République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Présenté par

Mr BAOUCHE Abderrahmane

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Thème

Modélisation numérique de l'interaction fluide-structure par couplage éléments finis - éléments de frontière (FEM/BEM)

Soutenu le : 07/12/2014

Devant le Jury composé de :

Mr MAZA	Mustapha	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr DAHMANI	Abdelnasser	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ. de Bejaia	Examinateur
Mr HAMRI	Okba	Maître de conférences A	Univ. de Bejaia	Examinateur
Mr SEGHIR	Abdelghani	Maître de conférences B	Univ. de Bejaia	Invité

Année Universitaire : 2013/2014

Remerciements

Je tiens à remercier, et en premier lieu, Dieu pour toutes ces bénédictions qu'il m'a offertes.

Je tiens à exprimer mes sincères reconnaissances au professeur Mr DAHMANI Abdelnasser, pour sa confiance et son soutien afin de mener à bien ce mémoire, qu'il en soit profondément remercié.

Je tiens à exprimer ma très grande gratitude à Mr. SEGHIR Abdelghani pour les encouragements et conseils tant scientifiques que quotidiens qu'i1 n'a cessé de me prodiguer avec abnégation et de manière constante et permanente. Je salue aussi sa disponibilité quasi-permanente, sa patience et son aide infaillible.

Je tiens aussi à remercier Mr BOUROUBA Abdelhalim pour son soutien, ses orientations et son aide scientifique.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Mr. MAZA Mustapha, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de la soutenance.

Mes remerciements vont également à Mr.TAHAKOURT Abdelkader et Mr. HAMRI Okba pour avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie des membres de jury de ma soutenance.

Je dois un grand merci, à tous mes proches, à tous mes amis pour leur soutien amical et avec qui j'ai passé d'agréables moments. Je remercie de tout mon cœur mes parents, qui ont su me donner sans cesse leurs soutien et leur amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE 1 3

METHODES DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE 3

1.1 INTRODUCTION 3
1.2 QUELQUES METHODE DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION FLUIDE STRUCTURE (IFS) 4
1.2.1 Méthode à masse ajoutée "Added mass" de Westergaard 4
1.2.2 Méthode de Housner 6
1.2.3 Méthodes numériques 7
1.3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (FEM) 9
1.4 HISTORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS 9
1.5 LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERES (BEM) 10
1.6 HISTORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE (BEM): 11
1.7 COMPARAISON DES DEUX METHODES FEM ET BEM 13
1.8 METHODES DE COUPLAGE ELEMENT FINIS-ELEMENT DE FRONTIERE 16
1.8.1 PREMIERE METHODE 16
1.8.2 DEUXIEME METHODE : 17
1.8.3 TROISIEME METHODE 18
1.9 CONCLUSION : 19

CHAPITRE 2 20

MODELISATION DU FLUIDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE (BEM) 20

2.1 INTRODUCTION 20
2.2 FORMULATION EN EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE : 20
2.3 PROBLEMES DE POTENTIELS (EQUATION DE LAPLACE) : 21
2.4 DISCRETISATION PAR ELEMENTS DE FRONTIERE 24
2.5 TRANSFORMATION DES COORDONNEES : 25
2.6 SYSTEME D'EQUATIONS 28
2.6.1 Formulation en éléments constants : 29
2.6.2 Formulation en éléments linéaires : 33
2.6.3 Formulation en éléments discontinus : 37
2.7 MISE EN ŒUVRE ET APPLICATION 39
2.7.1 Etapes et caractéristiques d'un programme BEM : 40
2.7.2 Outil de programmation : 40
2.7.3 Validation des programmes 40

2.7.4 Application au cas de réservoir 46
2.8 CONCLUSION 50

CHAPITRE 3 51

MODELISATION DE LA STRUCTURE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS 51

3.1 INTRODUCTION 51
3.2 ÉQUATIONS GOUVERNANTES 51
3.3 FORMULATION DE L'ELEMENT POUTRE 54
3.3.1 Formulation variationnelle 54
3.3.2 Discrétisation 55
3.3.3 Matrice élémentaires 57
3.4 APPLICATION AU CAS DES RESERVOIRS DE STOCKAGE 60
3.5 CONCLUSION 61

CHAPITRE 4 62

INTERACTION FLUIDE STRUCTURE PAR COUPLAGE FEM /BEM 62

4.1 INTRODUCTION 62
4.2 MODELISATION DU SYSTEME FLUIDE STRUCTURE 62
4.2.1 Modélisation du réservoir par éléments finis 63
4.2.2 Modélisation du système fluide par la méthode des éléments de frontière (BEM 65
4.3 COUPLAGE FEM/BEM 65
4.3.1 Couplage sans ballotement 65
4.3.2 Couplage avec ballotement 67
4.3.3 Application numérique 68
4.4 CONCLUSION 72

CONCLUSION GENERALE 73

BIBLIOGRAPHIE 75

Liste des figures

Figure 1. 1. Concept de la masse ajoutée de Westergaard 5
Figure 1. 2. Modèle à une masse passive et une masse active. 7
Figure 1. 3. Modèle mécanique de Housner pour un réservoir surélevé. 7
Figure 1. 4. Principe de la FEM 10
Figure 1. 5. Discrétisation en éléments finis et en éléments de frontière. 14
Figure 1. 6. Dimension de la matrice en éléments finis et en éléments de frontière. 15
Figure 1. 7. Domaine divisé en deux sous domaine FE et BE 18

Figure 2. 1. Définition géométrique de l'équation de Laplace. 22
Figure 2. 2. Illustration de domaine élargie quand le point singulier est dans la frontière. 23
Figure 2. 3. Discrétisation de la frontière. 25
Figure 2. 4. Eléments quadratiques courbes pour problème bidimensionnels. 27
Figure 2. 5. Elément constant. 29
Figure 2. 6. Représentation des paramètres utilisés 31
Figure 2. 7. Elément de référence pour élément constants. 33
Figure 2. 8. Elément linéaires. 34
Figure 2. 9. Elément de référence pour élément linéaire. 35
Figure 2. 10. Elément de coin. 36
Figure 2. 11. Elément discontinu. 38
Figure 2. 12. Géométrie d'une Plaque soumise à une température 41
Figure 2. 13. Discrétisation du problème en éléments constants 41
Figure 2. 14. La distribution de $\partial u/\partial n$ sur le bord bas (éléments constants) 42
Figure 2. 15. La distribution de $\partial u/\partial n$ sur le bord haut (éléments constants) 42
Figure 2. 16. La solution u sur le bord gauche (éléments constants) 43
Figure 2. 17. La solution u sur le bord droite (éléments constants) 43
Figure 2. 18. Discrétisation du problème en éléments linéaires 44
Figure 2. 19. La distribution de $\partial u/\partial n$ sur le bord bas (éléments linéaires) 44
Figure 2. 20. La distribution de $\partial u/\partial n$ sur le bord bas (éléments linéaires) 45
Figure 2. 21. La solution u sur le bord gauche (éléments linéaires) 45
Figure 2. 22. La solution u sur le bord droite (éléments linéaires) 46
Figure 2. 23. Géométrie du réservoir et discrétisation en éléments de frontière. 46
Figure 2. 24. Forme des Modes du ballotement 48
Figure 2. 25. Réponse temporelle en fluctuations de la surface libre 49
Figure 2. 26. Réponse fréquentielle 50

Figure 3. 1. Poutre chargée 51
Figure 3. 2. Déformation d'une section 52
Figure 3. 3. Equilibre statique 53
Figure 3. 4. Elément poutre à deux nœuds 56
Figure 3. 5. Fonctions de forme d'un élément poutre et leurs dérivées 57

Figure 3. 6. Maillage du la structure du réservoir en éléments poutres 60
Figure 3. 7. Modèle 3D de la structure de réservoir.....61

Figure 4. 1.Discrétisation du système fluide –structure par FEM/BEM 63
Figure 4. 2.déplacement max en tête du réservoir..... 69
Figure 4. 3.pression au fond du réservoir $(P/\rho g)x10-6$..... 69
Figure 4. 4.surélévations de la surface libre de l'eau $(P/\rho g)$ 70
Figure 4. 5.Forme des modes propre de la structure 71

Liste des tableaux

Tableau 1.1Comparaison entre les étapes suivies en BEM et FEM..... 12
Tableau 2.1.Valeurs des périodes propres de ballotement 48

Tableau 3.1. Périodes de vibration de la structure..... 60

Tableau 4.1. Périodes de vibration de la structure..... 67
Tableau 4.2.Valeurs des périodes propres de ballotement (structure flexible) 68
Tableau 4.3 Valeurs des périodes propres de la structure (avec ballotement du fluide)..... 70

Notations

FEM : Méthode des éléments finis (finite element method)
BEM : Méthode des éléments de frontières (boundary elements method)
J : Jacobienne
(ξ, η) : Coordonnées de l'élément de référence
w : Fonction de pondération
ne : Nombre d'éléments
nn : Nombre de nœuds
npg : Nombre de points de Gauss
r : Distance entre la source et un point sur la frontière
Ω : Domaine

Γ : Frontière (contour)

∂ : Opérateur de dérivée partielle

δ : Fonction de Dirac

∇ : Opérateur nabla

Δ : Opérateur Laplace

u : Solution

$\bar{u}$: Condition de Neumann

$\bar{q}$: Condition de Dirichlet

q : Gradients de la solution

n : Vecteur normale

ρ : Masse volumique

P : Pression

ω : Pulsation

ddl : degrés de libertés

K : Matrice rigidité

M : Matrice masse

Q : Matrice d'interaction fluide-structure

Introduction générale

L'interaction fluide structure peut fortement modifier les caractéristiques dynamiques des structures en contact avec un fluide. Deux aspects clés doivent être pris en compte lors du développement d'un modèle numérique traitant ce genre de problème. Le premier concerne les effets dissipatifs visqueux et radiatifs associés aux propriétés matérielles et aux limites du domaine, respectivement. Le second aspect concerne le choix des variables de base retenues pour la modélisation et le choix de la méthode à utiliser pour la discrétisation [1, 2]. Plusieurs techniques ont été développées dans le but d'améliorer les modèles d'interactions fluides– structures, parmi ces méthodes, on distingue celle des éléments finis (FEM), qui est la plus répondu dans le domaine de l'ingénierie et de la recherche scientifique, et qui présente l'outil standard le plus puissant pour l'analyse de plusieurs types de problèmes de la mécanique des solides, la mécanique des fluides, l'aérodynamique, …etc. [3, 4]. Cependant, la méthode des éléments de frontières (BEM) est une alternative attirante puisqu'elle est non seulement particulièrement bien adaptée aux domaines ouverts, mais aussi, elle permet de réduire la taille des matrices résultantes puisqu'elle réduit de un la dimension du problème traité [5, 6].

De ce fait, un couplage des deux méthodes permet de contourner leurs inconvénients tout en exploitant leurs avantages respectifs. Par exemples, dans beaucoup de problèmes faisant intervenir des domaines non bornés, la méthode des éléments de frontière (BEM) peut fournir des conditions appropriées, pour représenter la partie infinie [1], alors que la méthode des éléments finis peut tenir compte de la complexité géométrique et matérielle du champ proche du domaine d'étude. De plus, la BEM est aussi intéressante pour la discrétisation des zones ayant une concentration de contraintes ou de potentiels, alors que la FEM est la plus adéquate dans les cas de non homogénéité, anisotropie et non linéarité. Donc, il est important de savoir modéliser un système en utilisant aussi bien la BEM que la FEM selon les propriétés mécaniques et géométriques du problème étudié [7, 8].

Le manuscrit est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre, a pour objectif de citer quelques méthodes de prise en compte de l'interaction fluide-structure, et quelques traits relatifs aux deux méthodes numériques utilisées à savoir la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontières. L'intérêt du couplage de ces deux méthodes est aussi abordé, aussi quelques méthodes de couplage éléments finis-élément de frontière (FEM/BEM) sont exposées. Le second chapitre est consacré à la modélisation par la méthode des éléments de frontière (BEM) du domaine fluide, qui est décrit par un champ de pression satisfaisant l'équation de Laplace. L'une des applications concerne la

détermination des modes propres du ballottement, la réponse fréquentielle et la réponse temporelle du liquide stocké dans des réservoirs rectangulaires. La surface libre du domaine fluide est idéalisée par la condition aux limites d'ondes de surface linéarisées. Le chargement dynamique est appliqué en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations et les pressions à l'interface fluide-solide. Les résultats obtenus seront validés avec des solutions analytiques applicables aux cas de parois rigides.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation de la structure du réservoir par la méthode des éléments finis. En supposant un réservoir rectangulaire d'une longueur très grande par rapport à sa largeur et à sa hauteur, loin des parois latérales, le comportement d'une section de parois de largeur unitaire peut être considéré purement flexionnel. Sous cette hypothèse, l'élément poutre est choisi pour la discrétisation de la structure en éléments finis.

Finalement, dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à la modélisation de l'interaction fluide-structure par couplage éléments finis éléments de frontière (FEM/BEM), le domaine fluide est discrétisé par éléments de frontières et la structure du réservoir sera modélisée par éléments finis. Pour faire le couplage, des traitements numériques sont effectués, Le problème d'interaction est pris en compte en respectant l'équilibre des efforts à l'interface fluide-structure. A cet effet, un modèle est proposé puis validé avec succès.

Chapitre 1

Méthodes de prise en compte de l'interaction fluide-structure

1.1 Introduction

L'interaction fluide-structure, s'intéresse au comportement d'un système constitué par deux entités mécaniques, considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable), et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution de chacune des deux entités dépendant de celle de l'autre, un phénomène de couplage apparaıt. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraine le fluide dans son mouvement.

Au début, les outils de calcul ne permettaient qu'une modélisation simplifiée en considérant le fluide comme incompressible et la structure infiniment rigide, par exemple : utilisation du concept de masse ajoutée "added mass". Par la suite, avec le développement des méthodes de calcul numérique et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, des algorithmes de couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure, se sont très vite développés. Dans ce premier chapitre nous avons pour objectif de citer quelques méthodes de prise en compte de l'interaction fluide-structure, et quelques traits caractéristiques des deux méthodes numériques, méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontières ainsi l'intérêt du couplage des deux méthodes.

1.2 Quelques méthode de prise en compte de l'interaction fluide structure (IFS)

1.2.1 Méthode à masse ajoutée "Added mass" de Westergaard

A l'origine, cette méthode a été développée pour les barrages mais elle peut être appliquée aux autres structures hydrauliques soumises à une excitation sismique [9, 10, 2], on prend comme exemple l'étude faite par Livaoglu et Dogangun en 2006 sur les réservoirs surélevés [11].

Cette solution simplifiée et efficace s'appuie sur la solution analytique en déplacement du problème plan de vibration du réservoir sous hypothèse de barrage infiniment rigide, de réservoir rectangulaire semi-infini et d'excitation sismique harmonique et horizontale d'expression :

$$\ddot{u}_x = agcos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{1.1}$$

(a) est le coefficient d'accélération sismique, un taux d'accélération rapporté à la constante de gravité g, $(2\pi/T)$ est la pulsation du signal d'excitation et (t) désigne le temps.

La géométrie du réservoir de hauteur (H) est rapportée à un repère (Oxy) dont l'axe Ox est confondu avec le fond et l'axe Oy avec le parement du barrage rigide. La pression hydrodynamique est supposée nulle au niveau de la surface libre et dans tout le domaine loin de l'interface barrage réservoir. De plus, le fond du réservoir est supposé sans déplacement vertical. Ces conditions s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} p(x, y = H) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} p(x, y) = 0 \\ u_y(x, y = 0) = 0 \\ u_x(x = 0, y) = -agT^2/(4\pi^2)cos(2\pi t/T) \end{cases} \tag{1.2}$$

La solution du problème donne l'évolution dans le temps des deux composantes du champ des déplacements $u_x(x, y, t)$ et $u_y(x, y, t)$.

La pression hydrodynamique est ensuite évaluée à l'aide de la relation de compressibilité linéaire $p = K\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)$. Elle est donnée par l'expression suivante [2]:

$$p(x, y, t) = \frac{8a\rho gH}{\pi^2} cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n x} sin\left(n\pi \frac{H - y}{2H}\right)\right) \tag{1.3}$$

q_n et $C_n$sont définis comme suit :

$$q_n = \frac{n\pi c_n}{2H}$$

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16H^2}{n^2 c^2 T^2}}$$

$c = \sqrt{K/\rho}$ est la célérité des ondes de pression dans l'eau. La pression au niveau de l'interface barrage-réservoir (x=0) est maximale lorsque t = kT, k entier, Elle s'exprime par :

$$p_{max}(y) = p(0, y, kT) = \frac{8a\rho gH}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 c_n} sin\left(n\pi \frac{H-y}{2H} \right) \right) \tag{1.4}$$

Cette expression est de forme sensiblement parabolique. Elle atteint sa valeur maximale au fond et s'annule à la surface. En notant à partir de l'équation (1.3) que la pression possède la même pulsation et la même phase que le signal sismique. Westergaard a proposé de remplacer l'expression (1.4) par une autre plus simple qui donne un effet d'inertie équivalent en considérant une certaine masse d'eau vibrant d'une manière solidaire avec le parement amont, d'où l'introduction du concept de masse ajoutée. La largeur b de cette masse varie en fonction de la hauteur comme suit :

$$b = \frac{7}{8}\sqrt{H(H-y)}$$

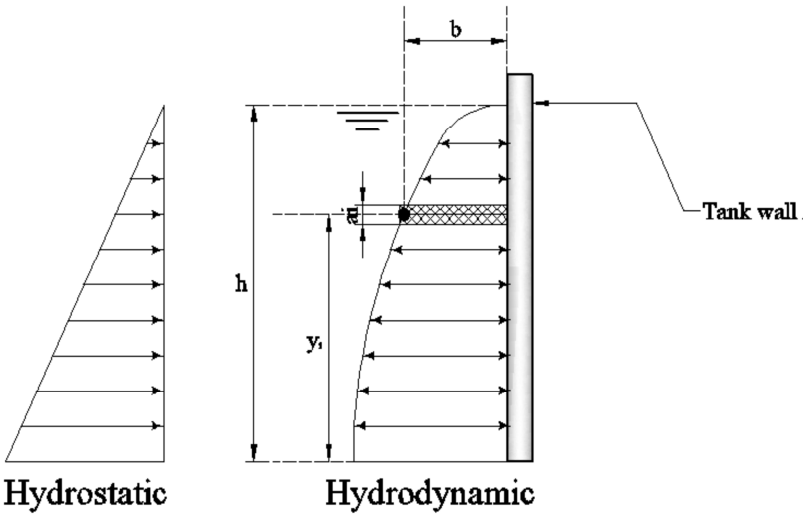


Figure 1. 1. Concept de la masse ajoutée de Westergaard

Le concept de masse ajoutée de Westergaard est très utilisé dans les calculs pratiques des problèmes d'interaction fluide-structure. L'expression (1.4) est d'une grande simplicité, elle permet de prendre en compte l'effet du réservoir sur le comportement dynamique du barrage en ajoutant une masse fictive sans rigidité.

1.2.2 Méthode de Housner

Cette méthode, bien connue, permet d'aboutir à des expressions des efforts résultants relativement plus simples, l'action du liquide est décomposée en deux types [12]:
Une action passive provoquant des efforts d'impulsion.
Une action active provoquant des efforts d'oscillation.

Les efforts d'impulsion proviennent d'une partie de la masse du fluide dite « masse passive » qui réagit par inertie, à la translation des parois du réservoir. Le système mécanique équivalent est obtenu en considérant une masse(m_i), liée rigidement au réservoir à une hauteur (h_i) telle qu'elle exerce sur les parois les mêmes efforts horizontaux que la masse du liquide équivalente.

Quant aux efforts d'oscillations, ils proviennent de l'autre partie du fluide dite « masse active » qui se met en mouvement d'oscillation sous l'action du séisme. Son équivalent mécanique s'obtient en considérant n masses M_1, retenues par des ressorts de raideurs (K_n) à des niveaux h_1 , dont les oscillations horizontales exercent les mêmes efforts vibratoires que la masse active du fluide, les raideur K_n sont déterminées sur la base des pulsations.

$$W_n = \sqrt{\frac{K_n}{M_1}}$$

Associées aux n modes d'oscillation du fluide.

Le modèle mécanique de Housner est illustré par les figures (1.2) et (1.3) suivantes [12]:

- **Réservoir posé au sol :**

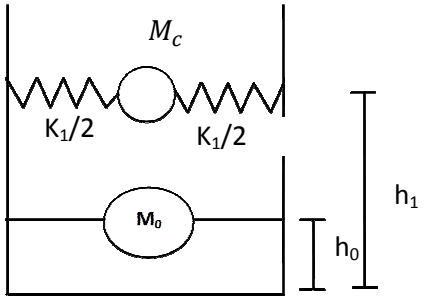


Figure 1. 2. Modèle à une masse passive et une masse active.

- **Réservoir surélevé :**

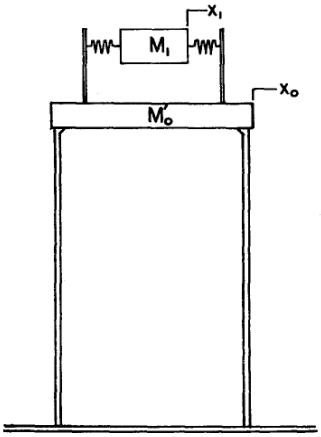


Figure 1. 3. Modèle mécanique de Housner pour un réservoir surélevé.

Le ressort de rigidité *k* représente la rigidité efficace de la structure et M_0 *'*est la masse équivalente de la structure.

1.2.3 Méthodes numériques

En générale pour vérifier un phénomène naturel ou un problème d'ingénierie, on est obligé de faire appel à un modèle mathématique pouvant d'écrire d'une manière fiable le problème en question. Ce modèle s'appuie généralement sur des postulats de base et des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes, qui sont souvent des équations différentielles aux quelles sont ajoutées des conditions au limites. Dans plusieurs situations, la résolution analytique de ces équations s'avère difficile et parfois impossible, alors, le recours aux méthodes numériques est indispensable. Parmi ces méthodes on distingue [13, 14]:

-La méthode des différences finies ;
-La méthode des volumes finis ;
-La méthode des éléments de frontière ;
- La méthode des éléments finis.

Le choix de la méthode dépend des particularités des équations constituant le modèle mathématiques du système à simuler, on les emplois parfois de façon combinée ou couplage entre méthodes numériques tel que éléments finis–éléments de frontières (FEM/BEM).

1.2.3.1 Méthode de couplage fluide-structure avec la méthode des éléments finis (FEM)

L'effet de l'interaction fluide-structure est pris en compte en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations du réservoir et les pressions du liquide à l'interface fluide-structure en utilisant la formulation déplacement-pression (u, p), qui nous mène à un système couplé d'équations différentielles du second ordre non symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & M_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

M_r , C_r et K_r représentent respectivement les matrices globales masses, amortissement et raideur de la structure du réservoir. Pour le domaine liquide, M_L exprime l'énergie cinétique dans le fluide. La matrice Q est la matrice d'interaction fluide-structure.

Une deuxième formulation très connue, peut être utilisée où le comportement de l'eau du réservoir est décrit par deux variables : la pression hydrodynamique P et le potentiel de déplacement φ , c'est la formulation (u, φ, p) qui nous mène, contrairement au système correspondant à la discrétisation de la formulation(u, p) , à un système présentant une symétrie dans les matrices couplées masse et raideur par contre la matrice d'amortissement est non symétrique.

Le système est le suivant :

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & Q & 0 \\ Q^T & K_P & K_\varphi \\ 0 & K_\varphi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Les champs de déplacements u du réservoir, de la pression p et des potentiels de déplacements φ dans le réservoir sont approximés de la manière suivant:

$$u = N_U U \qquad p = N_p P \qquad \varphi = N_\varphi . \varphi$$

avec U , P et φ sont respectivement les vecteurs nodaux de déplacement, pression et potentiel des déplacements, définis comme valeurs inconnues et approximées des champs continus. Les vecteurs N_u, N_p et N_φ sont des fonctions d'interpolation nodale appelées aussi fonctions de forme de l'élément.

1.2.3.2 Méthode de couplage éléments finis-éléments de frontières (FEM/BEM)

Dans certaines situations, un couplage des deux méthodes permet de contourner leurs inconvénients tout en exploitant leurs avantages respectifs. Par exemples, dans beaucoup de problèmes faisant intervenir des domaines non bornés, la méthode des éléments de frontière (BEM) peut fournir des conditions appropriées pour représenter la partie infinie [1]alors que la méthode des éléments finis peut tenir compte de la complexité géométrique et matérielle du champ proche du domaine d'étude. De plus, la BEM est aussi intéressante pour la discrétisation des zones ayant une concentration de contraintes ou de potentiels, alors que la FEM est la plus adéquate dans les cas de non homogénéité, anisotropie et non linéarité. Donc, il est important de savoir modéliser un système en utilisant aussi bien la BEM que la FEM selon les propriétés mécaniques et géométriques du problème étudié (Koh, Kim et Park 1998, Chaojin et Spyrakos 2001).Cette méthodes peut être fructueuse concernant l'IFS, on procède par la discrétisation du fluide par éléments de frontière et la structure par éléments finis [2, 15, 16].

1.3 La Méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes, elle permet de résoudre de manière discrète une équation aux dérivées partielles, dont on cherche une solution approchée suffisamment fiable. De manière générale, cette méthode offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique ou un problème posé avec toutes les conditions aux limites peut être facilement traité par cette méthode.

