

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire

Présenté par *M^{elle}*. BOUDRA Meryem

En vue de l'obtention du diplôme de Magistère en physique

Option : Physique Théorique

Thème

Étude Hamiltonienne de l'Interaction Onde-Particules

Soutenu publiquement devant le jury suivant :

Président	Mr KERKAR Moussa	Professeur	U.A.M. Béjaïa
Examineur	Mr HOUARI Abdeslam	M C "A"	U.A.M. Béjaïa
Examineur	Mr MOHAMED MEZIANI Abdel Kader	M C "A"	U.A.M. Béjaïa
Rapporteur	Mme OURRAD MEZIANI Ouerdia	M C "A"	U.A.M. Béjaïa

Université A.MIRA de Béjaïa,

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail. En tout premier lieu, je tiens à remercier à M^{me} MEZIANI OURRAD Ouerdia d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux. Je remercie vivement le professeur KERKAR Moussa de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury. Je remercie également les messieurs HOUARI Abdeslam et MOHAMED MEZIANI Abdel Kader membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mes sœurs et mes frères de l'affection dont elle a su m'entourer depuis toujours.

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Enfin, je dédie ce travail à la mémoire de ma mère, mon père et mon frère (Riad).

Table des matières

Introduction générale	1
1 Le chaos dans Les systèmes Hamiltoniens	6
1.1 les systèmes dynamiques	6
1.1.1 Les systèmes continus	6
1.1.2 Les systèmes discrets	7
1.1.3 Définitions	7
1.1.4 Les systèmes Hamiltoniens	8
1.1.5 Représentation du mouvement d'un système Hamiltonien	10
1.2 Points fixes et stabilité	11
1.2.1 Points fixes	11
1.2.2 Stabilité	13
1.3 Représentation du diagramme de l'énergie potentielle et l'espace des phases .	15
1.3.1 Notion de représentation :	15
1.3.2 L'espace des phases correspondant au diagramme des énergies représenté :	18
1.4 Exemple : Traitement des systèmes Hamiltoniens	19
1.4.1 Bille au fond d'une vallée : cas linéaire	20
1.4.2 Pendule simple : cas non linéaire	20
1.5 Le chaos dans les systèmes dynamiques	24
1.5.1 Histoire du chaos	24
1.5.2 Propriétés du chaos	26
1.5.3 Théorème de KAM	27
1.5.4 Exposants de Lyapunov :	28
2 Etude de l'interaction onde particule dans un plasma	31
2.1 Physique des plasmas	31
2.1.1 Champs magnétique dans un plasma	32
2.1.2 Onde électrostatique	33
2.2 Modélisation des plasmas	34
2.3 Les formalismes Hamiltoniens	35

2.3.1	Les dérivés exactes de l'Hamiltonien	35
2.3.2	Normalisation	36
2.3.3	L'Hamiltonien exact du système	36
2.3.4	Les tores du web stochastique	37
2.3.5	Tores invariants à l'intérieur du web et la largeur de la bande	42
2.3.6	La séparatrice	45
2.4	Les résonances non linéaires[25]	49
3	Etude numérique	55
3.1	Formulation du problème	55
3.1.1	Les équation de mouvement	56
3.2	Réalisation du programme numérique	60
3.3	Résultats numériques	60
3.3.1	Cas non perturbé $\alpha = 0$	64
3.3.2	Moyenne perturbation	66
3.3.3	$\alpha = 0.05$	66
3.3.4	$\alpha = 0.1$	68
3.3.5	$\alpha = 0.3$	71
3.3.6	Forte perturbation	75
3.4	Analyse et discussion des résultats	76
3.4.1	Non perturbé	76
3.4.2	Faible perturbation	76
3.4.3	Moyenne perturbation	76
3.4.4	Forte perturbation	77
	Conclusion générale	80
	A Fonction de Jacobi elliptique et propriétés de H_w	82
	B Programme de Calcul	86

Introduction générale

Au cours de ce siècle une importante évolution est apparue dans l'étude des systèmes dynamiques classiques. En particulier l'attention des physiciens s'est moins focalisée sur l'étude de trajectoires individuelles mais davantage sur les propriétés qualitatives d'une famille d'orbite. Ainsi l'on répond à la question de la stabilité d'une orbite en étudiant l'évolution de l'ensemble des orbites dont les conditions initiales sont proches de l'orbite à étudier. Un des résultats de l'étude de ces familles d'orbites est la découverte de régions "stochastiques" dans lesquelles un système déterministe semble se comporter aussi aléatoirement.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser exclusivement aux systèmes Hamiltoniens. Comme nous venons de le mentionner, le chaos dans les systèmes Hamiltoniennes s'applique à de nombreux domaines (la physique des plasmas, l'électromécanique,...)

En physique des plasmas, l'interaction onde-particule est un phénomène important. Il est fondamental pour de nombreuses instabilités, chauffage d'onde, et de nombreux diagnostics. Il est un phénomène complexe.

L'interaction non-linéaire des particules chargées avec les ondes électromagnétiques et électrostatiques est de grande importance pour le laboratoire et les plasmas astrophysiques. Ce problème a été étudié en détail pendant les trente dernières années. On l'a constaté que l'accouplement des ions magnétisés avec une onde électrostatique d'ion-cyclotron devient extrêmement efficace quand l'amplitude d'onde et l'énergie initiale d'ion sont au-dessus d'une valeur seuil, et le mouvement devient mener chaotique au chauffage des particules dans la région stochastique de l'espace de phase. Dans ce cas-ci la région chaotique est liée, et il y a ainsi une limite dans le gain possible maximum d'énergie par les ions. Ce mécanisme a fourni une explication pour la génération des queues énergiques d'ion dans des expériences de bas hybride chauffage, aussi bien qu'une explication possible pour des observations de l'accélération d'ion dans l'ionosphère .

L'étude de l'interaction non-linéaire des ions magnétisés avec beaucoup d'onde électrostatiques a prouvé qu'il peut y avoir d'accélération non-résonant, et ceci peut mener au gain illimité d'énergie indépendamment de l'énergie initiale d'ion, selon les paramètres du spectre d'onde[1].

Les études têt ont indiqué que, dans les plasmas magnétisés, la résonance du mouvement de cyclotron avec la fréquence Doppler-décalée d'onde peut mener à l'accélération logique illimitée, aussi longtemps que la propagation d'onde est parallèle au champ magnétique avec l'index de réfraction près de l'unité.

L'interaction avec une onde électrostatique a été étudiée au moyen du formalisme Hamiltonien ou en employant les approximations, où le perfectionnement du mécanisme stochastique d'accélération a été prévu. De telles applications sont très importantes pour l'accélération dans l'ionosphère, mais également dans des expériences modernes de fusion ; par exemple, le chauffage simple et multifréquence de résonance d'électron-cyclotron est un composant essentiel pour les dispositifs de fusion de la recherche courante. Le taux de transport de particules est crucial pour l'évolution des plasmas, particulièrement pour le plasma de laboratoire où le contrôle de la diffusion de particules est important pour les réacteurs à fusion. On l'a précisé dans le passé que dans les scénarios stochastiques d'accélération, le gain d'énergie a une nature diffusive. Les études têt du chaos Hamiltonien ont prouvé que, pour un certain nombre de cas, l'approximation quasi-linéaire est assez bonne.

Dans un plasma, les orbites des particules chargées peuvent être détruites par la non-linéarité dans l'interaction onde-particules, et ceci peuvent mener au mouvement stochastique des particules. Une telle stochasticité a été donné. Le terme "stochasticité intrinsèque" parce qu'il ne dépend ni d'une force aléatoire externe ni des effets statistiques comme des collisions.

Pour un système Hamiltonien non-linéaire avec n degrés de liberté, il est très difficile de comprendre le mécanisme des mouvements chaotiques. Jusqu'ici, un tel problème est non résolu.

Autour de 1960, on a considère les systèmes Hamiltoniens non-linéaires extrêmement simples pour étudier un tel mécanisme. **Melnikov** [2] avait l'habitude d'utiliser le concept de **Poincaré** [3] pour étudier le comportement de la trajectoire des systèmes perturbés près des systèmes Hamiltoniens autonomes. Melnikov [4] plus loin a étudié le comportement de la trajectoire des systèmes Hamiltoniens perturbés et la largeur de la séparatrice, qui a été approximativement estimée. La largeur donne le domaine du mouvement chaotique à proximité de la séparatrice. Même si la largeur de la séparatrice était approximativement estimée, la dynamique de la séparatrice n'a pas été développée. **Arnold**[5] a prouvé que pour des systèmes avec plus de deux degrés de liberté les couches stochastiques sont reliées ensemble pour former un web qui est dense dans l'espace de phase. D'un point de vue physique, **Chirikov** [6] a étudié les processus de résonance dans les pièges magnétiques, et le critère de chevauchement de la résonance a été initialement présente. **Zaslavsky et Chirikov** [7] ont discute le mécanisme de l'accélération unidimensionnelle de Fermi et ont déterminé la propriété stochastique d'un tel système.

Izrailev et Chirikov [8] ont précisée pour la première fois que le système Hamiltonien non-linéaire périodiquement forcé, avec un degré de liberté montre une instabilité de KAM

(Kolmogorov- Arnold- Moser) menant au comportement chaotique.

Rosenblut et al [9] ont étudié l'aspect d'une instabilité stochastique (ou du mouvement chaotique) des particules emprisonnées dans le champ magnétique d'une onde de déplacement sous une perturbation. **Filonenko et al** [10] ont discuté la destruction de la surface magnétique produite par les harmoniques de résonance de la perturbation. La destruction d'une telle surface magnétique démontre la formation et la destruction de la surface résonnante. **Zaslavsky et Filonenko** [11] ont donné une recherche systématique sur l'instabilité stochastique des particules piégées par la séparatrice map, et ils ont développé l'équation fractionnelle pour la diffusion.

Le concept de la stochasticité intrinsèque apparaît dans divers aspects de dynamique de plasma. Dans la sphère de l'interaction d'onde-particule, la stochasticité intrinsèque était par la première bande de roulement **Zaslavskii et Filonenko** [12]. Ils ont considéré le mouvement d'une particule chargée emprisonnée dans deux ondes électrostatiques avec différentes vitesses de phase. **Smith et Kaufman** [13] ont alors démontré que la stochasticité intrinsèque peut également surgir dans un plasma dans un champ magnétique constant et une onde électrostatique propageant sous un angle au champ magnétique. Le dernier système peut être encore classifié dans deux cas :

- L'angle de la propagation oblique entre l'onde électrostatique et le champ magnétique est moins que 90^0 .
- L'angle de la propagation oblique entre l'onde électrostatique et le champ magnétique est égal que 90^0 .

