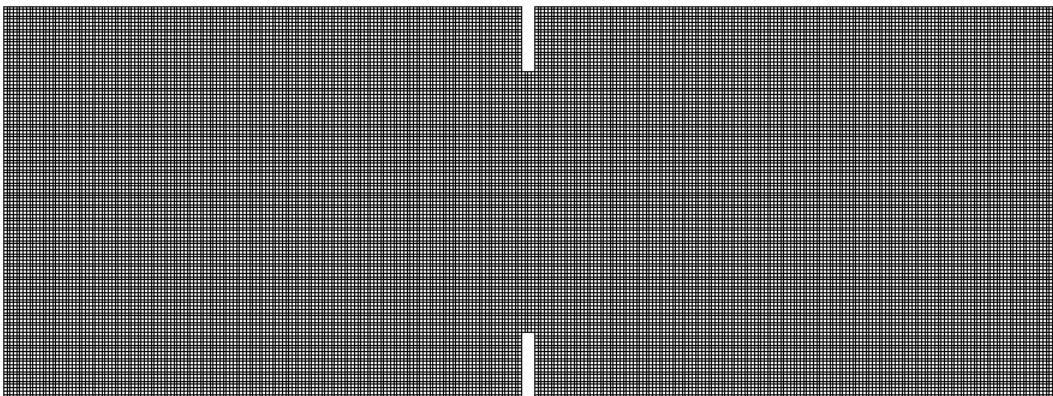


FIGURE 5.8 – Deuxième maillage, 38240 éléments, 38721 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB

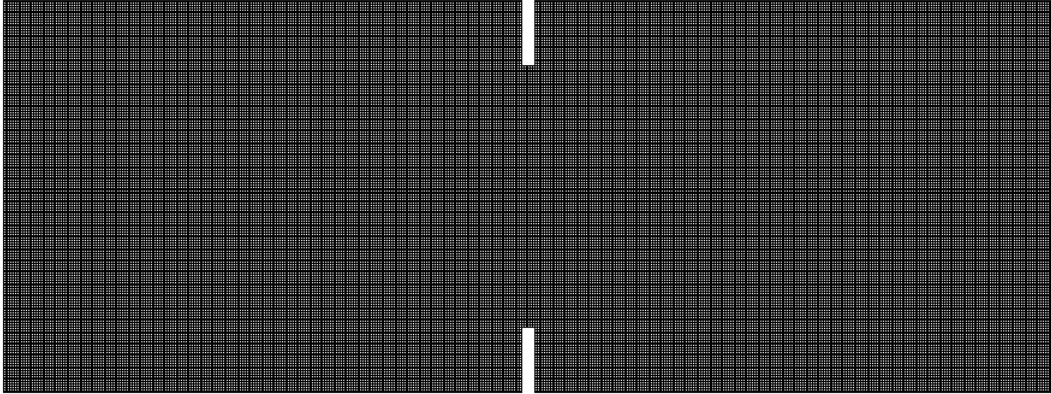


FIGURE 5.9 – Troisième maillage, 86040 éléments, 86761 nœuds. TEST DE CONVERGENCE DENB

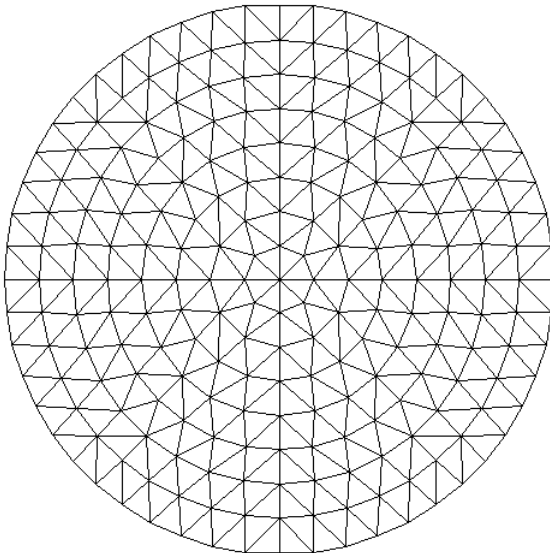


FIGURE 5.10 – Maillage initial, 404 éléments, 229 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN

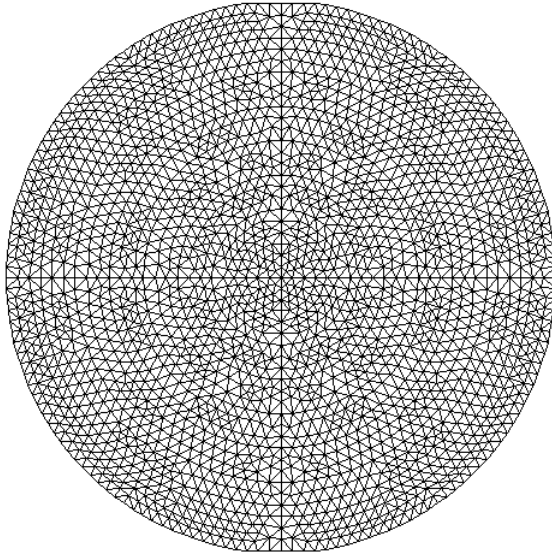


FIGURE 5.11 – Troisième maillage, 4276 éléments, 2217 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN

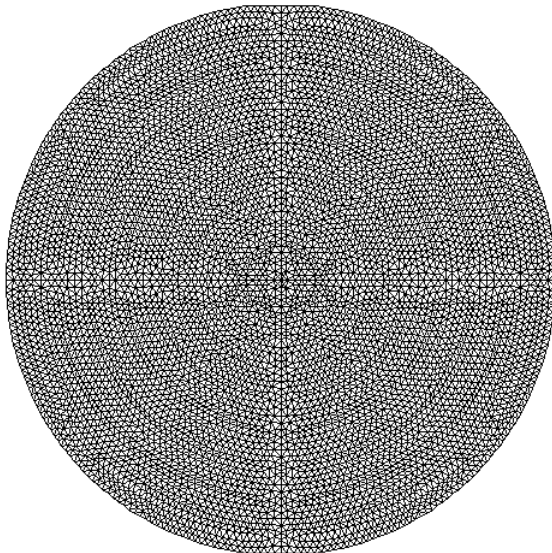


FIGURE 5.12 – Cinquième maillage, 11916 éléments, 6089 nœuds. TEST DE CONVERGENCE ESSAI BRESILIEN

Pour le test SENB, avec un maillage dense de 82124 éléments, l'erreur relative globale (ERRG) a atteint les 5.58 % quand à l'erreur de maillage (ERRMLG) 3.99 % et celle de l'endommagement (ERREUDO) 3.9 %. L'erreur relative globale (ERRG) ne descend guère en dessous du seuil des 5 % (figure 5.13).

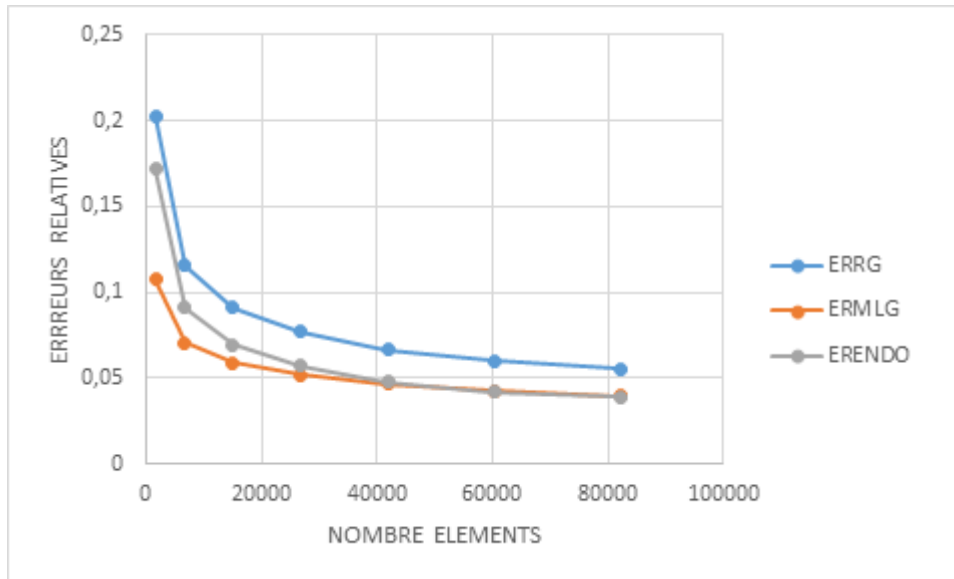


FIGURE 5.13 – Evolution de l'erreur relative globale en fonction du nombre d'éléments TEST SENB

Pour le test DENB, avec un maillage dense de 150000 éléments, l'erreur relative globale (ERRG) n'a atteint que les 9.03 % quand à l'erreur de maillage (ERRMLG) 2.58 % et celle de l'endommagement (ERREUDO) 8.65 %. L'erreur de maillage (ERRMLG) est comprise entre 5 % et 2.58 %, mais celle de l'endommagement est assez grande et contribue d'une façon significative à l'erreur globale. La courbe de l'erreur de l'endommagement et celle de l'erreur globale sont quasiment confondues sur la figure 5.14

Pour l'essai brésilien, avec un maillage dense de 11916 éléments, l'erreur relative globale (ERRG) n'a atteint que les 4.65 % quand à l'erreur de maillage (ERRMLG) 4.64 % et celle de l'endommagement (ERREUDO) 0.21 %. L'erreur relative globale (ERRG) atteint le seuil des 5 % et celle de l'endommagement est assez petite, sa contribution dans l'erreur globale est presque négligeable. La courbe de l'erreur de maillage et celle de l'erreur globale sont quasiment confondues sur la figure 5.15

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS,
ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

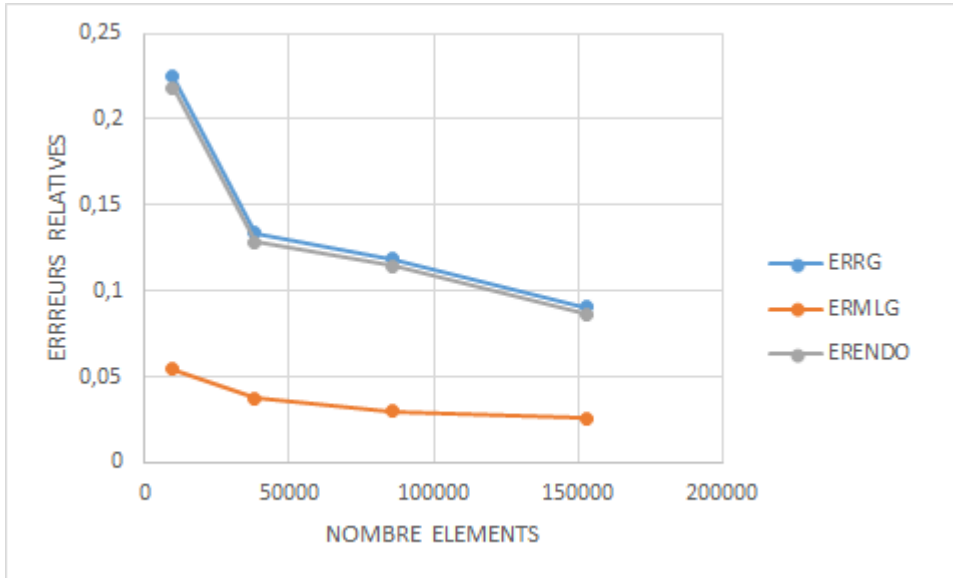


FIGURE 5.14 – Evolution de l’erreur relative globale en fonction du nombre d’éléments TEST DENB

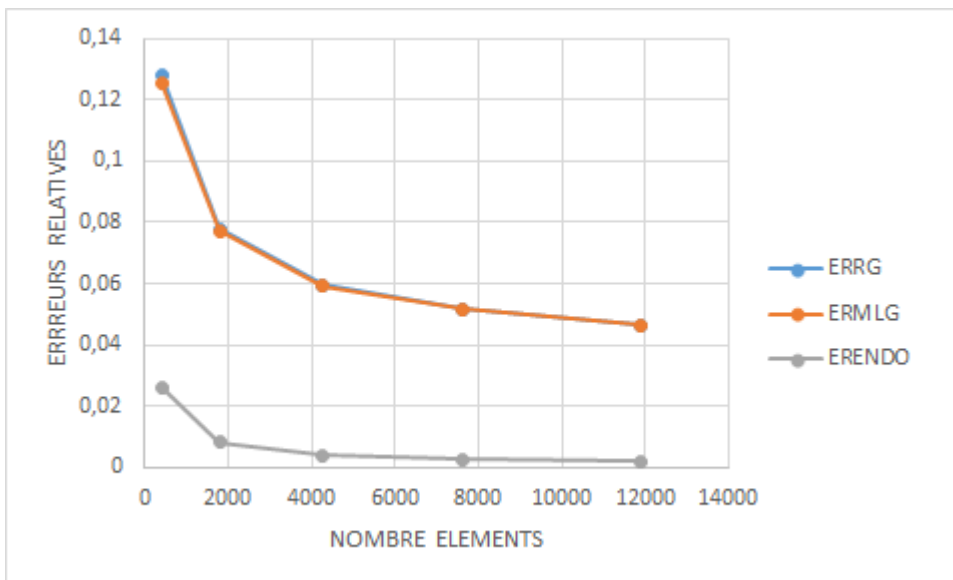


FIGURE 5.15 – Evolution de l’erreur relative globale en fonction du nombre d’éléments TEST BRESILIEN

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS, ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

Une autre forme de courbe de convergence établie en fonction des tailles des éléments est représentée sur les figures (figure 5.16, figure 5.17, figure 5.18).