1.4 Historique de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur. Les outils mathématiques remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909). La contribution des sciences de l'ingénieur a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continue d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis. Par suite, Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système

discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsy (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...). Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode. Dans les années soixante; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la FEM.En 1969 la FEM est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines [17].La résolution d'un problème physique par éléments finis suit les étapes suivant :

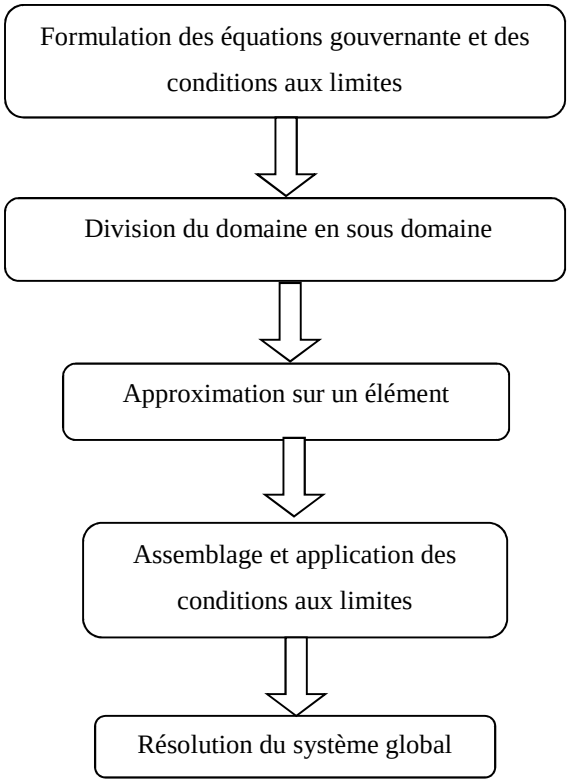


Figure 1. 4. Principe de la FEM

1.5 La méthode des éléments de frontières (BEM)

Est une méthode de calcul numérique qui sert à résoudre les équations aux dérivées partielles qui ont été formulées comme des équations intégrales de frontières. Elle remplace les équations aux dérivées partielles posées sur un domaine, par des équations intégrales sur la frontière du domaine, alors, le

domaine sera ainsi réduit d'une dimension. Cette méthode est particulièrement intéressante pour des problèmes extérieurs comme elle peut être appliquée dans de nombreux domaines de l'ingénierie et de la science, y compris la mécanique des fluides, acoustique, électromagnétisme et mécanique de la rupture [18].

1.6 Historique de la méthode des éléments de frontière (BEM):

Les techniques d'équations intégrales dans les problèmes de valeur aux limites ne datent pas d'aujourd'hui. En 1903, Fredholm a utilisé les équations intégrales discrétisées dans les problèmes de potentiels qui forment la base de l'approche indirecte des éléments de frontière. Cette approche est dite indirecte car elle utilise des fonctions de densité fictive ou des sources sans signification physique mais peut être utilisée pour calculer des quantités physiques telles que les déplacements ou les contraintes. Une équation intégrale traitant les valeurs des déplacements et des contraintes à la frontière a été établie par Somigliana (1886). L'identité de Somigliana forme la base de la formulation directe en éléments de frontière (BME) [19]. Plusieurs ouvrages et articles sur les équations intégrales en potentiels et en théorie d'élasticité ont été publiés par Kellog (1929), Muskhelishvili (1953), Milkhin (1957) et Kupradze (1965).

Cependant les formulations intégrales étaient résolues par des procédures analytiques qui limitaient leurs applications aux problèmes simples. Jusqu' aux années soixante, le champ d'application des équations intégrales était limité et leur résolution numérique n'était pas considérée. Au début des années soixante, grâce à l'évolution de l'outil informatique, des techniques numériques commençaient à être introduites en ingénierie. En 1963, une avancée considérable dans les solutions d'intégrales de frontière a été remarquée suite à la publication de deux articles par Jaswon et Symm [19]. Leur approche consistait à discrétiser les équations intégrales des problèmes de potentiel bidimensionnel gouvernés par l'équation de Laplace en éléments linéiques sur lesquels les fonctions de potentiel sont supposées constantes.

Le premier article utilisant l'approche directe en déplacements et contraintes dans une équation intégrale applicable sur la frontière a été publié par Rizzo(1967). Son travail était le premier à exploiter la forte analogie entre la théorie de potentiel et celle de l'élasticité et à proposer une résolution numérique.

L'extension aux problèmes tridimensionnels par Cruses (1969) a suivi une formulation similaire à celle des travaux de Rizzo mais en utilisant des éléments triangulaires dans la discrétisation de la surface. Durant cette période de développement (de 1967 à 1972), la formulation d'équation intégrale

a été étendue aux problèmes : non homogène (Rizzo et Shippy 1968), électrodynamique (Cruse 1968 puis Cruse et Rizzo 1968), élastoplastiques (Swedlow et Cruse 1971), matériaux non isotrope (Cruse et Swedlow1971) et mécanisme de fracture en 3D (Cruse et Van 1972). Ces publications ont été cruciales car elles ont fourni une fondation stable pour promouvoir le déplacement de la BEM et démontrer sa fiabilité. Des modèles de résolution numérique ont été établis en utilisant des éléments d'ordre supérieur avec des fonctions de forme quadratique (Lachat 1978) [5].Depuis les années 70, l'approche par équation intégrales de frontière a continué de se développer à vivre allure, tant bien du point de vue mathématique, élargissant ainsi ses champs d'application, on cite entre autres [20, 21]:

Aspect non linéaire de la mécanique continue.

Décomposition et parallélisassions du domaine/de la frontière.

Couplage FEM/BEM.

La résolution d'un problème physique par la BEM suit les étapes suivantes [19]:

- Etablissement des équations gouvernantes.
- Ecriture des équations sous forme intégrale.
- Calculer la solution fondamentale.
- Application du théorème de réciprocité.
- Division de la frontière en segments (éléments).
- Ecriture des matrices élémentaires.
- Assemblage et application des conditions aux limites.
- Résolution du système globale.

Le tableau suivant résume les étapes suivies dans les deux méthodes :

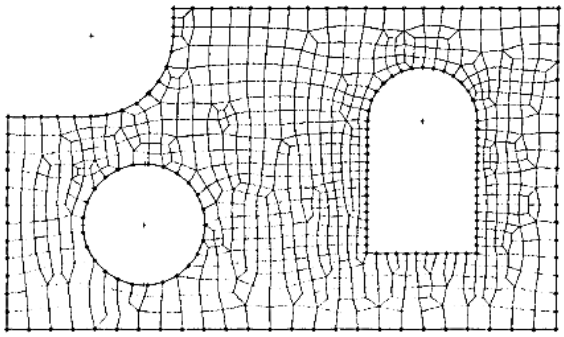
Tableau 1.1Comparaison entre les étapes suivies en BEM et FEM

<table>
<tr><th>Etapes</th><th>BEM</th><th>FEM</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Ecriture des équations sous forme intégrale</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Division de la frontière en segments ou en éléments de surface</td><td>Division du domaine en éléments de surface ou de volume</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>Calcul de la solution fondamentale</td><td rowspan="3">Assemblage et application des conditions aux limites</td></tr>
<tr><td>Introduction du théorème de réciprocité</td></tr>
<tr><td>Assemblage et application des conditions aux limites</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Résolution du système global</td></tr>
</table>

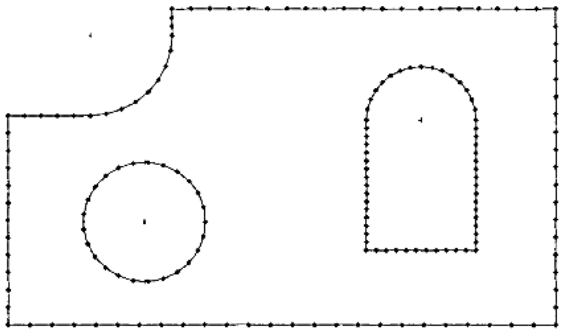
1.7 Comparaison des deux méthodes

Lorsqu'on est habitué à utiliser une méthode aussi puissante tell que FEM, on se demande souvent l'intérêt d'une méthode tell que la BEM, ce pendant la citation de quelques avantages et inconvénients va nous aider à avoir un aperçu claire :

- Utilisation de notions mathématiques complexes : Les mathématiques utilisées dans la formulation des éléments de frontière peuvent paraître non usuelles aux ingénieurs (mais pas difficiles à apprendre). Cependant, plusieurs procédures numériques d'éléments finis sont directement applicables aux solutions d'éléments de frontière (telles que l'intégration numérique et le traitement des conditions aux limites). Durant les premières phases de développement des techniques d'éléments de frontière, des connaissances considérables en mathématiques avancées étaient nécessaires pour prouver l'existence et l'unicité de chaque solution ce qui n'est plus nécessaire maintenant que la formulation des éléments de frontière est bien établie, et que l'unicité des solutions est admise (l'exactitude des programmes par éléments de frontière est une preuve en elle-même).
- Les mathématiques utilisées dans la formulation des éléments finis sont plus familières aux ingénieurs. Cependant de plus en plus d'ouvrages traitant les éléments de frontières ont disponibles ce qui permet de rendre la méthode plus accessible.
- Moins de temps de préparation de données : Ceci est un résultat direct de la réduction d'une dimension du domaine étudié, le temps requis pour la préparation des données est ainsi considérablement réduit. De plus, les changements ultérieurs dans le maillage sont faciles.



(a) FEM



(b) BEM

Figure 1. 5. Discrétisation en éléments finis et en éléments de frontière.

- La FEM est plus établi et plus développée commercialement, particulièrement pour les problèmes non linéaires complexes où des tests approfondis ont été accomplis pour garantir sa fiabilité. De plus, les ingénieurs tendent à utiliser des logiciels et programmes informatiques déjà établis au lieu de s'aventurer dans de nouvelles méthodes.

- Avec moins de données on peut exécuter un programme efficace par contre avec la FEM nécessite une informatique puissante [22, 23].

- Les outils de maillage et de représentation développés pour les éléments finis sont directement applicables aux problèmes d'éléments de frontière. Des matrices solution complètement pleines : La matrice solution résultant de la formulation par éléments de frontière est dissymétrique et complètement remplie, alors que les matrices d'éléments finis sont généralement de dimension plus grande mais moins remplies. Ce qui veut dire que la matrice solution par éléments de frontière doit être entièrement enregistrée dans la mémoire de l'ordinateur. Cependant, ce n'est pas un sérieux inconvénient car pour obtenir un même niveau de précision qu'en éléments finis, la méthode des éléments de frontière requière un nombre de nœuds et d'éléments relativement modeste [24, 22, 5].

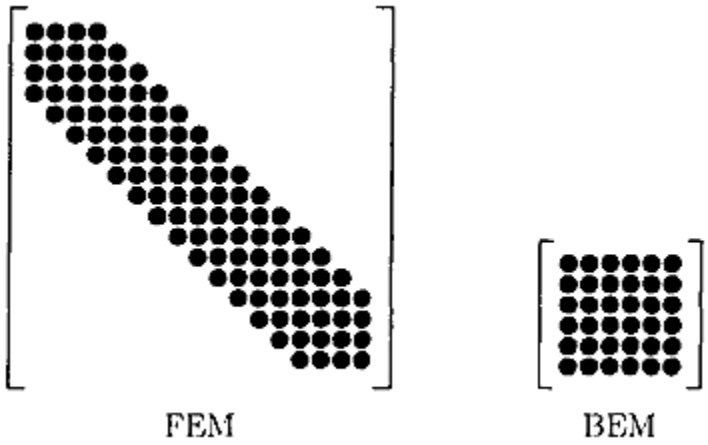


Figure 1. 6. Dimension de la matrice en éléments finis et en éléments de frontière.

- La BEM est très adaptée (et plus précise) pour les problèmes linéaires (particulièrement pour les problèmes 3D avec des variables qui changent rapidement telles que les cas de fissures et de problèmes de contact, discontinuités géométriques ...). A cause de la grande réduction du temps requis pour modéliser un problème particulier, la BEM est très appropriée pour les modèles d'analyse préliminaires où la géométrie et le chargement peuvent être ultérieurement modifiés avec peu d'efforts. Cela donne plus de liberté au concepteur dans l'expérimentation avec de nouvelles formes et de nouvelles géométries [25, 22].

- Dans le cas d'un calcul BEM sans couplage, le principal avantage de la méthode BEM réside en sa faculté à fournir une solution sur la frontière uniquement sur base d'une discrétisation de cette frontière et donc un degré de modélisation moindre que celui de la méthode FEM. Cet avantage est d'autant plus mis en avant dans un problème nécessitant l'introduction d'une condition aux limites appliquée infiniment loin de la structure étudiée. En effet, par la méthode FEM, l'utilisateur se verra dans l'obligation de discrétiser une grande partie du domaine extérieur afin d'imposer la condition aux limites suffisamment loin de la structure. Concernant la méthode BEM, cette condition aux limites est automatiquement respectée par la solution particulière et ne nécessite donc aucun traitement particulier. Comme il le sera mis en évidence dans la suite, les équations intégrales font intervenir deux inconnues en chacun des nœuds de la frontière. Il est donc indispensable d'imposer une de ces deux inconnues afin de pouvoir résoudre le problème [22].

- La méthode FEM s'applique à tout type de problème (équations linéaires et non linéaires) tandis que pour la méthode BEM, certaine solutions particulières ne sont pas encore connues, ce qui induit une limitation d'applicabilité de cette dernière méthode.

1.8 Méthodes de Couplage élément finis-élément de frontière

L'idée de coupler les deux méthodes, la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontière (BEM), est fortement motivée par la combinaison de leurs avantages et la réduction de leurs inconvénients. Plusieurs études ont été accomplies en utilisant différentes formulations pour les équations intégrales de frontière telles que la méthode de Galerkine [26, 27], éléments de frontière à réciprocité duale (DRBEM) [28, 29], principe variationnel [30], fonction de Green particulières [31], couplage direct par transformation des matrices [32], éléments de frontière discontinus [16], formulation symétrique en équations intégrales de frontière [33, 1]..etc. Même si la majeure partie des techniques de couplage force l'une des deux méthodes à se mettre au même format que l'autre pour les rendre compatibles, bon nombre de chercheur préfèrent cependant préserver les caractéristiques de chacune d'elles en utilisant un processus de couplage itératif pour satisfaire les conditions d'équilibre à l'interface de couplage [34].

Il y a parfois des avantages dans la combinaison des éléments finis (FEM) et de frontière (BEM). Par exemple, dans beaucoup de problèmes traitant des domaines non bornés, les éléments de frontière peuvent fournir les conditions appropriées pour représenter la partie infinie alors que les éléments finis peuvent traiter les matériaux aux propriétés complexes dans la partie finis. Les éléments de frontière sont aussi intéressants dans les régions de concentration de contraintes ou de potentiels mais les FEM peuvent être plus adéquats et plus simples à utiliser dans des cas de non homogénéité, anisotropie et non linéarité. Il est donc important de savoir modéliser un système physique en utilisant aussi bien la FEM que la BEM selon les géométries et les conditions aux limites rencontrées (CAL).

On rapporte ici trois méthodes de couplage :

1.8.1 Première méthode

Utilise la solution de la méthode des éléments finis (FEM) pour définir les conditions aux limites d'une région localisée de la méthode des éléments de frontière BEM [35]. Elle consiste à la résolution préalable par FEM, pour zoomer dans un domaine particulier en utilisant les résultats obtenus comme conditions aux limites (CAL), en déplacements ou en potentiels. L'approche ne peut pas être facilement justifiée d'un point de vue mathématique, mais elle

est utilisée dans divers codes et semble produire des résultats raisonnables. On peut utiliser cette technique pour l'étude d'un domaine contenant une fissure. Une solution globale par élément finis est d'abord calculée, puis la méthode des éléments de frontière prend le relais pour étudier la région fissurée plus en détail, en utilisant comme condition aux limites, les déplacements obtenu en éléments finis.

1.8.2 Deuxième méthode :

Considère le maillage par éléments de frontière comme un seul élément fini, qui sera par la suite assemblé aux autres éléments finis. Considérons les deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 (figure 1.7) où Ω_1 est représenté en BEM et Ω_2 est discrétisé en FEM, les matrices de la BEM pour Ω_1 peuvent s'écrire :

$$HU = GQ \tag{1.7}$$

Et celles de la FEM pour Ω_2 sont :

$$KU = F \tag{1.8}$$

Où K est la matrice rigidité et F le vecteur force. Notons que U représente les déplacements (ou les potentiels) et Q les forces de surface (ou les flux). Afin de combiner (1.7) et (1.8) On peut réduire la première à une forme FEM en inversion la matrice G :

$$G^{-1}HU = Q \tag{1.9}$$

Puis on peut convertir les valeurs des forces nodales (Q) en une matrice force nodale équivalente de type utilisé en FEM. Ceci est effectué en pondérant les forces de traction à la frontière par la fonction d'interpolation utilisés pour les déplacements, ce qui produit une matrice M telle que :

$$F = MQ \tag{1.10}$$

Cette opération est standard en FEM même s'il est rare d'écrire la distribution de la matrice M sous forme explicite. L'équation (1.9) peut s'écrire :

$$M(G^{-1}H)(U) = MQ = F' \tag{1.11}$$

Où le vecteur F' a la même forme qu'en éléments finis. On peut donc réécrire la formule précédente sous la forme :

$$K'U = F' \tag{1.12}$$

Où

$$K' = MG^{-1}H \tag{1.13}$$

K'est une matrice de rigidité obtenue à partir de la formulation en BEM. Elle est généralement asymétrique du fait des approximations intervenant dans la discrétisation. Même si cette matrice est parfois symétrisée simplement en prenant la moyenne des éléments extra-diagonaux $\frac{1}{2}\left(K' + K'^{T}\right)$.Mais ce calcul n'est pas exacte ; il induit a des imprécisions de résultats dans plusieurs cas de pratique. La matrice équivalente en FEM de l'équation (1.12) peut être assemblée avec les matrices relatives au sous-domaine Ω^2 pour constituer la matrice globale de rigidité (figure 1.7).

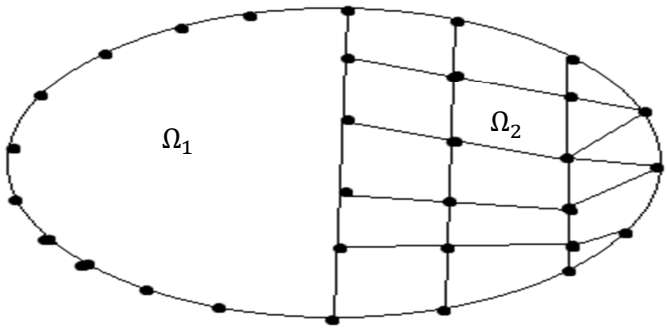


Figure 1. 7. Domaine divisé en deux sous domaine FE et BE

1.8.3 Troisième méthode : Cette approche est l'inverse de la 2éme méthode, a été proposé par Brebbia et Georgiou (1979) [26]; consiste à traiter le domaine par éléments finis comme étant un domaine d'éléments de frontières. Considérons les deux sous domaines, on peut écrire les équations gouvernantes de premier sous domaine Ω_1 de la figure 1.7, de manière suivant :

$$[\,H^1 \quad H_I^1]\begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = [G^1 G_I^1]\begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

Où L'indice *I* représente l'interface.

Les matrices des éléments finis dans le deuxième sous domaine, peuvent être assimilées à la matrice *M* introduite dans l'équation (1.10) :

$$[K^2 \quad K_I^2]\begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I^2 \end{Bmatrix} = [M^2 M_I^2]\begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

En posant $Q_I = Q_I^1 = -Q_I^2$ et $U_I = U_I^1 = U_I^2$, et en satisfaisant les conditions d'équilibre et de compatibilité; les équations (1.14) et (1.15) peuvent être réarrangées dans le même système comme suit :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & -G_I^1 & 0 \\ 0 & K_I^2 & M_I^2 & K^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \\ Q_I \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \tag{1.16}$$

Ces équations nécessitent un second réarrangement en concordance avec les conditions d'équilibre. Notons que cette approche ne nécessite aucune inversion de matrice.

1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons relaté quelques méthodes Pour le traitement des problèmes d'interaction fluide-structure, la méthode de la masse ajoutée de Westergaard qui est une solution simplifiée, cette méthode n'est valide que lorsque la période de l'excitation sismique est supérieure à la période fondamentale du réservoir. Cependant, la méthode de Housner permet d'aboutir à des expressions des efforts résultants relativement plus simples en décomposant l'action du fluide en une action active et une autre passive. Et parmi les méthodes numérique qui sont très répondus, nous avons cité la méthode de couplage FEM/BEM, les avantages et les inconvenants de chaque méthodes, en dernier lieu sont exposées les méthodes de couplage FEM /BEM utilisées en littérature. Les trois méthodes courantes sont exposées avec détails, alors que les multiples méthodes utilisées notamment pour le couplage des domaines de nature déférents sont données. Dans le problème d'interaction fluide-structure que nous allons traiter, les forme des deux méthodes la FEM et la BEM seront préservées, et un couplage directe assuré par une matrice d'interaction entre les deux domaines.

Chapitre 2

Modélisation du fluide par la méthode des éléments de frontière (BEM)

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation par la méthode des éléments de frontière (BEM) du domaine fluide, décrit par un champ de pression satisfaisant l'équation de Laplace. L'une des applications concerne la détermination des modes propres du ballottement et de la réponse temporelle du liquide stocké dans des réservoirs rectangulaires. La surface libre du domaine fluide est idéalisée par la condition aux limites d'ondes de surface linéarisées. Le chargement dynamique est appliqué en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations et les pressions à l'interface fluide-solide. Les résultats obtenus seront validés avec des solutions analytiques applicables aux cas de parois rigides.

2.2 Formulation en équations intégrales de frontière :

La méthode des équations intégrales, permet de résoudre un problème aux limites, d'inconnue u posé dans un domaine Ω (figure 2.1), associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre linéaire $\mathcal{L}\mathcal{L}$. Le problème aux limites peut se d'écrire par l'ensemble d'équations ci–dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + f = 0 & |\Omega \\ u = g_1 & |\Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_2 & |\Gamma_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où g_1, g_2 et la source f sont des données du problème et n désigne la normale à la frontière Γ. On peut montrer que l'operateur $u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n}$ apparait dans la formule de réciprocité ci-dessous qui peut être démontrée dans le cas où l'operateur différentiel $\mathcal{L}$ est à coefficients constants par utilisation du théorème de Green [19, 35, 36] :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u.w - \mathcal{L}w.u)dV = \int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial n}.w - \frac{\partial w}{\partial n}.u)d\Gamma \tag{2.2}$$

Dans le cas où la solution recherchée est un scalaire, la fonction w est alors remplacée par une solution particulière, dite élémentaire, qui vérifie l'équation :

$$\mathcal{L}w + f = 0$$

où f représente une source ponctuelle $(f(y) = \delta(y - x))$ appliquée en un point fixé $x \notin \Gamma$. Notons $G(x, y)$ cette solution élémentaire, fonction du point courant y.

La mesure de Dirac $\delta(y - x)$vérifie la propriété :

$$\int_{\Omega} \delta(y - x)u(y)d\Omega = ku(x) \qquad avec \begin{cases} k = 1 & x \in \Omega - \Gamma \\ k = 0 & x \notin \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

La substitution de w par G dans la formule de réciprocité (2.2) conduit à la relation suivante, pour $x \notin \Omega$ dénommée représentation intégrale :

$$ku(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y)d\Omega_y + \int_{\Gamma} [u(y)\frac{\partial G(x, y)}{\partial n} - \frac{\partial u(y)}{\partial n}G(x, y)]d\Gamma_y) \tag{2.4}$$

2.3 Problèmes de potentiels (Equation de Laplace) :

On considéré un liquide contenu dans un réservoir décrit par un champ de pression qui satisfait l'équation de Laplace sous hypothèse de fluide incompressible:

$$\boldsymbol{\nabla^2 p = 0} \tag{2.5}$$

Les conditions aux limites associées à l'équation (2.5) sont :

$$\begin{cases} P = \overline{P} & sur\ \Gamma_1 \\ q = \dfrac{\partial P}{\partial n} = \overline{q} & sur\Gamma_2 \end{cases}$$

tel que $\overline{P}$ et $\overline{q}$ sont respectivement les conditions de Dirichlet et de Neumann, et Γ_1 et Γ_2 définissent une partition de la frontière Γ.

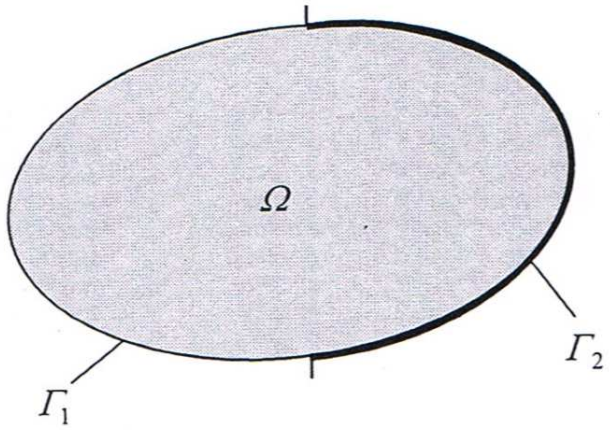


Figure 2. 1. Définition géométrique de l'équation de Laplace.

La forme intégrale de l'expression (2.5), en adoptant w comme fonction de pondération, peut être écrite sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 P) w d\Omega = 0 \tag{2.6}$$

En intégrant deux fois par partie l'équation (2 .6), on obtient l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} [(\Delta w) P] d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial n} w d\Gamma - \int_{\Gamma} P \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \tag{2.7}$$

L'un des points essentiels des équations intégrales consiste à obtenir une solution fondamentale ($w = g$) au point y, relative à une impulsion Dirac $\delta(y - x)$ appliqué en un point $x \notin \Gamma$:

$$\Delta w = \delta(y - x) \tag{2.8}$$

Dans le cas de problème bidimensionnel, la solution fondamentale de l'équation de Laplace est donnée par [13, 19]:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} ln(\frac{1}{r}) \tag{2.9}$$

avec r est la distance radiale entre le point x source d'application de l'impulsion Dirac et le point courant y. La substitution de l'équation (2.8) dans (2 .7), on obtient [19, 15]:

$$kP(x) = \int_{\Gamma} q(y)g(x,y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x,y)P(y)\,d\Gamma \tag{2.10}$$

avec k prend la valeur 1 si le point $x \in \Omega$ et, et 0 si $x \notin \Omega$. h(x, y) désigne la dérivée de g(x, y) par rapport à la normale n tel que :

$$h(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial n} \tag{2.11}$$

si $x \in \Omega$, alors $k = 1$ et l'expression (2.10) devient :

$$P(x) = \int_{\Gamma} q(y)g(x,y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x,y)P(y)\,d\Gamma \tag{2.12}$$

qui donne explicitement la valeur de P en tout point x intérieur de Ω. Si $x \notin \Omega$, alors k = 0 et l'expression (2.10) devient :

$$\int_{\Gamma} q(y)g(x,y)d\Gamma - \int_{\Gamma} h(x,y)P(y)\,d\Gamma = 0 \tag{2.13}$$

L'expression (2.10) est valable pour $x \notin \Gamma$. Cependant, si le point x se trouve à la frontière ($x \in \Gamma$), l'expression (2.10) devient une équation intégrale de frontière qui ne porte que sur des valeurs de P et q à la frontière. Cette équation présente alors des singularités non intégrables, et le terme k est déterminé par un passage à la limite (2.17) et (2.18) lorsque le point x est entouré par un demi-cercle de frontière Γ_ε et de rayon ε qui tend vers 0 (figure.2.2). Dans ce cas, le point $x = p$ appartenant au domaine Ω' de frontière$\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_\varepsilon$.