Cette thèse se concentrera sur le cas de la propagation perpendiculaire seulement. Pour de hauts harmoniques (fréquence d'onde \gg fréquence de cyclotron) dans le cas perpendiculaire de propagation, nous pouvons encore être divisés en deux cas : cas de résonance et outre de cas non résonance. L'ancien a été traité par **Fukuyama et al** [14,15] et le dernier par **Karney et Bers** [16,17].

Dans l'un ou l'autre cas, une couche stochastique prolongera la partie finie de l'espace de phase quand l'amplitude d'onde excède un certain seuil. Dans le haut cas harmonique d'au loin-résonance, on a pensé de telles couches stochastiques pour être constitué par le chevauchement de l'espace de phase voisin de île-ce qui s'appelle habituellement "Chirikov-type de recouvrement chevauchement d'île". Plus récemment, **Zaslavskii et al.** Dans une analyse du bas harmonique sur le cas de résonance, ont montré un type différent appelé "stochasticité web" par stochasticité.[18]

Zaslavskii et al.[19] a étudié le comportement des particules dans le paquet d'onde d'un champ électrique en présence d'un champ magnétique statique. Pour un large paquet d'onde avec le spectre suffisamment uniforme, on peut prouver que le problème peut être énoncé en termes d'oscillateur harmonique électrique donné un percuté. Pour des rapports raisonnables

entre la fréquence du champ et de la fréquence de percussion liés au champ magnétique l'espace de phase du système est couvert par une maille d'épaisseur finie ; à l'intérieur des filaments de la maille la dynamique de la particule est stochastique et extérieur (dans les cellules de la stabilité) la dynamique est régulière. Cette structure s'appelle web stochastique. On l'a constaté que ce modèle couvre le plan entier de phase, permettant à la particule de répandre arbitrairement loin dans la région des énergies élevées (un processus analogue à diffusion d'Arnold [20]). Puisque le web stochastique mène aux énergies illimitées, plusieurs auteurs ont considéré le problème relativiste correspondant.

Longcope et le Soudan [21] ont étudié ce système (dans des dimensions d'efficacité 1 1/2) et ont constaté que pour des conditions initiales près de l'origine de l'espace de phase il y a un web stochastique, qui est lié à énergie, d'une forme tout à fait semblable, dans le voisinage d'origine, à la caisse non-relativiste traitée par **Zaslavskii et al.**

Karimabadi et Angelopoulos [22] ont étudié le cas d'une onde oblique de propagation, et ont prouvé que dans certaines conditions, des particules peuvent être accélérées à l'énergie illimitée par une diffusion d'Arnold dans deux dimensions. Puisqu'une particule chargée accélérée rayonne, il est important d'étudier les corrections radioactives.

Malgré le fait que la trajectoire peut être arbitrairement lisse, ils peuvent également montrer différents dispositifs fractal après application à la trajectoire d'un algorithme spécifique. Une trajectoire peut être considérée pas comme solution des équations Hamiltoniennes originales mais, au lieu de cela, comme solution d'une map qui est un ensemble d'équations discrètes. Cette map devrait représenter la trajectoire, mais une partie des informations sur la dynamique est cachée dans la structure de la map. Les maps sont commodes pour différents simplifications des équations dynamiques.

Le map Poincaré est un ensemble de points dans l'espace de phase (p,q) obtenu à partir de l'intersection de la trajectoire dirigée avec une hyper surface. Les points d'intersection définissent un ensemble d'instantants de temps t_j d'intersection qu' étudier par **Arnold** (1978)[23], et **Lichtenberg et Lieberman** (1983)[24].

La standard map a de nombreuses applications dans l'accélérateur physique, physique des plasmas, a condensé la matière, etc. (voir par exemple **Chirikov**, (1979)[25]; **Lichtenberg et Lieberman**, (1983)[24]; **Sagdeev et al**, (1988))[26].

Le web map apparaissant en **Zaslavsky et al** (1986)[27] pour l'étude de la dynamique chargée de particules dans un champ magnétique constant et un paquet électrique perpendiculaire d'onde. L'Hamiltonien correspond à un oscillateur linéaire perturbé.

Dans ce travail on utilisant la méthode d'intégration numérique directe des équations de Hamilton après la discrétisation.

L'objectif du travail est la maîtrise des phénomènes d'interaction entre un faisceau et une

onde. En effet, la perturbation par une onde plonge le système dans un état chaotique. Dans ce mémoire nous voulons comprendre comment l'intensité de la perturbation fait évoluer les états du système. Nous nous basons sur la représentation dans l'espace des phases pour faire cette étude.

Le travail est répartie en trois parties essentielles. Le premier traitera la partie bibliographique et quelques rappels sur les systèmes dynamiques en général et les systèmes Hamiltoniens, en particulier. Nous donnons des notions de base tels que : espace de phases, points d'équilibres avec leurs stabilités, en passant par le chaos et ses caractéristiques avec un peu de détail sur les exposants de Lyapunov.

Le deuxième chapitre reprendra la technique utilisée pour avoir le système d'équations qui gouverne l'interaction onde particules. Nous allons parler de notion de plasma, le mouvement d'une particule chargé dans un plasma magnétique, et la modélisation des plasmas pour avoir le système d'équations qui gouverne l'interaction onde-particules dans un plasma. Nous allons aussi parler des différentes structures dans l'espace de phase est leur comportement dépendant des conditions initiales, les valeurs de perturbation qui notons α et le paramètre de résonance n_0 .

Le troisième chapitre et dernier est une étude numérique du chaos d'une interaction onde-particules, les résultats obtenus et leurs interprétation. Il consiste à la réalisation d'un programme en fortran et discussion de ses différentes structures et l'application de ce programme pour montrer l'influence du paramètre de contrôle et les conditions initiales sur l'évolution du système. Nous commencerons à tracer l'espace des phases pour différentes valeurs de la perturbation α ; nulle, faible et forte. Puis, nous changeons le nombre de conditions initiales, et à chaque fois nous traçons l'espace des phases correspondant. Ensuite nous prenons à chaque valeurs de α on change les valeurs de paramètre de résonance n_0 , et ainsi de suite.

Le mémoire sera clôturé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Le chaos dans Les systèmes Hamiltoniens

1.1 les systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction. Cet ensemble d'objets est défini par le modélisateur. Définir un système dynamique nécessite de définir deux catégories de descriptions :

- une représentation d'état : Cette représentation décrit ce qui relève du domaine spatial. Il s'agit d'une liste de variables, que l'on appelle vecteur d'état, permettant de décrire à tout instant notre ensemble d'objets. Le nombre de ces variables correspond au nombre de degrés de liberté de notre système, en prenant en compte les liaisons mécaniques et les contraintes solides entre les objets.

- une fonction de transition : Cette fonction décrit ce qui relève du domaine temporel. Elle décrit toutes les forces, contraintes élastiques, collisions, et plus généralement les échanges d'énergie entre les objets. Cette fonction donne ainsi l'évolution du vecteur d'état entre deux instants t_1 et t_2 . Un système dynamique est donc la donnée d'un vecteur d'état et d'une fonction de transition. On peut noter que la définition d'un système dynamique, dans la mesure où elle se réfère à une sous-partie du monde, définit également une frontière entre un "intérieur" et un "extérieur" au système. Cet extérieur est constitué par l'ensemble des objets non décrits par le modèle, que l'on appelle environnement du système.

On classe les systèmes dynamiques en deux grandes catégories ; les systèmes continus et les systèmes discrets.

1.1.1 Les systèmes continus

Des grandeurs telles que la position, la vitesse, l'accélération, la pression, la température, le débit, la tension, le courant,... sont des variables continues, dans le sens qu'elles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans \mathfrak{R} lorsque le temps, lui-même "continu", évolue. Les équations différentielles (et aux différences) sont alors un outil de base approprié pour

la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes physiques à temps continu. Les équations décrivant l'évolution des systèmes dynamiques sont généralement des équations différentielles du type :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), x = x(t), x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

x est un vecteur spécifiant l'état du système, \dot{x} représente sa dérivée temporelle, et f est une fonction non linéaire du vecteur.

1.1.2 Les systèmes discrets

Un système dynamique discret est un ensemble fini d'éléments, prenant chacun un nombre fini d'états, et évoluant, dans un temps discret, par interactions mutuelles. Dans le cas des systèmes à temps discret, nous considérons le système analogue suivant :

$$x_{i+1} = f(x_i, t), x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

où $x_i \in R^n$ $f : R^n \times R^+ \mapsto R^n$ continu. Nous désignons par $f(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.2) initialisé en x_0 à l'instant t_0 .

Dans les systèmes dynamiques on peut distinguer deux types de systèmes : les systèmes dynamiques dissipatifs et les systèmes dynamiques conservatif ou Hamiltoniens. Dans ce travail on s'intéresse aux systèmes dynamiques Hamiltoniens.

1.1.3 Définitions

a)Orbite :

L'orbite est le lieu géométrique du points d'une trajectoire obtenu par élimination du temps considéré comme un paramètre.

On considère maintenant un système dynamique continu est défini par un triplet $D = (X; T; f)$, constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel T et d'une fonction de transition d'état $f : X \times T \longrightarrow X$, qui possède la propriété, pour tout $x \in X$ et $t_1; t_2 \in T$:

$$\begin{cases} f(x; 0) = x, \\ f(f(x; t_1); t_2) = f(x; t_1 + t_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

A partir d'un vecteur de conditions initiales x_0 , la fonction f permet de définir l'état du système à tout instant. Plus précisément, pour tout $x_0 \in X$, la trajectoire qui a x_0 pour origine est définie par l'application $f_{x_0} : T \longrightarrow X$ telle que $f_{x_0}(t) = f(x_0; t)$.

Une trajectoire associe donc à chaque instant un point dans l'espace d'états ; l'ensemble de ces points constitue une courbe appelée orbite de x_0 .

b) Systèmes dynamiques autonomes :

Un système dynamique autonome est un système dynamique qui ne dépend pas explicitement du temps.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$f(x)$ ne dépend pas explicitement du temps.

c) systèmes dynamiques intégrables :

Les systèmes intégrable est un système qui possède les propriétés suivantes :
il existe n intégrales premières.
elles sont indépendantes.

1.1.4 Les systèmes Hamiltoniens**1.1.4.1 Hamiltonien**

Un système Hamiltonien à N degrés de liberté est un système dynamique dont les équations d'évolution obéissent aux équations de Hamilton, c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalaire des positions $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ et moments $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ notée $H(p, q, t)$. Les systèmes conservatifs en mécanique sont des exemples bien connus, où l'Hamiltonien du système est l'énergie du système (somme de l'énergie cinétique $p^2/2m$ et de l'énergie potentielle $V(q)$).

$$H(p_i, q_i, t) = E_c + E_p = \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i) = E = cte \quad (1.4)$$

E L'énergie totale.