L'allure de la courbe de convergence peut être approchée mathématiquement au sens de la méthode des moindres carrés par une courbe d'équation $c.h^p$ avec les paramètres c , p donnés ci-après :

Pour la courbe de convergence de l'erreur relative globale :

$$c = 0.1994, p = 0.6922 \text{ (test SENB)}$$

$$c = 0.5440, p = 0.6433 \text{ (test DENB)}$$

$$c = 0.2442, p = 0.6248 \text{ (test brésilien)}$$

Pour la courbe de convergence de l'erreur de maillage :

$$c = 0.1058, p = 0.5175 \text{ (test SENB)}$$

$$c = 0.1136, p = 0.5353 \text{ (test DENB)}$$

$$c = 0.2357, p = 0.6102 \text{ (test brésilien)}$$

Pour la courbe de convergence de l'erreur d'endommagement :

$$c = 0.1697, p = 0.7986 \text{ (test SENB)}$$

$$c = 0.5335, p = 0.6512 \text{ (test DENB)}$$

$$c = 0.1313, p = 1.5515 \text{ (test brésilien)}$$

Le paramètre le plus important est l'exposant p . Plus p tend vers zéro, plus il devient nécessaire de raffiner d'avantage le maillage, en particulier au voisinage des fonds d'entaille (des zones à forts gradients).

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS,
ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

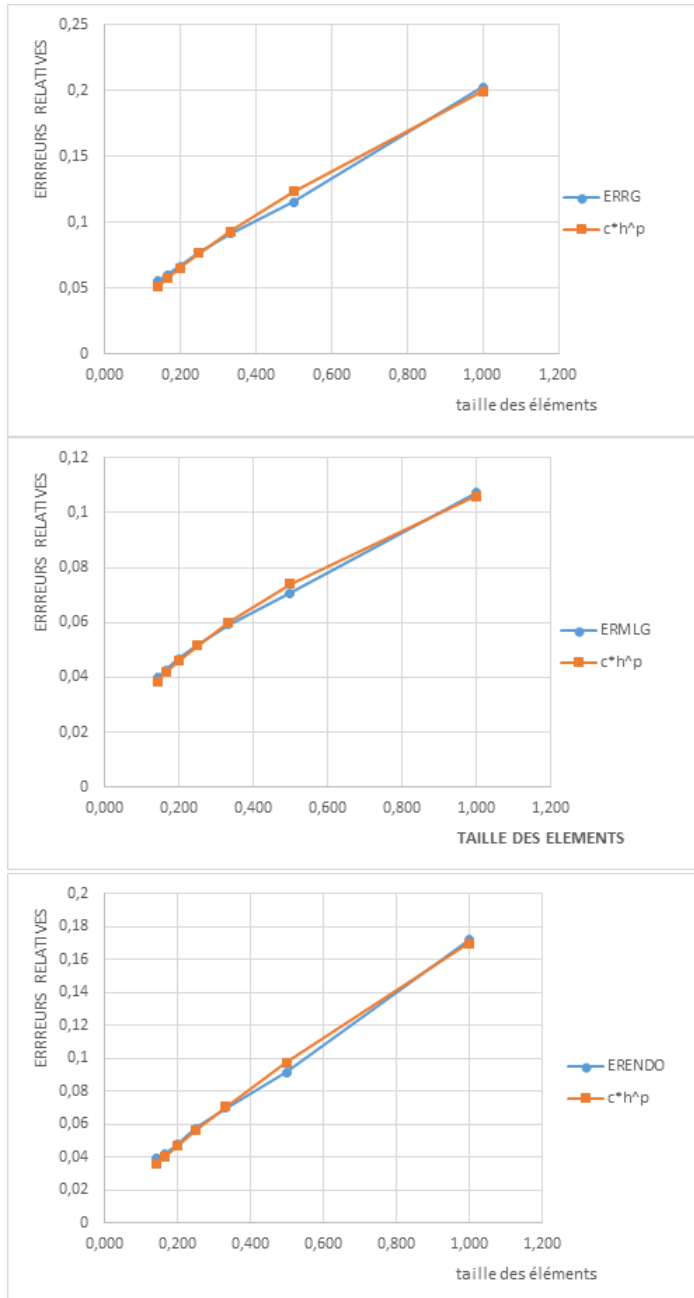


FIGURE 5.16 – Courbes de convergence TEST SENB

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS,
ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

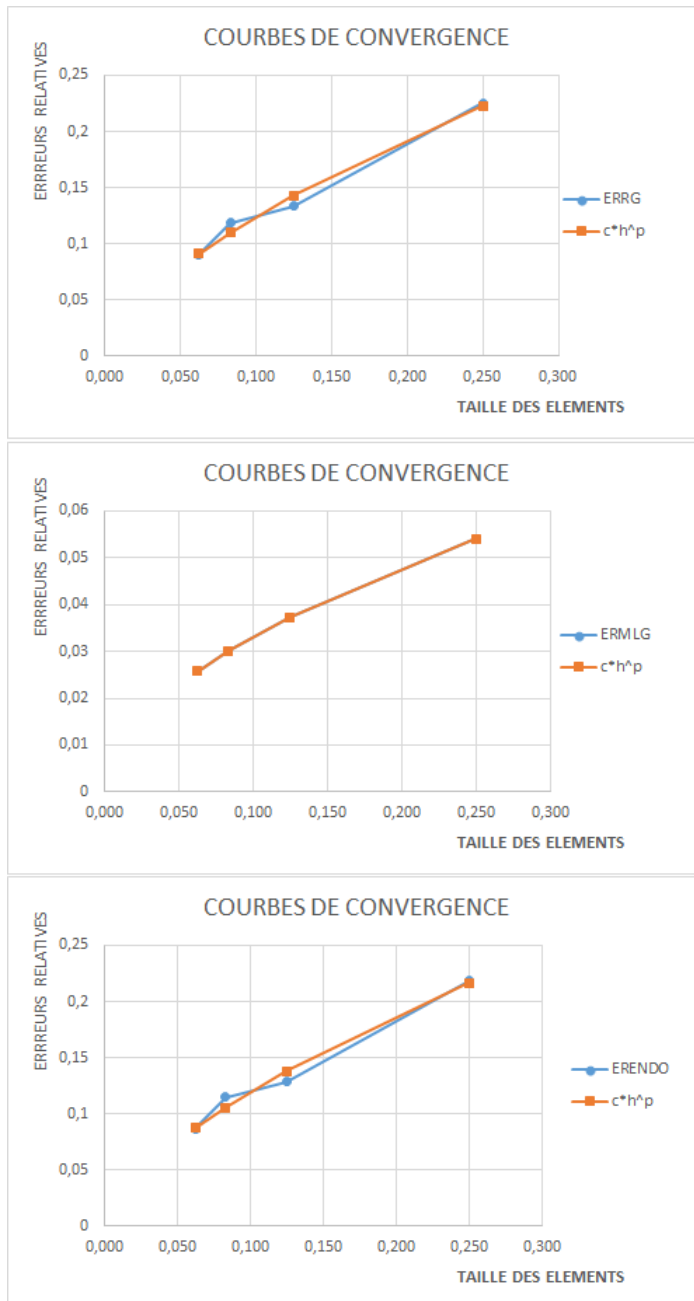


FIGURE 5.17 – Courbes de convergence TEST DENB

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS,
ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

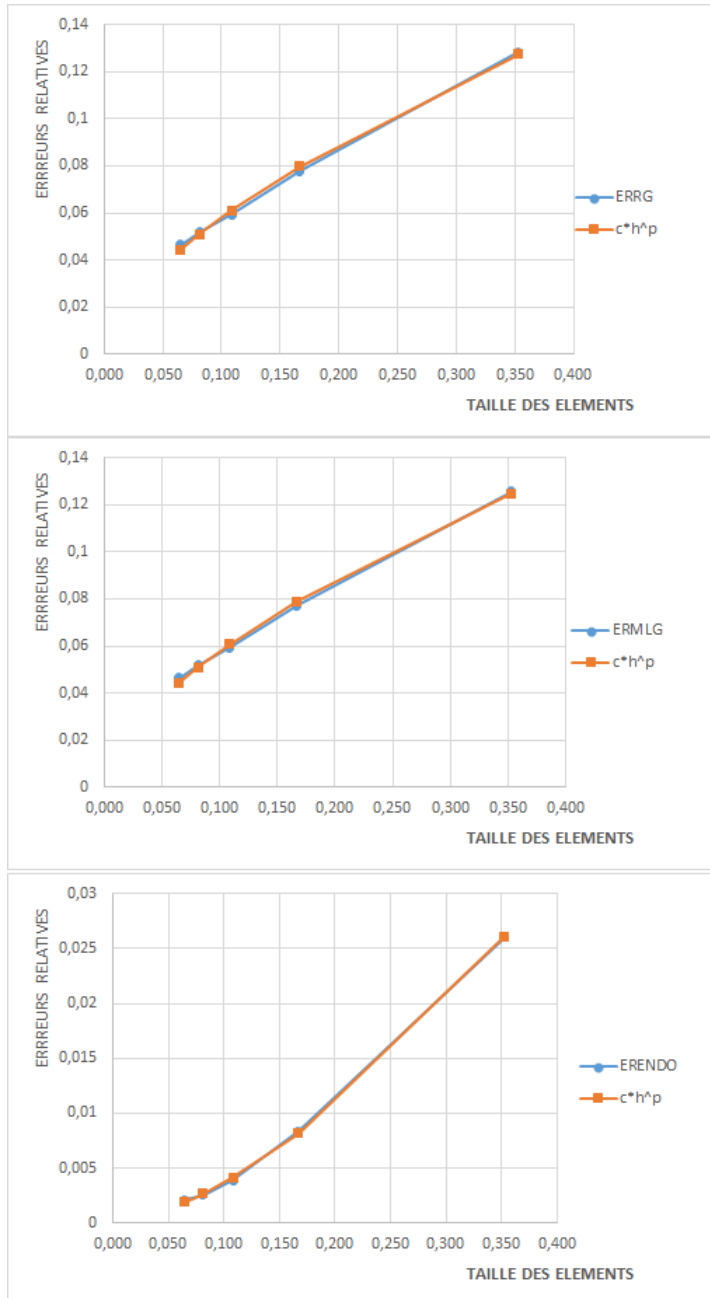


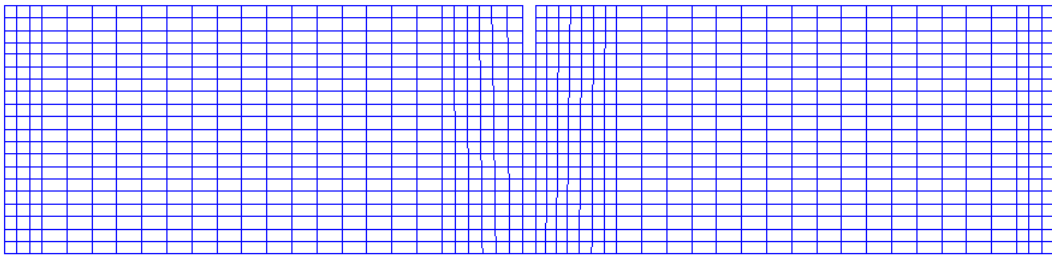
FIGURE 5.18 – Courbes de convergence TEST BRESILIEN

5.3 Etude d'adaptation de maillage

La convergence de l'indicateur étant établie, nous procédons maintenant à une estimation de l'erreur globale avec adaptation de maillage. Pour le choix des éléments à utiliser, Hinton et Owen rapportèrent dans leur ouvrage (Owen and Hinton, 1980) que les éléments quadrangulaires et les éléments quadratiques à 8 nœuds et 9 nœuds sont performants, constat fait après plusieurs tests dans les domaines linéaires et non linéaires. K.Y Lee et al, (Kyu-Yeul Lee and Kim, 2003) affirmèrent qu'en général, la qualité des maillages à éléments quadrangulaires est meilleure et converge plus rapidement qu'avec des éléments triangulaires.