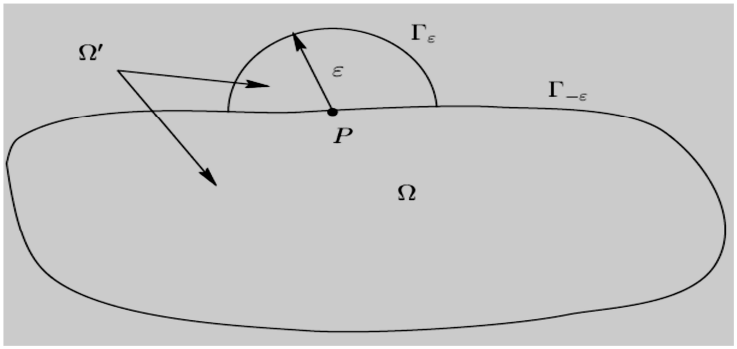


Figure 2. 2. Illustration de domaine élargie quand le point singulier est dans la frontière.

En étudiant terme par terme de l'équation (2.7), d'où :

$$\int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial w}{\partial n}\, d\Gamma = \int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{1}{2} ln\, r\right) d\Gamma \tag{2.14}$$

qui est égale aussi à:

$$\int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial w}{\partial n}\, d\Gamma = \int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2} ln\, r\right) d\Gamma \tag{2.15}$$

Après simplification on aura :

$$\int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial w}{\partial n}\, d\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\varepsilon}\ P(x)\pi\varepsilon \tag{2.16}$$

Il est à noter que (2.16) est obtenu pour $x \in \Omega'$. Pour ramener x à la frontière, le rayon ε doit être infiniment petit. Pour cela, on utilise la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\varepsilon} P\frac{\partial w}{\partial n}\, d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{2\pi}\ \frac{P(x)}{\varepsilon}\ \pi\varepsilon) = -\frac{P(x)}{2} \tag{2.17}$$

On procède de la même manière concernant le deuxième terme, d'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\varepsilon} w\frac{\partial P}{\partial n}\, d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial n}\ (x)\pi\varepsilon)\ ln\,\varepsilon = 0 \tag{2.18}$$

Par analogie, on obtient $k = \frac{1}{2}$; Cela est valable pour une frontière régulière (lisse). Dans le cas où la frontière n'est pas régulière $k = \frac{\theta}{2\pi}$, avec θ angle interne entre deux frontières consécutives.

Alors, la constante k est donnée par :

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ la\ frontière\ est\ régulière \\ \frac{\theta}{2\pi} & si\ la\ frontière\ est\ irrégulière \end{cases} \tag{2.19}$$

2.4 Discrétisation par éléments de frontière

Pour résoudre numériquement les équations intégrales, on subdivise le contour Γ en n_e éléments de frontières isoparamétriques. Sur chaque élément j, la solution p et le gradient de la solution q dépendant de type de l'élément considéré.

L'interpolation nodale de p et q sont données par :

$$p = N_j p^j \qquad ; \qquad q = N_j q^j \tag{2.20}$$

où N est le vecteur des fonctions de forme de l'élément j (ces fonctions sont les mêmes qu'en éléments finis). p^j et q^j sont les valeurs nodales de p et q aux nœuds de l'élément j. En tenant compte de (2.19), l'expression discrète de l'équation (2.10) en un point i de la frontière s'écrit [35] :

$$k^i p^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left[\int_{\Gamma_j} h\, N\, d\Gamma_j \right] p^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left[\int_{\Gamma_j} g\, N\, d\Gamma_j \right] q^j \tag{2.21}$$

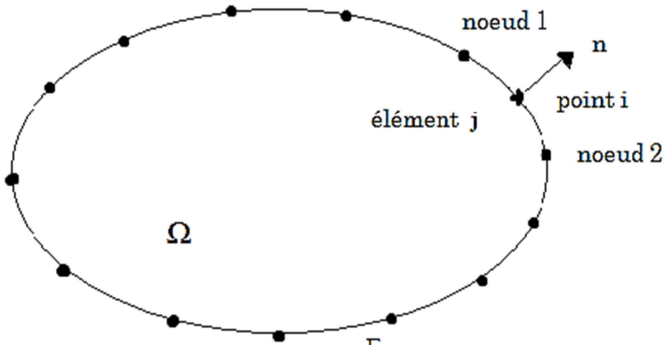


Figure 2. 3. Discrétisation de la frontière.

En générale, les intégrales de l'équation (2.21) sont calculées numériquement, les fonctions d'interpolation tendent à être exprimées en un système homogène de coordonnées de référence ξ, qui nécessitent par la suite un transfert vers le système globale x_i (transformation géométrique).

Les coordonnées cartésiennes de la frontière peuvent être aussi écrites en fonction des coordonnées nodales pour les éléments de références ; le changement se fait en introduisant le Jacobien.

2.5 Transformation des coordonnées :

Les éléments utilisés dans les problèmes bidimensionnels sont des segments de frontière généralement de type : droits ou curvilignes. Les fonctions p et q en plus celle utilisées pour décrire la géométrie peuvent être constantes sur chaque éléments, linéaires ou bien n'importe quelle autre fonction produisant un élément curviligne [5]. L'étude de l'élément nécessite le passage du repère global cartésien(x, y) au repère de référence (ξ, η).

La transformation pour une fonction donnée p est décrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

Ou J est la matrice Jacobienne.

La relation inverse est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

Les transformations de ce type nous permettent de décrire la différentiation d'une surface ou d'un contour en fonction des coordonnées de référence.

La différentielle d'une surface Ω est écrite comme suit :

$$d\Omega = |J| d\xi \, d\eta = \left| \frac{\overrightarrow{dr}}{d\xi} x \frac{\overrightarrow{dr}}{d\eta} \right| d\xi \, d\eta \tag{2.25}$$

$$d\Gamma = |J_{lin}| d\xi = \left| \frac{\overrightarrow{dr}}{d\xi} \right| d\xi \tag{2.26}$$

Avec J_{lin} : Jacobienne linéique.

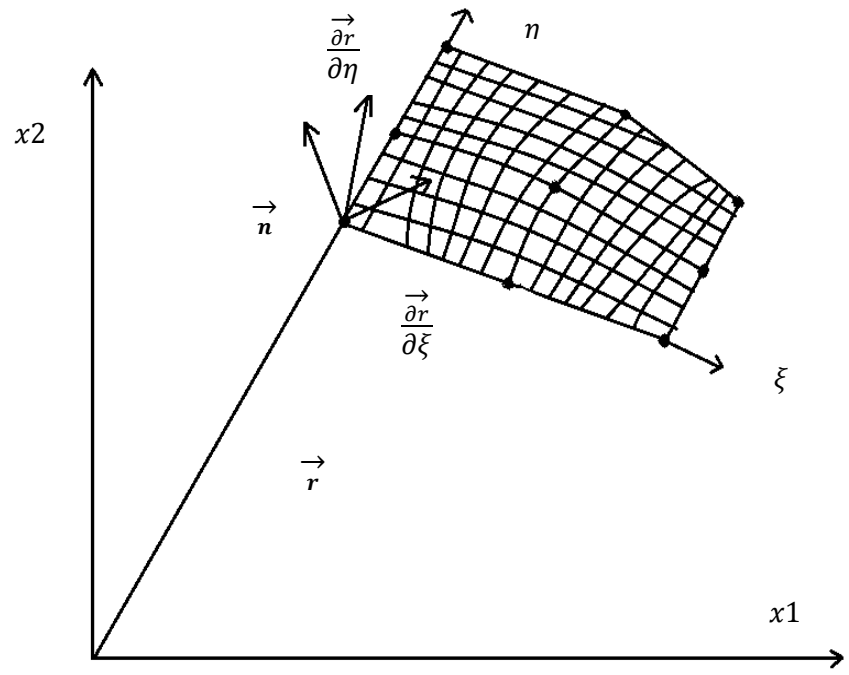


Figure 2. 4. Eléments quadratiques courbes pour problème bidimensionnels.

Pour calculer les valeurs de ces Jacobiennes, on a besoin de connaitre la variation des coordonnées (x, y) en fonction du systéme (ξ, η) qui sont données en termes des mêmes fonctions d'interpolation utilisées pour la solution et les gradients de la solution (2.20).

Avec $\begin{Bmatrix} x^j \\ y^j \end{Bmatrix}$ valeurs nodales des coordonnées de l'élément j considéré et N fonctions d'interpolation utilisées pour le champ de variables et les gradients de la solution ; l'élément dans ce cas est dit isoparamétrique. L'équation (2.21) peut être écrite comme suit :

$$k^i p^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left[\int_{\Gamma_j} h\, N(\xi) |J_{lin}|\, d\xi \right] p^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left[\int_{\Gamma_j} g\, N(\xi) |J_{lin}|\, d\xi \right] q^j \qquad (2.28)$$

En appliquant l'intégration numérique (quadrature de Gauss) à l'équation précédente [18], on remplace les intégrales par des sommes :

$$k^i p^i + \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{npg} w_k\, (hN)_k |J_{lin}| \right\} p^j = \sum_{j=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{npg} w_k\, (gN)_k |J_{lin}| \right\} q^j \qquad (2.28)$$

Ou npg est le nombre de points d'intégration sur la frontière ainsi que les éléments et w le poids de ces points. Les quantités $(hN)_k$, $(gN)_k$ sont les valeurs des fonctions aux points de Gauss ξ_k ; où k représentante direction.

2.6 Système d'équations

L'équation(2.28) qui correspond à l'élément j, peut-être écrite sous forme :

$$k^i p^i + \sum_{j=1}^{nn} \widehat{H}^{ij} p^j = \sum_{j=1}^{nn} G^{ij} q^j \tag{2.30}$$

Ou nn est le nombre des nœuds, p^j et q^j sont les pressions et les gradients des pressions défini sur l'élément $j$et les matrices H et G sont :

$$\widehat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} h\, N_t d\Gamma_j \quad ; \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} g\, N_t d\Gamma_j \tag{2.31}$$

La sommation couvre tous les éléments de la frontière, y compris ceux auxquels appartient le nœud i. L'indice t représente le numéro du nœud i dans l'élément j. Pour des éléments constants, la sommation couvre uniquement un seul élément $j \equiv i$ et N_t est la matrice identité.

Posons que :

$$H^{ij} = \begin{cases} \widehat{H}^{ij} & i \neq j \\ \widehat{H}^{ij} + k^i & i = j \end{cases} \tag{2.32}$$

L'équation(2.31) devient :

$$\sum_{j=1}^{nn} H^{ij} p^j = \sum_{j=1}^{nn} G^{ij} q^j \tag{2.33}$$

Donc on aura un système d'équations algébriques suivant :

$$\boldsymbol{HP = GQ} \tag{2.34}$$

Les vecteurs de P et q représentent toutes les valeurs de la solution et les gradients de la solution avant applications des conditions aux limites. Ces conditions peuvent être introduites en réarrangeant les colonnes de H et G de manière a mettre tout les inconnues dans un vecteurs X à la partie gauche de l'équation, ce qui donne le système suivant :

$$AX = F \tag{2.35}$$

La résolution de ce système donne toute les valeurs à la frontière.

2.6.1 Formulation en éléments constants :

On considère que la frontière est subdivisée en ne éléments et les valeurs p et q sont supposées constantes sur chaque éléments et égales aux valeurs aux mi-éléments. Comme le montre la figure (2.5).

La forme discrétisée de l'équation (2.10) pour chaque point i , avant l'application des conditions aux limites est comme suit:

$$k^i P^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} hP \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} gq \, d\Gamma \tag{2.36}$$

Sachant que pour ce type d'éléments, la frontière est toujours régulière et pour $i = j$ le paramètre $k = 1/2$.

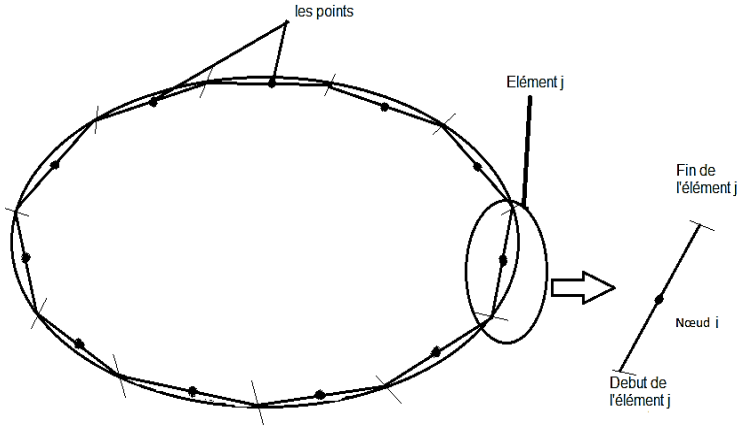


Figure 2. 5. Elément constant.

Γ_j est la frontière de l'élément$j$. On tire les valeurs de P et q des intégrales puisque ils sont constants sur chaque éléments j, que seront notés P^j et q^j pour l'élément j. On aura l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} P^i + \sum_{j=1}^{ne} \left(\int_{\Gamma_j} h \, d\Gamma \right) P^j = \sum_{j=1}^{ne} \left(\int_{\Gamma_j} g \, d\Gamma \right) q^j \tag{2.37}$$

Notons que les termes $\int_{\Gamma_j} h \, d\Gamma$ et $\int_{\Gamma_j} g \, d\Gamma$ reliant le nœud à l'élément. Pour cette raison les valeurs obtenu sont parfois appelées coefficients d'influence :

$$\widehat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} h \, d\Gamma_j \quad et \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} g \, d\Gamma_j \tag{2.38}$$

On remplaçant les termes de (2.37) dans l'équation (2.38) , on aura l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}P^i + \sum_{j=1}^{ne} \widehat{H}^{ij}\, P^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij}\, q^j \tag{2.39}$$

Supposant que la position de i varie de 1 jusqu'à ne, nous obtenant un système d'équation résultant de l'équation (2.39) pour chaque point de la frontière :

$$H^{ij} = \begin{cases} \widehat{H}^{ij} & i \neq j \\ \widehat{H}^{ij} + \dfrac{1}{2} & i = j \end{cases} \tag{2.40}$$

Donc l'équation (2.39)peut être écrite :

$$\sum_{j=1}^{ne} H^{ij}\, P^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij}\, q^j \tag{2.41}$$

Ce système peut être exprimé sous forme matricielle suivant :

$$\boldsymbol{HP = GQ} \tag{2.42}$$

Ou $Het\ G$ sont deux matrices ne x ne et P , Q sont des vecteurs de longueurs ne.

Pour résoudre le système (2.42) et appliquer les conditions aux limites, on doit réarranger le système et déplacer les colonnes de H et G d'un coté à l'autre pour avoir ce système :

$$\boldsymbol{AX = F} \tag{2.43}$$

Ou X représente un vecteur d'inconnues p, q de valeurs limites; F est trouvé on multipliant les colonnes correspondantes par les valeurs connues de P et q, tandis que les inconnues sont maintenant un mélange de potentiel et de ses dérivée. L'équation (2.43) peut être résolue et toutes les valeurs limites sont connues.

2.6.1.1 Points intérieurs:

Une fois cela est fait, il est possible de calculer une valeur interne de p à l'intérieur du domaine Ω ; on utilisant l'équation(2.12), et qui peut être écrite comme suit :

$$P^i = \int_\Gamma hP\, d\Gamma - \int_\Gamma gq\, d\Gamma \tag{2.44}$$

Si on considère que la solution fondamentale agit sur un point i à l'intérieur du domaine Ω et que toutes les valeurs de P et q sont connues. Le processus d'intégration et la discrétisation est le même que l'intégrale de frontière, on aura :

$$P^i = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij}\, q^j - \sum_{j=1}^{ne} \widehat{H}^{ij}\, P^j \tag{2.45}$$

Les coefficients G^{ij} et $\widehat{H}^{ij}$ sont calculés à nouveaux pour chaque points internes différents.

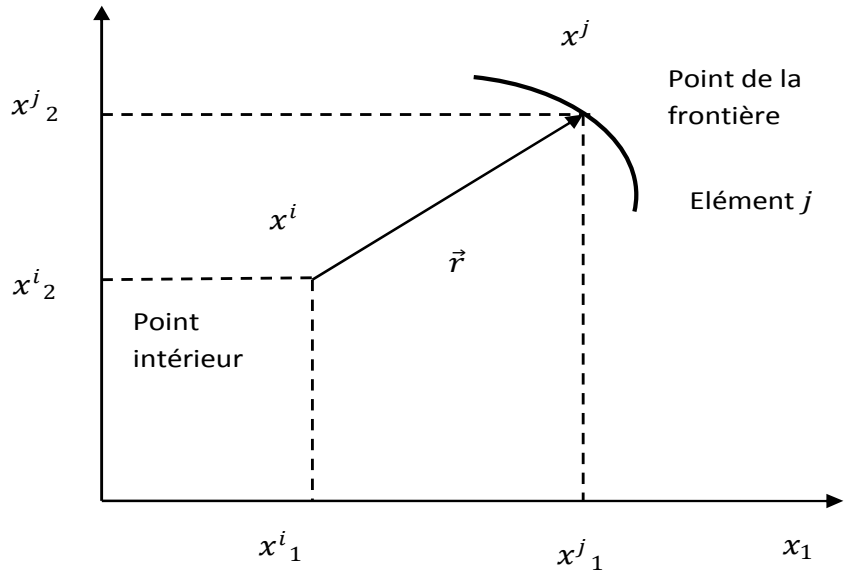


Figure 2. 6. Représentation des paramètres utilisés.

Les valeurs des flux internes dans les deux directions $x1$ et $x2$.

$$q_{x1} = \frac{\partial P}{\partial x1}$$

et

$$q_{x2} = \frac{\partial P}{\partial x2}$$

sont calculés en effectuant des dérivées sur(2.45), i.e.

$$\begin{aligned} (q_{x1})^i &= \left(\frac{\partial P}{\partial x1}\right)^i = \int_\Gamma q \left(\frac{\partial g}{\partial x1}\right)^i d\Gamma - \int_\Gamma P \left(\frac{\partial h}{\partial x1}\right)^i d\Gamma \\ (q_{x2})^i &= \left(\frac{\partial P}{\partial x2}\right)^i = \int_\Gamma q \left(\frac{\partial g}{\partial x2}\right)^i d\Gamma - \int_\Gamma P \left(\frac{\partial h}{\partial x2}\right)^i d\Gamma \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sachant que les dérivées ne sont effectuées que sur la solution fondamentale. Les fonctions g et h calculent les variations du flux autour du point i .

$$(q_{x1})^i = \left(\frac{\partial P}{\partial x1}\right)^i = \sum_{j=1}^{ne}\left(\int_\Gamma \left(\frac{\partial g}{\partial x1}\right)^i\right) q^j - \sum_{j=1}^{ne}\left(\int_\Gamma P\left(\frac{\partial h}{\partial x1}\right)^i\right) \quad P^j$$
$$(q_{x2})^i = \left(\frac{\partial P}{\partial x2}\right)^i = \sum_{j=1}^{ne}\left(\int_\Gamma \left(\frac{\partial g}{\partial x2}\right)^i\right) q^j - \sum_{j=1}^{ne}\left(\int_\Gamma u\left(\frac{\partial h}{\partial x2}\right)^i\right) \quad P^j \tag{2.47}$$

Les noyaux a intégrés toutes au long de l'élément sont :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^i = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial x_k}(-\ln r) = \frac{1}{2\pi r} r_{.k} \tag{2.48}$$

et

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x1}\right)^i = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{r}(r_{.1}n_1 + r_{.2}n_2)\right) = -\frac{1}{2\pi}\left[(2{r_{.1}}^2 - 1)n_1 + 2r_{.1}r_{.2}n_2\right]$$
$$\left(\frac{\partial h}{\partial x2}\right)^i = -\frac{1}{2\pi}\left[(2{r_{.1}}^2 - 1)n_2 + 2r_{.1}r_{.2}n_1\right] \tag{2.49}$$

ou $r_{.k}$ indique la dérivé au point intégré; i.e.

$$\left(\frac{\partial r}{\partial xk}\right)^i = -r_{.k}$$

Et n_1, n_2 sont les composantes de l'unité normale, l'intégrale des données dans les expressions (2.30) se fait numériquement en utilisant une quadrature Gaussienne.

2.6.1.2 Evaluation des intégrales :

Les intégrales comme G^{ij}et $\widehat{H}^{ij}$ peuvent être calculés en utilisant l'intégration numériques de Gauss Legendre pour le cas $i \neq j$; et dans le cas $i = j$ l'élément présente une singularité en raison de la solution fondamentale qui exige une intégration plus précise. Dans le cas des éléments de frontière, les intégrales de G^{ii} et $\widehat{H}^{ii}$ peuvent être calculé analytiquement, le terme $\widehat{H}^{ii}$ est identiquement nul car la normale n est perpendiculaire aux éléments :

$$\widehat{H}^{ii} = \int_{\Gamma_j} h d\Gamma = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = 0 \tag{2.50}$$

L'intégrale du terme G^{ii} :

$$G^{ii} = \int_{\Gamma_j} g d\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j} ln\frac{1}{r}\, d\Gamma \tag{2.51}$$

Pour intégrer facilement on doit modifier les coordonnées réels par une cordonnée de référence ξ donc on aura $r = \left|\xi \frac{l}{2}\right|$ ou l est la longueur de l'élément (figure 2.7). Alors le terme (2.48) devient :

$$\begin{aligned} G^{ii} &= \frac{1}{2\pi}\int_{p1}^{p2} ln\frac{1}{r}\, d\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_{nd1}^{p2} ln\frac{1}{r}\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^l ln\frac{1}{\xi l/_2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{l}{2}\left[ln\left(\frac{1}{l/_2}\right)\right] + 1 \end{aligned} \tag{2.52}$$

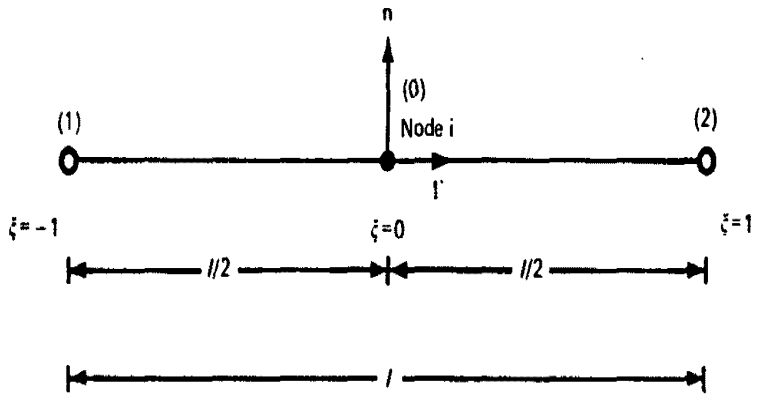


Figure 2. 7. Elément de référence pour élément constants.

2.6.2 Formulation en éléments linéaires :

On considère maintenant une variation linéaire de P et q, les nœuds sont supposées être aux extrémités de l'élément comme le montre la figure suivant :

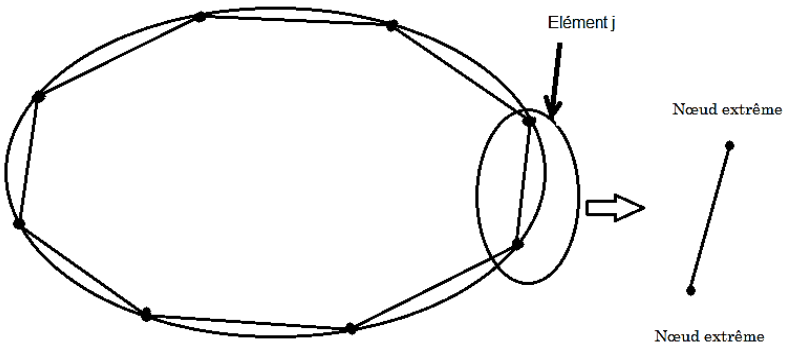


Figure 2. 8. Elément linéaires.

L'équation intégrale gouvernante est :

$$k^i P^i + \int_\Gamma hP\, d\Gamma = \int_\Gamma gq\, d\Gamma \tag{2.53}$$

Dans ce cas $k^i = \frac{\theta}{2\pi}$ ou θ est l'angle interne du coin en radian, après la discrétisation de la frontière en ne éléments l'équation (2.53) peut être écrite sous la forme suivante :

$$k^i P^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} hP\, d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} gq\, d\Gamma \tag{2.54}$$

Les intégrales de cette équation sont difficiles à évaluer que ceux des éléments constants, P et q varie lineairement sur chaque élémentΓ_j, donc il n'est pas possible de les faire sortir des intégrales, leurs valeurs en un point de l'élément peut être définit en terme de leur valeurs nodales et les deux fonctions d'interpolation linéaire N_1 et N_2 qui sont données en termes de coordonnées homogènes ε (Figure 2.8) tel que :

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= N_1 P^1 + N_2 P^2 = [N_1\ N_2] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad ; \\ q(\varepsilon) &= N_1 q^1 + N_2 q^2 = [N_1\ N_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2.55}$$

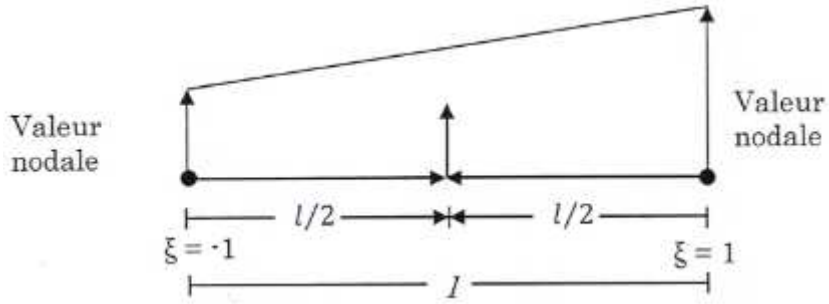


Figure 2. 9. Elément de référence pour élément linéaire.