1.1.4.2 Équations de Hamilton

Les dérivées partielles respectives sont les \dot{q}_i et les \dot{p}_i ($i=1, \dots, N$). Les équations de Hamilton qui permettent la résolution du problème avec les conditions aux limites. s'écrivent donc :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p_i, q_i, t)}{\partial p_i} \quad (1.5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(p_i, q_i, t)}{\partial q_i} \quad (1.6)$$

Ce jeu d'équations est appelé "équations canoniques de Hamilton " L'énergie totale $H(p_i, q_i, t)$ d'un tel système fonction des grandeurs q_i (position) et p_i (impulsion) est conservée au cours du temps.

1.1.4.3 Les transformations canoniques

Dans le formalisme Hamiltonien, les variables q_i et p_i , $i = 1, \dots, N$ sont considérées indépendantes. Par conséquent, une transformation des coordonnées dans ce formalisme offre plus de liberté dans le sens où les coordonnées p et q s peuvent être mélangées. Soit la transformation donnée par :

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad (1.7)$$

$$P_i = P_i(q_i, p_i, t) \quad (1.8)$$

Sous une telle transformation, l'Hamiltonien $H(q_i, p_i, t)$ devient $\tilde{H}(Q_i, P_i, t)$. En général, lors d'un tel changement de coordonnées la forme des équations canoniques est modifiée. Il est donc intéressant d'étudier une classe particulière de telles transformations, *les transformations canoniques*.

Définition :

Soit $\tilde{H}(Q_i, P_i, t)$ l'Hamiltonien dans les nouvelles variables, alors le changement de variables Q_i et P_i est une transformation canonique si la structure des équations canoniques est préservée :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}(Q_i, P_i, t)}{\partial P_i} \quad (1.9)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}(Q_i, P_i, t)}{\partial Q_i} \quad (1.10)$$

$$\tilde{H}(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial}{\partial t} S_1(q_i, Q_i, t) \quad (1.11)$$

$S_1(q_i, Q_i, t)$: est l'action

1.1.4.4 Applications simples du formalisme Hamiltonien

i) **Oscillateur harmonique simple** : soit un système conservatif unidimensionnel avec une force potentielle à distance x :

$$F(x) = -kx \quad (1.12)$$

cette force est la dérivée d'un potentiel :

$V(x) = -\frac{kx^2}{2}$ L'Hamiltonien s'écrit :

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.13)$$

Les équations canoniques du système sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{k}{m}x, \end{cases} \quad (1.14)$$

La résolution de ce système nous permet d'avoir la position et l'impulsion en fonction du temps.

ii) **Chute libre** : Soit une masse ponctuelle m en chute libre sans frottement. Soit g l'accélérateur de pesanteur, alors l'Hamiltonien du système est :

$$H(z, p) = \frac{p^2}{2m} - mgz \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial z} = -g \end{cases} \quad (1.16)$$

Idem la résolution de ce système nous donne la position z et l'impulsion p de la masse en fonction du temps.

1.1.5 Représentation du mouvement d'un système Hamiltonien

1.1.5.1 Portrait de phase

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans le plan de phase : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point. Les portraits de phase constituent un outil précieux pour l'étude des systèmes dynamiques ; ils consistent en un ensemble de trajectoires-types dans l'espace d'état.

En mécanique quand on a donné la position et la vitesse initiale d'un objet et qu'on sait quelles sont les forces qui agissent sur lui (forces qui donneront comme on l'a vu les changements de vitesse) on connaît alors la trajectoire ultérieure de l'objet. On parle de déterminisme (en clair, on peut prédire la trajectoire).

Cela induit une conséquence importante : imaginons qu'on trace la trajectoire d'un objet dans un plan un peu inhabituel (q, \dot{q}) où le (\cdot) désigne la dérivée par rapport au temps. Dans ce plan on a la propriété fondamentale que deux trajectoires ne peuvent pas se croiser. Pourquoi ? Parce que si deux trajectoires se croisent en un point (q_c, \dot{q}_c) et qu'on prend ce point comme conditions initiales d'un mouvement, on ne sait pas laquelle des deux trajectoires l'objet prendra. Donc on ne saura pas, en donnant sa position et sa vitesse initiale, quelle sera la trajectoire future de l'objet (donc pas de déterminisme).

Le plan (q, \dot{q}) est donc idéal pour tracer les multiples trajectoires possibles d'un objet correspondant à différentes conditions initiales puisque ces trajectoires ne se croisent pas et donnent donc des figures "lisibles". On appelle un tel ensemble de trajectoires tracées dans le plan (q, \dot{q}) un portrait de phase.

1.1.5.2 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment la stabilité des orbites périodiques. Considérons le système dynamique autonome à temps continu et présentant dans une région de l'espace un comportement asymptotique intéressant pour $t \rightarrow \infty$

$$\frac{dx}{dt} = f(x); \quad (1.17)$$

Définissons une hyper surface Σ_p de dimension $(n-1)$ appelée section de Poincaré. C'est une surface de section acceptable si elle est transversale au champ de vecteurs dans toute la région concernée et si naturellement elle coupe l'ensemble limite que nous voulons étudier (elle peut, en principe, être quelconque mais un choix approprié permet d'obtenir des sections aisément exploitables). On considère l'ensemble des points p_0, p_1, p_2, \dots correspondant aux intersections successives de la trajectoire $\phi_t(x_0)$ avec l'hyper surface Σ_p . Une orbite du système originel est alors transformée en une suite d'intersections et on a les résultats suivants :

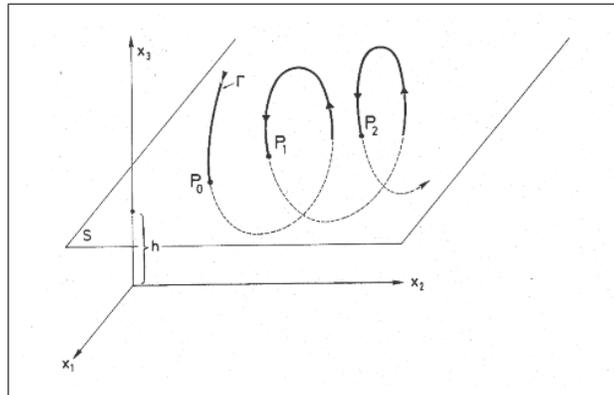


FIG. 1.1: Section de Poincaré.

1.2 Points fixes et stabilité

1.2.1 Points fixes

Définitions : On appelle point d'équilibre, ou point fixe ou point stationnaire tout les points x^* tels que :

$$\frac{dx^*}{dt} = 0 = f(x^*) \quad (1.18)$$

Une trajectoire du système consiste à suivre la ligne de plus grande pente jusqu'à atteindre un minimum ou un maximum d'énergie $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$.

Le point correspondant à ce minimum ou maximum de cet énergie est dit point d'équilibre.

Un équilibre est dit stable si le système y reste lorsqu'il est sans vitesse, et s'il y retourne spontanément après avoir été légèrement écarté de cet état. Donc la stabilité des points d'équilibre dépend de la dérivée seconde de l'énergie potentielle de ce système comme suivant :

- si $\frac{d^2 E_p}{dx^2} |_{x^*} < 0$ le point d'équilibre est stable.
- si $\frac{d^2 E_p}{dx^2} |_{x^*} > 0$ le point d'équilibre est instable.

En particulier, si x^* est un point fixe stable et x est suffisamment proche de x^* , la fonction $\phi(t, x)$ est bien définie pour tout temps $t \geq 0$ (puisque elle reste confinée dans un compact). On qualifie parfois cette notion de stabilité au sens de Lyapunov.

Dans le cas linéaire $f(x^*) = Ax$, les points d'équilibres sont tel que $Ax = 0$ (donc le point $x = 0$ est toujours un point d'équilibre).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

le point (0,0) est une solution et c'est un point d'équilibre.

On va voir comment se comportent les trajectoires autour du point d'équilibre dans le plan de phase selon les valeurs des deux valeurs propres λ_1, λ_2

λ_1, λ_2 réelles, non nulles et distinctes :

les valeurs propres forment une base de \mathbb{R}^2 et la solution s'écrit :

$$x = a_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + a_2 \exp(\lambda_2 t) v_2$$

On a donc les trois cas suivants :

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: le point d'équilibre est une source (noeud propre instable).
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: le point d'équilibre est un point selle (instable).
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: le point d'équilibre est un point puit (noeud impropre stable).

λ_1, λ_2 complexes :

λ_1 et λ_2 donc distinctes et conjuguées. $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta > 0$, donc si

- $\alpha < 0$: le point d'équilibre est un puits en spirale (le point est stable).
- $\alpha = 0$: le point fixe est un centre avec des ellipses tournent.
- $\alpha > 0$: le point fixe est un source spirale (le point est instable).
- Si il y a une seule valeur propre selle (nécessairement réelle) et la matrice diagonalisable (noeud propre).
- Si il y a une seule valeur propre selle (nécessairement réelle) et la matrice n'est pas dia-

gonalisable (noeud exceptionnel). Le résumé de ce qui est dit ci dessus est représenté sur la figure(1.2)