Nous nous sommes forcés à produire un maillage grossier constitué uniquement d'éléments QUA4, beaucoup préférables aux TRI3, mais après adaptation, le nouveau maillage obtenu par le mailleur GIBI de CAST3M transforme certains éléments en TRI3. CAST3M ne prenant pas en charge le traitement des maillages mixtes composés d'éléments de type TRI3 en association avec des QUA4, une programmation manuelle beaucoup plus longue est alors nécessaire. A.Huerta, pour sa part (Huerta et al., 2002), a utilisé un mailleur structuré qui génère uniquement des quadrilatéraux (Sarrate and Huerta, 2000).

Les résultats obtenus du test SENB sont représentés sur figure 5.19, figure 5.20, figure 5.21, figure 5.22, et figure 5.23



MAILLEGE eprouvette SENB= 1036 | Castem2000 - Windows V0.1

FIGURE 5.19 – SENB maillage initial, 1036 éléments

Un maillage initial composé de 1036 éléments, uniquement de type QUA4, est utilisé pour simuler l'endommagement d'une poutre SENB. La Distribution de l'endommagement est représentée sur la figure (figure 5.20).

L'indicateur d'erreur mis au point a permis de dresser une carte des contributions à l'erreur représentée sur la figure (figure 5.21).

Afin de procéder à une adaptation de maillage pour diminuer l'erreur globale estimée à 17.44 %, une carte des tailles à prescrire pour le mailleur a été représentée sur la figure (figure 5.22).

En utilisant les cartes de tailles à prescrire pour le mailleur, obtenues au cours du processus d'adaptation, le mailleur génère des nouveaux maillages adaptés. Un maillage optimal constitué de 3903 éléments est obtenu au cours du quatrième remaillage (figure 5.23).

Les figures (figure 5.24, figure 5.25, figure 5.26, figure 5.27) illustrent les résultats après adaptation de maillage.

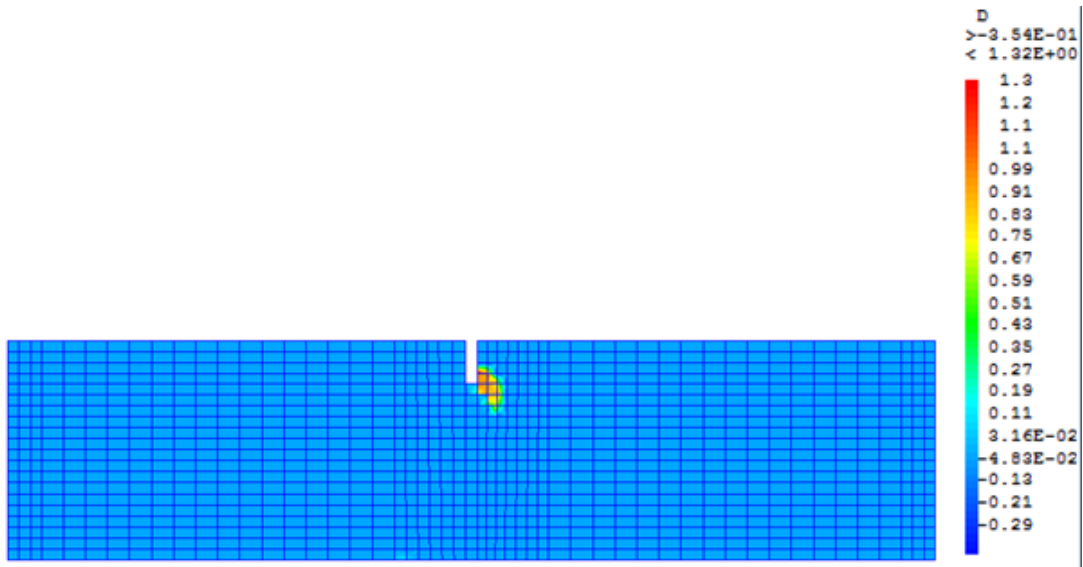


FIGURE 5.20 – SENB Distribution de l'endommagement

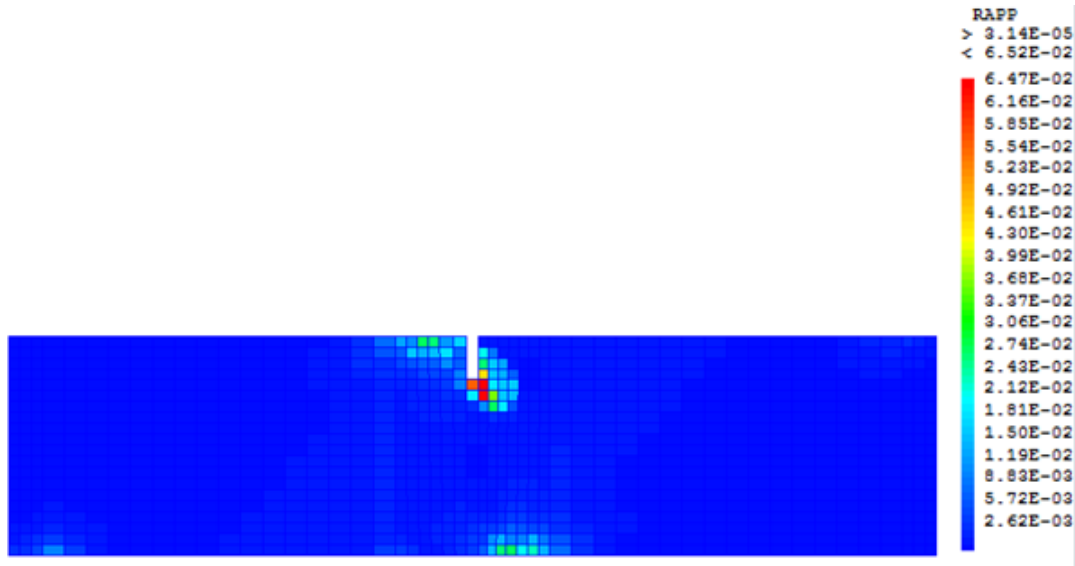


FIGURE 5.21 – SEN B Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 17.44 %

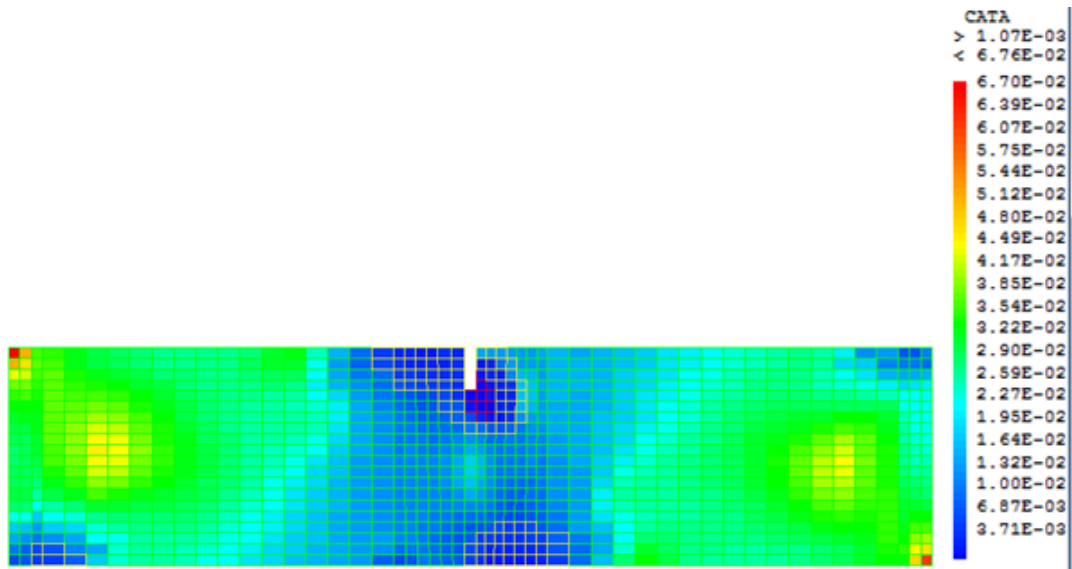
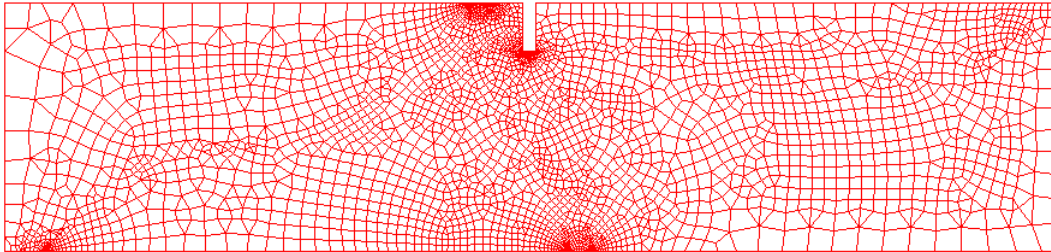