ε est une coordonné qui varie de -1 à 1 , les fonctions d'interpolation s'écrit :

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \qquad ; \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1+\varepsilon) \tag{2.56}$$

Les intégrales de l'équation (2.54) peuvent être écrites comme suit :

$$\int_{\Gamma_j} hP\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1\ N_2] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} h d\Gamma = \begin{bmatrix} h_1^{ij} & h_2^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

Pour un élément j on a deux termes:

$$\begin{cases} h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_1\, h\, d\Gamma \\ h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_2\, h\, d\Gamma \end{cases} \tag{2.58}$$

De la même façon on obtient :

$$\int_{\Gamma_j} gq\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1\ N_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} g d\Gamma = \begin{bmatrix} g_1^{ij} & g_2^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \tag{2.59}$$

et

$$\begin{cases} g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_1\, g\, d\Gamma \\ g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} N_2\, g\, d\Gamma \end{cases} \tag{2.60}$$

Après avoir évalué les intégrales sur chaque élément, on obtient :

$$k^i P^i + \sum_{j=1}^{ne} H^{ij} P^j = \sum_{j=1}^{ne} G^{ij} q^j \tag{2.61}$$

2.6.2.1 Traitement des coins :

Un domaine est discrétisé on utilisant les éléments de frontière présentera une série de problème qui nécessitent une attention particulière car les conditions des deux côtés des éléments ne peuvent pas être les mêmes. Lorsque la frontière est discrétisé en élément linéaire, le nœud 2 de l'élément j est le même point du nœud 1 de l'élément +1 , (figure2.9) et comme le potentiel est constant sur chaque points de la frontière, P^2 de l'élément j et P^1 de l'élément $j+1$ sont tous les deux le même ; cependant, cet argument ne peut être appliqué que en règle générale de flux, comme il y a des points de frontière pour lesquels le flux varie et ceci lorsque la normale n'est pas unique (point de coins).

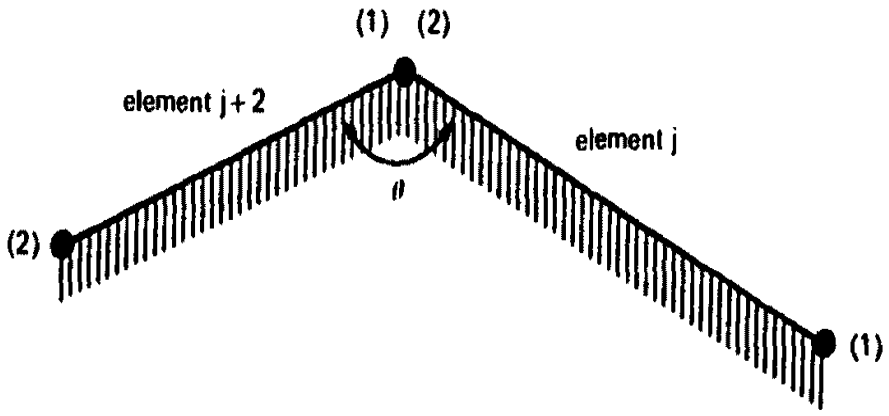


Figure 2. 10. Elément de coin.

Il se peut aussi que le flux prévu le long de la frontière régulière présente des discontinuités en certain points particuliers, tandis que les coins avec des valeurs différents de flux des deux côtés existent dans de nombreux problèmes pratiques, et les valeurs discontinues de flux le long d'une frontière lisse sont rarement prescrites.

Pour tenir compte de la possibilité que le flux du nœud 2 d'un élément peut être différent du flux du nœud 1 de l'élément suivant, les flux peuvent être disposés dans un tableau à $2n$ vecteur ; la substitution de l'équation (2.57)et (2.59) pour tous les éléments j dans (2.54), on obtient l'expression du nœud i :

$$k^i P^i + [\hat{H}^{i1} \quad \hat{H}^{i2} \quad \dots \quad \hat{H}^{ine}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{ne} \end{Bmatrix} = [G^{i1} \quad G^{i2} \quad \dots \quad G^{i2ne}] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^{2ne} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

Ou $\hat{H}^{ij}$ est égale à ${h_1}^{ij}$ le terme de l'élément j plus ${h_2}^{ij-1}$ le terme de l'élément $j-1$, d'où l'équation (2.62) représente l'équation assemblé du nœud i ; l'équation (2.62) peut être écrite comme suit :

$$k^i P^i + \sum_{j=1}^{ne} \hat{H}^{ij} P^j = \sum_{j=1}^{2ne} G^{ij} q^j \tag{2.63}$$

L'équation (2.41), peut aussi être écrite comme suit :

$$\sum_{j=1}^{ne} H^{ij} P^j = \sum_{j=1}^{2ne} G^{ij} q^j \tag{2.64}$$

Et l'ensemble en forme matricielle devient :

$$\boldsymbol{HU = GQ} \tag{2.65}$$

Ou G est une matrice rectangulaire ne x $2ne$.

2.6.3 Formulation en éléments discontinus :

Pour éviter d'avoir des flux inconnus aux nœuds de coins (écrire une seul équation), les nœuds des deux éléments linéaires qui sont assemblés au coin peuvent être déplacé à l'intérieur ces éléments. Les nœuds deviennent comme deux nœuds différents (Figure 2.10) et une seule équation sera écrite pour chaque nœud. Le potentiel et le flux sont représentés par des fonctions linéaires ainsi que l'ensemble des éléments en fonctions de leurs valeurs nodales et deux d'entre eux sont discontinus dans le coin.

Les éléments discontinus sont également utiles pour situations dans lesquelles une des variables prend une valeur infinie à la fin de l'élément, dans ce cas, les valeurs de la variable au niveau de nœud décalé de l'extrémité de l'élément est

finie et peut être calculé à partir du système d'équation sans difficulté numérique. Les valeurs de p et q en tout point sur un élément linéaire ont été définis en termes de leurs valeurs au point extérieur de l'équation (2.53).

$$p(\varepsilon) = N_1\, p^1 + N_2 u^2 = [N_1\ N_2]\begin{Bmatrix} p^1 \\ p^2 \end{Bmatrix} \quad ;$$
$$q(\varepsilon) = N_1\, q^1 + N_2 q^2 = [N_1\ N_2]\begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \tag{2.66}$$

Si les deux nœuds d'un élément sont décalés par rapport aux distances extrêmes A et B respectivement comme représentés sur la figure (Figure 2.11). Toute équation sera spécifiée pour chaque nœud.

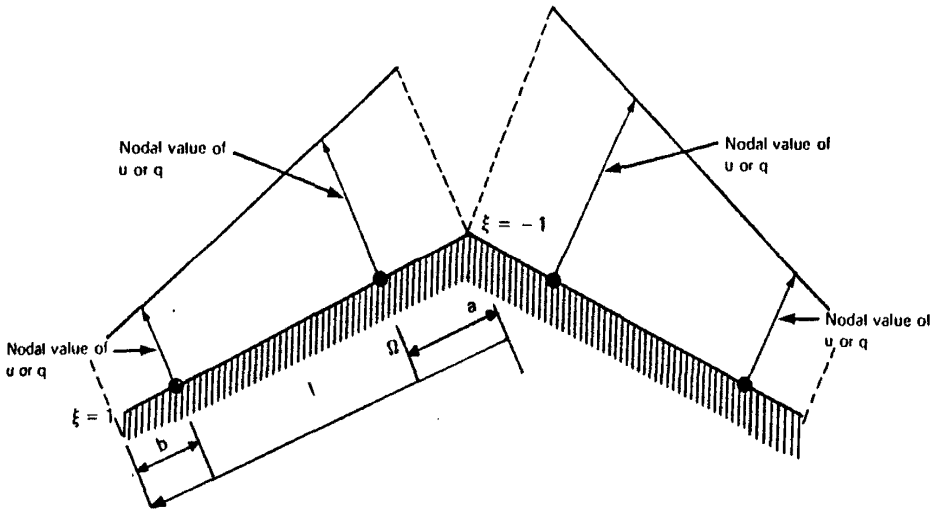


Figure 2. 11. Elément discontinu.

$$\begin{Bmatrix} p^a \\ p^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi_a) & N_2(\xi_a) \\ N_1(\xi_b) & N_2(\xi_b) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P^a \\ P^b \end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

Ou $\xi_a = \left({}^{2a}/_{l}\right) - 1$ et $\xi_b = 1 - \left({}^{2b}/_{l}\right)$ sont des conditions locales pour les points nodales.

On remplaçant l'équation (2.67) dans l'équation (2.66) on obtient les valeurs de P en tout point de l'élément en fonction des valeurs nodales.

$$P(\xi) = [N_1 \quad N_2]Q\begin{Bmatrix} P^a \\ P^b \end{Bmatrix}) \tag{2.68}$$

De la même manière on obtient :

$$q(\xi) = [N_1 \quad N_2]Q\begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix} \tag{2.69}$$

Après discrétisation de la frontière en ne élément, l'équation intégrale pour chaque point i peut être écrite comme suit :

$$k^i P^i + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} hP\, d\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma_j} gq\, d\Gamma \tag{2.70}$$

Les intégrales sur un élément discontinu sont :

$$\int_{\Gamma_j} hP\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1\ N_2]Qhd\Gamma_j \begin{Bmatrix} P^a \\ P^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a^{ij} & h_b^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^a \\ P^b \end{Bmatrix} \tag{2.71}$$

$$\int_{\Gamma_j} gq\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1\ N_2]Qgd\Gamma_j \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a^{ij} & g_b^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^a \\ q^b \end{Bmatrix}$$

Lors de la résolution d'un problème potentiel, les éléments continus et discontinus peuvent être utilisés ensembles dans la même maille. Le nombre total des nœuds est égales au nombre total d'éléments, de plus un nœud supplémentaires pour chaque élément discontinu, le coefficient k^i est égales à $\frac{1}{2}$ pour les nœuds sur les éléments discontinus, les intégrales ${h_a}^{ij}$, ${h_b}^{ij}$, ${g_a}^{ij}$ et ${g_b}^{ij}$ tout le long des éléments discontinus données par l'équation (2.71) peuvent être calculés par la quadrature gaussienne et lorsque le nœud i n'appartient pas à l'élément discontinu ${h_a}^{ij} = {h_b}^{ij}$ et ${g_a}^{ij}$ et ${g_b}^{ij}$ peuvent être obtenu facilement par intégration analytique, l'élément est subdivisé en deux parties une sur chaque côté du nœud.
Les intégrales résultantes se composent des intégrales qui ont le même principe que ceux des éléments linéaires réguliers.

2.7 Mise en œuvre et application

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons exposé la méthode des éléments de frontière, les différentes étapes de formulation et de discrétisation.
De ce qui suit nous allons procéder à la mise en œuvre de la BEM au cas des réservoirs. Tout d'abord, nous allons commencer par la validation de nos programmes de calcul élaborés dans le cadre de ce travail par un exemple numérique. Ensuite on passera aux différentes applications concernant les réservoirs sous hypothèse d'un fluide incompressible.

2.7.1 Etapes et caractéristiques d'un programme BEM :

Tout programme basé sur la méthode des éléments de frontière inclue quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), conditions aux limites.
- Construction des matrices élémentaires puis assemblage de celle-ci pour former les matrices globales associées aux déplacements et au gradient des déplacements.
- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (déplacement et gradient des déplacements).

2.7.2 Outil de programmation :

MATLAB (Matrix Laboratry) est un logiciel de calcul numérique produit par Math Works, et est un langage simple, très efficace et puissant, optimisé pour le traitement des matrices. Il permet le traitement des données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numérique et symboliques de façon fiable et rapide, grâce aux divers fonctions intégrées et à un ensemble d'outils testés et regroupés selon usage (toolbox) et il contient aussi une interface graphique puissante.

2.7.3 Validation des programmes

Afin de valider les programmes de calcul élaborés dans le cadre de ce mémoire, on propose d'étudier un domaine Ω de hauteur $h = \pi$ et de longueur $L = 2\pi$ qui est régie par l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, où u est une fonction de l'espace (solution recherché).Dans ce cas, le problème mathématique à résoudre est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & |\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = sin(y) & |\Gamma_1 \\ u = 0 & |\Gamma_2 \\ u = 0 & |\Gamma_3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -e^{-L}\sin(y) & |\Gamma_4 \end{cases}$$

La solution analytique de cette équation est donnée par :

$$u_a = e^{-x}\, sin(y).$$

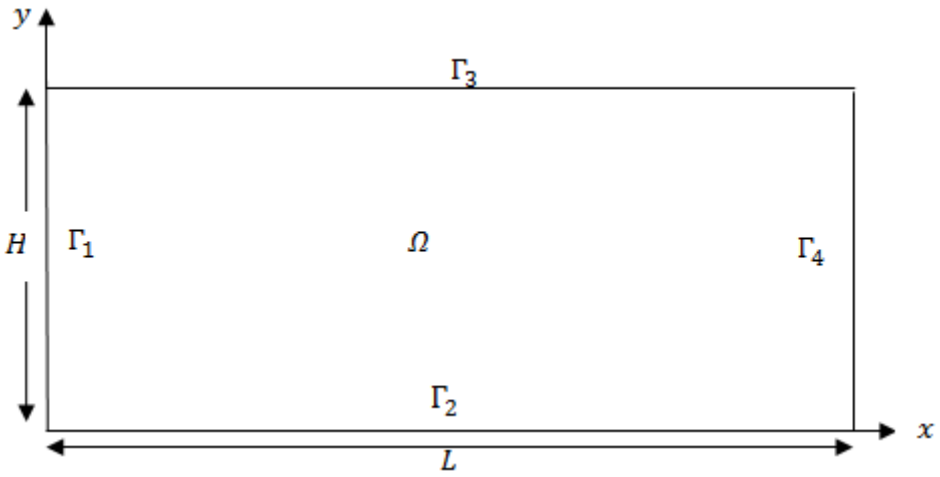


Figure 2. 12. Géométrie d'une Plaque soumise à une température

2.7.3.1 discrétisation en éléments constants

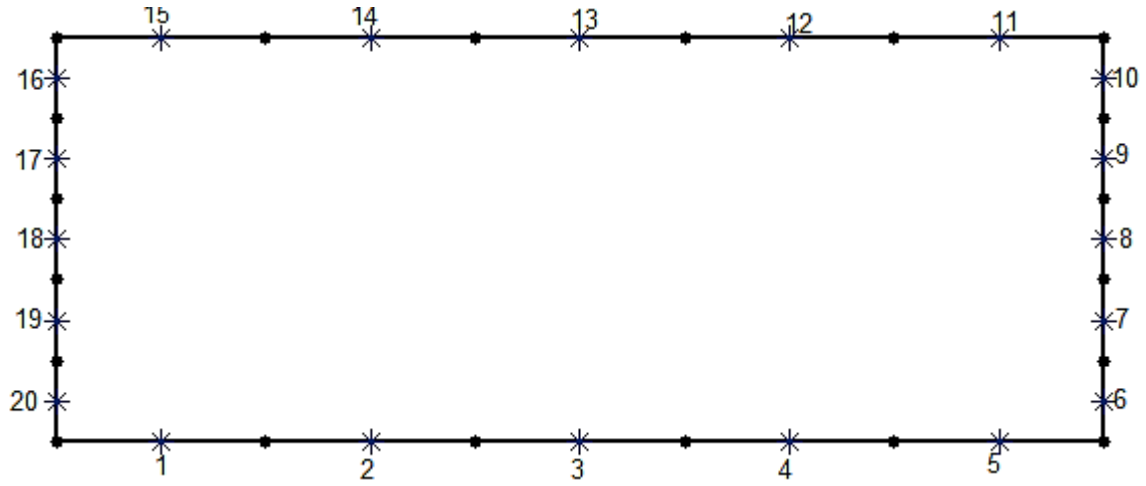


Figure 2. 13. Discrétisation du problème en éléments constants

Comme première partie de validation, on discrétise le problème en éléments de frontière constatant. La figure 2.13 montre schématiquement cette discrétisation, chaque élément est délimité par deux nœuds (représenté par des points), et la solution recherchée est recherché au centre des éléments (représentées par des étoiles). Le traitement des coins ne pose pas de problème, car la normale est calculée au centre de chaque élément. La frontière est discrétisée en 240 éléments à raison de 60 éléments par côté. Les résultats obtenus sur chacun des quatre bords de la frontière sont illustrés dans les figures ci-dessous et comparés à la solution analytique.

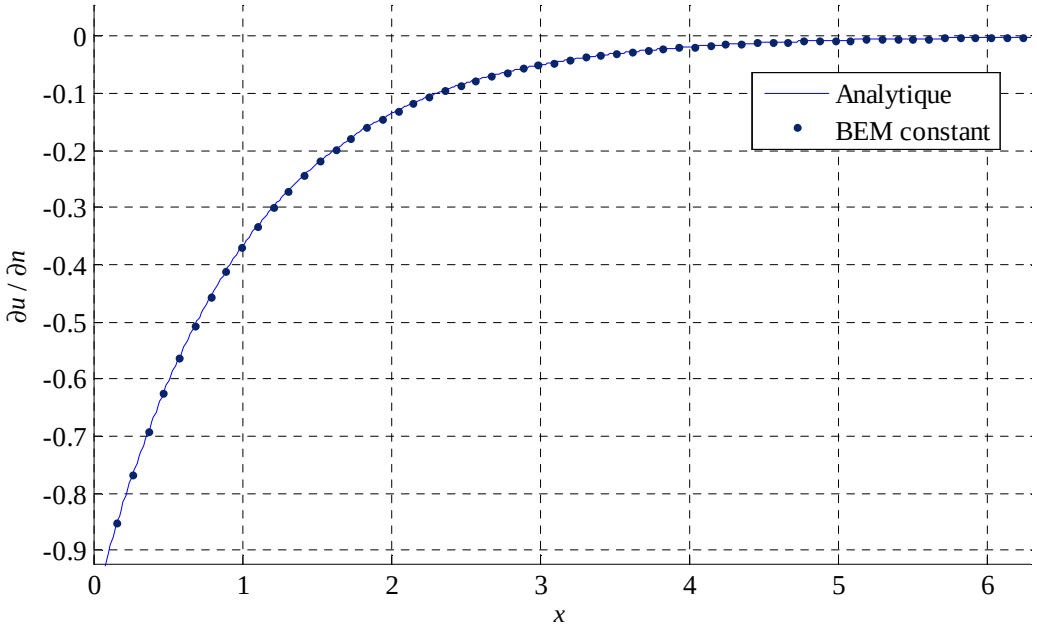


Figure 2. 14. La distribution de ∂u/ ∂n sur le bord bas (éléments constants)

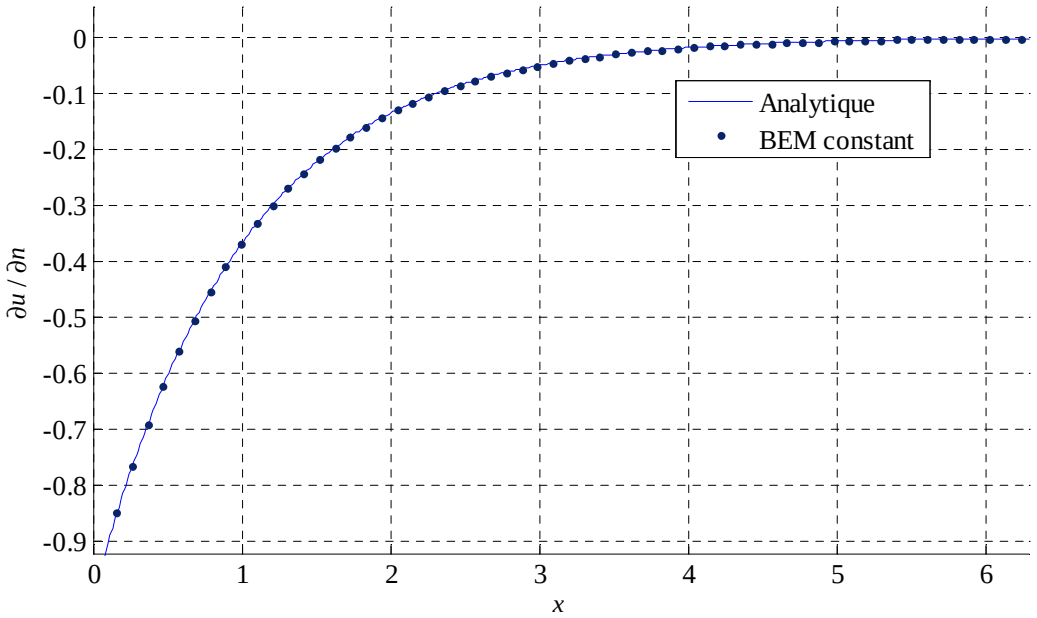


Figure 2. 15. La distribution de ∂u/ ∂n sur le bord haut (éléments constants)

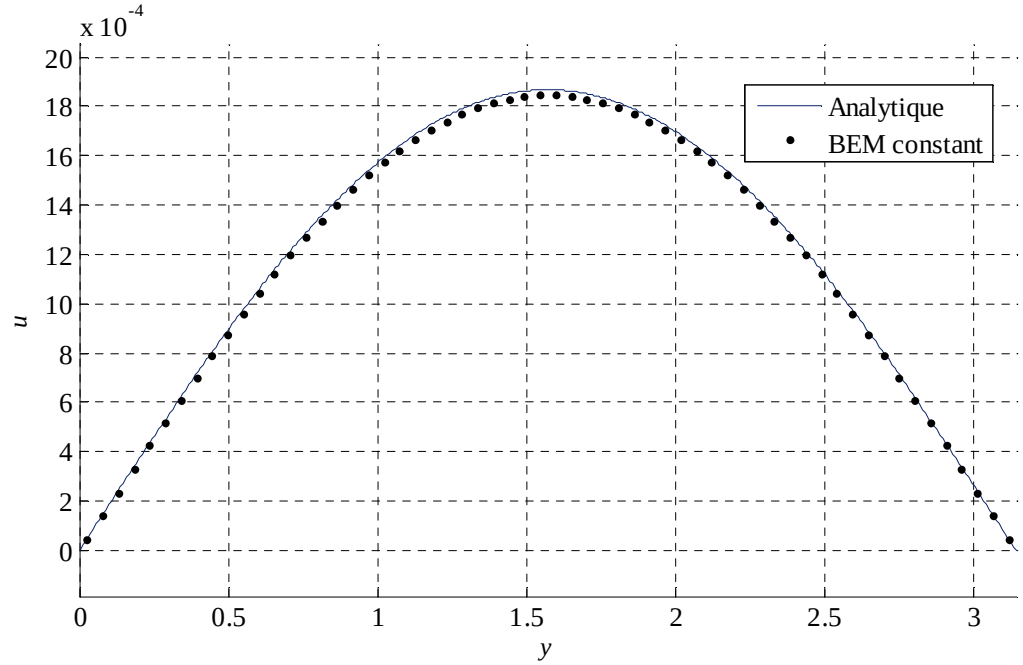


Figure 2. 16. La solution *u* sur le bord gauche (éléments constants)

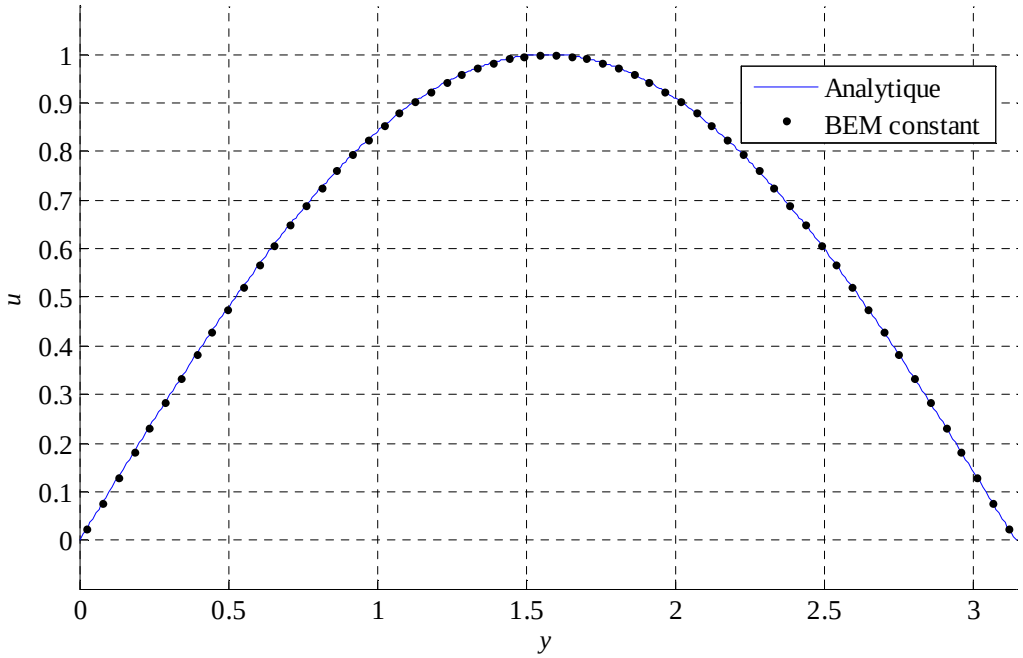


Figure 2. 17. La solution *u* sur le bord droite (éléments constants)

2.7.3.2 discrétisation en éléments linéaire

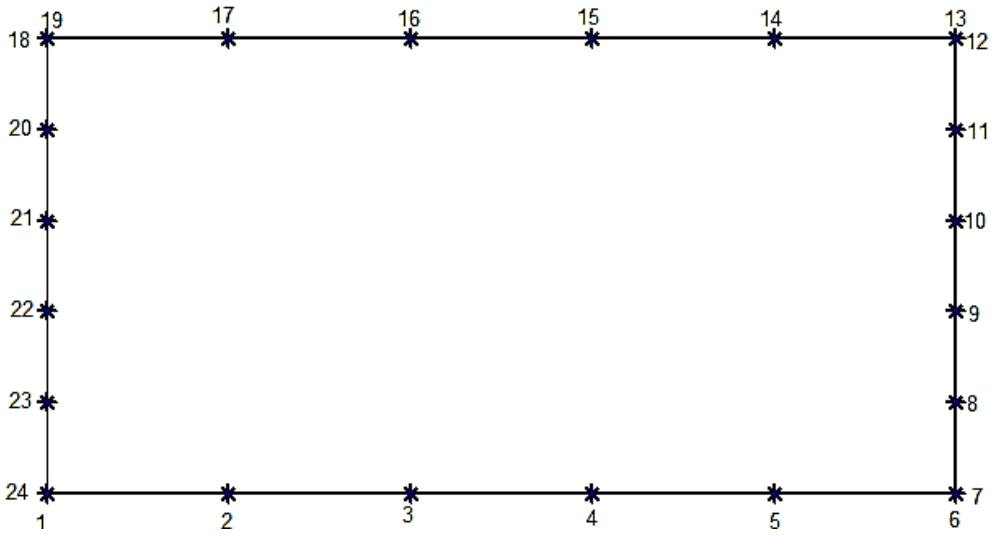


Figure 2. 18. Discrétisation du problème en éléments linéaires

La second partie de la validation, on discrétise le problème en éléments de frontières linéaires, La figure 2.18 montre schématiquement cette discrétisation, chaque élément est délimité par deux nœuds (représenté par des étoiles), et la solution recherchée est au niveau de ces derniers. Les coins sont traités en doublant leurs numérotations, comme exemple les éléments 5-6 et 7-8 de la figure 2.18 ont un nœud commun, celui du coin, qui possède une normale sortante vers le bas pour le premier élément et vers la droite pour le deuxième élément. La frontière est discrétisée en 120 éléments à raison de 30 éléments par côté. Les résultats obtenus sur chacun des quatre bords de la frontière sont illustrés dans les figures ci-dessous et comparés à la solution analytique.