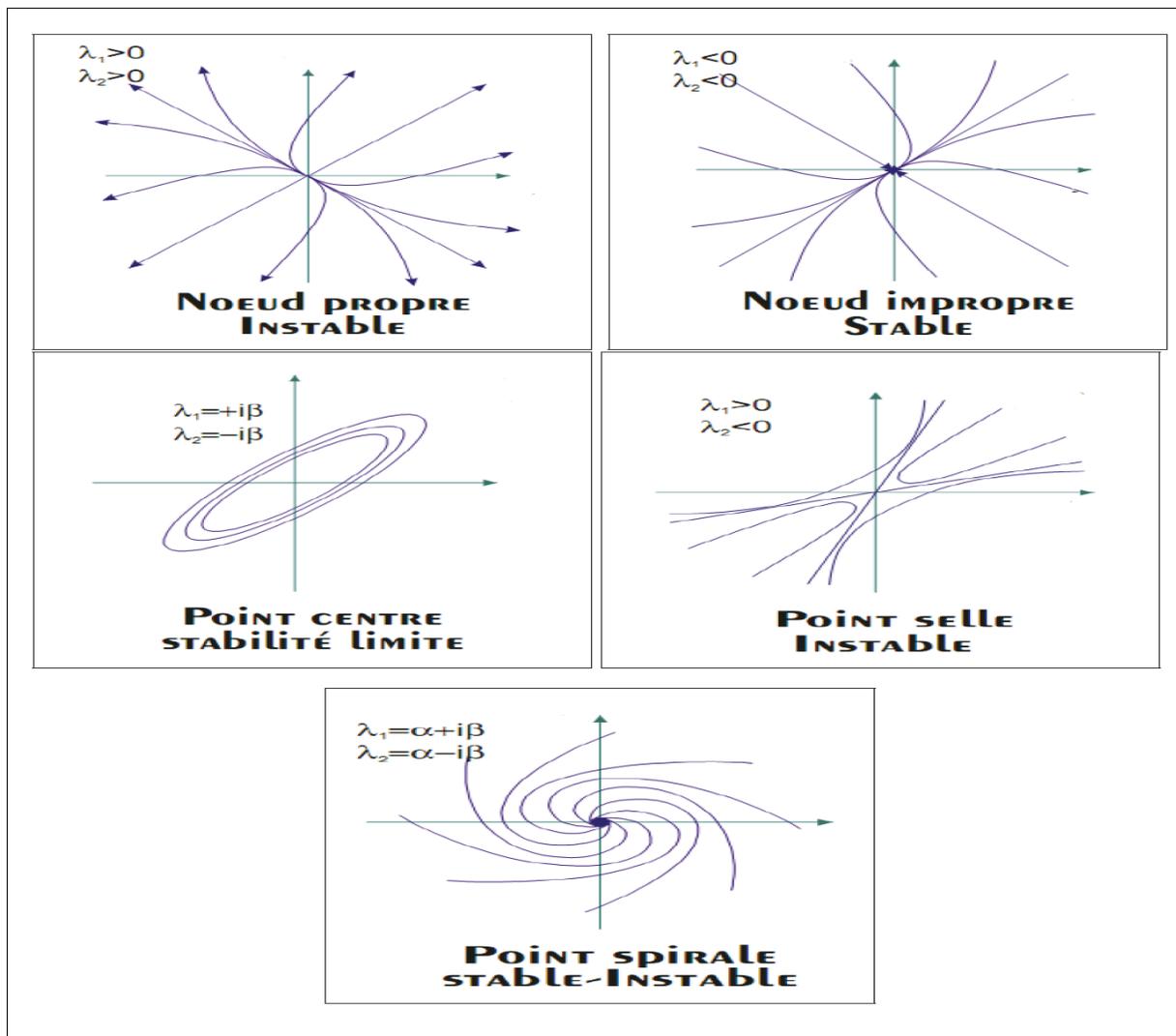


FIG. 1.2: Les différents types et structures des points fixes .

1.2.2 Stabilité

Dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à déterminer le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence des solutions en dehors de toute limite.

La stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques permet d'étudier l'évolution de ses trajectoires lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre qu'on appelle aussi point singulier.

- 1) Si la trajectoire converge vers le point singulier celui-ci est dit asymptotiquement stable.
- 2) Si la trajectoire diverge du point, ce point est dit instable
- 3) Si la trajectoire tourne autour du point on dit qu'il est juste stable.

1.2.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Stabilité locale : L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que :

- 1) $U(0) = 0$
- 2) $U(x) > 0, \forall x \neq 0, x \in \Omega$
- 3) $\dot{U}(x) \leq 0 \forall x \neq 0, x \in \Omega$

où \dot{U} est la dérivée de U par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{U}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

La fonction $\dot{U}(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

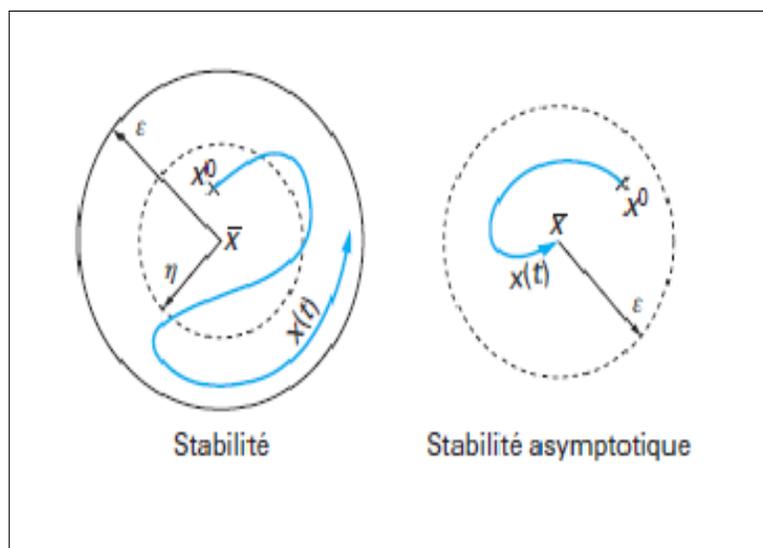


FIG. 1.3: La stabilité des points fixes au sens de Lyapunov.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif).

Stabilité globale L'état d'équilibre $x_e = 0$ est *globalement asymptotiquement stable* si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que :

- 1) $U(0) = 0$
- 2) $U(x) > 0, \forall x \neq 0$
- 3) $\dot{U}(x) < 0 \forall x \neq 0$
- 4) $\dot{U}(x) \longrightarrow -\infty, \|x\| \longrightarrow \infty$

1.3 Représentation du diagramme de l'énergie potentielle et l'espace des phases

1.3.1 Notion de représentation :

Supposons qu'on connaisse l'énergie potentielle d'une particule de masse m en fonction de sa position. On veut déterminer son mouvement à une dimension désigné par x en fonction de temps. On cherche $x(t)$ à partir de $E_p(x)$ qui représente l'énergie potentielle. Dans ce cas, il s'agit exclusivement de forces conservatives incluses dans l'énergie potentielle, Ainsi, l'énergie mécanique E demeure constante et on peut écrire :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte \quad (1.19)$$

En résolvant cette équation en fonction de v on obtient : $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p)}$ On peut apprendre beaucoup sur le mouvement de la particule à partir du diagramme de son énergie potentielle -c'est -à-dire d'un graphique de E_p en fonction de x .

Celui de la figure (1.4) présente une courbe assez complexe, l'énergie totale E étant constante. On la représente par une droite horizontale. Dans ce graphique, on a indiqué quatre valeurs

possibles de E symboliques E_0 , E_1 , E_2 et E_3 .

La valeur réelle de E pour un système donné dépend des conditions initiales. (par exemple l'énergie totale d'une particule oscillant à l'extrémité d'un ressort dépend du degrés de compression ou d'étirement du ressort au départ.) Il faut se rappeler que E demeure constante aussi longtemps qu'aucune force additionnelle ne vient s'exercer sur le système.

Il est évident que E_p doit demeurer inférieure ou égale à E dans tous les cas $E_p \leq E$ sans quoi la vitesse v aurait une valeur fictive (la racine carrée d'un nombre négatif), la valeur minimale que peut prendre l'énergie totale par rapport à l'énergie potentielle dans la figure(1.4) est E_0 , pour cette valeur de E , la particule ne peut être immobile qu'en $x = x_0$. elle présente alors une énergie potentielle mais aucune énergie cinétique.

Lorsque son énergie totale E est supérieure à E_0 par exemple : la particule peut avoir à la fois une énergie potentielle et une énergie cinétique. Comme l'énergie est constante $E_c = E - E_p$ puisque la courbe représente $E_p(x)$ en tout point x , l'énergie cinétique en n'importe quelle valeur de x est égale à l'écart entre cette courbe et la droite E en ce point.

Dans le diagramme, en effet, pour $x > x_1$ ou $x < x_2$, l'énergie potentielle est supérieure à E , ce qui signifie que $E_c < 0$ et v aurait une valeur fictive, donc impossible.

En x_1 et en x_2 , la vitesse est nulle car $E = E_p$. Pour cette raison, x_1 et x_2 portent le nom de bornes du mouvement. En partant du point x_0 , une particule se déplaçant vers la droite voit son énergie cinétique diminuer jusqu'à devenir nulle en $x = x_1$, elle prend alors la direction opposée vers la gauche, et sa vitesse diminue jusqu'au point $x = x_2$. Où encore une fois, $v = 0$, puis elle repart dans le sens contraire. Dans ce cas la particule oscillera entre les deux positions x_1 et x_2 et on dira que dans cet intervalle le mouvement est oscillatoire.

Dans la figure, lorsque la particule à une énergie $E = E_2$. Il lui est impossible de passer d'un creux à l'autre parce que en $x = x_4$, par exemple $E_p > E_2$, ce qui signifie, encore une fois, que v serait fictif. Pour le niveau d'énergie E_2 , il n'y a qu'une seule borne car $E_p < E_3$ pour tout les point $x > x_2$, si, au départ, la particule se déplace vers la gauche, elle change de vitesse en passant par les creux d'énergie potentielle mais finit par s'arrêter et changer la direction au point $x = x_3$.

Comment sait-on que les particules changent de direction aux bornes? Simplement à cause de la force F exercée sur elles. cette force est liée à l'énergie potentielle E_p par $F = -\frac{dE_p}{dx}$. Cette force donc est égale à la valeur négative de la pente de la courbe E_p en fonction de x en tout point x . Par exemple :

- En $x = x_1$, la pente à une valeur positive de sorte que la force est négative et donc elle agit vers la gauche (dans le sens des valeurs décroissantes de x).
- En $x = x_2$ la pente prend une valeur négative et F est positive. C'est-à-dire que la force agit vers la droite. Dans les deux cas cette force exerce en direction opposée au mouvement de la particule. Donc le système oscille entre ces deux positions $x = x_1$ et $x = x_2$.
- En $x = x_0$ la pente est nulle et $F = 0$, on dit alors que la particule se trouve en équilibre en ce point et puisque $\frac{dE_p}{dx} < 0$ donc la particule retourne à son point d'équilibre après un faible déplacement, elle est dite en équilibre stable. Tout minimum d'une courbe d'énergie potentielle constitue un point d'équilibre stable.
- Une particule au point $x = x_4$ se trouve également en équilibre puisque en ce point $F = 0$, si elle déplaçait d'une courte distance d'un côté ou de l'autre de x_4 , une force agirait pour l'éloigner de ce point d'équilibre. Des points comme x_4 correspondent au maximum d'une courbe d'énergie potentielle et puisque $\frac{dE_p}{dx} > 0$ la position d'équilibre est instable.

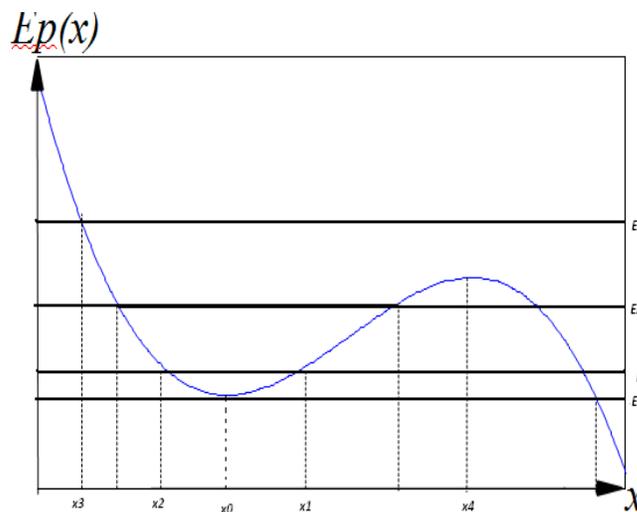


FIG. 1.4: Diagramme de l'énergie potentielle

Que représente une ligne sur l'espace de phase et comment l'obtenir.