FIGURE 5.22 – SEN B Carte des tailles à prescrire pour le mailler



NOUVEAU MAILLAGE eprouvette NBEL= 3903

Castem2000 - Windows V0.1

FIGURE 5.23 – SENB Nouveau maillage adapté, 864 éléments

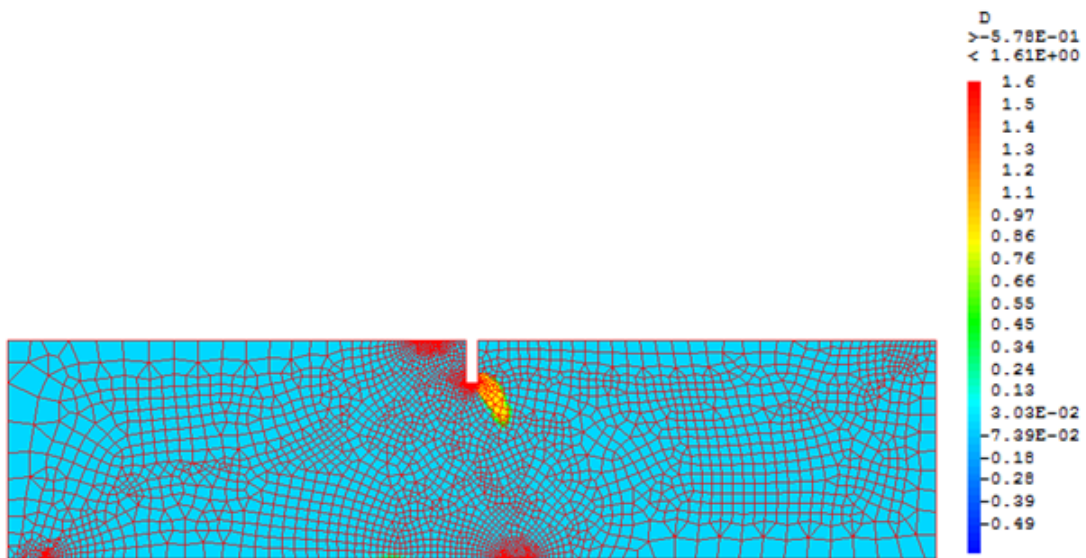


FIGURE 5.24 – SENB Distribution de l'endommagement après adaptation

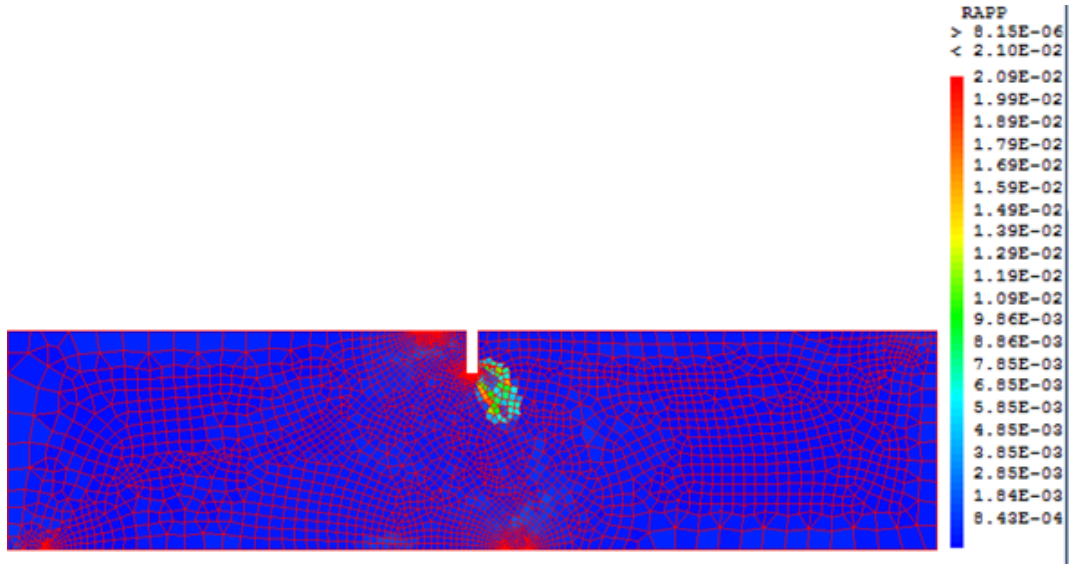


FIGURE 5.25 – SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 8.14 %

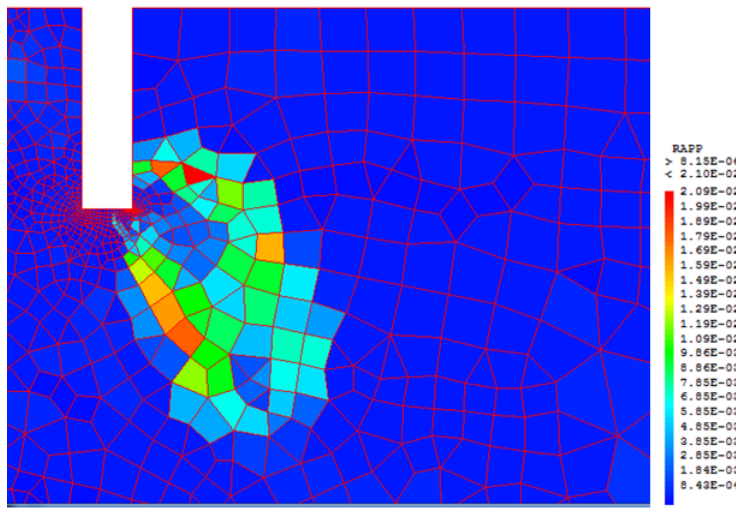


FIGURE 5.26 – SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation au niveau de l'entaille

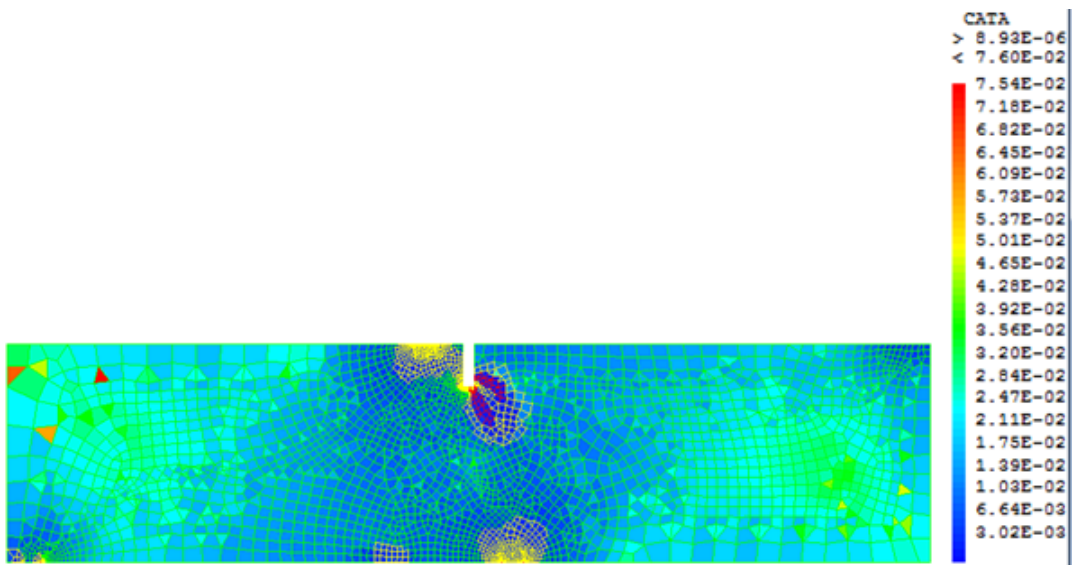


FIGURE 5.27 – SENB Carte des tailles à prescrire pour le mailler après adaptation

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS,
ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

Les résultats obtenus du test DENB sont représentés sur les figures (figure 5.28, figure 5.29, figure 5.30, figure 5.31, figure 5.32).

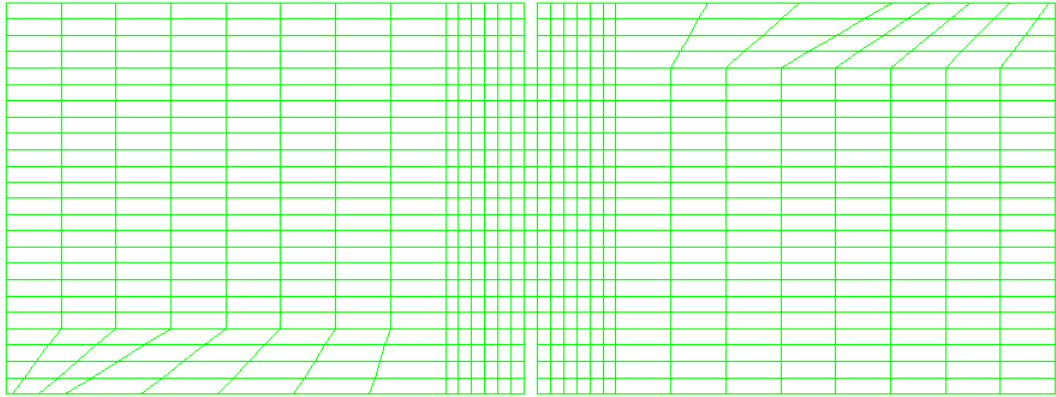


FIGURE 5.28 – DENB maillage initial, 688 éléments

Un maillage initial composé de 688 éléments, uniquement de type QUA4, est utilisé pour simuler l'endommagement d'une poutre DENB. La Distribution de l'endommagement est représentée sur la figure 5.29

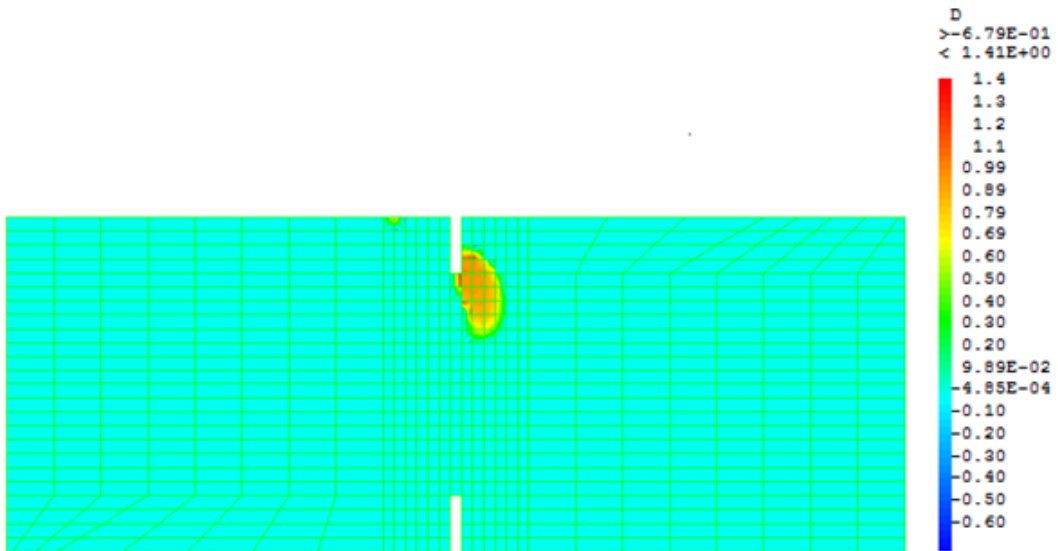


FIGURE 5.29 – DENB Distribution de l'endommagement

CHAPITRE 5. ESSAIS NUMÉRIQUES, VALIDATION SUR DES CAS TESTS, ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

L'indicateur d'erreur mis au point a permis de dresser une carte des contributions à l'erreur (figure 5.30)

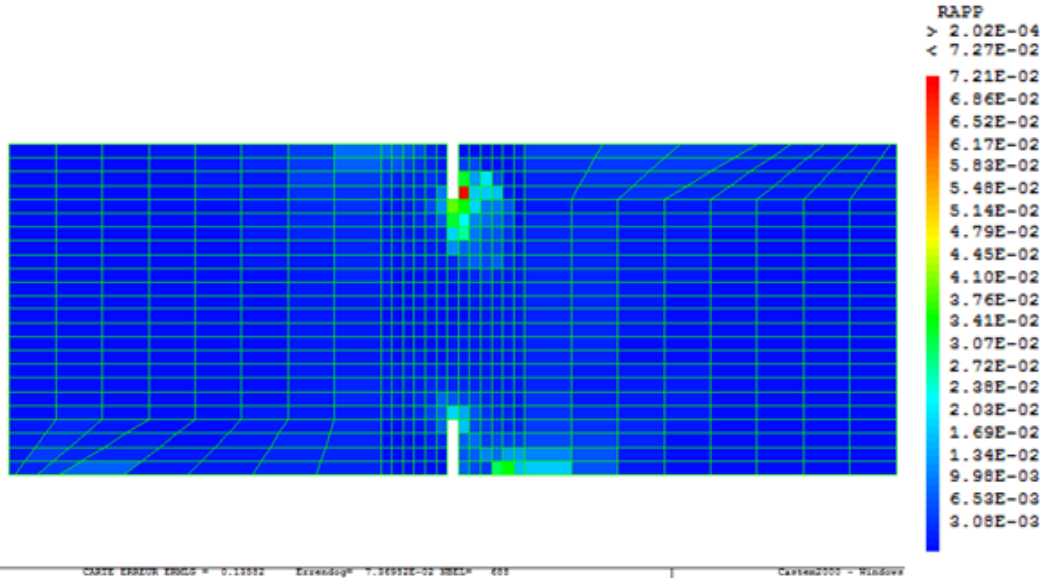


FIGURE 5.30 – DENB Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 15.45 %

Afin de procéder à une adaptation de maillage pour diminuer l'erreur globale estimée à 15.45 %, une carte des tailles à prescrire pour le mailleur a été représentée sur la figure 5.31

Un maillage optimal constitué de 2591 éléments est obtenu au cours du troisième remaillage (figure 5.32).

Les figures (figure 5.33, figure 5.34, figure 5.35) illustrent les résultats après adaptation de maillage.