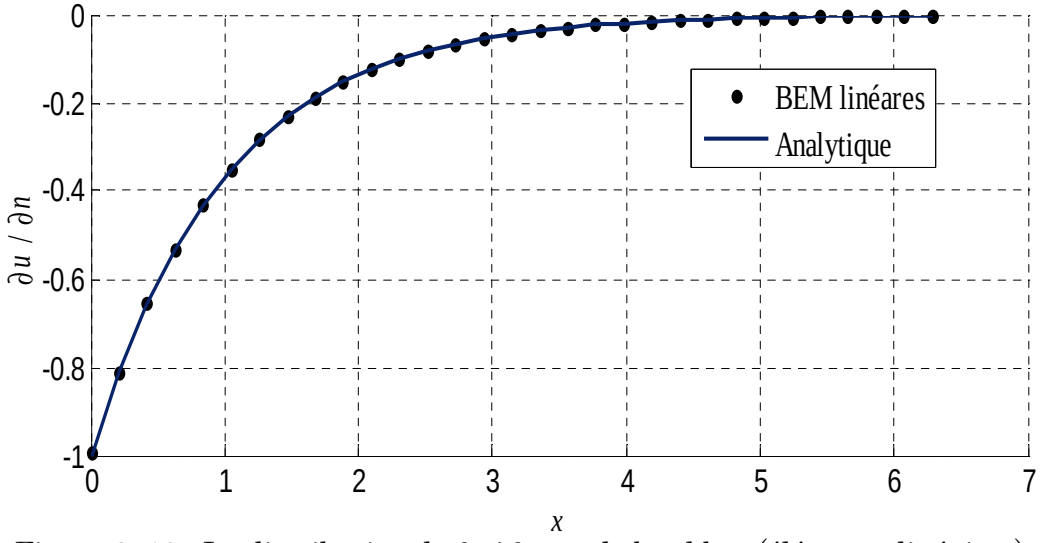


Figure 2. 19. La distribution de ∂u/ ∂n sur le bord bas (éléments linéaires)

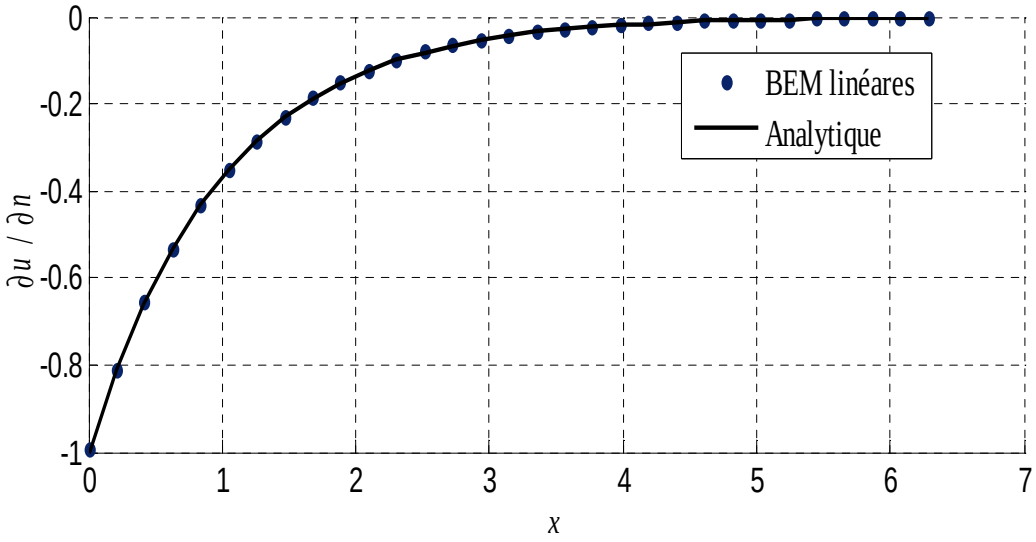


Figure 2. 20. La distribution de ∂u/ ∂n sur le bord bas (éléments linéaires)

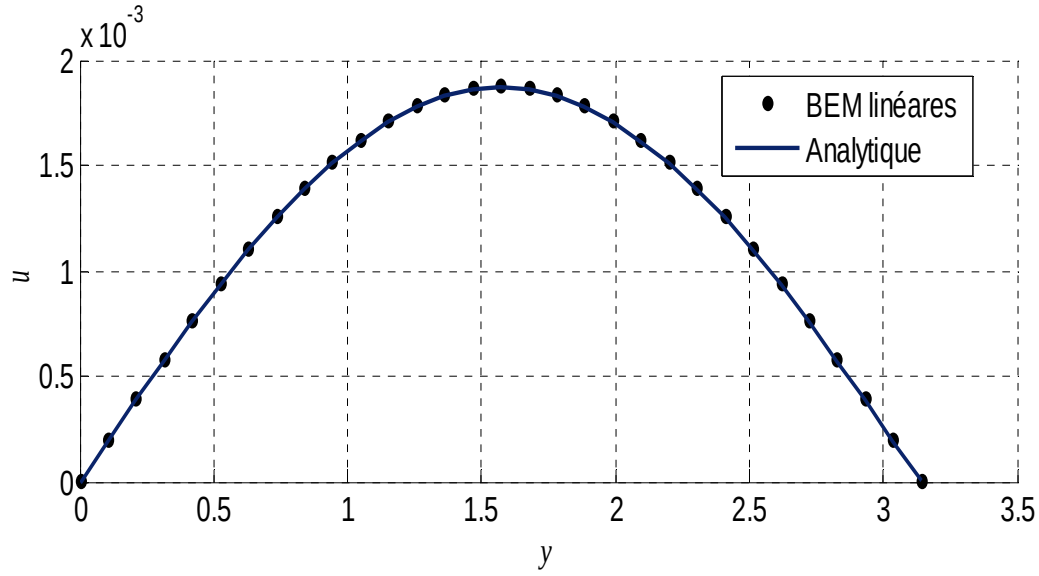


Figure 2. 21. La solution *u* sur le bord gauche (éléments linéaires)

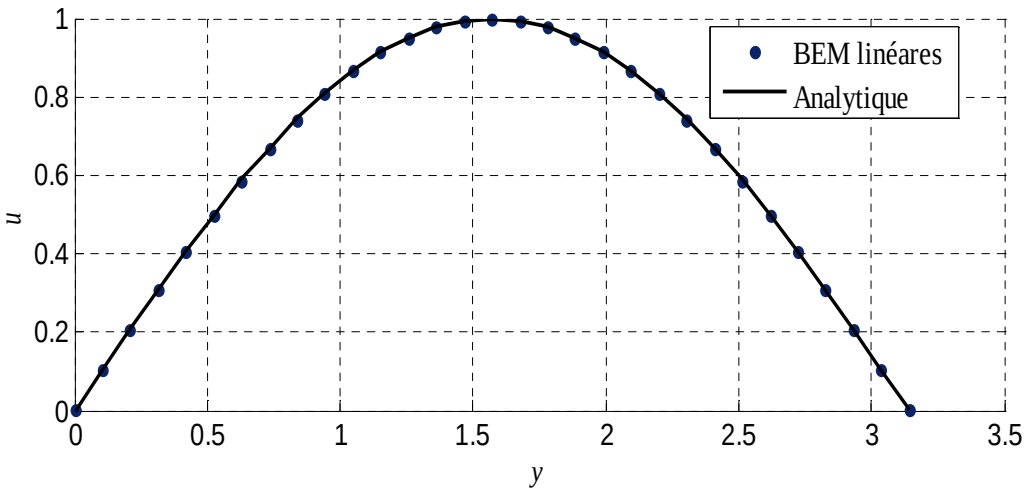


Figure 2. 22. La solution u sur le bord droite (éléments linéaires)

D'après les figures ci-dessus, on remarque bien que les valeurs trouvées numériquement sont quasi identique à celle de la solution analytique, la qualité des résultats confirme la validité des programmes développés en éléments de frontière. La formulation en éléments linéaires a nécessité le traitement des coins, pour aboutir à des résultats précis. Malgré que les éléments constants donnent avec moins d'effort mais avec une discrétisation raffinée, les mêmes résultats que les éléments linéaires, il est tout de même plus adéquat d'utiliser ces derniers dans le couplage FEM/ BEM parce qu'ils raccordent facilement avec les éléments finis.

2.7.4 Application au cas de réservoir

Comme exemple d'application, on considère un réservoir rectangulaire de hauteur $H = 10\,m$ et de longueur$L = 20\,m$, figure (2.23). Le liquide stocké, de masse volumique$\rho = 1000\,Kg/m^3$, est décrit par un champ de pression p qui satisfait, sous hypothèse de fluide incompressible, l'équation de Laplace (2.5).

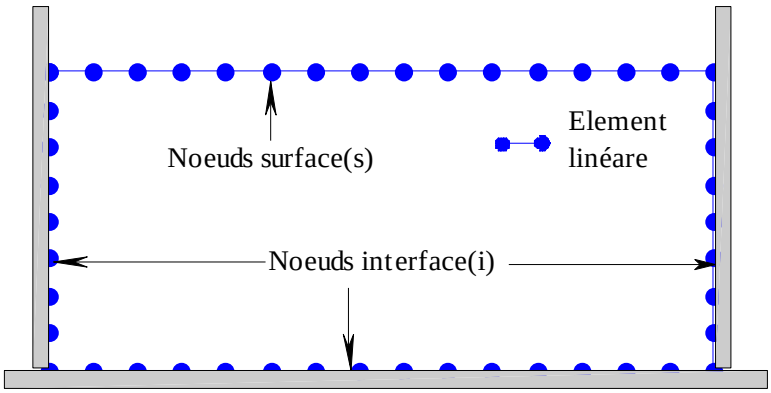


Figure 2. 23. Géométrie du réservoir et discrétisation en éléments de frontière.

La discrétisation en éléments de frontière conduite à l'expression (2.34). Les vecteurs inconnues du système matricielle (2.34) est divisée en deux parties : Une partie de surface libre de notée par l'indice "s" et une autre de l'interface notée par l'indice "i" comme montré sur la figure (2.23) ci-dessus.
Les matrices H et G sont par conséquent partitionnées comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_{ss} & H_{si} \\ H_{is} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_s \\ P_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ss} & G_{si} \\ G_{is} & G_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_s \\ Q_i \end{Bmatrix} \tag{2.72}$$

La condition de surface libre permet d'écrire les gradients des pressions en fonction des dérivées secondes par rapport au temps [37, 1]:

$$Q_s = -\frac{1}{g}\ddot{P}_s \tag{2.73}$$

La condition à l'interface fluide-structure relie les gradients de pressions aux accélérations imposées par les mouvements des parois rigides du réservoir [37, 1] :

$$Q_i = -\rho\ddot{U} \tag{2.74}$$

La deuxième équation du système matriciel (2.72) permet de condenser le vecteur pressions s'exerçant à l'interface fluide-structure comme suit :

$$P_i = -H_{ii}^{-1}H_{i\,s}P_S - \frac{1}{g}H_{ii}^{-1}G_{is}\ddot{P}_s - \rho H_{ii}^{-1}G_{ii}\ddot{U} \tag{2.75}$$

En remplaçant dans la première équation du système (2.72), on trouve le système d'équations à masse, rigidité et forces équivalent à celui de la FEM suivant :

$$M\ddot{P}_s + KP_s = F \tag{2.76}$$

avec :

$$M = \frac{1}{g}[G_{ss} - H_{si}H_{ii}^{-1}G_{is}] \tag{2.77}$$

$$K = H_{ss} - H_{si}H_{ii}^{-1}H_{is} \tag{2.78}$$

$$F = -\rho(G_{si} - H_{si}H_{ii}^{-1}G_{ii}) \tag{2.79}$$

2.7.4.1 Analyse modale

Après condensation de la pression à l'interface fluide-structure on peut calculer les modes propres du ballotement de la surface du fluide par l'équation suivante :

$$(K - \omega^2 M)P_S = 0 \tag{2.80}$$

Qui sont comparés aux valeurs analytiques données par [38].

$$\omega_n^2 = g\frac{n\pi}{L}tanh(\frac{n\pi}{L}H) \tag{2.81}$$

Les valeurs des quatre premières périodes sont montrées dans le tableau 2.1, avec les différences entre les valeurs calculées et les valeurs analytiques. Les formes des modes du ballotement sont représentées sur la Figure (2.24). On remarque bien que les valeurs calculées sont presque identiques aux valeurs analytiques, ce qui montre que le model en éléments de frontière basé sur la rigidité et masse équivalente mène à des résultats précis.

Tableau 2.1.Valeurs des périodes propres de ballotement

mode	Exacte	BEM	Erreur %
1	5.3704	5.3702	0.0054
2	3.5916	3.5910	0.0173
3	2.9229	2.9218	0.0378
4	2.5308	2.5291	0.0660

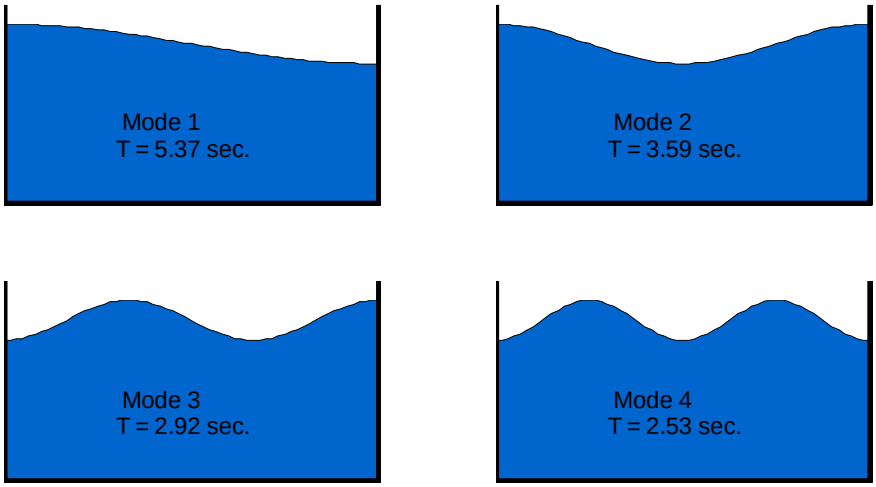


Figure 2. 24. Forme des Modes du ballotement

2.7.4.2 Réponse temporelle

Dans une deuxième analyse, on procède à l'étude de la réponse temporelle des fluctuations de la surface libre du fluide sous l'effet d'une excitation harmonique horizontale $x_g = X_0\, sin(\omega t)$ appliquée à la base du réservoir. La solution a été calculée avec la méthode de superposition modale, dans laquelle quinze (15) modes ont été pris en compte. Les résultats obtenus sont quasi identiques à ceux de la solution analytique de [38] :

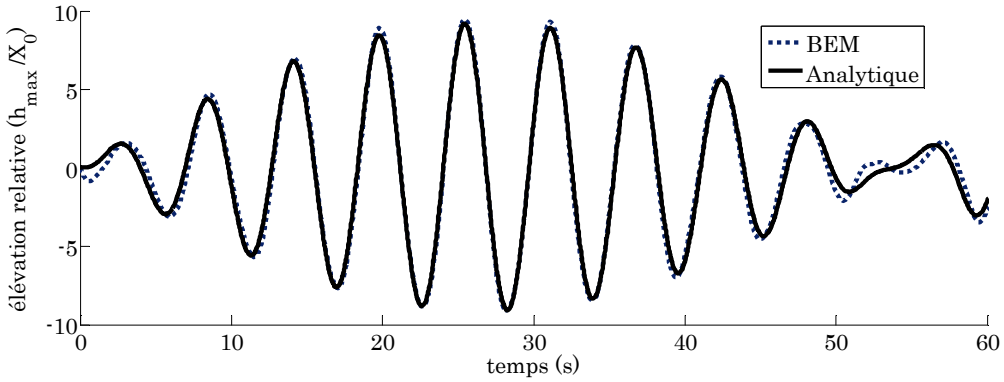


Figure 2. 25. Réponse temporelle en fluctuations de la surface libre

2.7.4.3 Réponse fréquentielle

La dernière analyse sous l'hypothèse de réservoir rigide concerne la réponse en fréquence des fluctuations de la surface libre du fluide. Pour chaque valeur de la fréquence d'excitation allant de $0.1\omega_1$ à $3\omega_1$, les élévations maximales h_{max} de la surface libre sont évaluées en fonction de la période d'excitation puis comparées à celles de la solution analytique de [38]. Les courbes obtenues sont représentées sur la figure (2.26). Ce résultat montre clairement l'apparition de résonances pour un fluide en ballottement sous l'hypothèse d'un réservoir rigide. Les deux premiers piques coïncident exactement avec les fréquences du premier et troisième mode de ballottement. Pour les basses fréquences (longues périodes), les résultats semblent s'écarter quelque peu de la solution analytique sans toutes fois perdre de leur qualité.

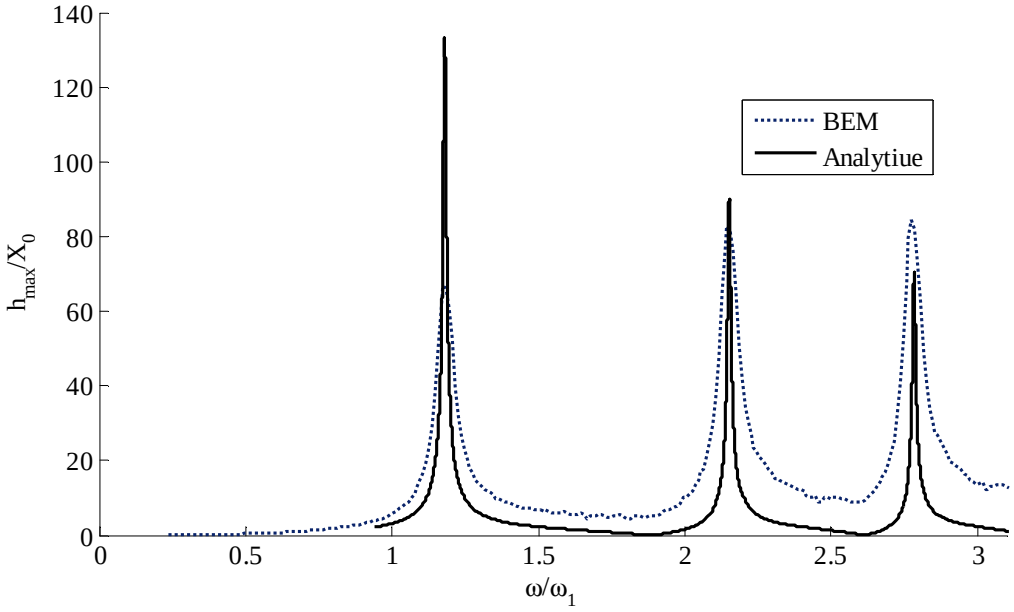


Figure 2. 26. Réponse fréquentielle

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle numérique en éléments de frontière a été présenté et appliqué à la modélisation des fluides et à l'évaluation du ballottement dans des réservoirs rectangulaires. Le domaine fluide, considéré incompressible, a été décrit par un champ de pression avec une surface libre idéalisée par la condition d'ondes de surface linéarisée. La formulation en éléments de frontière proposée ici, conduit à un système matriciel contenant une matrice masse et une matrice rigidité. Elle permet ainsi de calculer les modes propres et d'évaluer d'une manière très rapide la réponse temporelle par superposition modale, en utilisant uniquement une quinzaine de modes. Le modèle a été validé par des solutions analytiques applicables dans le cas de parois rigides. La qualité des résultats obtenus ont clairement montré la précision et l'efficacité du modèle proposé.

Chapitre 3

Modélisation de la structure par la méthode des éléments finis

3.1 Introduction

Dans ce présent chapitre, on s'intéresse à la modélisation de la structure du réservoir par la méthode des éléments finis. En supposant un réservoir rectangulaire d'une longueur très grande par rapport à sa largeur et à sa hauteur, loin des parois latérales, le comportement d'une section de parois de largeur unitaire peut être considéré purement flexionnel. Sous cette hypothèse, l'élément poutre est choisi pour la discrétisation de la structure en éléments [39].

3.2 Équations gouvernantes

La formulation de l'élément poutre peut être obtenue en se basant sur la théorie de la résistance des matériaux ; on considère une poutre de section A et de longueur L soumise à un chargement $q(x)$ variant le long de son axe longitudinal tel que montrée sur la figure 3.1 ci-dessous :

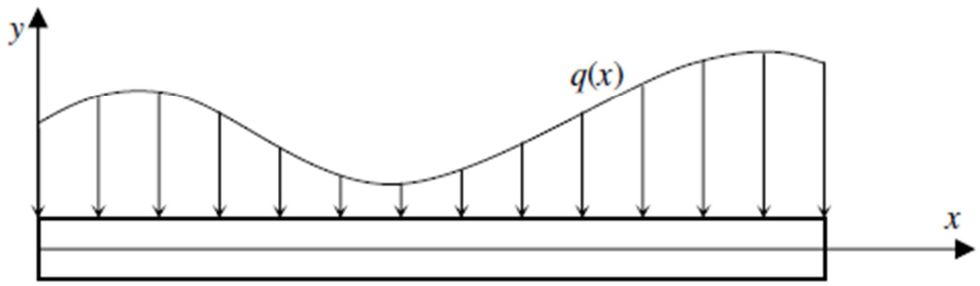


Figure 3. 1. Poutre chargée

Sous l'effet du chargement la poutre fléchie et se déplace verticalement d'un déplacement$v(x)$. On suppose qu'après cette déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne ; elles subissent de ce fait une petite rotation d'angle θ dans le plan(oxy). Considérons un élément dx de la poutre délimité par deux sections voisines, l'une et l'autre inclinée.

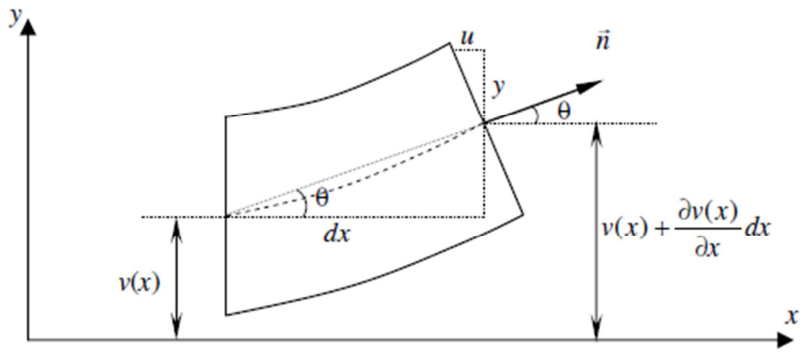


Figure 3. 2. Déformation d'une section

La rotation de la section déformée est la tangente de la ligne moyenne courbée :

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.1}$$

A cause de la rotation, les points de la section subissent un déplacement horizontal u variant linéairement de la fibre inférieure à la fibre supérieure. En un point de la section ce déplacement vaut :

$$u = -\theta y = -y \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.2}$$

Où y désigne la distance à partir de la ligne moyenne (centre de la section)

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, la déformation axiale suivant x le long de la section est :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.3}$$

Si on désigne par E le module d'élasticité du matériau de la poutre, la loi de Hooke la répartition des contraintes le long de la section :

$$\sigma_X = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E\, y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

Le moment créé par ces contraintes doit équilibrer le moment de flexion Ecréé par le chargement extérieure :

$$M - \int_s \sigma . y . ds = 0 - E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\int_s y^2\, ds \qquad M = E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\int_s y^2\, ds \tag{3.5}$$

Avec s désigne l'aire de la section droite. En posant I_z le moment d'inertie par rapport à l'axe z perpendiculaire au plan (xy) $I = \int_s y^2\, ds$, l'expression du moment devient :

$$M = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3.6}$$

Considérons maintenant l'équilibre statique d'un élément.

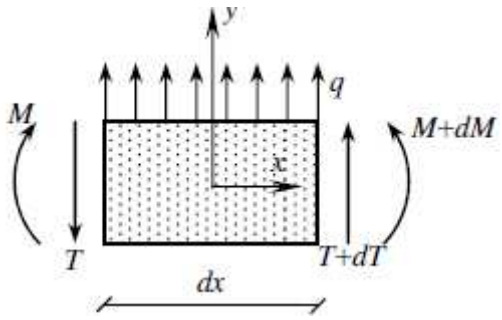


Figure 3. 3. Equilibre statique

La somme des moments par rapport à son centre de gravité donne :

$$-M + T\frac{dx}{2} + (T + dT)\frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

$$Tdx + dT\frac{dx}{2} + dM = 0$$

En négligeant les termes du second ordre, on obtient la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$T = -\frac{dM}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{3.7}$$

Equilibre des forces verticales pour un chargement positif dans le sens de l'axe y (figure 3.3)

$$T + dt + q\,dx - T = 0 \tag{3.8}$$

Donne la relation entre le chargement q et l'effort tranchant T et relie le chargement au déplacement v par :

$$q = -\frac{dT}{dx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{3.9}$$

Cette équation traduit l'équilibre statique de la poutre. Dans le cas d'un mouvement dynamique, il faut ajouter dans l'équation (3.8) un terme traduisant les forces d'inertie :

$$F_i = m\gamma = \rho A\, dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.10}$$

Avec ρ est la masse volumique du matériau, A la section de la poutre et t représente le temps.