1.3.2 L'espace des phases correspondant au diagramme des énergies représenté :

Chaque système représenté par son diagramme d'énergie peut aussi être représenté par son portrait de phase. Sur le portrait de phase on représente deux grandeurs qui sont les positions x et la vitesse \dot{x} du système ou bien son impulsion.

Donc le portrait de phase est une projection des points du diagramme d'énergie potentielle. Cette projection basée sur deux points particuliers qui sont x_0 , et x_2 et des orbites autour de ces points :

- Le premier point x_0 correspond à l'énergie minimale E_0 du système. C'est le point d'équilibre stable. Le système possède le mouvement d'oscillation autour de ce point.
- Le deuxième point x_2 correspond à l'énergie maximale E_n du système. C'est le point d'équilibre instable. Le système possède le mouvement de rotation autour de ce point.

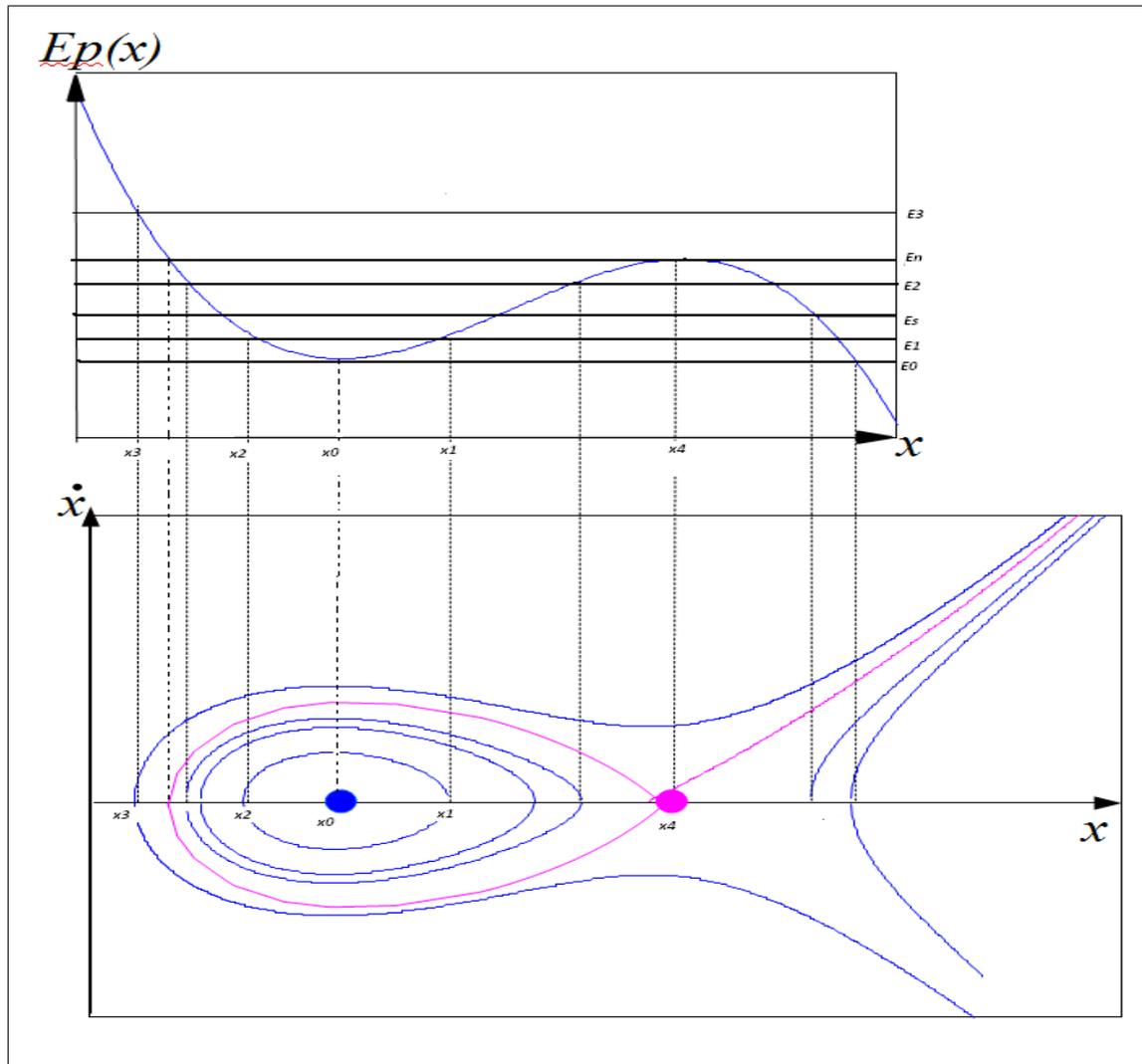


FIG. 1.5: L'espace des phases du diagramme de l'énergie potentielle.

1.4 Exemple : Traitement des systèmes Hamiltoniens

La notion de système dynamique est très générale. Elle peut s'appliquer à des systèmes d'origine mécanique, électronique, chimique, thermique, etc. Pour éclairer les définitions que nous venons de donner, et en particulier pour expliciter les différents types de points fixes, nous proposons de les illustrer à l'aide de quelques exemples simples tirés de la mécanique.

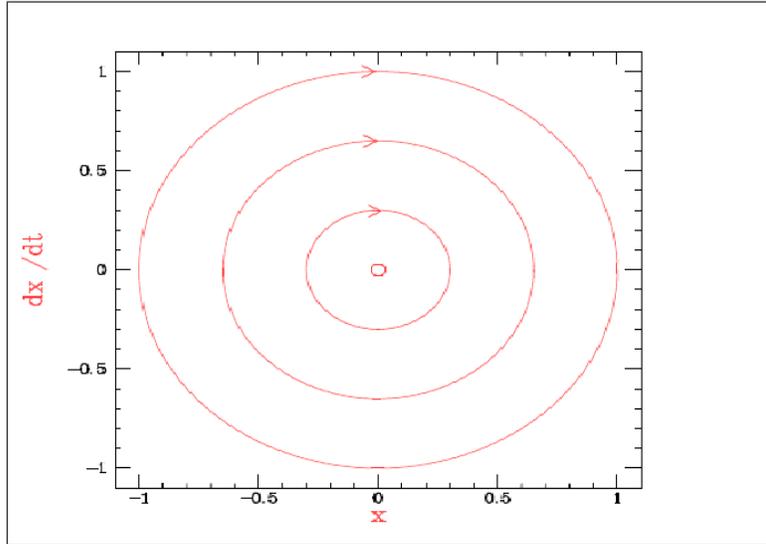


FIG. 1.6: : Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au fond d'une vallée ou d'un oscillateur. Ces trajectoires sont décrites dans le sens des aiguilles d'une montre. Le point invariant est un centre.

1.4.1 Bille au fond d'une vallée : cas linéaire

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au fond d'une vallée parabolique. Ce système possède deux degrés de liberté associés à la position q et l'impulsion p : il s'agit de l'oscillateur harmonique, régi par les équations de mouvement de l'oscillateur harmonique. Le point fixe est toujours le point ($q = 0$; $p = 0$). Une fois de plus recherchons les valeurs propres de la matrice pour étudier la stabilité :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$ et avec les vecteurs propres sont :

$\vec{V}_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{km} \end{pmatrix}$ Une trajectoire correspond à une solution de la forme :

$$\vec{V} = V_+ \exp(i\sqrt{k/m}t + \phi) + V_- \exp(-i\sqrt{k/m}t + \phi) \quad (1.21)$$

L'espace des phases est représenté sur la figure (1.6). Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement de la bille est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude (le "rayon" de l'ellipse) et est donnée par les valeurs propres $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, le point fixe est appelé *foyer* ou *centre*.

1.4.2 Pendule simple : cas non linéaire

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes.

Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide au point O fixe. On suppose le fil rigide sans masse. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur terrestre uniforme. On écarte le fil de sa position d'équilibre d'un angle $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$ et on le lâche sans vitesse initiale.

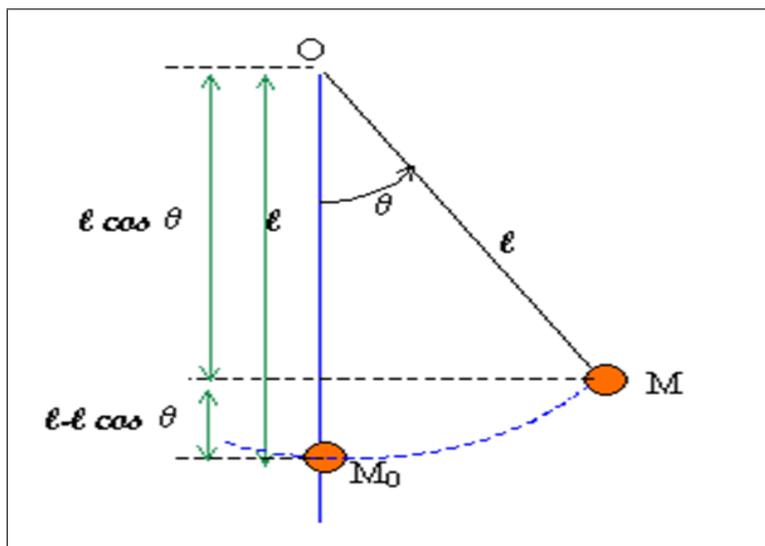


FIG. 1.7: Pendule simple.

1.4.2.1 Hamiltonien d'un pendule simple

On se place dans le cas d'oscillations d'amplitude importante. On désigne par E_m l'énergie mécanique, E_p l'énergie potentielle et E_c l'énergie cinétique du pendule.

L'énergie mécanique du pendule simple est la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_m = E_c + E_p \quad (1.22)$$

L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 \quad \text{où } v = l\dot{\theta} \quad (1.23)$$

et l'énergie potentielle est :

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \quad (1.24)$$

donc

$$H = E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (1.25)$$

1.4.2.2 Équations canoniques de Hamilton]

Les équations canoniques de Hamilton sont

$$\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial l\theta} = l\dot{\theta}. \\ \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases} \quad (1.26)$$

donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.27)$$

au voisinage de $\theta = 0$, $\sin \theta \simeq \theta$ l'équation précédente devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.28)$$

La solution de cette équation est :

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t + \dot{\theta}_0 \sin \omega_0 t \quad (1.29)$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 \dot{\theta}_0 \sin \omega_0 t - \omega_0 \theta_0 \sin \omega_0 t \quad (1.30)$$

1.4.2.3 Diagramme d'énergie potentielle

L'énergie cinétique est $E_c = 1/2mv^2$, la définition de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$.

L'énergie potentielle du pendule simple s'écrit :

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta), \quad F = -\text{grad}E_p = -mg \sin \theta.$$

Cette force étant conservative, l'énergie mécanique est constante. Nous pouvons alors représenter cette énergie potentielle en fonction de la variable θ . Comme elle est toujours inférieure à E_m , les états possibles sont dits liés.