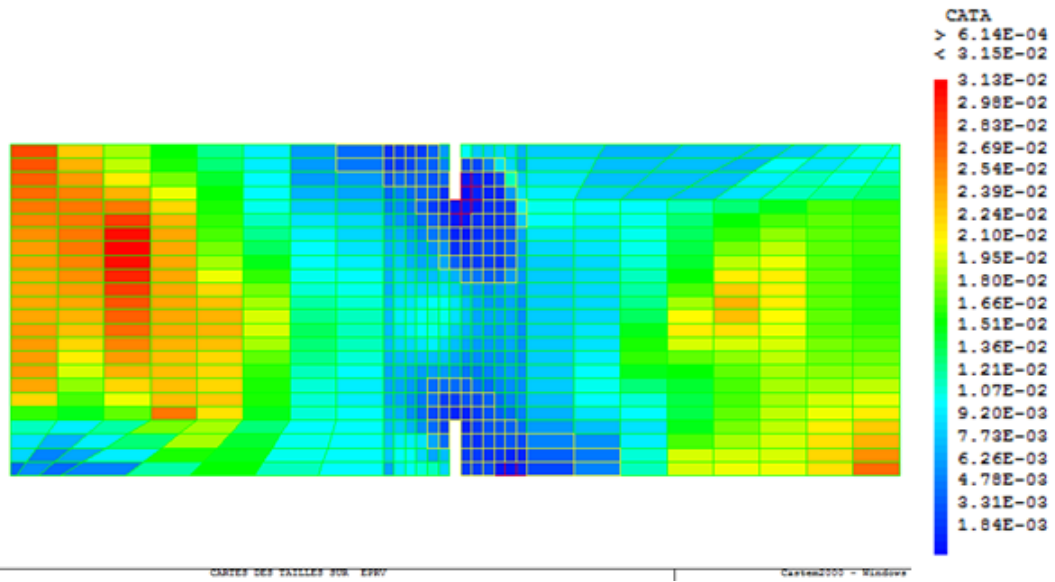


FIGURE 5.31 – DENB Carte des tailles à prescrire pour le maillage

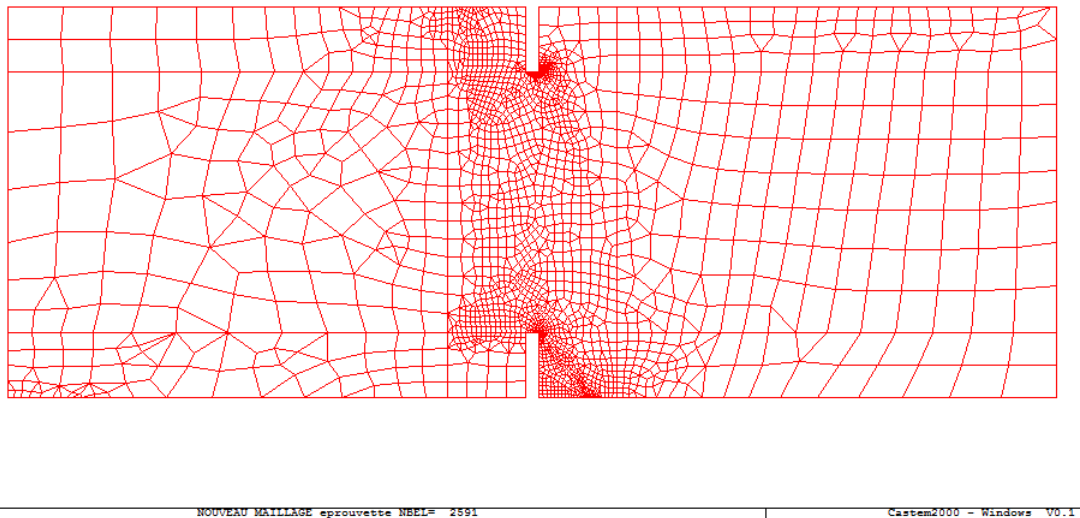


FIGURE 5.32 – DENB Nouveau maillage adapté, 2591 éléments

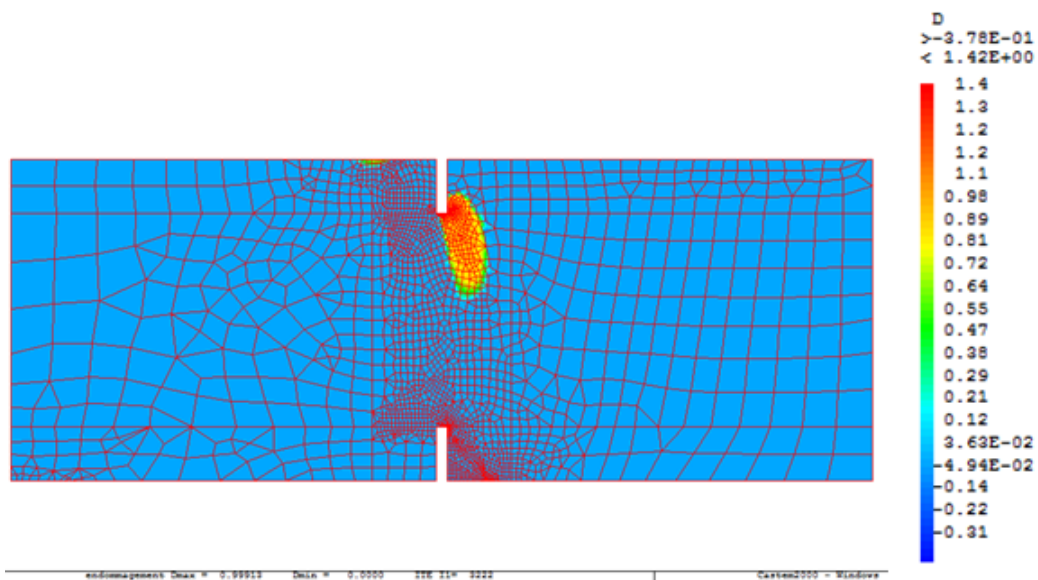


FIGURE 5.33 – DENB Distribution de l'endommagement après adaptation

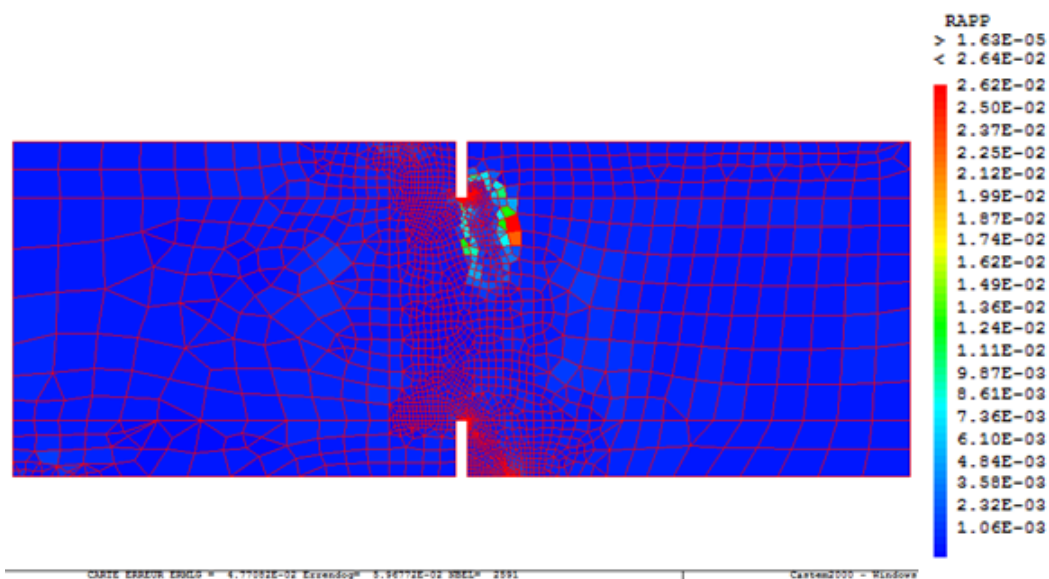


FIGURE 5.34 – DENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 7.64 %

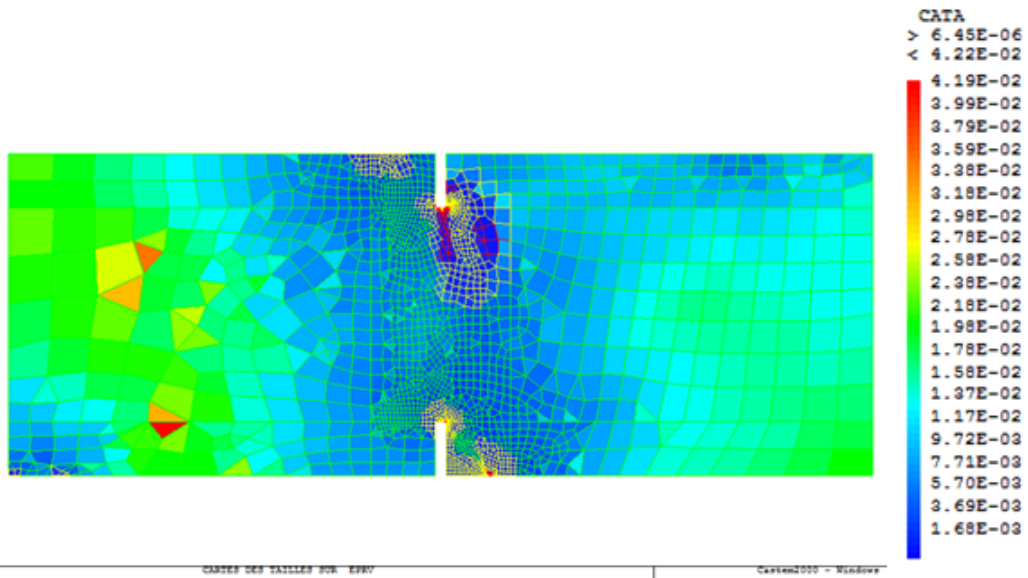


FIGURE 5.35 – DENB Carte des tailles à prescrire pour le mailler après adaptation

Les résultats obtenus de l'essai brésilien sont représentés sur les figures (figure 5.36, figure 5.37, figure 5.38, figure 5.39, figure 5.40).

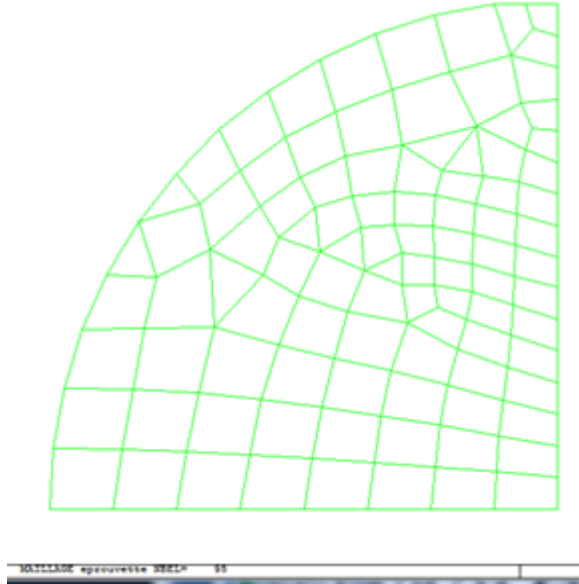


FIGURE 5.36 – Test brésilien, maillage initial, 95 éléments

Un maillage initial composé de 95 éléments, de type QUA4, est utilisé pour simuler l'endommagement d'une poutre en test brésilien. La Distribution de l'endommagement est représentée sur la figure 5.37

L'indicateur d'erreur mis au point a permis de dresser une carte des contributions à l'erreur (figure 5.38)

Afin de procéder à une adaptation de maillage pour diminuer l'erreur globale estimée à 8.23 %, une carte des tailles à prescrire pour le mailleur a été représentée sur la figure 5.39

Un maillage optimal constitué de 340 éléments est obtenu au cours du sixième remaillage (figure 5.40).