Les équations (3.8) et (3.9) deviennent :

$$T + dT + q\, dx - T = Fi \tag{3.11}$$

$$\rho A\, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = q(x) \tag{3.12}$$

L'équation (3.12) est l'équation d'Euler Bernoulli pour la flexion des poutres. Le déplacement v est fonction de la coordonnée x le long de l'axe de la poutre et du temps t.

3.3 Formulation de l'élément poutre

3.3.1 Formulation variationnelle

En désignant par L la longueur de la poutre et en prenant δv la fonction poids, la formulation variationnelle forte associée à l'équation (3.12) s'écrit :

$$\int_0^L \delta v\, \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx + \int_0^L \delta v\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx = \int_0^L \delta v\ \ q(x) dx \tag{3.13}$$

La forme intégrale faible s'obtient avec deux intégrations par partie de second terme.

$$\int_0^L \delta v\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx = -\int_0^L \frac{\partial \delta v}{\partial x}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx + \left[\delta v \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right]_0^L \tag{3.14a}$$

$$\int_0^L \frac{\partial \delta v}{\partial x}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx = -\int_0^L \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x}\, EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] \tag{3.14b}$$

Compte tenu des expressions (3.6) et (3.7), les seconds termes représentent la différence des chargements en forces ($T_0 et\, T_L$) et en moments ($M_0\, et\, M_L$)

appliqués aux extrémités de la poutre. De plus, en peut remplacer la dérivée des perturbations des déplacements par une perturbation des rotions (équation 3.1) :

$$\frac{\partial \delta v}{\partial x} = \delta\theta$$

On écrit ainsi les conditions aux limites comme suit :

$$\left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_0^L = \delta\theta|_{x=0} M_0 - \delta\theta|_{x=L} M_L \tag{3.15a}$$

$$\left[\delta v \frac{\partial}{\partial x}(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2})\right]_0^L = \delta v\,|_{x=L} T_L - \delta V|_{x=0} T_0 \tag{3.15b}$$

En substituant maintenant (3.15) dans (3.13) et le résultat dans (3.13) on obtient l'expression de la forme variationnelle faible :

$$\int_0^L \delta v \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} dx + \int_0^L \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \delta\theta|_{x=L} M_L +$$

$$\delta v|_{x=L} T_L - \delta v|_{x=0} T_0 - \delta\theta|_{x=0} M_0 = \int_0^L \delta v q(x) dx \tag{3.16}$$

3.3.2 Discrétisation

Pour la discrétisation de cette équation on considère un élément à deux nœuds : un nœud à chaque extrémité de la poutre. La présence de dérivées d'ordre deux impose l'utilisation de polynômes quadratique ou plus. En outre, on voit que l'expression des conditions aux limites fait intervenir la rotation aux extrémités, il est donc plus intéressant de prendre deux degrés de liberté par nœuds dans le but d'assurer en même temps la continuité des déplacements et de leurs dérivées qui sont les rotations. Le nombre de degrés de liberté atteint ainsi quatre et le polynôme d'interpolation doit être cubique (quatre constantes). Le vecteur des déplacements et rotations élémentaires s'écrit donc comme suit :

$$U_n = < v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 >^T \tag{3.17}$$

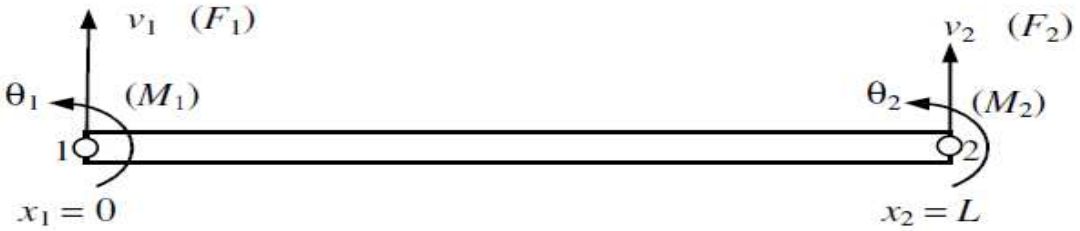


Figure 3. 4. Elément poutre à deux nœuds

Les déplacements et les rotations le long des poutres sont approximés par :

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{3.18a}$$

$$\theta(x) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 \tag{3.18b}$$

L'évaluation de ces polynômes aux nœuds donne :

$$v(0) = a_0 = v_1; \qquad \theta(0) = a_1 = \theta_1 \tag{3.19a}$$

$$v(L) = v_2 = v_1 + \theta_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3; \qquad \theta(L) = \theta_2 = \theta_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \tag{3.19b}$$

La résolution de (3.19b) pour a_2 *et* a_3 donne :

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\theta_1 - \theta_2) \;;\; a_3 = \frac{2}{L^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 - \theta_2) \tag{3.20}$$

En remplace ces paramètres dans l'équation (3.18) et après arrangement des termes on écrit l'interpolation nodale des déplacements sous la forme :

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 \tag{3.21}$$

Les fonctions de forme N_i sont appelées polynômes d'Hermite, leurs expressions sont :

$$\begin{gathered} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \;;\; N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \;; \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \;;\; N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{gathered} \tag{3.22}$$

On peut vérifier que la somme des fonctions de forme associées aux déplacements est égale à l'unité : $N_1 + N_3 = 1$.Elles prennent aussi des valeurs égales à un aux nœuds qui leurs correspondent et des valeurs nulles aux nœuds opposés. Cette remarque n'est pas valable pour les fonctions associées

aux rotations puisque les rotations sont-elles mêmes des dérivées des déplacements.

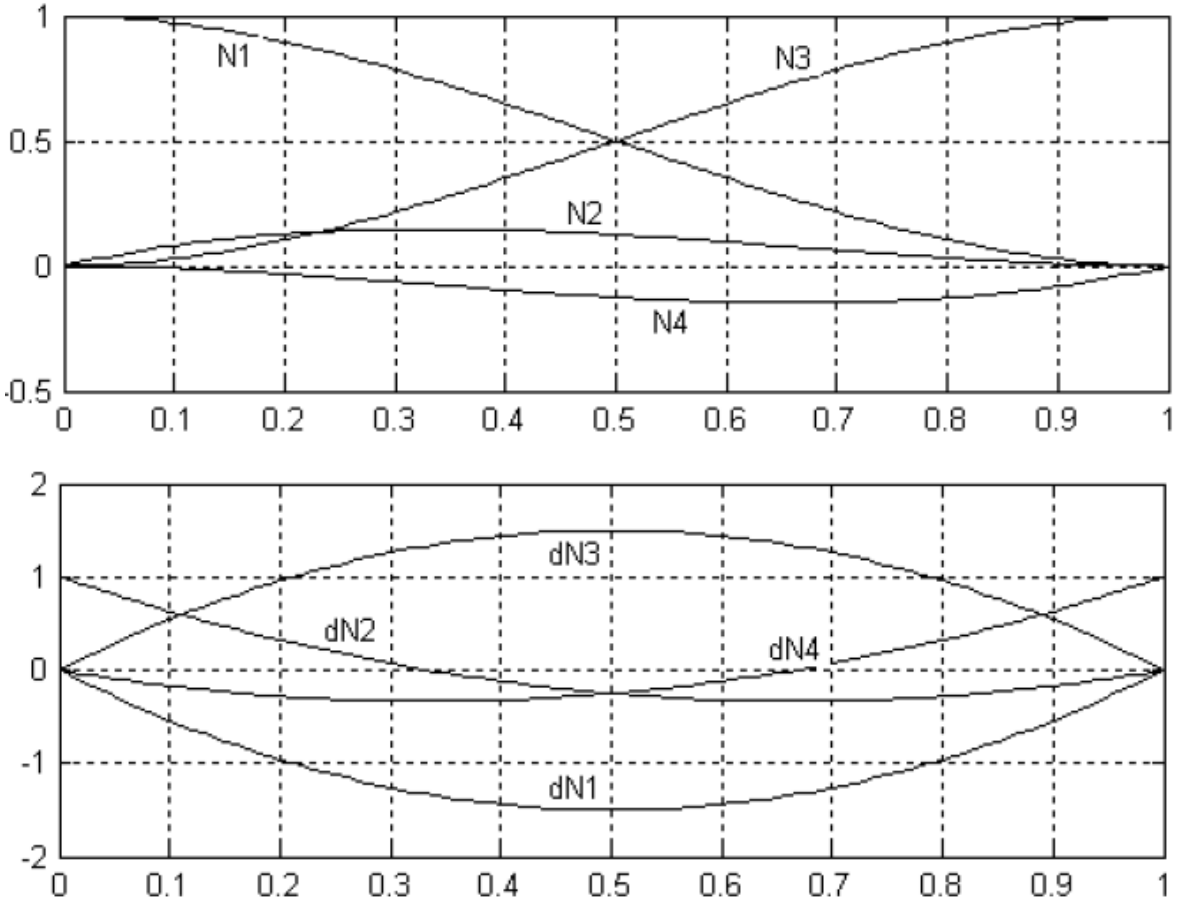


Figure 3. 5. Fonctions de forme d'un élément poutre et leurs dérivées

3.3.3 Matrice élémentaires

On remplace maintenant dans la forme vibrationnelle (3.16) le déplacement v par son approximation (3.21), on obtient pour les perturbations :

$$\delta v = \delta U_n^T N^T \; ; \quad \delta\theta = \delta U_n^T \; \frac{dN^T}{dx} \; ; \; avec \; \delta U_n^T =< \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta V_2 \, \delta\theta_2 > \tag{3.23}$$

Les dérivées deviennent :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 N}{dx^2} U_n \; ; \; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{d^2 U_n}{dt^2} = N\ddot{U}_n \tag{3.24}$$

avec

$$\frac{d^2 N}{dx^2}(x) = \frac{1}{L^3} < 12x - 6L \, , \qquad 6Lx - 4L^2 \, , \qquad 6L - 12x, \qquad 6Lx - 2L^2 > \tag{3.25}$$

Compte tenu des valeurs des fonctions N et dN aux nœuds (Figure3.5), les conditions aux limites s'écrivent :

$$\delta v\,|_{x=L}\,T_L - \delta v|_{x=0}\,T_0 = \delta U_n^T(<0\ 0\ 1\ 0>^T\ T_L - <1\ 0\ 0\ 0>^T\ T_0)$$

$$= \delta U_n^T <-T_0\ \ 0\ \ T_L\ \ 0>^T \tag{3.26a}$$

$$\delta\theta\,|_{x=L}\,M_L - \delta\theta|_{x=0}\,M_0 = \delta U_n^T(<0\ 0\ 0\ 1>^T\ M_L - <0\ 1\ 0\ 0>^T\ M_0)$$

$$= \delta U_n^T <-M_0\ \ 0\ \ M_L\ \ 0>^T \tag{3.26b}$$

Ces conditions correspondent au chargement extérieur appliqué aux nœuds c'est-à-dire au niveau des jonctions entre les éléments telles que les jonctions poteaux-poutres par exemple. Le vecteur élémentaire F_n des forces et des moments concentrés aux nœuds s'écrit comme suit :

$$F_c = <-T_0\ -M_0\ T_L\ M_L>^T \tag{3.26c}$$

Le chargement F_e réparti sur l'élément poutre correspond au second terme de la forme variationnelle : (3.16)

$$\int_0^L \delta v\, q(x)dx = \delta U_n^T \int_0^L N^T\, q(x)\ dx\,, F_e = \int_0^L N^T\, q(x)dx \tag{3.27}$$

Ce chargement est fonction de la répartition $q(x)$. Dans les cas simples on peut intégrer et donner l'expression explicite de F_e, sinon, il est possible de subdiviser la poutre (ou l'élément) en plusieurs petits éléments de telle sorte à pouvoir remplacer le chargement réparti q par deux forces équivalentes concentrées aux extrémités.

On donne ci-dessous l'expression de F_e pour un cas de chargement trapézoïdal variant de q_0 à q_L, les chargements uniformes et triangulaires ne sont que des cas particuliers du chargement trapézoïdale.

$$q(x) = q_0 + (q_L - q_0)\frac{x}{L} \tag{3.28a}$$

$$F_e = \frac{L}{60} < (9q_L + 21q_0), L(2q_L + 3q_0), (21q_L + 9q_0), -L(3q_L + 2q_0) >^T \tag{3.28b}$$

Il reste maintenant deux termes intégrales dans l'équation (3.16) à discrétiser :

$$\int_0^L \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \int_0^L \delta U_n^T \frac{d^2 N^T}{dx^2} EI \frac{d^2 N}{dx^2} U_n^T dx \tag{3.29a}$$

$$\int_0^L \delta v \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \int_0^L \delta U_n^T N^T \rho N \ddot{U}_n dx \tag{3.29b}$$

L'élimination de δU_n^T de l'équation intégrale discrète donne les deux matrices masse $M_e$et rigidité K_e :

$$K_e = \int_0^L \frac{d^2 N^T}{dx^2} EI \frac{d^2 N}{dx^2} dx \tag{3.30}$$

$$M_e = \int_0^L N^T \rho A \, N \, dx \tag{3.31}$$

Si la poutre est faite d'un même matériau homogène et de même section (E, I, ρ sont constantes), alors les expressions explicites des matrices élémentaires peuvent être obtenues et s'écrivent comme suit :

$$K_e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$
$$M_e = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

La même remarque concernant la matrice masse de l'élément barre peut être faite pour l'élément poutre. On peut associer la moitié de la masse totale de l'élément aux degrés de translation de chaque nœud. On prend uniquement les translations parce que les rotations ne produisent pas de forces d'inertie. La matrice masse concentrée s'écrit comme suite :

$$M_e = \frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

3.4 Application au cas des réservoirs de stockage

Comme exemple de réservoir, nous considérons (figure 3.6) un réservoirs rectangulaire de hauteur $H_R = 10\,m$, de longueur $L_R = 20\,m$,Les parois sont en béton de module d'élasticité $E = 32000\,MPa$, de masse volumique $\rho_s = 2500\,Kg/m^3$, la structure de réservoir est discrétisée en éléments poutre , Le modèle numérique est montré sur la figure 3.6, les modes de vibrations de la structure seul sans fluide sont calculés grâce aux matrices masse (M) et rigidité (K) de la structure sous l'expression.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

Les valeurs des périodes propres sont comparées aux valeurs calculées par le logiciel sap 2000 version 14.2 et sont rapportées dans le tableau 3.1

Figure 3. 6. Maillage du la structure du réservoir en éléments poutres

Tableau 3.1. Périodes de vibration de la structure

mode	Modèle	SAP 2000	Erreur %
1	0.3476	0.3494	0.5178
2	0.0561	0.0563	0.3565
3	0.0202	0.0204	0.9900
4	0.0104	0.0102	1.9230

Les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus montrent que le programme développé fourni des résultats pratiquement similaire à celle de model développé sur le logiciel SAP 2000, ce qui permis de validé le programme développé en éléments finis.

Par ailleurs, un model tridimensionnel du réservoir (10m de hauteur, 20 m de largeur) avec une longueur de 60 m (3 fois la largeur) donne une période fondamentale d'une valeur de 0.31 secondes.

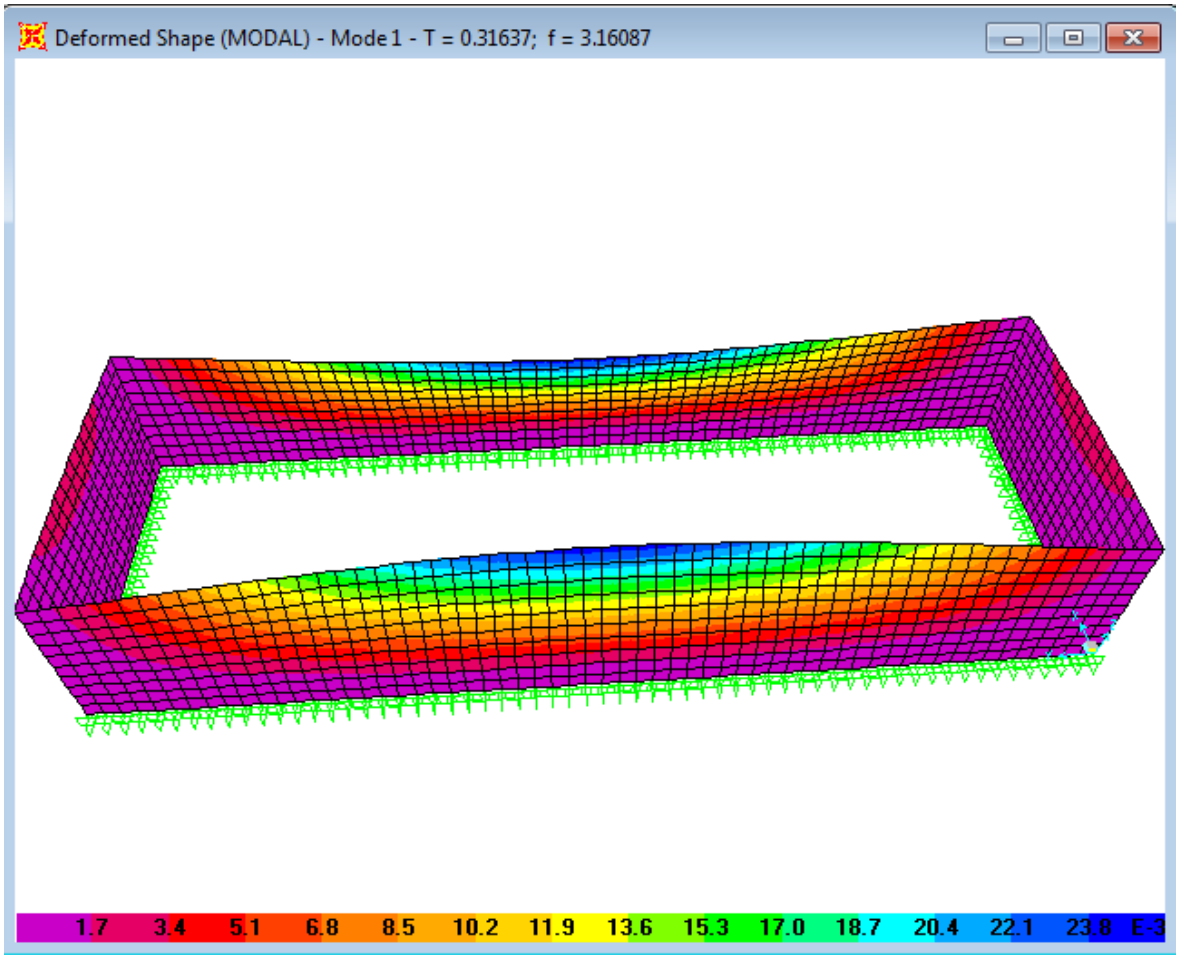


Figure 3. 7. Modèle 3D de la structure de réservoir

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discrétisés la structure en éléments finis, l'élément poutre est choisi pour la discrétisation compte tenu de la géométrie présentant une longueur plus importante que la largeur. Le modèle numérique a été implémenté sous MATLAB en vue d'un couplage FEM/BEM. Ce modèle a été validé en le comparant avec une modélisation en utilisant le SAP 2000.
Les variables nodales de l'élément poutre, sont les déplacements et les rotations, et pour le domaine fluide, on a que la pression comme variable nodale (chapitre 2), donc pour faire un couplage entre les deux domaines et les deux méthodes ; des traitements numériques seront nécessaires, c'est ce qu'on verra dans les chapitres qui suit.

Chapitre 4

Interaction fluide structure par couplage FEM /BEM

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation de l'interaction fluide-structure par couplage éléments finis éléments de frontière (FEM/BEM), le domaine fluide est discrétisé par éléments de frontière (chapitre2) et la structure du réservoir sera modélisée par éléments finis (chapitre3). Pour faire le couplage, des traitements numériques sont nécessaires, c'est ce qu'on verra dans ce qui suit. Le problème d'interaction est pris en compte en respectant l'équilibre des efforts à l'interface fluide-structure. A cet effet, un modèle est proposé puis validé avec succès.

4.2 Modélisation du système fluide structure

Dans ce qui suit une structure en béton armé contenant de fluide ; de longueur $L_s = 20\text{m}$ et de hauteur $H_s = 10\text{m}$ dont la masse volumique $\gamma = 25\text{kN/m}^3$, le module de Young et $E = 32000\text{MPa}$, est discrétisée en éléments finis (élément poutre de section $b * h = 1 * 0.5\text{m}^2$). Le fluide d'une longueur $L_f = L_s$ et d'une hauteur $H_f = 9.5m$ et de masse volumique $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, est discrétisé en éléments de frontière (éléments linéaires).

La figure 4.1 montre schématiquement le système couplé liquide et réservoir considéré.

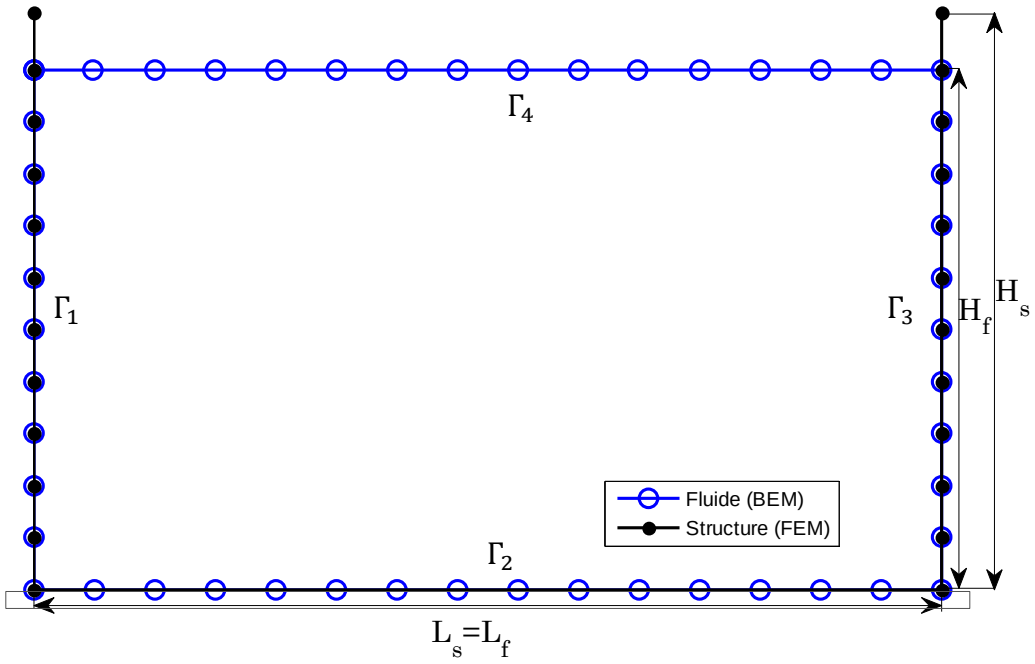


Figure 4. 1.Discrétisation du système fluide –structure par FEM/BEM

Avec

Γ_1, Γ_3 : L'interface fluide structure

Γ_2 : Fond du réservoir

Γ_4 : Surface libre du liquide

4.2.1 Modélisation du réservoir par éléments finis

La modélisation en éléments finis d'une structure en contact avec un fluide, tel qu'un réservoir en béton, conduit au système d'équations dynamiques algébrique suivant :

$$M\ddot{U} + KU = F_g + F_P \tag{4.1}$$

Dans lequel M et K sont les matrices masse, et rigidité de la structure, respectivement. Le vecteur chargement est composé du chargement sismique F_g et du chargement hydrodynamique F_P qui s'écrivent respectivement comme suit :

$$F_g = -MI\ddot{X}_g \tag{4.2}$$

$$F_P = QP \tag{4.3}$$

$\ddot{X}_g$: Accélération sismique à la base

Le vecteur du chargement hydrodynamique est obtenu en ramenant les pressions dans le liquide à l'interface fluide-structure par le biais de la matrice d'interaction Q qui a comme expression :

$$Q = \int_{\Gamma} N_U^T \; n \; N_p \; d\Gamma \tag{4.4}$$

N_U et N_P sont les fonctions de formes utilisées pour la discrétisations des champs des déplacements et des pressions

$$N_P = < 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} > \tag{4.5}$$

$$N_U = \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{3x^2}{L^2} + \dfrac{2x^2}{L^3} \\ x - \dfrac{2x^2}{L^2} + \dfrac{x^3}{L^2} \\ \dfrac{3x^2}{L^2} - \dfrac{2x^3}{L^3} \\ \dfrac{x^3}{L^2} - \dfrac{x^2}{L} \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

Le système (4.1) peut être partitionné comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_{UU} & M_{U\theta} \\ M_{\theta U} & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{UU} & K_{U\theta} \\ K_{\theta U} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{UU} & M_{U\theta} \\ M_{\theta U} & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} [I] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{X}_g + \begin{bmatrix} Q_U & 0 \\ Q_\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_s \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

$U \; et \; \theta$ sont les déplacements et les rotations par nœud de la structure.
L'indice s désigne les nœuds de surface libre et L'indice i désigne les nœuds d'interface fluide-structure .
La matrice Q a aussi été partitionnée de sorte à séparer les pressions de surface, de celles à l'interface.
Si un modèle à masse concentré est adopté pour représenter la masse de la structure [40].
La seconde équation du système (4.7) s'écrit comme suit :

$$0 + K_{\theta U} U + K_{\theta\theta} \theta = Q_\theta P_i \tag{4.8}$$

Cette équation (4.8) permet de condenser les degrés de libertés (ddl) de rotation comme suit :

$$\theta = K_{\theta\theta}^{-1} Q_\theta P - K_{\theta\theta}^{-1} K_{U\theta} U \tag{4.9}$$

En remplaçants (4.9) dans la première équation du système (4.8) on obtient le système en vibration libre suivant :

$$M_{UU}\ddot{U} + \left(K_{UU} - K_{U\theta}K_{\theta\theta}^{-1}K_{\theta U}\right)U + \left(K_{U\theta}K_{\theta\theta}^{-1}Q_{\theta} - Q_U\right)P_i = 0 \tag{4.10}$$

qui est un système réduit ne comportant que les ddl des déplacements liées aux pressions s'exerçant à l'interface. Ce système d'équation dynamique s'écriait d'une manière condensée comme suit :

$$M^*\ddot{U} + K^*U + Q^*P_i = 0 \tag{4.11}$$

avec :

$$M^* = M_{UU}$$

$$K^* = K_{UU} - K_{U\theta}K_{\theta\theta}^{-1}K_{\theta U}$$

$$Q^* = K_{U\theta}K_{\theta\theta}^{-1}Q_{\theta} - Q_U$$

4.2.2 Modélisation du système fluide par la méthode des éléments de frontière (BEM)

Le système d'équation final d'éléments de frontière pour le domaine fluide (obtenu dans le chapitre 2) équation (2.72) est maintenant partitionné comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_{ss} & H_{si} & H_{sf} \\ H_{is} & H_{ii} & H_{if} \\ H_{fs} & H_{fi} & H_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_s \\ P_i \\ P_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ss} & G_{si} & G_{sf} \\ G_{is} & G_{ii} & G_{if} \\ G_{fs} & G_{fi} & G_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s \\ q_i \\ q_f \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

avec $s, i\ et\ f$ désignent respectivement les nœuds de surface, d'interface fluide-structure et du fond de réservoir.