Les points d'équilibre sont : $F = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$ donc les points fixes sont $\theta = 0, \pi$.

stabilité et point fixe :

Le point d'équilibre stable est le point qui correspond $\frac{dE_p}{d\theta} > 0 \Rightarrow \cos \theta > 0$

donc les points d'équilibre stables sont $\theta = 0$ modulo 2π

Le point d'équilibre instable est le point qui correspond $\frac{dE_p}{d\theta} < 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$

donc les points d'équilibre stables sont $\theta = \pi$ modulo 2π .

1.4.2.4 Portrait de phase

Les solutions de l'équation différentielle (1.27) sont représentées par des courbes dans l'espace des phases. Notre mise en oeuvre numérique nous a permis d'obtenir la représentation des solutions suivante :

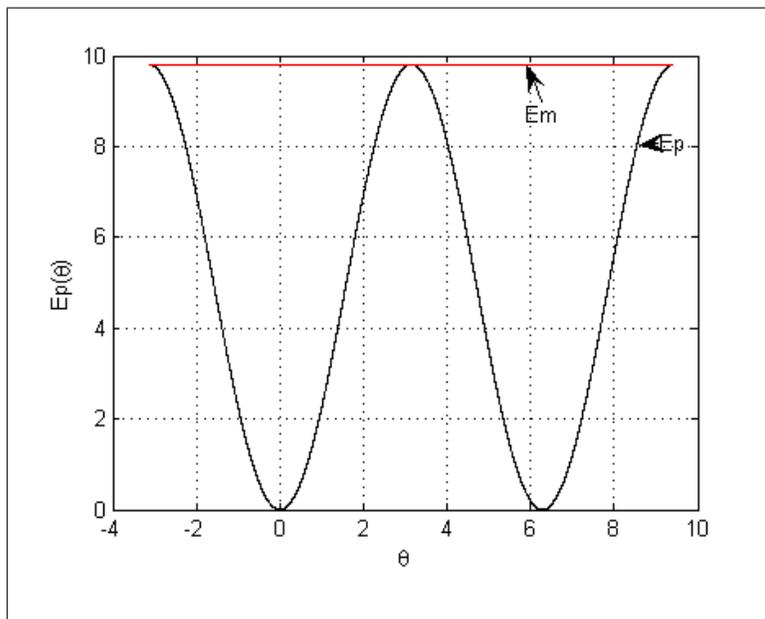


FIG. 1.8: diagramme d'énergie potentielle d'un pendule simple.

Chaque courbe représente une solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales (position et vitesse) différentes. On a trois types de solutions :

- Sur la trajectoire fermée le mouvement est périodique. Si la trajectoire est en plus elliptique, le mouvement est sinusoïdal. Une bosse (vitesse maximale) sur la trajectoire de phase correspond à une position d'équilibre stable. Un creux (vitesse minimale) correspond à une position d'équilibre instable. Les courbes centrales correspondent aux petites oscillations, de droite à gauche, puis de gauche à droite.
- Les ondulations supérieures et inférieures surviennent lorsque le pendule a une vitesse suffisante pour faire des tours complets sur lui-même.
- La courbe constituée de la réunion des deux trajectoires de phase constitue la frontière entre les mouvements oscillants et les mouvements de révolution : elle porte le nom de *séparatrice*.
- Donc la séparatrice correspond à la situation où le pendule se tient immobile, à la verticale de son point de suspension, au début et à la fin de son mouvement : il a alors autant de chance de partir vers la droite que vers la gauche. Cette solution particulière, où le pendule met un temps infini pour atteindre sa position finale, correspond à une orbite qui sépare les solutions correspondant aux oscillations des solutions de rotation.

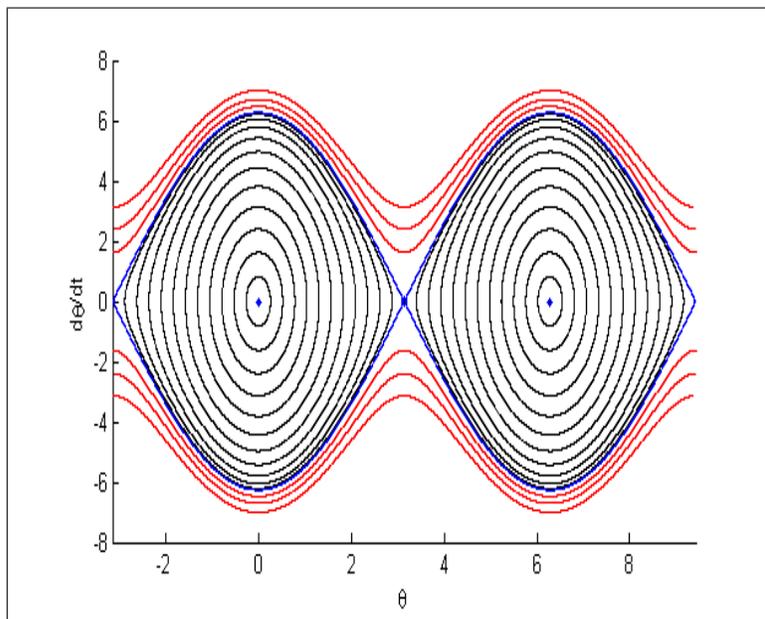


FIG. 1.9: portrait de phase d'un Pendule simple.

1.5 Le chaos dans les systèmes dynamiques

On peut différencier trois sortes de systèmes dynamiques, les systèmes aléatoires (aussi appelés les systèmes stochastiques), les systèmes déterministes et les systèmes chaotiques. Les systèmes aléatoires évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régit, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps. Les systèmes déterministes sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues, on peut donc prévoir exactement leur évolution dans le temps. Les systèmes chaotiques, quant à eux, ont un comportement infiniment complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe sur laquelle ils semblent errer au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point. Les attracteurs qui caractérisent ces systèmes, semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend toute prévision à long terme impossible.

1.5.1 Histoire du chaos

La notion de chaos déterministe, qui trouve ses fondements dans l'article de Lorenz (Lorenz, 1963), a connu un développement mathématique dans les années 1970 (Ruelle et Takens, 1971) suivi d'un véritable essor scientifique et populaire dans les années 1980. Le chaos marque un profond bouleversement dans la manière d'envisager les systèmes dynamiques. Le développement de l'informatique n'est pas étranger au succès rencontré, de par la facilité des simulations et la beauté de certains résultats obtenus.

On dit qu'un système dynamique est chaotique s'il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI). La propriété de SCI se traduit par le fait que la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur (au-delà d'un certain horizon temporel, le repliement des trajectoires imposé par le caractère borné de l'espace d'états stoppe la divergence exponentielle). Géométriquement, l'attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur. Le système est contraint à évoluer de manière "imprévisible" dans une région bien définie de l'espace des phases.

Dans le cas où le système dynamique vise à modéliser un phénomène physique, la propriété de SCI montre la difficulté à prédire le comportement de ce phénomène. En effet, toute mesure effectuée sur une grandeur physique contient un bruit de mesure qui fait que la trajectoire du système modélisé et celle du système réel divergeront au bout d'un temps fini. Aussi précise que soit la modélisation, il est impossible de prédire le comportement du système réel à long terme. On peut ajouter que l'observateur, en effectuant sa mesure, influence nécessairement le système qu'il souhaite modéliser et modifie donc sa trajectoire : on retrouve un paradoxe du type quantique, mais pour des phénomènes macroscopiques.

Il est intéressant de noter que le chaos déterministe apparaît sur des systèmes à petit nombre de variables d'état. Une condition nécessaire à l'apparition du chaos est que le système soit non linéaire. C'est la complexité des dynamiques produites par des systèmes dont la définition tient en quelques lignes qui a, dans un premier temps, étonné les chercheurs et suscité l'essentiel des travaux entrepris sur la question. Pour des systèmes dont le nombre de variables d'état est élevé, l'étude s'est développée plus tardivement.

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents (on parle également de transition de phase). La modification continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la nature des régimes dynamiques développés dans le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de stabilité structurelle. La route vers le chaos par quasi-périodicité, dite à la Ruelle et

Takens (1971), est un des scénarios génériques marquant le passage du point fixe au chaos. Elle met en jeu une série de bifurcations menant à des dynamiques de plus en plus complexes. A chaque bifurcation, un nouveau mode se superpose à celui qui est déjà en place, menant d'un cycle limite à un " tore " (deux fréquences superposées, puis enfin au chaos suite à un " accrochage de fréquence " (Arnold, 1978). Il existe d'autres scénarios, comme par exemple la route vers le chaos par doublement de période et les intermittences (Bergé, Pomeau et Vidal, 1988).

Les systèmes chaotiques se distinguent des systèmes purement stochastiques par le fait qu'ils présentent certaines régularités et n'explorent - hors transitoires - qu'une faible part de leur espace d'états. La structure fractale de l'attracteur manifeste, en dépit de sa complexité, une forme d'organisation. Une des propriétés les plus remarquables des systèmes chaotiques est leur capacité à adapter leur trajectoire en fonction des perturbations ou stimulations extérieures. Dans le domaine de la biologie particulièrement, il semble prouvé que la dynamique chaotique de certains organes, tels le cœur, leur assure une bonne adaptabilité à une brusque sollicitation. Pour ce qui concerne le cerveau, par analogie, une dynamique de nature chaotique serait propice à une adaptabilité dynamique rapide aux changements intervenant sur les entrées sensorielles.

En revanche dans un système chaotique on aura $dx = dx e^{\frac{t}{T}}$, la constante T étant positive et la séparation des trajectoires sera beaucoup plus rapide que dans le cas des systèmes réguliers même si dx_0 est petit dx croît de façon exponentielle et les prédictions.

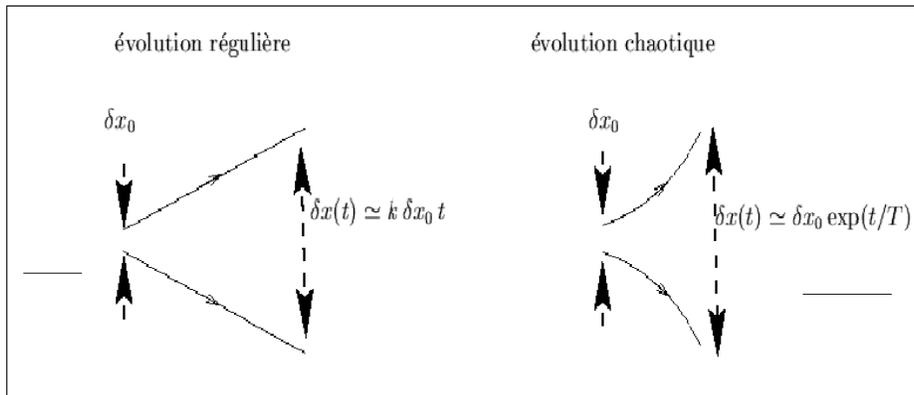


FIG. 1.10: Sensibilité aux conditions initiales.