Les figures 5.41, 5.42, 5.43 illustrent les résultats après adaptation de maillage

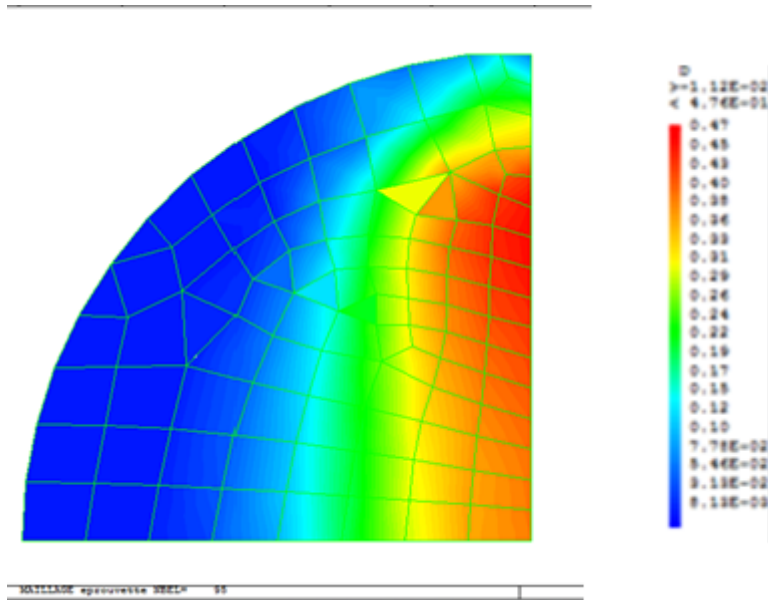


FIGURE 5.37 – Test brésilien, Distribution de l'endommagement

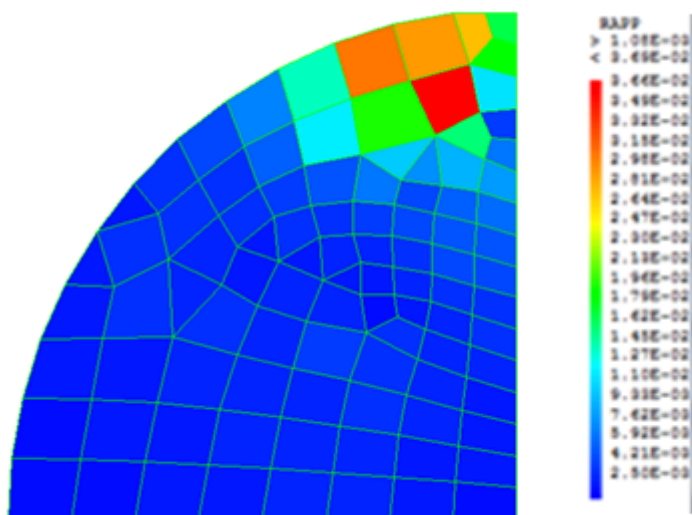


FIGURE 5.38 – Test brésilien, Carte des contributions à l'erreur, erreur globale 8.23 %

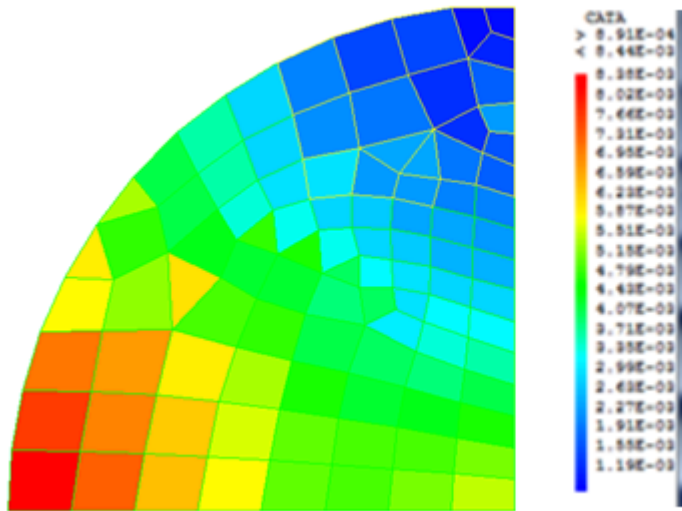


FIGURE 5.39 – Test brésilien, Carte des tailles à prescrire pour le mailleur

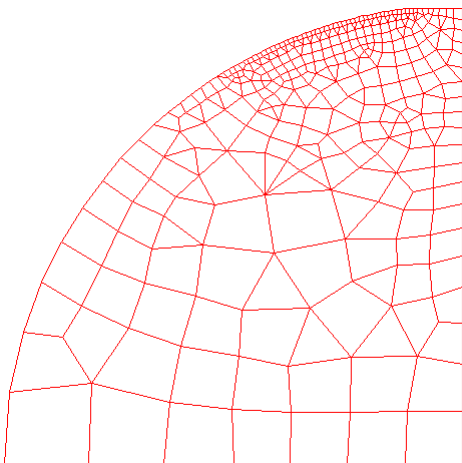


FIGURE 5.40 – Test brésilien, Nouveau maillage adapté, 340 éléments

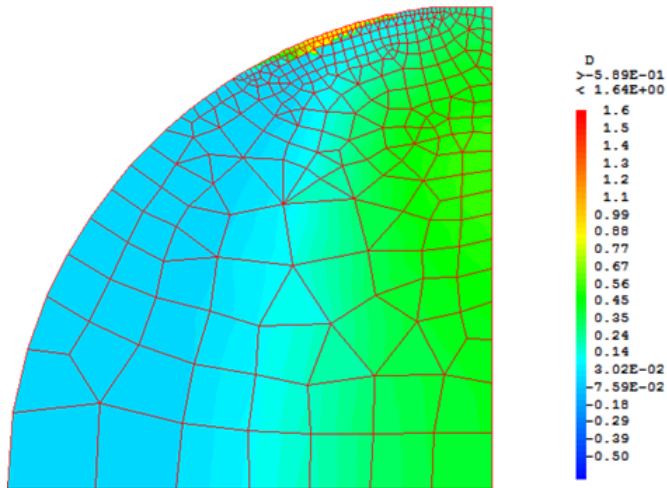


FIGURE 5.41 – Test brésilien, Distribution de l'endommagement après adaptation

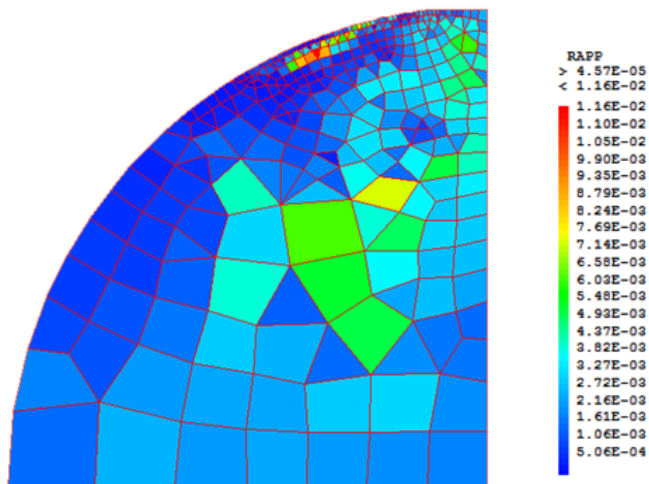


FIGURE 5.42 – Test brésilien, Carte des contributions à l'erreur après adaptation, erreur globale 5.13 %

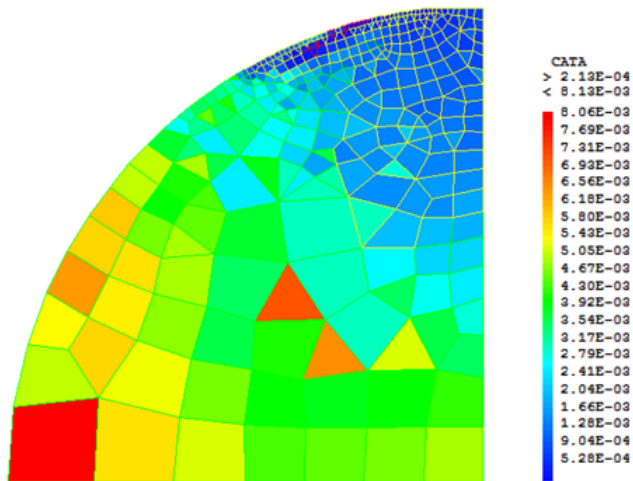


FIGURE 5.43 – Test brésilien, Carte des tailles à prescrire pour le mailler après adaptation

5.4 Discussion des résultats

On remarque pour le test SENB que la forme de la zone endommagée est en arc (figure 5.24), ce qui correspond avec l'expérimental (figure 5.44) (Schlangen, 1993) et l'essai numérique réalisé par A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000) (figure 5.47, figure 5.50, figure 5.53). L'erreur est assez grande dans la zone endommagée et près du plateau et appui centraux (figure 5.25).

Pour le maillage initial l'erreur globale est assez grande (figure 5.21), il faudrait une procédure d'adaptation pour avoir un maillage optimal qui diminue l'erreur jusqu'à une erreur prescrite par l'utilisateur. - Pour une erreur prescrite de 5 %, nous avons obtenu un maillage optimal (figure 5.23) qui donne une erreur globale de 8.14 % (figure 5.25) au quatrième remaillage 3903 éléments, l'erreur globale initiale étant de 17.4 % pour un maillage constitué de 1036 éléments (figure 5.21).

Nous remarquons que l'erreur se concentre au bord de la zone endommagée et au coin inférieur de l'entaille où le maillage doit être très raffiné (figure 5.26). ceci a été constaté par A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000) (figure 5.48, figure 5.51, figure 5.54)

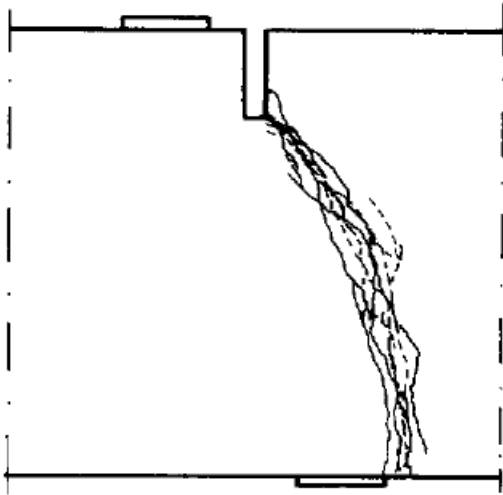


FIGURE 5.44 – Forme de la fissure en test SENB d'après E.Schlangen (1993)

Pour le test DENB, la forme de distribution de l'endommagement en arc (figure 5.33), au coin de l'entaille supérieure est détectée, ce qui correspond avec l'expérimental (figure 5.45) (Schlangen, 1993), mais malheureusement l'initiation de la zone endommagée au coin de l'entaille inférieure n'a pu être

détectée. le maillage optimal (figure 5.32) donne une erreur globale de 7.64 % (figure 5.34) au troisième remaillage 2591 éléments, l'erreur globale initiale étant de 15.45 % (figure 5.30) pour un maillage constitué de 688 éléments.

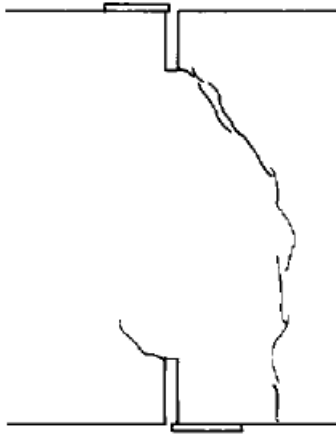


FIGURE 5.45 – Forme de la fissure en test DENB d'après Schlangen (1993)

Pour le test brésilien, on remarque sur la figure 5.37 une initiation de l'endommagement à partir du milieu pour se propager au bord, ce qui correspond à l'expérimental (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000). Les zones où l'erreur est très grande sont détectées (figure 5.38). le maillage optimal (figure 5.40) donne une erreur globale de 5.13 % (figure 5.42) très proche du seuil des 5 % au sixième remaillage avec 340 éléments, l'erreur globale initiale étant de 8.23 % (figure 5.38) pour un maillage constitué de 95 éléments.

Notons que des discontinuités de champs d'endommagement peuvent apparaître entre certains éléments quadrangulaires et éléments triangulaires. Ceci est dû au fait que le calcul sur les éléments triangulaires ne s'effectue qu'avec un seul point de Gauss. Effectivement, nous remarquons que la distribution du champ endommagement n'est plus la même sur un élément triangulaire remarquable au niveau de la zone endommagée (figure 5.37). En contrepartie, un tel phénomène n'est pas observable sur les figures (figure 5.20, figure 5.29) où le maillage est constitué uniquement d'éléments quadrangulaires.

Les figures ci-après représentent les résultats de l'adaptation de maillage sur la poutre SENB (figure 5.1) obtenus par A.Rodriguez et A.Huerta (Rodriguez-Ferran and Huerta, 2000), fixant un seuil pour l'erreur de 2 %.