4.3 Couplage FEM/BEM

4.3.1 Couplage sans ballotement

Dans le cas d'un fluide sans ballotement on a les conditions aux limites suivantes :

$$q_s = 0\ , P_s = 0 \tag{4.13}$$

et pour un mouvement horizontal l'accélération $\ddot{U}_i$ imposée aux parois du réservoir

$$q_f = 0\ , q_i = -\rho\ddot{U} \tag{4.14}$$

Le système (4.12) est donc réduit comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_{ii} & H_{if} \\ H_{fi} & H_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ii} & G_{if} \\ G_{fi} & G_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\rho\ddot{U} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

La deuxième équation du système (4.15) donne l'expression de condensation des pressions au fond du réservoir :

$$p_f = -\rho H_{ff}^{-1}\, G_{fi}\ddot{U} - H_{ff}^{-1} H_{fi} P_i \tag{4.16}$$

Cette expression est remplacée dans la première équation de (4.15) pour obtenir l'équation d'équilibre entre les pressions et les accélérations à l'interface fluide-structure.

$$-\rho\left(H_{if}H_{ff}^{-1}G_{fi} - G_{ii}\right)\ddot{U} = (H_{if}H_{ff}^{-1}H_{fi} - H_{ii})P_i \tag{4.17}$$

L'équation (4.17) peut s'écrire sous la forme :

$$Q_p^{**}\ddot{U} = K_F\, P_i \tag{4.18}$$

avec :

$$\begin{aligned} Q_p^{**} &= -\rho\left(H_{if}H_{ff}^{-1}G_{fi} - G_{ii}\right) \\ K_F &= (H_{if}H_{ff}^{-1}H_{fi} - H_{ii}) \\ P_i &= K_F^{-1}Q_p^{**}\ddot{U} \end{aligned} \tag{4.19}$$

En remplaçant l'expression du vecteur P_i (pression à l'interface) dans l'équation d'équilibre du système (4.11) on obtient :

$$(M^* + Q^*K_F^{-1}Q_p^{**})\ddot{U} + K^*U = 0 \tag{4.20}$$

Qui est un système à masse ajoutée et à rigidité condensée :

$$M^{**}\ddot{U} + K^*U = 0 \tag{4.21}$$

avec :

$$M^{**} = M^* + Q^*K_F^{-1}Q_p^{**}$$

$$K^* = K_{UU} - K_{U\theta}K_{\theta\theta}^{-1}K_{\theta U}$$

L'équation (4.21) permet de de calculer les périodes propres du système couplé fluide –structure sans ballotement de la surface libre.

Les valeurs des périodes propres des huit (8) premiers modes sont rapportées dans le tableau 4.1 suivants :

Tableau 4.1. Périodes de vibration de la structure

Modes	FEM /BEM	FEM /FEM
1	0.5470	0.5965
2	0.5448	0.5374
3	0.0803	0.0955
4	0.0646	0.0911
5	0.0269	0.0292
6	0.0207	0.0288
7	0.0130	0.0138
8	0.0101	0.0115

Dans ce tableau sont aussi rapportées les valeurs obtenues par un model FEM/FEM, dans lequel le fluide aussi bien que la structure sont discrétisés en éléments finis. Ces résultats illustrés dans le tableau ci-dessus montrent que La formulation de couplage FEM/BEM fournit des résultats pratiquement similaires à ceux des éléments finis,

4.3.2 Couplage avec ballotement

Dans le couplage avec ballotement de la surface libre du fluide, la condition aux (4.14) devient :

$$q_s = -\frac{1}{g}\ddot{P}_s \tag{4.22}$$

Sur la surface libre Γ_4, la condition la plus simple est de considérer une pression atmosphérique (p = 0) et de négliger les ondes de surface. Toutefois, les variations de Pressions à l'intérieur du réservoir engendrent des fluctuations de la surface libre [41]. Une idée approximative pour inclure les effets des ondes de surface consiste en la considération d'une surface moyenne pour laquelle toute élévation ou abaissement de la surface actuelle d'une hauteur h se traduit par une variation de pression pouvant être prise isostatique :

$$P_s = \rho g h \tag{4.23}$$

L'application de l'équation dynamique pour ce cas donne :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho\ddot{h} \tag{4.24}$$

Compte tenu de l'équation (4.23) avec deux dérivations par rapport au temps, cette condition devient :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{g}\ddot{P}_s \tag{4.24}$$

Cette condition et connue sous le nom de condition d'ondes de surface linéarisée. Or $\frac{\partial p}{\partial n} = q_s$ représente le flux à la surface. En remplaçant q_s dans l'équation (4.12) par $-\frac{1}{g}\ddot{P}_s$ et q_i par $-\rho\ddot{U}$,le système couplé des vibrations libres s'écrit en ajoutant l'équation de la structure (4.11), comme suit :

$$\begin{bmatrix} K^* & 0 & Q^* & 0 \\ 0 & H_{ss} & H_{si} & H_{sf} \\ 0 & H_{is} & H_{ii} & H_{if} \\ 0 & H_{fs} & H_{fi} & H_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P_s \\ P_i \\ P_f \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 & 0 \\ \rho G_{si} & \frac{1}{g}G_{ss} & 0 & 0 \\ \rho G_{ii} & \frac{1}{g}G_{is} & 0 & 0 \\ \rho G_{fi} & \frac{1}{g}G_{fs} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P}_s \\ \ddot{P}_i \\ \ddot{P}_f \end{Bmatrix} = 0 \tag{4.25}$$

Ce système n'es pas symétrique et contient des zéros en diagonale, il est par conséquent difficile de chercher ses valeurs et vecteurs propres avec les algorithmes classiques. Il est tout de même un problème physique bien définie, de ce fait, les modes propres existent, la bibliothèque ARPACK [42], résout bien ce type de problème en se basant sur la méthode ARNOLDI IRAM (Implicitly Restarted Arnoldi Method)

4.3.3 Application numérique

On considère le même réservoir défini dans la section 4.2.

4.3.3.1 Modes propres du ballotement

Les valeurs des périodes propres du ballotement dans le cas d'un réservoir flexible, sont données dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2.Valeurs des périodes propres de ballotement (structure flexible)

mode	e=50 cm	e=25 cm
1	5.4049	5.4382
2	3.4480	3.4922
3	2.9183	2.9554
4	2.5224	2.5391

Comparativement aux valeurs trouvées avec ballotement, dans le cas d'une structure rigide (chapitre 2, tableau 2.1), on voit que la flexibilité des parois du réservoir affecte peu les valeurs des périodes propres.

4.3.3.2 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle est réévaluée pour le système fluide-structure, avec prise en compte du ballotement et la flexibilité des parois, la figure 4.2 montre les déplacements max obtenu au niveau des parois, la figure 4.3 et 4.4 montrent respectivement, les pressions au fond et à la surface de réservoir.

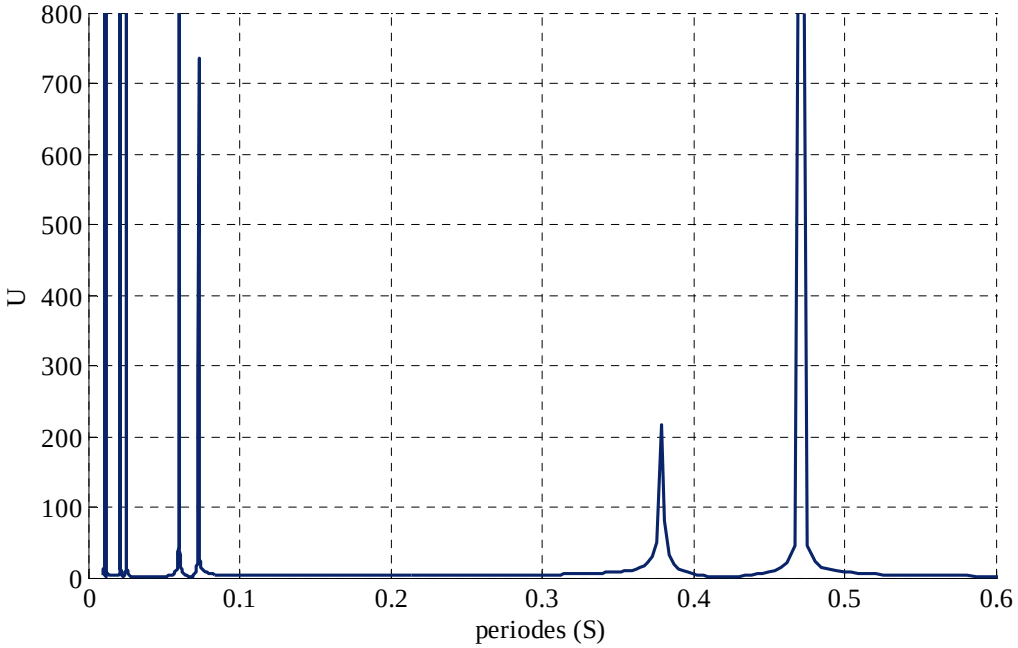


Figure 4. 2.déplacement max en tête du réservoir

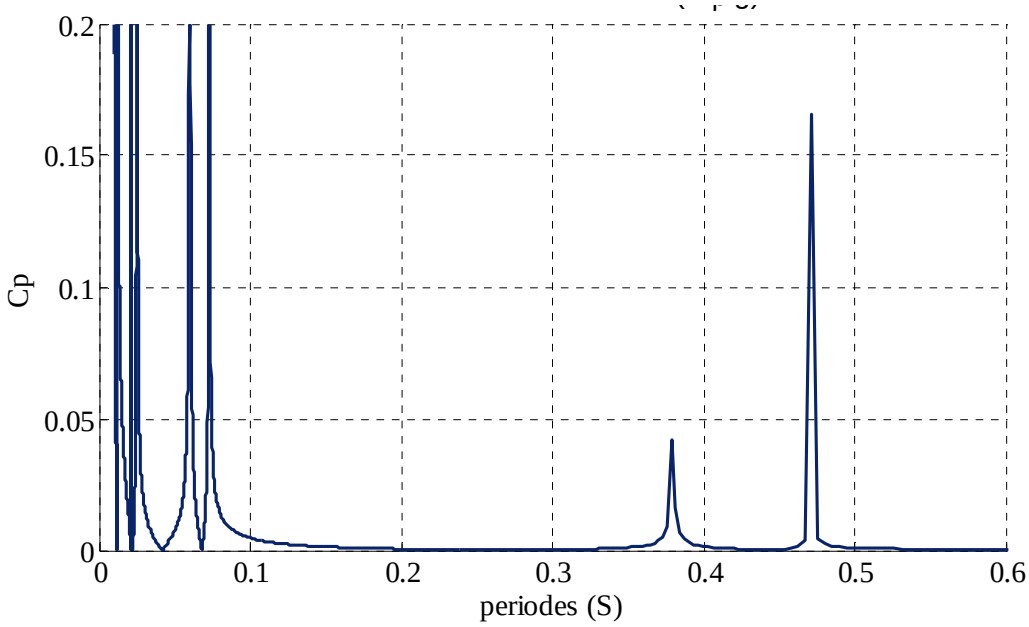


Figure 4. 3.pression au fond du réservoir $(P/\rho g)x10^{-6}$

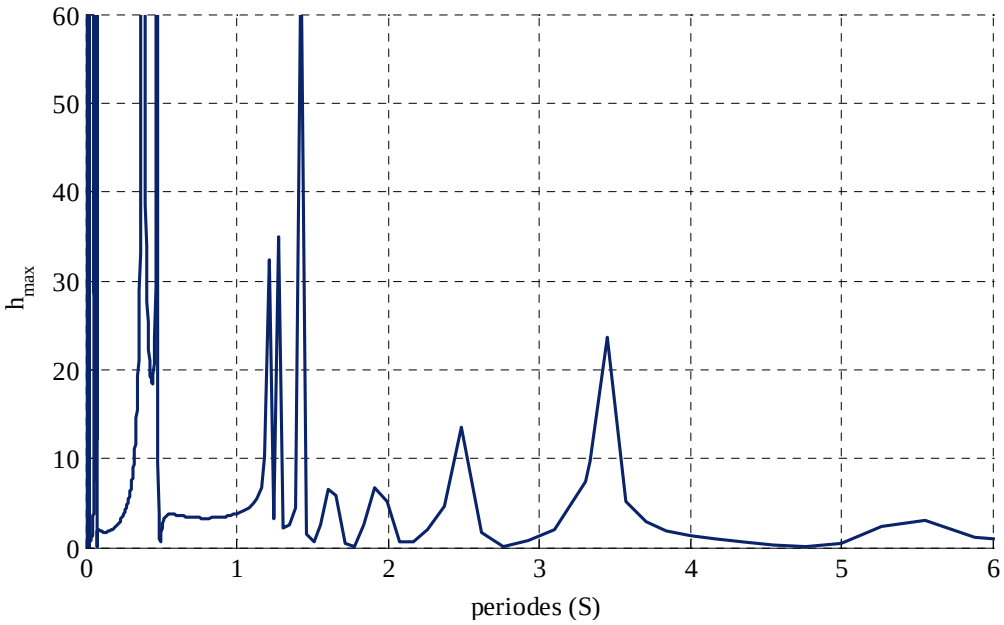


Figure 4. 4.surélévations de la surface libre de l'eau $(P/\rho g)$

A partir de ces figures, on retrouve les modes propres de vibration qui correspond aux pics des courbes.

4.3.3.2 Modes propre de la structure

Les valeurs des périodes propres de la structure du réservoir, avec les coefficients de participation modal (α)qui leurs corresponds, sont données dans le tableau 4.3. Et les formes des modes propres de la structure sont représentées sur la figure 4.5

Tableau 4.3 Valeurs des périodes propres de la structure (avec ballotement du fluide)

mode	e=50 cm	$\boldsymbol{\alpha}$
1	1.21	83414.01
2	0.47	292507624.34
3	0.38	3692928167.48
4	0.07	13033004321.92

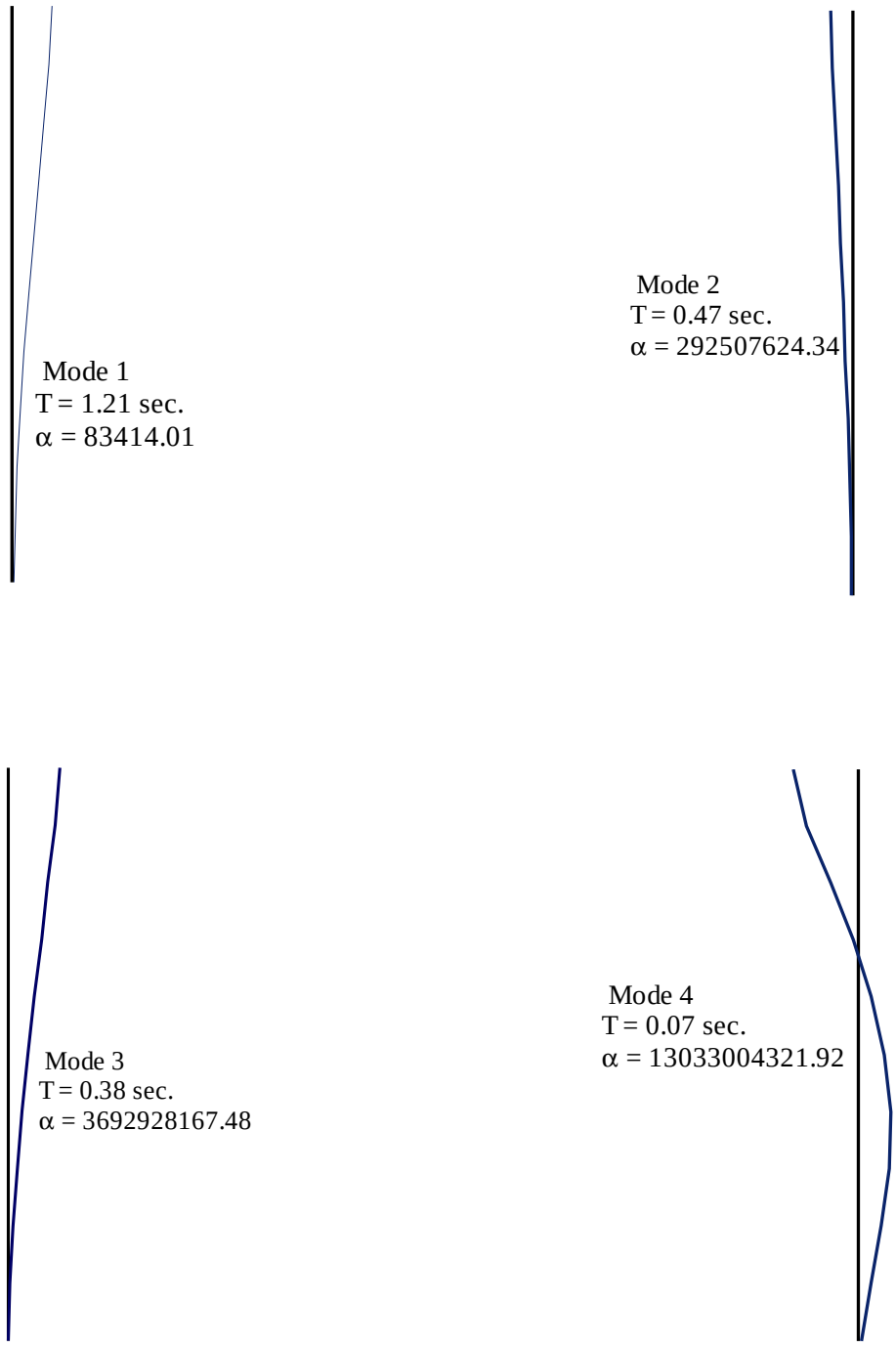


Figure 4. 5.Forme des modes propre de la structure

Compartiment aux périodes trouvées sans prise en compte du ballotement tableau 4.1, on voit que les périodes sont fortement influencées par le ballotement de la surface libre.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la prise en compte des effets conjugués du ballotement et de la flexibilité des parois, pose des difficultés dans l'évaluation des modes propres de vibration libre.
Le système algébrique obtenu par le couplage FEM /BEM, est non symétrique et contient des zéros en diagonale. Le calcul de ses valeurs et vecteurs propres a été effectuée à l'aide de la méthode d'ARNOLDI Package. Les résultats obtenus ont montrés que la flexibilité des parois influe peut sur les modes de ballottements, par contre l'effet du ballotement sur les périodes du système couplé fluide-structure est très fort.

Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire consiste en la modélisation numérique de l'interaction fluide-structure, par couplage éléments finis-éléments de frontière (FEM/BEM). Un modèle numérique de couplage est proposé, dans lequel, le domaine fluide est discrétisé en éléments de frontière (BEM) et la structure est discrétisée en éléments finis.
Dans un premier lieu, nous avons exposé les méthodes qui prennent en compte l'interaction fluide-structure, et nous avons étalé l'intérêt du choix du couplage FEM/BEM.

En second lieu, un modèle numérique en éléments de frontière a été présenté et appliqué à la modélisation des fluides et à l'évaluation du ballottement dans des réservoirs rectangulaires. Le domaine fluide, considéré incompressible, a été décrit par un champ de pression avec une surface libre idéalisée par la condition d'ondes de surface linéarisée. La formulation en éléments de frontière proposée, conduit à un système matriciel contenant une matrice masse et une matrice rigidité. Elle permet ainsi de calculer les modes propres et d'évaluer d'une manière très rapide la réponse temporelle par superposition modale, en utilisant uniquement une quinzaine de modes. Le modèle a été validé par des solutions analytiques applicables dans le cas de parois rigides. La qualité des résultats obtenus ont clairement montré la précision et l'efficacité du modèle proposé.

L'utilisation du couplage entre des deux méthodes : méthode des éléments de frontières et méthode des éléments finis, permet de tirer entre autres, les quelques conclusions suivantes :

- Lors de la discrétisation du fluide en éléments de frontière linéaire, des traitements numériques particuliers ont été nécessaires pour prendre en compte les discontinuités géométriques au niveau des coins du domaine.
- La méthode des éléments de frontière a permis de réduire d'une dimension la partie fluide du problème d'interaction fluide-structure. Ceci a conduit à des gains en maillage, temps et mémoire de calcul.
- Comparativement à la méthode des éléments finis, les matrices résultant de la formulation par éléments de frontière sont non-symétriques et complétement remplies ; elles doivent être entièrement enregistrées en mémoire. Cependant, ce n'est pas un sérieux inconvénient, car pour obtenir un même niveau de précision qu'en éléments finis, la méthode des éléments de frontière requière un nombre de nœuds et d'éléments relativement très faible.
- Dans la discrétisation de la structure du réservoir rectangulaire, il a été montré que lorsque la longueur est suffisamment grande par rapport à

la largeur, l'utilisation des éléments poutre permet de reproduire le comportement flexionnel d'une tranche unitaire des parois latérales avec une précision satisfaisante. Cette discrétisation est très économique du point de vue numérique.

- L'une des difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre du couplage FEM/BEM en interaction fluide-structure, provient du fait que la méthode des éléments de frontières, utilise comme variable de base, les pressions nodales et les gradients des pressions, alors que la méthode des éléments finis utilise les déplacements et les rotations. Il a été de ce faite nécessaire de procéder à la condensation de certains degrés de liberté pour aboutir une équivalence entre les deux systèmes algébriques découlant des deux méthodes.
- En dernier lieu, nous avons montré que la prise en compte des effets conjugués du ballotement et de la flexibilité des parois, pose des difficultés dans l'évaluation des modes propres de vibration libre. Le système algébrique obtenu par le couplage FEM/BEM, est non symétrique et contient des zéros en diagonale. Le calcul de ses valeurs et vecteurs propres a été effectué en utilisant ARNOLDI Package. Les résultats obtenus ont montrés que la flexibilité des parois influe peu sur les modes de ballottements, par contre l'effet du ballotement sur les périodes du système couplé fluide-structure est très fort.

Bibliographie

[1] A. Seghir, G. Bonnet et A. Tahakourt, «Liquid filled rectangular reservoir analysis using a coupled FEM/BEM model,» *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN,* 2011.

[2] A. Seghir, Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure, application à l'étude des barrages poids en béton, Thèse de doctorat, Université de Béjaia, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée., 2010.

[3] D. Boumaiza et B. Aou, «Proposition d'une technique itérative de relaxation pour le couplage FEM-BEM : application en mécanique de la rupture,» *Communication Science & technologie N° 12.,* 2013.

[4] O. Zienkiewicz, R. Taylor et J. Zhu, «Finite Element Method -Its Basis and Fundamentals,» *Elsevier,* 2005.

[5] T. Katsikadelis et John, Boundary Elements Theory and Applications., Department of civil engineering. National Technical University of Athens, Greece.: ELSEVIER, 2002.

[6] C. Brebbia et J. Dominguez, Boundary elements-An introductory course, Southampton: computational Mechanics Publications, 1998.

[7] H. M. Koh, J. K. Kim et J.-H. Park, «Fluid–structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM–FEM and comparison with test results,» *Earthquake Engineering And Structural Dynamics, Vol. 27,,* vol. 27, n° %1109-124, pp. 109-124, 1998.

[8] X. Chaojin et C. Spyrakos, «Seismic analysis of lock-soil-fluid systems bay hybrid BEM-FEM,» *Soil Dynamics and Earthquake Engineering 21 (ELSEVIER),* pp. 259-271, 2001.

[9] G. Algreane, S. Osman, O. Karim et A. Kasa, «Behavior of elevated concrete water tank subjected to artificial ground motion,» *University Kebangsaan Malaysia, Bangi, Selangor, Malaysia.EJGE.Vol.16 , Bund. D.,* 2011.

[10] LIVAOGLU.R, «Investigation of seismic behavior of fluid–rectangular tank–soil/foundation systems in frequency domain,» *Soil Dynamics and Earthquake Engineering,* p. 28 (132–146), 2007.

[11] R. LIVAOGLU et A. DOGANGUN, «An investigation about the soil-structure interaction effects on sloshing response of the elevated tanks,» *The 14th World Conference on Earthquake Engineering. chine.,* 2008.

[12] HOUSNER.G.W, «The dynamic behaviour of water tanks,» *Bulletin of the seismological society of AMERICA, Vol.53 (N°1,1963,PP.381-387).,* 1963.

[13] M. Bonnet, Equations intégrales et éléments de frontières- Applications en mécanique des solides et des fluides, paris: CNRS Editions /Editions Eyrolles, 1995.

[14] M. Bonnet et F. Attilio, Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis, Editions de l'école polytechnique, 2010.

[15] J. Bordón, J. Aznárez et O. Maeso, «A 2DBEM–FEM approach for time harmonic fluid–structure interaction analysi sof thin elastic bodies,» *Engineering AnalysiswithBoundaryElements,* pp. 19-29, 2014.

[16] X. Zhang et X. Zhang, «Coupling FEM and discontinuous BEM for elastostatics and fluid–structure interaction,» *Engineering analysis with boundary elements - Elsevier,* pp. 719-725, 2002.

[17] A. Seghir, Cours : Méthode des éléments finis, Département de Génie Civil, Université A. Mira de Béjaia.

[18] J. Behar et P. Tamagno, Axe Elément finis, Ecoulement autour d'un obstacle par la méthode des éléments de frontières, EMSE, 2010..

[19] A. Beker, «The boundary Element Method in Engineering- A complete course,» *McGraw-HILL Book company,* 1992.

[20] G. Hsiao.C, «Boundary Element Method,» *An Overview,* 2004.