1.5.2 Propriétés du chaos

Les phénomènes chaotiques ne sont pas aléatoires, mais au contraire qui obéissent à des lois déterministes, parfois assez simples dans leur représentation mathématique. Les phénomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par des propriétés génériques fondamentales en plus de la sensibilité aux conditions initiales on peut citer les propriétés

suivantes :

1. La non-linéarité :

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés. Mais un système non-linéaire, n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

2. Les attracteurs étranges :

Bien qu'imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

3. La sensibilité aux conditions initiales : De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

4. L'imprévisibilité : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

5. L'irrégularité : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.

1.5.3 Théorème de KAM

Le théorème de KAM sans véritablement proposer un scénario vers le chaos, il analyse l'effet d'une perturbation non intégrable sur un système intégrable d'Hamiltonien H_0 . Le paramètre de contrôle va être ici l'amplitude ϵ de la perturbation dans l'Hamiltonien :

$$H = H_0 + \epsilon H_1$$

L'existence de système Hamiltonien non intégrales, donnant lieu à des mouvements plus complexes que des mouvements quasi-périodiques, fut mise en évidence par Poincaré. Ce résultat joua un rôle très important car il obligea à abandonner l'idée de représenter tout les mouvements comme une composition de mouvements périodiques. Reflétant le nom de ces (pères) Kolmogorov, Arnold et Moser. Le théorème de KAM décrit la déformation et la disparition des solutions quasi-périodique $q(t) = Q(w_1 t + \theta_1^0, \dots, w_d t + \theta_d^0)$ du système initial quant on fait croître ϵ .

L'espace de phase est l'espace de (q, p) . Dans cet espace les solutions dessinent des ensembles invariants les tores de KAM, qui se comportent comme des cloisons infranchissables. On peut dans ce cas prédire l'avenir d'un point car sa trajectoire va rester piégée dans le domaine où

elle prend naissance. La disparition progressive de ces ensemble invariants à mesure que ϵ augmente donne plus espace aux autres trajectoires. Cela diminue donc ce qu'on peut priori prédire sur la localisation future dans l'espace de phase d'un système d'état initial connu. Le théorème de KAM montre qu'au-dessus d'une valeur de seuil ϵ_c . Il n'existe plus aucun ensemble invariant cloisonnant l'espace de phase. Si bien qu'on ne peut plus rien transition vers une dynamique incontrôlable aux temps long. Pour pouvoir vraiment parler de transition vers le chaos, il faut en plus montre la sensibilité aux conditions initiales (c'est-à-dire l'existence d'aux moins un exposant de Lyapunov positif) et la présence d'un mécanique mélange.

1.5.4 Exposants de Lyapunov :

Les exposants de Lyapunov permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Ce sont des valeurs numériques exprimées en bit par itération. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

Définition :

a) Cas d'une application unidimensionnelle :

Soit une application discrète f de R dans R qui applique xt sur $xt + 1$. Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \epsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel que après t itérations :

$$|f^t(x_0 + \epsilon) - f^t(x_0)| \cong \epsilon e^{t\lambda} \quad (1.31)$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{f^t(x_0 + \epsilon) - f^t(x_0)}{\epsilon} \right| = t\lambda \quad (1.32)$$

Si l'on fait tendre λ vers 0, il vient :

$$\lambda = \frac{1}{t} \left| \ln \frac{df^t(x_0)}{dx} \right| \quad (1.33)$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f^t(x_0)| \quad (1.34)$$

moyennant la notation :

$$\dot{f}(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (1.35)$$

λ est appelé **exposant de Lyapunov**. Il indique le taux moyen de divergence par itération. Si ce nombre est positif, il y a élongation et sensibilité aux conditions initiales. Si, par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

b) Généralisation aux applications multidimensionnelles :

Comment généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles de type $f : R^m \longrightarrow R^m : x_{t+1} = f(x_t)$

Commençons par préciser qu'un système m -dimensionnel possédera m exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)t} \quad (1.36)$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un des λ_i soit positif, pour avoir étirement et donc SDIC selon au moins un axe. Mais il faut également que la somme des λ_i soit négative. En effet, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé. On n'aurait alors plus un attracteur de faible dimension, et donc plus affaire à du chaos déterministe.

Mais avant de nous pencher sur ce genre de considérations, nous devons pouvoir définir et calculer les λ_i . Dans ce but, fixons-nous donc une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0) \quad (1.37)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ et opérons un développement en série limité d'ordre 1 de $f^t(x_0)$ au voisinage de x'_0 :

$$x_t - x'_t = \frac{df^t(x_0)}{dx} (x_0 - x'_0) = J^t(x_0)(x_0 - x'_0) \quad (1.38)$$

où $J^t(x_0)$ dénote la matrice Jacobienne de $f^t(\cdot)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_t telle que :

$$D_m^t = P_t^{-1} J^t P_t \quad (1.39)$$

où D_m^t est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de J^t . Dénotons celles-ci par Λ_i^t $i = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln[\Lambda_i^t], \quad i = 1, \dots, m \quad (1.40)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait quelques rappels sur les systèmes dynamiques en général, et les systèmes Hamiltoniens, en particuliers. Les systèmes Hamiltoniens sont traités en utilisant le formalisme Hamiltonien qui consiste à calculer l'Hamiltonien H du système qui n'est rien d'autre que son énergie totale qui est une fonction des variables canoniques qui sont généralement les positions et les impulsions du système. Nous avons aussi rappelé les notions de points fixes et de stabilité qui sont la base de notre étude. En effet la représentation des états du système dans le plan des phases fait appel à cette notion de points fixes. Ce qui nous a appelé à parler dans ce chapitre des représentations des systèmes dans le plan de l'énergie potentielle pour que le lecteur puisse faire une liaison avec le portrait de phase et comprendre le concept. Nous terminons ce chapitre par un bref historique du chaos et quelques modèles utilisés pour l'étudier.

Chapitre 2

Etude de l'interaction onde particule dans un plasma

Introduction

Dans un plasma, les orbites adiabatiques de particules chargées peuvent être détruites par la non linéarité dans l'interaction cohérente onde-particule, et ceci peut conduire à un mouvement stochastique de la particule. Telle était donné au terme "stochasticité intrinsèque", car il ne dépend ni d'une force extérieure aléatoire, ni des effets statistiques, comme les collisions.

Le concept de la stochasticité intrinsèque apparaît dans divers aspects de la dynamique du plasma. Dans le domaine de l'interaction onde-particules.

Dans ce chapitre on s'intéresse théoriquement, aux systèmes Hamiltoniens à degrés de liberté $N > 2$, perturbés . Des couches stochastiques peuvent être trouvées dans l'Hamiltonien dont N est petit.

Ils conduisent à un formalisme plus simple, qui est particulièrement utilisé dans les calculs numériques. Ils peuvent être obtenus des équations différentielles

2.1 Physique des plasmas

La physique des plasmas est la branche de la physique qui étudie les propriétés, la dynamique et les applications des plasmas. Un plasma est une phase de la matière constituée de deux types de particules chargées (des ions et des électrons), des particules positives et négatives. les charges positives sont supposées fixées, contrairement aux charges négatives (électron de masse m) libre de se déplacer. La physique des plasmas n'est pas à proprement parler un domaine de la physique à part entière. Elle s'inspire des concepts fondamentaux

des autres disciplines (physique atomique, physique quantique, physique statistique, etc.) pour l'adapter au problème compliqué constitué d'un rassemblement de particules chargées ou non, un plasma.

La transformation d'un gaz en plasma (gaz ionisé) ne s'effectue pas à température constante pour une pression donnée, avec une chaleur latente de changement d'état, comme pour les autres états, mais il s'agit d'une transformation progressive. Lorsqu'un gaz est suffisamment chauffé, les électrons des couches extérieures peuvent être arrachés lors des collisions entre particules, ce qui forme le plasma. Globalement neutre, la présence de particules chargées donne naissance à des comportements inexistantes dans les fluides, en présence d'un champ électromagnétique par exemple.

La charge des ions considérés sera prise égale à la charge élémentaire e , celle des électrons étant $-e$. Les masses des électrons et des ions seront notées respectivement m et M .

2.1.1 Champs magnétique dans un plasma

La congélation du champ magnétique dans un plasma en mouvement peut se manifester par l'existence des surfaces magnétiques. Un corollaire faisant suite à un théorème topologique sur les surfaces toroïdales a été établi et montre que les surfaces magnétiques sont toroïdales emboîtées les unes dans les autres. Le phénomène de congélation de ces surfaces engendre un mouvement de direction normale, défini comme entraînement induit. Ces deux propriétés exigent une conductibilité finie du plasma.

2.1.1.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Une charge q qui se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur \vec{B} subit une force magnétique appelée force de Lorentz F_L

$$\vec{F}_L = q_i(\vec{v}_i \times \vec{B})$$

\vec{F}_L est le produit vectoriel de $q\vec{v}$ par \vec{B}

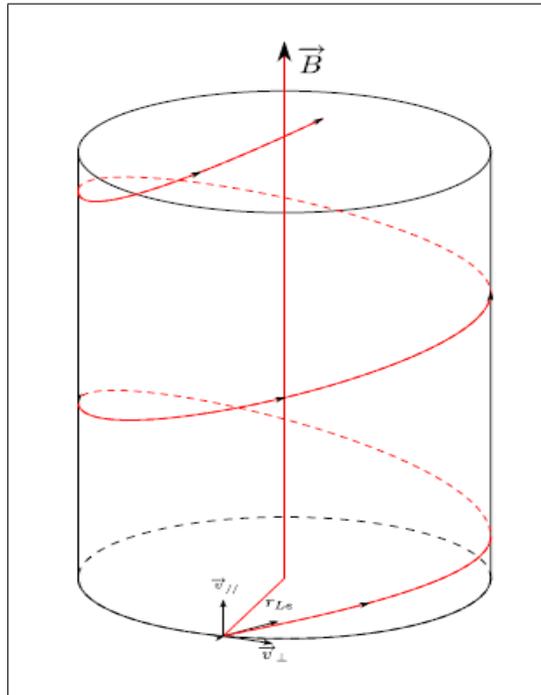


FIG. 2.1: Représentation de la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme.

2.1.2 Onde électrostatique

Dans un plasma, une onde longitudinale de pression (du type onde "sonore") est souvent accompagnée d'un champ électrique longitudinal; ce type d'onde, sans champ magnétique, est appelée "onde électrostatique". Soit une telle onde plane, donnée par : E

2.1.2.1 Champ électrostatique

Ce champ est alors directement déduit de l'expression de la loi de Coulomb.