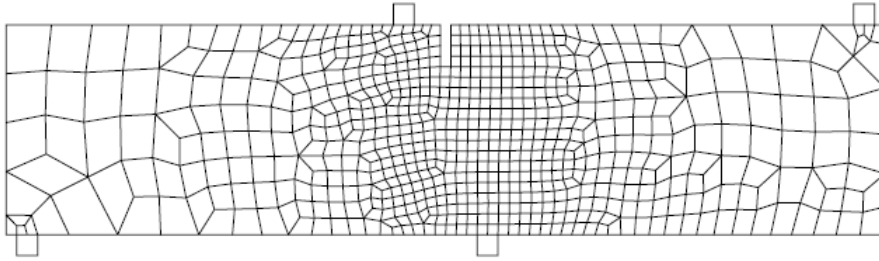


FIGURE 5.46 – SENB Maillage initial, 659 éléments d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

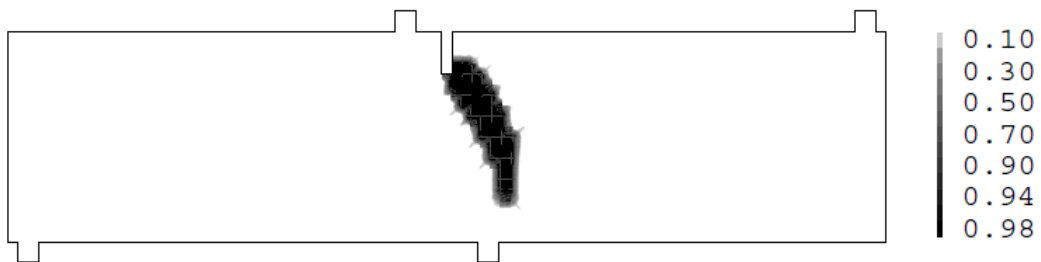


FIGURE 5.47 – SENB Distribution de l'endommagement après adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

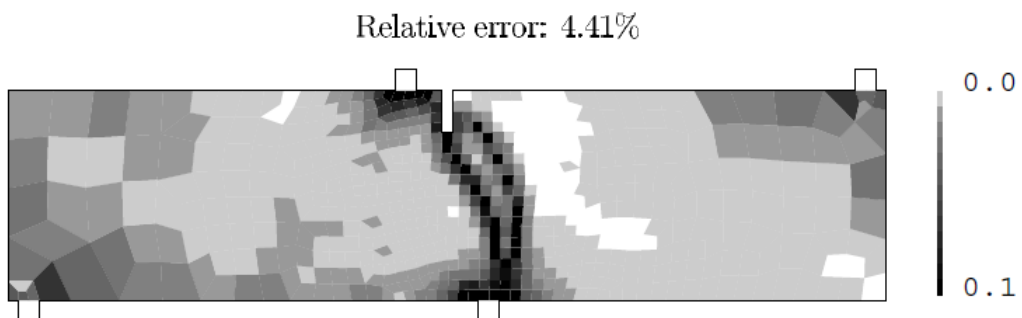


FIGURE 5.48 – SENB Carte des contributions à l'erreur après adaptation d'après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

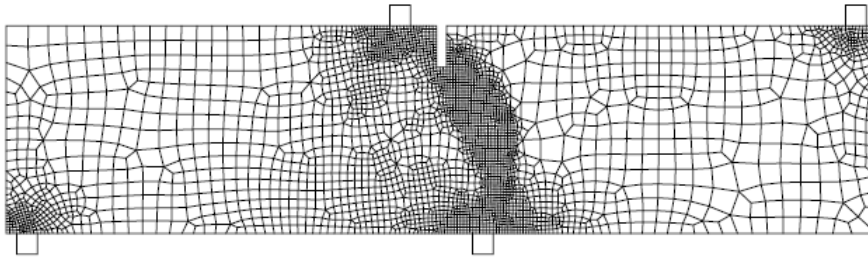


FIGURE 5.49 – SENB Maillage 3185 éléments d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

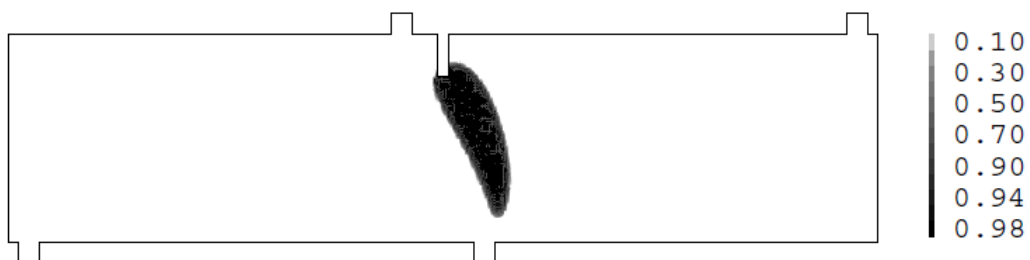


FIGURE 5.50 – SENB Distribution de l’endommagement après une itération d’adaptation d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

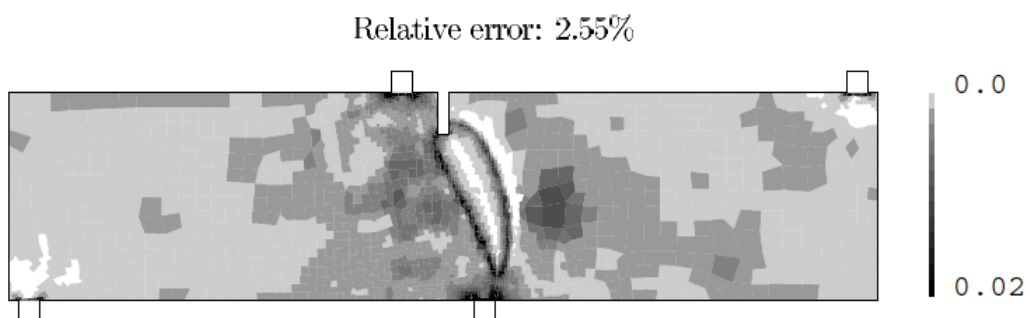


FIGURE 5.51 – SENB Carte des contributions à l’erreur après une itération d’adaptation d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

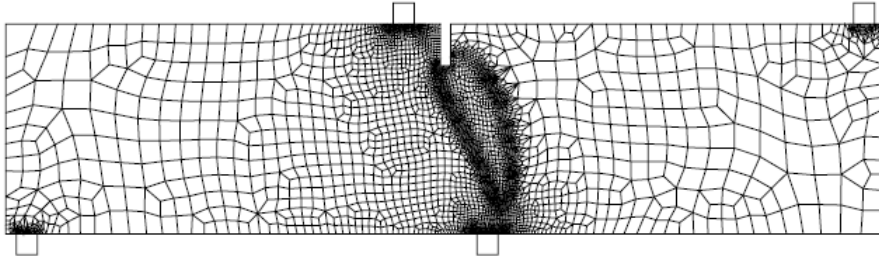


FIGURE 5.52 – SENB Maillage 3924 éléments d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

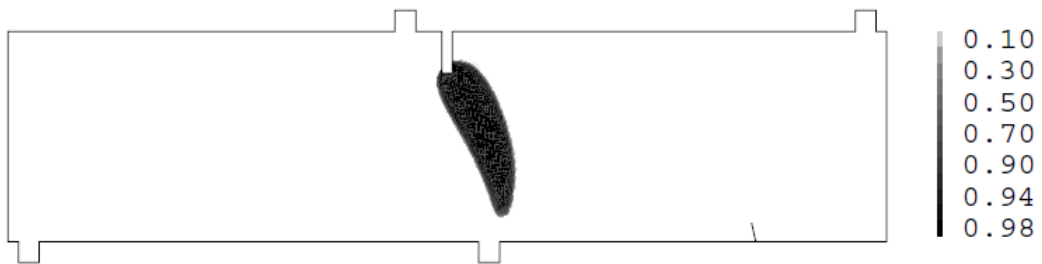


FIGURE 5.53 – SENB Distribution de l’endommagement après deux itérations d’adaptation d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

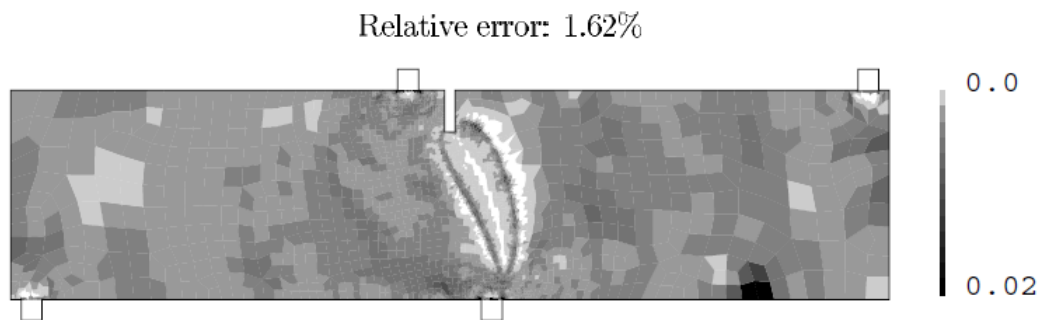


FIGURE 5.54 – SENB Carte des contributions à l’erreur après deux itérations d’adaptation d’après A. Rodriguez-Ferran, A. Huerta (2000)

Notons enfin que l'adaptation nous permet d'atteindre une erreur prescrite à moindre coût en utilisant moins d'éléments qu'avec un maillage régulier. Ci-dessous une comparaison entre les résultats tirés des courbes de convergence et ceux après adaptation, pour une erreur globale donnée (Table 5.2), (Table 5.3), et (Table 5.4) .

	Adaptation	Courbes de convergence
Nombre d'éléments	3903	15084
Erreur globale %	8.14	9.14

TABLE 5.2 – comparaison des résultats du test SENB

	Adaptation	Courbes de convergence
Nombre d'éléments	2591	152960
Erreur globale %	7.64	9.03

TABLE 5.3 – comparaison des résultats du test DENB

	Adaptation	Courbes de convergence
Nombre d'éléments	340	7632
Erreur globale %	5.13	5.18

TABLE 5.4 – comparaison des résultats du test brésilien

5.5 Conclusion

Les résultats des tests SENB, DENB, et essai brésilien semblent confirmer de manière assez satisfaisante les résultats expérimentaux présentés dans la littérature. L'indicateur a permis de quantifier l'erreur et a présenté la capacité d'être utilisé au cours d'un processus d'adaptation, les résultats montrant bien que l'erreur est nettement diminuée par rapport à celle obtenue à partir d'un maillage initial grossier. A cet effet des courbes de convergence ont été tracées pour chaque test.

Conclusion générale

Après les tests numériques et l'analyse des résultats obtenus, nous concluons qu'un indicateur d'erreur basé sur la notion de lissage et la méthode de recouvrement de Zienkiewicz a été mis au point.

L'étude de convergence, d'après les courbes obtenues, montre que l'indicateur construit prend en compte l'erreur d'endommagement et de maillage d'une façon très satisfaisante mais globalement atteint difficilement l'erreur prescrite, en s'approchant tout de même d'elle.

Les courbes de convergence montrent une nette diminution de l'erreur, ce qui montre une bonne disposition à un processus d'adaptation de maillage.

Toutefois, signalons qu'en utilisant des maillages mixtes composés d'éléments de type TRI3 en association avec des QUA4, des discontinuités des champs endommagement peuvent être créées. Par contre, l'usage de maillages composés d'éléments QUA4 seuls, s'avère plus performant.

Malgré la présence de singularités qui apparaissent aux coins d'entailles des éprouvettes SENB et DENB, l'indicateur arrive à détecter les zones à fort gradients et les prend en compte au cours du processus d'adaptation.

Il y a lieu de signaler également que le présent indicateur mis au point surestime légèrement l'erreur par rapport à celui de A.Huerta (Huerta et al., 2002).

En perspective, les résultats de l'indicateur mis au point peuvent être améliorés par :

L'utilisation d'un mailleur structuré engendrant uniquement des éléments quadrangulaires.

L'utilisation d'éléments quadratique plus riche QUA8, QUA9 au voisi-

CONCLUSION GENERALE

nage des zones singulières (méthode d'adaptation de maillages hp).

La prise en compte de l'erreur de contact avec frottement.

L'extension du présent indicateur mis au point vers le cas tridimensionnel.