[21] H. Lemmonier, Note de cours d'applications de la méthode de éléments de frontières aux les écoulements diphasiques et aux les techniques de mesure correspondantes, Ecoles CEA/EDF/INRA, décembre1996 (mise à jour de décembre 2001).

[22] D. Xavier, «Méthodes de couplage éléments finis / frontières avec accélération pour l'équation d'induction,» *ULB,* 2009/2010.

[23] F. Frey et M.-A. Studer, «Analyse des structures et milieux continus.Volume5,» *Presses Polytechniques et universitaires romandes.Lausanne,* 2003..

[24] S. Chaillat, M. Bonnet et J. Semblat, Notes de cours des Méthodes multipole rapide pour les éléments de frontières en électrodynamique tridimensionnelle. Applications à la propagation d'ondes sismiques., Paris: Ecoles polytechniques, 2007.

[25] G. Bonithon, Thèse doctorat de Méthodes numériques innovantes pour la simulation thermique de composantes électronique, paris: ENSAM, 2décembre2010.

[26] W. W. Gaul L, «A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction.,» *Engineering Analysis With Boundary Elements ,* pp. 26:629-636, 2002.

[27] A. H. Lehmann L, «Dynamic structure-soil-structure interaction applying the symmetric Galarkin boundary elements method (SGBEM),» *Mechanics Research Communication,* pp. 297-304, 2001.

[28] C. Chien, Y. CHen et C. Chuang, «Dual reciprocity BEM analysis of 2D transient elastodynamic problems by timediscontinuous Galerkin FEM,» *Engineering Analysis With Boundary Elements,* pp. 611-624, 2003.

[29] Küçükarslan.S, «Dynamic Analysis of dam-reservoir-fondation interaction in time domain,» *Computational Mechanic ,* pp. 274-281, 2004.

[30] X. Zeng et J. Bielak, «Stable symmetric finite element-boundaru integral coupling method for fluid-structure interface,» *Engineering Analysis With Boundary Element,* pp. 79-91, 1995.

[31] J. Tao, H. Yuying et Q. Qin, «A mixied FE-BE method for coupled vibration of gravity dam-reservoir system with variable water depth,» *Acta Mechanica solida sinica ;11(2),* pp. 123-132, 1998.

[32] M. Yazdchi, N. Kalili et S. Valliappan, «Dynamic soil-structure interaction analysis via coupled finite element-boundary element,» *Soil Dynamic and Eaethquake Engineering;18,* pp. 499-517, 1999.

[33] A. Seghir, A. Tahakourt et G. Bonnet, «Coupling FEM and symmetric BEM for dynamic interaction of dam-reservoir systems,» *Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 33,N°10, p.,* pp. 1201-1210, 2009.

[34] V. Estorff et C. Hagen, «Iterative coupling of FEM and BEM in 3D transient elastodynamics.,» *Engineering Analysis with boundary Elements,* pp. 611-622, 2006.

[35] C. Brebbia et J. Dominguez, Boundary elements-An introductory course, Southampton: computational Mechanics Publications, 1998.

[36] Mouhoubi.S, Thèse Doctorat de couplage symétrique. Eléments Finis-Eléments de frontière en mécanique:Formulation et implantation dans un code éléments Finis., Université de Limoges., 19 Décembre 2000..

[37] O. Zienkiewicz, R. Taylor et J. Zhu, «Finite Element Method -Its Basis and Fundamentals,» *Elsevier,* 2005.

[38] G. Wu, Q. Ma et R. Taylor, «Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element methods,» *Appl. Ocean Res,vol. 20, pp. 337–355,,* 1998.

[39] S. Mitra et K. Sinhamahapatra, «2D simulation of fluid-structure interaction using finite element method,» *Finite Elements in Analysis and Design,* vol. 45, pp. 52-59, 2008.

[40] R. Clough et J. penzien, dynamics of structures third edition, Computer ans Structures, 2003.

[41] A. Seghir, Invistigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-éléments infinis, thése magister ,département hydraulique ,ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE, 1999.

[42] R. Lehoucq, D. Sorensen et Yang.C, ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods., http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/.

[43] PECKER.A, Dynamique des structures et des ouvrages, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées(ENPC)., 2006.

[44] D. Ning, W. Song, B. Teng et X. Zhuo, «Numerical Simulation of Sloshing Waves in a 3D Tank Based on an Image Green Function Method,» *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference,* pp. 19-24, 2011.

ANNEXE

Communication Présentée Aux RNGC'2014 Bejaia

Modélisation par éléments de frontière(BEM) du ballottement des fluides stockés dans des réservoirs rectangulaires

Abderrahmane BAOUCHE[1],Abdelghani SEGHIR[1],Abdelhalim BOUROUBA[1],Abdelnasser DAHMANI[2]

[1]*Département de Génie Civil Université A. Mira de Bejaia, Route de Targua Ouzemour, Bejaia 06000*
[2] *Laboratoire des Mathématiques Appliquées (LMA) Université A. Mira de Béjaia, Route de Targua Ouzemour, Bejaia 06000*

Résumé :

Dans ce travail, on s'intéresse à la détermination des modes propres de ballottement et de la réponse temporelle des liquides stockés dans des réservoirs rectangulaires en utilisant un modèle d'éléments de frontière (BEM). Le domaine fluide, décrit par un champ de pression, est considéré incompressible avec une surface libre idéalisée par la condition d'ondes de surface linéarisées. Le chargement dynamique est appliqué en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations et les pressions à l'interface fluide-solide. Les résultats obtenus ont été validés avec des solutions analytiques applicables aux cas de parois rigides. Il a été montré que le modèle proposé permet de reproduire avec grande précision les résultats analytiques.

Mots-clés : modélisation, éléments de frontière, réservoirs, ballottement

1. Introduction :

Le phénomène de ballottement est rencontré dans de nombreux problèmes d'ingénierie, à savoir, les oscillations de liquides dans les réservoirs de stockage, les fluctuations de combustibles liquides dans les navires, les avions et les engins spatiaux, les mouvements de liquides et l'écoulement de l'eau sur les ponts des navires,…etc. De ce fait, la prise en compte de ballotements dans la modélisation des réservoirs de stockage est d'une grande importance théorique et pratique. La sécurité de la structure de ces réservoirs peut être affectée par ce phénomène sous de fortes excitations ou en cas de résonnance (Ning, et al. 2011). De plus, si les liquides stockés contiennent des substances toxiques, un accidentel débordement conduit souvent à des conséquences fatales sur l'environnement.

Pour la discrétisation, plusieurs méthodes sont disponibles actuellement permettant d'offrir aux ingénieurs des solutions précises sans dépenser beaucoup d'efforts ou de temps de calcul. Parmi ces méthodes, on distingue celle des éléments finis (MEF), qui est la plus répandue dans le domaine de l'ingénierie et de la recherche scientifique, et qui présente l'outil standard le plus puissant pour l'analyse de plusieurs types de problèmes de la mécanique des solides, la mécanique des fluides, l'aérodynamique, …etc. (Boumaiza et Aou 2013, Zienkiewicz, Taylor et Zhu 2005). Cependant, la méthode des éléments de frontières (BEM) est une alternative attirante puisqu'elle est non seulement particulièrement bien adaptéeaux domaines ouverts, mais aussi, elle permet de réduire la taille des matrices résultantes puisqu'elle réduit de un la dimension du problème traité (Katsikadelis et John 2002, Brebbia et Dominguez 1998).

Dans certaines situations, un couplage des deux méthodes permet de contourner leurs inconvénients tout en exploitant leurs avantages respectifs. Par exemples, dans beaucoup de problèmes faisant intervenir des domaines non bornés, la méthode des éléments de frontière (BEM) peut fournir des conditions appropriées pour représenter la partie infinie (Seghir, Bonnet et Tahakourt 2011), alors que la méthode des éléments finis peut tenir compte de la complexité géométrique et matérielle du champ proche du domaine d'étude. De plus, la BEM est aussi intéressante pour la discrétisation des zones ayant une concentration de contraintes ou de potentiels, alors que la MEF est la plus adéquate dans les cas de non homogénéité, anisotropie et non linéarité. Donc, il est important de savoir modéliser un système en utilisant aussi bien la BEM que la MEF selon les propriétés mécaniques et géométriques du problème étudié (Koh, Kim et Park 1998, Chaojin et Spyrakos 2001).

Dans le présent travail, on s'intéresse d'une part, à la détermination des modes propres de ballottement de la surface libre, des liquides stockés dans des réservoirs rectangulaires, et d'autre part, au calcul de la réponse temporelle, en terme de pressions hydrodynamiques, des différents points de cette surface libre en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM). Dans ce cas précis, l'avantage principal de cette méthode réside dans son aptitude de fournir des solutions sur la frontière en la discrétisant en un ensemble d'éléments linéiques tout en évitant le maillage du domaine. Le système d'équations découlant ainsi de cette formulation est à masse, rigidité et forces équivalent à celui de la MEF mais avec un nombre de nœuds et d'éléments relativement très petit, ce qui permet de réduire considérablement la taille des matrices résultantes, évidemment des gains importants en mémoire et en temps de calcul.

2. Formulation en équations intégrales de frontière (présentation du modèle)

On considéré un liquide contenu dans un réservoir rectangulaire (figure 1),décrit par un champ de pression$p$ qui satisfait, sous hypothèse de fluide incompressible, l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta P = 0 \tag{1}$$

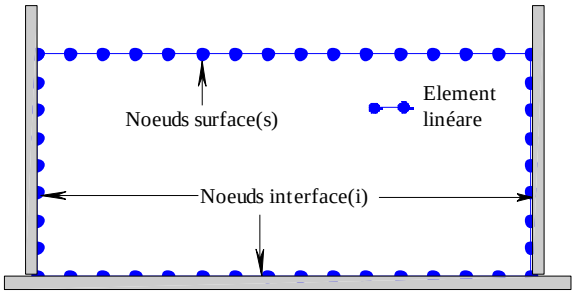


Figure 1.Géométrie du réservoir et discrétisation en éléments de frontière

La formulation en équations intégrales de frontière du problème s'écrit comme suit(Beker 1992, Bordón, Aznárez et Maeso.O 2014) :

$$k(x)p(x) = \int_{\Gamma} g(x,y)\frac{\partial p(y)}{\partial n(y)}d\Gamma - \int_{\Gamma} p(y)h(x,y)\,d\Gamma \tag{2}$$

Dans l'équation (2)$g(x,y) et\ h(x,y)$désignent la fonction de Green et sa dérivée, respectivement :

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\ ; h(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial n} \tag{3}$$

avec

n est la normal sortante au contour Γ du domaine fluide.
$r$est la distance radiale entre le point$x$source d'application de l'impulsion Dirac et le point courant$y$.

Le terme $k(x)$ prend la valeur 1 si le point x se trouve à l'intérieur du domaine, et 0 si x est à l'extérieur. Lorsque le point x se rapproche de la frontière Γ, $k(x)$ est défini par la Limite suivante lorsqu'une surface sphérique (3D) (ou une courbe circulaire en 2D) " entourant le point x sur un rayon ε qui tend vers zéro

$$k(x)p(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(x,y)}{\partial n}\partial\Gamma \tag{4}$$

On a

$$k(x) = \frac{1}{2}\ \text{pour une frontière régulière (lisse)}$$

$$k(x) = \frac{\theta}{2\pi}\ \text{Dans le cas où la frontière n'est pas régulière}$$

avecθdésigne l'angle interne entre deux segments de frontière consécutifs.
On note$q(y)$ la dérivée de$p(y)$ par rapport à la normale n :

$$q(y) = \frac{\partial p(y)}{\partial n} \tag{5}$$

L'expression discrète de l'équation (2)en un point i de la frontière s'ecrit(Brebbia et Dominguez 1998):

$$k^i p^i + \sum_{j=1}^{n_e}\left[\int_{\Gamma_j} hNd\Gamma_j\right]p^j = \sum_{j=1}^{n_e}\left[\int_{\Gamma_j} gNd\Gamma_j\right]q^j \tag{6}$$

Soit sous forme matricielle :

$$HP = GQ \tag{7}$$

Où H et G sont les matrices classiques de la méthode des éléments de frontière. En séparant les vecteurs des inconnues en deux parties : Une partie surface notée par l'indice "s"et une autre interface notée par l'indice "i" comme montré sur la figure (1) ci-dessus.

Les matrices H et G sont partitionnées comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_{ss} & H_{si} \\ H_{is} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_s \\ P_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ss} & G_{si} \\ G_{is} & G_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_s \\ Q_i \end{Bmatrix} \quad (8)$$

La condition de surface libre permet d'écrire les gradients des pressions en fonction des dérivées secondes par rapport au temps(Seghir, Bonnet et Tahakourt 2011, Zienkiewicz, Taylor et Zhu 2005) :

$$Q_s = -\frac{1}{g}\ddot{P}_s \quad (9)$$

La condition à l'interface fluide-structure relie les gradients de pressions aux accélérations imposées par les mouvements des parois rigides du réservoir (Zienkiewicz, Taylor et Zhu 2005, Seghir, Bonnet et Tahakourt 2011) :

$$Q_i = -\rho\ddot{U} \quad (10)$$

La deuxième équation du système matriciel(8) permet de condenser le vecteur pressions s'exerçant à l'interface fluide-structure comme suit :

$$P_i = -H_{ii}^{-1}H_{is}P_S - \frac{1}{g}H_{ii}^{-1}G_{is}\ddot{P}_s - \rho H_{ii}^{-1}G_{ii}\ddot{U} \quad (11)$$

En remplaçant dans la première équation, on trouve le système d'équations à masse, rigidité et forces équivalent à celui de la MEF suivant :

$$M\ddot{P}_s + KP_s = F \quad (12)$$

avec:

$$M = \frac{1}{g}(G_{ss} - H_{si}H_{ii}^{-1}G_{is}) \quad (13)$$

$$K = (\mathrm{H_{ss}} - \mathrm{H_{si}}\mathrm{H_{ii}^{-1}}\mathrm{H}_{is} \quad (14)$$

$$F = -\rho(G_{si} - H_{si}H_{ii}^{-1}G_{ii}) \quad (15)$$

3. Application

Comme exemple d'application, on considère un réservoir rectangulaire de hauteur $H = 10\ m$ et de longueur$L = 20\ m$, figure (1).Le fluide du réservoir est supposé comme étant incompressible de masse volumique $\rho = 1000\ Kg/m^3$

3.1. Analyse modale

Après condensation de la pression à l'interface fluide structure on peut calculer les modes propres du ballotement de la surface du fluide par l'équation suivante :

$$(K - \omega^2 M)P_S = 0 \quad (16)$$

Qui sont comparés aux valeurs analytiques données par(Wu, Ma et Taylor 1998)

$$\omega_n^2 = g\frac{n\pi}{L}tanh(\frac{n\pi}{L}H) \quad (17)$$

Les valeurs des quatre premières périodes sont montrées dans le tableau 1, avec les différences entre les valeurs calculées et les valeurs analytiques. Les formes des modes du ballotement sont représentées sur la Figure 2.

On remarque bien que les valeurs calculées sont presque identiques aux valeurs analytiques, ce qui montre que le model en éléments de frontière basé sur la rigidité et masse équivalente mène à des résultats précis.

Tableau 1. Valeurs des périodes propres de ballotement

mode	Exacte	BEM	Erreur %
1	5.3704	5.3702	0.0054
2	3.5916	3.5910	0.0173
3	2.9229	2.9218	0.0378
4	2.5308	2.5291	0.0660

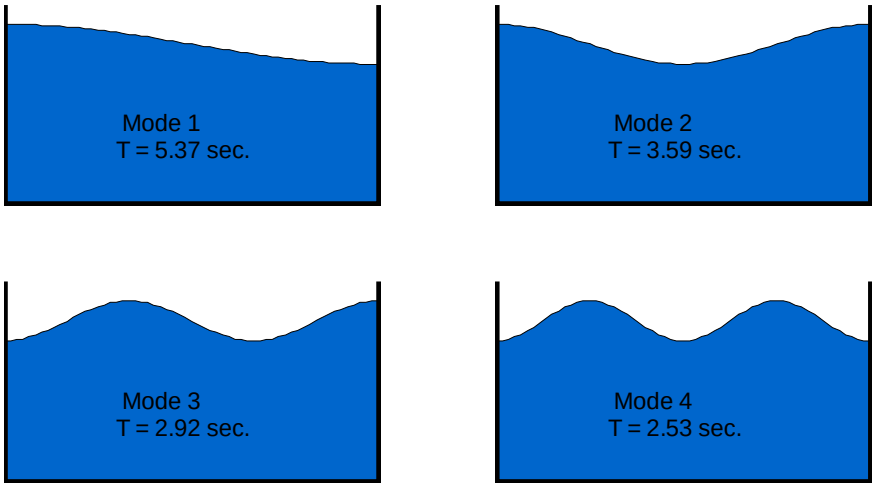


Figure 2. Forme des Modes du ballotement

3.2. Réponse temporelle

Dans une deuxième analyse, on procède à l'étude de la réponse temporelle des fluctuations de la surface libre du fluide sous l'effet d'une excitation harmonique horizontale $x_g = X_0\, sin(\omega t)$appliquée à la base du réservoir. La solution a été calculée avec la méthode de superposition modale, dans laquelle quinze modes (15) ont été pris en compte. Les résultats obtenus sont quasi identiques à ceux de la solution analytique de(Wu, Ma et Taylor 1998) :

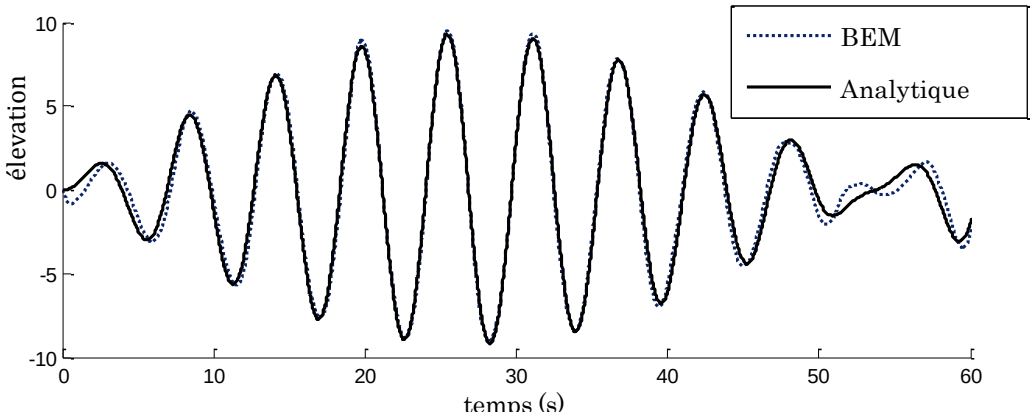


Figure 3.Réponse temporelle en fluctuations de la surface libre

3.3. Réponse fréquentielle

La dernière analyse sous l'hypothèse de réservoir rigide concerne la réponse en fréquence des fluctuations de la surface libre du fluide. Pour chaque valeur de la fréquence d'excitation allant de $0.1\omega_1$à $3\omega_1$, les élévations maximales h_{max}de la surface libre sont évaluées en fonction de la période d'excitation puis comparées à celles de la solution analytique de(Wu, Ma et Taylor 1998). Les courbes obtenues sont représentées sur la figure (4). Ce résultat montre clairement l'apparition de résonances pour un fluide en ballottement sous l'hypothèse d'un réservoir rigide. Les deux premiers piques coïncident exactement avec les fréquences du premier et troisième mode de ballottement. Pour les basses fréquences (longues périodes), les résultats semblent s'écarter quelque peu de la solution analytique sans toutes fois perdre de leur qualité.

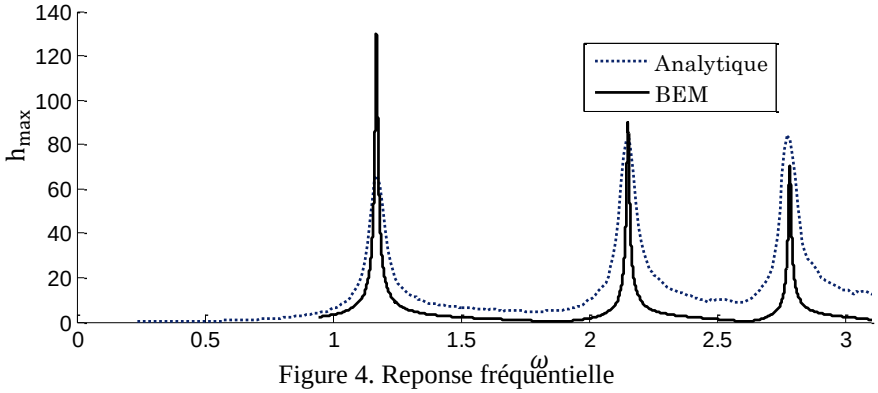


Figure 4. Reponse fréquentielle

4. Conclusion

Dans ce travail un modèle numérique en éléments de frontière a été établi pour l'évaluation du ballottement des fluides stockés dans des réservoirs rectangulaires. Le domaine fluide considéré incompressible, a été décrit par un champ de pression avec une surface libre idéalisée par la condition d'ondes de surface linéarisée. La formulation en éléments de frontière proposée ici, conduit à un système matriciel contenant une matrice masse et une matrice rigidité. Elle permet ainsi de calculer les modes propres et d'évaluer d'une manière très rapide la réponse temporelle par superposition modale en utilisant uniquement une quinzaine de modes. Le modèle a été validé par des solutions analytiques applicables dans le cas de parois rigides. La qualité des résultats obtenus ont clairement montré la précision et l'efficacité du modèle proposé.

5. Références

Beker, A.A. The boundary Element Method in Engineering- A complete course. McGraw-HILL Book company, 1992.

Bordón, J.D.R., J.J. Aznárez, et Maeso.O. «A 2DBEM–FEM approach for time harmonic fluid–structure interaction analysi sof thin elastic bodies.» *Engineering AnalysiswithBoundaryElements*, 2014: 19-29.

Boumaiza, D., et B. Aou. «Proposition d'une technique itérative de relaxation pour le couplage FEM-BEM : application en mécanique de la rupture.» *Communication Science & technologie N° 12.*, 2013.

Brebbia, CA., et J. Dominguez. Boundary elements-An introductory course. Southampton: computational Mechanics Publications, 1998.

Chaojin, Xu., et C.C Spyrakos. «Seismic analysis of lock-soil-fluid systems bay hybrid BEM-FEM.» *Soil Dynamics and Earthquake Engineering 21 (ELSEVIER)*, 2001: 259-271.

Katsikadelis, T., et John. Boundary Elements Theory and Applications. Department of civil engineering. National Technical University of Athens, Greece.: ELSEVIER, 2002.

Koh, H. M., J. K. Kim, et J.-H. Park. «Fluid–structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM–FEM and comparison with test results.» *Earthquake Engineering And Structural Dynamics, Vol. 27,* (Earthquake Engineening. Structural. Dynamics.) 27, n° 109-124 (1998): 109-124.

Ning, D., W. Song, B. Teng, et X Zhuo. «Numerical Simulation of Sloshing Waves in a 3D Tank Based on an Image Green Function Method.» *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference* (International Society of Offshore and Polar Engineers.), 2011: 19-24.

Seghir, A., G. Bonnet, et A Tahakourt. «Liquid filled rectangular reservoir analysis using a coupled FEM/BEM model.» *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN*, 2011.

Seghir.A., Tahakourt.A.,Bonnet.G. «Coupling FEM and symmetric BEM for dynamic interaction of dam–reservoir systems.» *Engineering Analysis with Boundary Elements 33 (ELSEVIER)*, 2009.

Wu, G.X, Q.W. Ma, et R.E. Taylor. «Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element methods.» *Appl. Ocean Res,vol. 20, pp. 337–355,*, 1998.

Zienkiewicz, O.C., R.L. Taylor, et J.Z Zhu. «Finite Element Method -Its Basis and Fundamentals.» *Elsevier*, 2005.

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation numérique de l'interaction fluide-structure par couplage éléments finis – éléments de frontière (FEM/BEM). Le domaine fluide est discrétisé par éléments de frontière et la structure par éléments finis. Les déplacements de la structure et les pressions hydrodynamiques dans le fluide sont utilisés comme variables nodales dans les modèles numériques développés. Le problème d'interaction est pris en compte en respectant l'équilibre des efforts à l'interface fluide-structure. La formulation a été d'abord validée avec des exemples simples, ensuite elle a été appliquée avec succès au cas des réservoirs rectangulaires. Elle nous a permet de déterminer les modes propres du système couplés, la réponse dans le domaine temporel et fréquentiel tout en tenant compte de la flexibilité des parois et du ballottement.

Mots-clés : modélisation numérique, éléments finis, éléments de frontière, couplage, interaction fluide- structure.

Abstract

In this work, we deal with fluid-structure interaction modeling by coupling finite element and boundary element methods (FEM/BEM). The fluid domain is discretized by boundary elements while the structure is discretized by finite elements. The structural displacements and the hydrodynamic pressures in the fluid are used as nodal variables in the developed numerical models. The interaction is taken into account by satisfying dynamic equilibrium condition at the fluid-structure interface. The formulation was first validated with simplified examples and then, it has been successfully applied to the case of rectangular tanks. It allowed to evaluate the eigenmodes of coupled system as well as its dynamic response in frequency and time domains with taking into account wall flexibility and free surface

Keywords: numerical modeling, finite elements, boundary elements, coupling, fluid-structure interaction.

ملخص

في هذا العمل نهتم بالنمذجة العددية لمشكل التداخل سائل-هيكل، بالتركيب بين العناصر المحددة - العناصر الحدودية، المجال المائع يجزئ الى عناصر حدودية و الهيكل يجزئ الى عناصر محددة. تستخدم حركات الهيكل و الضغط الهيدروديناميكي في المائع كمتغير عقدي في النماذج العددية المقدمة، مع أخذ بعين الاعتبار مشكل التداخل بمراعاة توازن الجهود على واجهة المائع-الهيكل. في بداية الامر تم التحقق من الصيغة بواسطة أمثلة بسيطة، بعدها تم تطبيقها بنجاح في حالة خزان مستطيل، مما سمح لنا باستخراج الاهتزازات الذاتية والاستجابات الديناميكية مع الاخذ بعين الاعتبار مرونة الجدران وتموجات السطح السائل.

كلمات مفتاحية : نمذجة عددية ، العناصر المحددة ، العناصر الحدودية ،التركيب ، التداخل مائع-هيكل