Bibliographie

- Ainsworth, M. and Oden, J. (1992). A procedure for a posteriori error estimation for h-p finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101 :73–96.
- Ainsworth, M. and Oden, J. (1993). A posteriori error for second elliptic systems . part 2. an optimal order process for calculating self equilibrating fluxes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26 :75–86.
- Ainsworth, M. and Oden, J. (1997). A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142 :1–88.
- Asaro, R. and Lubarda, V. (2006). *Mechanics of solids and materials*. Cambridge University Press.
- Askes, H. (2000). *Advanced spatial discretisation strategies for localised failure, mesh adaptivity and meshless methods*. PhD thesis, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences.
- Babuska and Rheinbolt (1978). A posteriori error estimates for the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 18 :323–341.
- Babuska, I. (1986). *Feedback , adaptivity and a posteriori estimates in finite elements : aims , theory and experience , in accuracy estimates and adaptivity for finite element*. J.Wiley.
- Babuska, I. and Rheinboldt, W. (1979). Analysis of optimal finite-element meshes. *Math. Comp*, 33(146) :435–463.
- Babuska, I., Strouboulis, T., Mathur, A., and Upadhyay, C. (1994). Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a-posteriori estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17(4) :273–321.
- Babuska, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C., and Gangaraj, S. (1995). A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-

- version of the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(24) :4207–4235.
- Babuska, I. and Szabo, B. (1982). On the rates of convergence of the finite elements method. *International journal for numerical methods in engineering*, 18 :323–341.
- Bazant and Pijaudier-Cabot (1987). Non local damage theory. *Journal of engineering mechanics, ASCE*, 113 :1512–1533.
- Bazant, Z. (1984). *Microplane models for strain controlled inelastic behavior*. CS Desai and RH Gallagher (eds), J Willey, London.
- Bazant, Z. (1988). Stable states and pathes of structures with plasticity or damage. *Journal of engineering mechanics. ASCE*, 114(12) :2013–2034.
- Bazant, Z., Bchyschko, T., and Chang, T. (1984). Theory of strain softening. *Eng.Mech*, 110 :1666–1692.
- Bazant, Z. and Jirasek, M. (2002). Non local integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. *Journal of engineering mechanics*, pages 1119–1149.
- Becheur, A. (2008). *Estimation des erreurs de contact pour les problèmes tridimensionnels*. PhD thesis, Universite A.Mira Bejaia.
- Becker, R. and Rannacher, R. (1996). A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *Journal of Numerical Mathematics*, 4 :237–264.
- Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., Forest, S., and Bletry, M. (2010). *Non linear mechanics of materials*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- Bobinski, J. and Tejchman, J. (2005). Modelling of concrete behaviour with a non-local continuum damage approach. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 53(3) :243–263.
- Carpinteri, A., Valente, S., Ferrara, G., and Melchiorri, G. (1993). Is mode ii fracture energy a real material property ? *Comp. Struct*, 48(3) :397–413.
- Chaboche, J. (1987). Cdm : Present state and future trends. *Nucleaar Engineering and Design*, 105 :19–33.
- Clavel, M. and Bompard, P. (2009). *Endommagement et rupture des matériaux*. Paris : Hermès Science Publications [s.l] : Lavoisier.
- Coorevits, P. Mécanisme de détection des singularités. première partie. note du laboratoire de mécanique et cao . Technical report, Saint Quentin.
- Cordebois, J. and Sidoroff, F. (1979). Anisotropie plastique induite par endommagement. In *Comportement mécanique des solides anisotropes*, volume 115, Grenoble. Colloque euromech.

BIBLIOGRAPHIE

- Cugnon, F. (2000). *Automatisation des calculs éléments finis dans le cadre de la méthode -P*. PhD thesis, Université de Liège , Faculté des sciences appliquées.
- DeBorst, R. (2002). Fracture in quasi brittle materials : a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :95–112.
- Delmas, J. (2008). *Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles. Mise en oeuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne.
- Demkowicz, L., Oden, J., and Strouboulis, T. (1984). Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part i : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2) :217–251.
- Demkowicz, L., Oden, J., and Strouboulis, T. (1985). *Finite Elements in Fluids*, chapter An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries, pages 291–305. R. H. Gallagher, G. F. Carey, J. T. Oden et O. C. Zienkiewicz, eds.
- Dufour, F., Pijaudier-Cabot, G., Choinska, M., and Huerta, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models.
- François, D., Pineau, A., and Zaoui, A. (2009). *Endommagement mécanique de rupture et mécanique de contact*. Paris : Lavoisier.
- G. Pijaudier-Cabot, J. M. and Pulikowski, J. (1991). Steel-concrete bond analysis with non local continuous damage. *J. Structural Engrg ASCE*, 117 :862–882.
- Gastine, Ladeveze, Marin, and Pelle (1992). Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3) :303–314.
- Geers, M., de Borst, R., and Peerlings, R. (2000). Damage and crack modeling in single-edge and double- edge notched concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 65 :247–261.
- Gerasimov, M., Rüter, and Stein, E. (2012). An explicit residual-type error estimator for q1-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics. *. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(9) :1118–1155.
- Giry, C., Dufour, F., and Mazars, J. (2011). Stress-based nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(25-26) :3431 – 3443.

- Hamon, F. (2013). Modèle d'endommagement de mazars. *Fascicule r7.01 : Modélisations pour le génie civil et les géomatériaux*.
- Hinton, E. and Campbell, J. (1974). Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *International journal for numerical methods in engineering*, 8 :461–480.
- Huerta, A. and Díez, P. (2000). Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 :21–41.
- Huerta, A., Rodríguez-Ferran, A., and Díez, P. (2002). Error estimation and adaptivity for nonlinear fe analysis. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, 12(1) :59–70.
- Jason, L. (2004). *Relation endommagement - perméabilité pour les bétons , application au calcul de structure*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes.
- Jirasek, M. (2002). *Plasticity, Damage and fracture, Fragments of Lecture Note*. PhD thesis, UPC,Barcelona.
- Kachanov, L. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Netherland , Martinus Nijhoff publishers.
- Kelly, D. (1984). Self-equilibration of residual and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 20 :1491–1506.
- Kuhl, E. and Ramm, E. (1999). Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models. *Computational materials science*, 16 :176–185. University of Stuttgart , Germany.
- Kyu-Yeul Lee, In-Il Kim, D.-Y. C. and Kim, T.-W. (2003). An algorithm for automatic 2d quadrilateral mesh generation with fine constraints. *CAD Computer Aided Design*, 35(12) :1055–1068.
- Laborderie (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable*. Phd thesis, Université paris 6.
- Ladveze, P. (1975). *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Ladveze, P. and Dantec, E. L. (1992). Damage modeling of the elementary ply for laminated composite. *Comp.Sci.Tech*, 23 :257–267.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J. (2004). *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Francis Lefebvre.
- Lemaitre, J. and Desmorat, R. (2005). *Engineering damage mechanics*. Springer Berlin Heidelberg.

BIBLIOGRAPHIE

- Marigo, J. (1981). Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *C.R.Acad.Sci*, 292(2) :1309–1312.
- mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture de béton de structure*. PhD thesis, Université Paris 6.
- Mazars, J. and Hamon, F. (2012). A new strategy to formulate a 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and severe loadings. *Engineering Structures*.
- Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory. application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*.
- Murakami, S. (2012). *Continuum damage mechanics*, volume 185. Springer Netherlands.
- Owen, D. and Hinton, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice*. Pineridge Press Limited Swansea, U.K.
- Peerlings, R., de Borst, R., Brekelmans, W., de Vree, J., and Spee, I. (1996). Some observations on localisation in non local and gradient damage models. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15(6) :937–953.
- Pelle, J. and Rougeot, P. (1989). *Maillage adaptative pour les éléments classiques publiée dans calculs des structures et intelligences artificielles Tome 3, Fouet- Ladeveze - Chayon*. Pluralis.
- Plananas, J., Elices, M., Guinea, G., Gomez, F., Cendón, D., and Arbillá, L. (2003). Generalizations and specializations of cohesive crack models. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :1759–76.
- Ramtani, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. PhD thesis, Université Paris VI.
- Reymonard, J.-M. and Pijaudier-Cabot, G. (2005). *Comportement mécanique du béton*. Herms Sciences.
- Richard, B. and Ragueneau, F. (2013). Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings : Formulation, numerical implementation and applications. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(8) :1203–1223.
- Richard, B., Ragueneau, F., Cremona, C., and Adelaide, L. (2010). Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading : Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering fracture mechanics*, 77 :1203–1223.
- Rodriguez-Ferran, A. and Huerta, A. (2000). Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :7501–7528.

BIBLIOGRAPHIE

- Rossi, P. (1998). Réflexions sur l'utilisation des modèles continus non linéaires pour la prise en compte de la fissuration de la structure en béton. *BLPC*, (217) :85–89.
- Sarrate, J. and Huerta, A. (2000). Efficient unstructured quadrilateral mesh generation. *International journal for numerical methods in engineering*, 49(10) :1327–1350.
- Schlangen, E. (1993). *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Dissertation.* PhD thesis, Delft University of Technology.
- Suresh, R. S. M. (2013). *Non local damage models for concrete.* PhD thesis, Delft University of Technology.
- Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *BLPC*, 105 :65–72.
- Veubeke, B. F. D. (1965). *Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. Stress Analysis - Chapter 9 : Recent Developments in Numerical and Experimental Methods.* O.C. Zienkiewicz and G.S. Oliner, John Wiley.
- Zienkiewicz, O. and Zhu, J. (1987). A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 24 :337–357.
- Zienkiewicz, O. and Zhu, J. (1992). The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates . part1 : the recovery technique. *International journal for numerical methods in engineering*, 33 :1331–1364.
- Zienkiewicz, O., Zhu, J., and Gong, N. (1989). Effective and practical h-p version adaptative analysis procedures for the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 28 :879–891.

ملخص

في الميكانيكا الهيكلية، نستخدم غالباً طريقة العناصر المحددة، كما ان الهياكل تعاني اضراراً تحت مختلف ظروف التحميل. يمكن دراسة تنبؤ وتوزيع وتطور الاضرار باستخدام نظرية ميكانيكا الضرر. هذه الاخيرة تم ادخالها في العديد من الشفرات المبرمجة لحساب العناصر المحددة للحصول على حل المشكلة عددياً.

مع ذلك، فإن الجانب الأكثر أهمية لأي مستخدم لهذه الطريقة، هو التحديد الكمي لأخطاء التقريد المتعلقة بهذا النوع من التقريب. لهذه الغاية، قمنا بإدخال مؤشر للخطأ يعتمد على نعومة حقول الاجهادات ومتغيرات الضرر في شفرة برنامج CAST3M. للتحقق من الصحة، اجريت دراسات من خلال حالات اختبار مختلفة. النتائج كانت مرضية في حالة ثنائي البعد. تم التحقق من خصائص خطأ التقارب واستخدام المؤشر بنجاح في عملية تكيف شبكة.

كلمات البحث: طريقة العناصر المحددة - الضرر - الخطأ - ما بعد الحساب - النعومة - الاجهادات - ازدواج - المرونة - الضرر.

Résumé

La méthode des éléments finis est très souvent utilisée en mécanique des structures. Sous diverses conditions de chargement, ces dernières subissent des dommages dont l'étude de la prévision, de la distribution ainsi que de l'évolution peut être menée par la théorie de la mécanique de l'endommagement. Celle-ci est implantée dans de nombreux codes de calcul en éléments finis. Ce qui permet de résoudre numériquement le problème. Toutefois, pour tout utilisateur de cette méthode, l'aspect le plus important est de pouvoir quantifier l'erreur de discrétisation liée à ce type d'approximation. A cet effet, un indicateur d'erreur basé sur le lissage des champs de contraintes et de variables d'endommagement a été implanté dans le code de calcul CAST3M et des études de validation sur des cas tests ont été effectuées. Les résultats en bidimensionnel sont assez satisfaisants. Les propriétés de convergence de l'erreur ont été bien vérifiées. L'indicateur a été utilisé avec succès au cours de processus d'adaptation de maillage.

Mots clés : MEF - endommagement - erreur - posteriori - lissage - contraintes - couplage - élasticité - endommagement.

Abstract

The finite element method is often utilized in structural mechanics. Under various loading conditions, the structures undergo some to several damages where the study of forecasting, distribution and evolution may be assessed through the damage mechanics theory. It is also, implemented in many finite element codes, what makes it possible to solve the problem numerically. However, for any user of this method, the most important aspect is to quantify the errors of discretization related to this type of approximation. For this purpose, an error indicator based on the smoothing of stress fields and damage variable, has been implemented in the calculation code CAST3M and validation studies on test cases were performed. The results in bi-dimensional are quite satisfactory. The error convergence properties have been well verified. The indicator has been used successfully in mesh adaptation process.

Keywords: FEM - damage - posteriori - error - smoothing - stress - coupling - elasticity - damage.