2.1.2.2 Mouvement d'une particule dans un champ électrique

Le mouvement des particules chargées dans un plasma est déterminé par la force électrostatique de coulomb et la force magnétique :

$$\vec{F}_c = q\vec{E} \quad .$$

Donc le mouvement d'une particule chargée dans un plasma est défini par la force électromagnétique de Lorentz :

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

2.2 Modélisation des plasmas

La dynamique des champs sera traitée dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire et l'on se placera dans le cadre de la mécanique Newtonienne pour l'étude de la dynamique des électrons et des ions.

Puisque les particules dans le plasma interagissent les unes avec les autres grâce à la force de Coulomb, leurs comportements peuvent être décrits par un ensemble d'équations du mouvement de Newton. Formellement la dynamique de N particules est décrite par une trajectoire dans l'espace des phases $6N$ dimensions. Le plasma étant constitué de particules chargées, il est primordial de connaître leur mouvement dans diverses configurations de champs électrique, magnétique, statique ou oscillatoire. En principe, il suffit de résoudre l'équation de Newton, Nous allons dériver quelques propriétés des trajectoires de particules. Là où les calculs ne sont pas trop compliqués, nous utiliserons les équations du mouvement relativiste :

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (2.1)$$

où F la force extérieure.

Par ordre de complexité et d'exactitude les plasmas peuvent être modélisés à trois niveaux : fluide, cinétique ou particulière (précinétique) : Dans une modélisation particulière, la position et l'impulsion de chaque particule du plasma sont suivies au cours de leurs évolutions dans le temps. Les équations du mouvement de chaque particule sont donc celles de Newton (pour un plasma classique) :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} (e + v_i \times b) \end{cases} \quad (2.2)$$

Où e et b sont les champs électriques et magnétiques microscopiques. La résolution de ces équations suppose la connaissance de ces champs qui sont solutions des équations de Maxwell écrites au niveau microscopique. Les densités de charges et de courants, qui sont les sources de ces équations de Maxwell, dépendent elles-mêmes des positions et vitesses des particules. Dans cette approche, on doit donc suivre à la fois les trajectoires des particules et résoudre les équations de Maxwell pour une densité finie de particules.

Dans un deuxième temps, des moyennes spatiales ou/et temporelles doivent être effectuées pour remonter aux grandeurs physiques macroscopiques mesurables. Cette voie peut être suivie à l'aide de simulations numériques qui utilisent des méthodes approximatives afin de traiter un nombre suffisant de particules.

Où $F = q(E + v \times B)$ avec E et B les champs moyens électriques et magnétiques qui sont solutions des équations de Maxwell macroscopiques. Le membre de droite de l'équation cinétique correspond à une contribution due aux collisions et prend une forme qui dépend de la nature des particules considérées.

Dans un plasma, Les différentes équations cinétiques sont couplées. La résolution de ces

équations par des méthodes analytiques ou numériques permet ensuite de calculer les grandeurs physiques macroscopiques.

Quel que soit le niveau de description retenue, l'originalité, la difficulté et la richesse de la physique des plasmas tiennent essentiellement dans cette approche auto-cohérente nécessaire qui traite la dynamique des particules et des champs sur un pied d'égalité.

Comme on l'a dit plus haut, un plasma peut être considéré comme un fluide à plusieurs composantes. Les diverses composantes sont les électrons, les différentes espèces d'ions, et éventuellement les neutres. A la différence des fluides neutres ou la force extérieure dominante est la gravité, la force à prendre en compte pour les plasmas est la force électromagnétique : $F = q(E + v \times B)$.

Donc l'équation de Newton est alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

2.3 Les formalismes Hamiltoniens

2.3.1 Les dérivés exactes de l'Hamiltonien

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q ($q = e$) dans un champ magnétique uniforme (dans la direction \hat{z}) avec une onde électrostatique se propageant perpendiculairement aux champ magnétique (dans la direction \hat{x}). Dans ce cas les équations du mouvement :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.5)$$

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{x} \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \quad (2.7)$$

on remplace (2.4) et (2.3) dans (2.2) on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{x} + \frac{e}{m} B_0 (\vec{v}_y - \vec{v}_x) \quad (2.8)$$

donc on a :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{x} + \frac{e}{m} B_0 \vec{v}_y \quad (2.9)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m} B_0 \vec{v}_x \implies v_y = -\frac{e B_0}{m} x \quad (2.10)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

On peut éliminer v_y pour obtenir l'équation du mouvement à une dimension ou $\omega_0 = \frac{eB_0}{m}$ la fréquence de cyclotron :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{eE_0}{m} \sin(kx - \omega t) - \omega_0^2 x \quad (2.12)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (2.13)$$

2.3.2 Normalisation

Le prochain pas est la normalisation des quantités dans les variables adimensionnelles. C'est fait par les remplacements suivant :

$$\omega t \longrightarrow \tau \quad (2.14)$$

$$kx \longrightarrow q \quad (2.15)$$

$$\frac{kx}{\omega} \longrightarrow p \quad (2.16)$$

$$\frac{\omega_0}{\omega} \longrightarrow \tilde{\omega}_0 \quad (2.17)$$

Avec ces remplacements, on a :

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{d(kx)}{d(\omega t)} = \frac{kv_x}{\omega} = p \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{kv_x}{\omega} \right) = \frac{k}{\omega^2} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\tilde{\omega}_0^2 q + \alpha \sin(q - \tau) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{eE_0 k}{m\omega^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

α est la mesure de l'onde électrostatique.

2.3.3 L'Hamiltonien exact du système

Les équations(2.15) et (2.16) sont les dérivée de l'Hamiltonien :

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega_0^2 q + \alpha \sin(q - \tau) \\ \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \end{cases}$$

Après l'intégration des équations on obtient l'Hamiltonien suivant :

$$H(q, p, \tau) = \frac{p^2}{2} + \tilde{\omega}_0^2 q^2 + \alpha \sin(q - \tau) \quad (2.20)$$

Où

$$H_0(q, p, \tau) = \frac{p^2}{2} + \frac{\tilde{\omega}_0^2}{2} q^2 \quad \text{est l'Hamiltonien en l'absence de l'onde.}$$

$$H_1(q, p, \tau) = \alpha \sin(q - \tau) \text{ est la perturbation de champ d'onde.} \quad (2.21)$$

Donc on peut écrire l'Hamiltonien du système comme suit :

$$H(q, p, \tau) = H_0(q, p, \tau) + \alpha H_1(q, p, \tau) \quad (2.22)$$

Les équations canoniques du système sont :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (2.23)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\tilde{\omega}_0^2 q + \alpha \sin(q - \tau) \quad (2.24)$$

Donc l'équation différentielle du système est :

$$\ddot{q} + \tilde{\omega}_0^2 q - \alpha \sin(q - \tau) = 0 \quad (2.25)$$

2.3.4 Les tores du web stochastique

on a le mouvement d'un oscillateur non linéaire touché par une perturbation sous la forme d'une onde plane :

$$\ddot{q} + \tilde{\omega}_0^2 q - \alpha \sin(q - \tau) = 0 \quad (2.26)$$

L'Hamiltonien menant à l'équation (2.26) est la suivante :

$$H(q, p, \tau) = \frac{p^2}{2} + \tilde{\omega}_0^2 q^2 + \alpha \sin(q - \tau) \quad (2.27)$$

Le côté gauche de l'équation (2.26) décrit la dynamique simple d'oscillations linéaires. Tous les types non-triviaux du mouvement résultera de la perturbation et son interaction avec le mouvement non perturbé.

Pour s'assurer de cela, utilisons les nouvelles variables angle-action (I, ψ) dans (2.27). Pour les variables (q, \dot{q}) Posons :

$$\begin{cases} p = \sqrt{2I\tilde{\omega}_0} \cos \psi. \\ q = \sqrt{\frac{2I}{\tilde{\omega}_0}} \sin \psi \end{cases} \quad (2.28)$$

Exprimé en ces variables

$$\begin{aligned} H &= \omega_0 I + \alpha V(I, \psi; \tau) \\ V(I, \psi; \tau) &= \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{2I}{\tilde{\omega}_0}} \sin \psi - \tau\right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'imperturbable partie de l'Hamiltonien $H_0 = \tilde{\omega}_0 I$ ne satisfait pas la condition de non-dégénérescence [29, équation 5.1.6]. Par conséquent, dans le cas d'une résonance

$$n_0 \omega_0 = \omega \quad (2.30)$$

Où n est un nombre entier. L'amplitude d'un oscillateur peut augmenter considérablement. Il est non-linéaire et il est possible d'échapper à la résonance seulement en raison de la perturbation. En outre, nous verrons que cette situation est commune à tous les systèmes quasi-linéaires.

Nous arrivons à l'équation (2.26).

Montrons comment dans les équations (2.26) ou (2.27) apparaissent sur le Web, si la condition de résonance (2.30) est satisfaite. Laissez-nous ensuite effectuer un certain nombre de changements de variables. Dans un premier temps, nous allons introduire les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} q = \rho \sin \psi \\ p = \rho \tilde{\omega}_0 \cos \psi \end{cases} \quad (2.31)$$

et faire le développement

$$\cos(q - \tau) = \cos(\rho \sin \psi - \tau) = \sum_m J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (2.32)$$

Où J_m sont les fonctions de Bessel. Prenant l'avantage de ce qui précède par analogie avec le mouvement dans un champ magnétique, ρ est le rayon de Larmor. L'Hamiltonien (2.27) exprimé dans les nouvelles variables (2.31), s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_0 \rho^2 + \alpha \sum_m J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (2.33)$$

Alors (2.32), prend la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_0 \rho^2 + \alpha J_{n_0}(\rho) \cos(n_0\psi - \tau) + \alpha \sum_{m \neq n_0} J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (2.34)$$

Dans la somme, nous distinguons un terme avec $m = n_0$ de

$$I = \tilde{\omega}_0 \rho^2 / 2n_0 = n_0 \tilde{I}; \quad \phi = n_0\psi - \tau \quad (2.35)$$

Maintenant, nous introduisons de nouvelles variables et d'écrire l'expression suivante :

$$\tilde{H} = H - I \quad (2.36)$$

Où \tilde{H} est exprimé en fonction de (\tilde{I}, ϕ) là par des calculs directs, nous pouvons facilement faire en sorte que les équations

$$\dot{\tilde{I}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi}; \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{I}} \quad (2.37)$$

Soient équivalentes à l'équation du mouvement (3.26). En substituant (2.35) dans (2.34) et (2.36) nous obtenons :

$$\tilde{H} = (n_0 \tilde{\omega}_0 - 1) \tilde{I} + \alpha J_{n_0}(\rho) \cos \phi + \alpha \sum_{m \neq n_0} J_m(\rho) \cos\left[\frac{m}{n_0} \phi - \left(1 - \frac{m}{n_0}\right) \tau\right] \quad (2.38)$$

Où, à la recherche d'une notation plus compacte, nous introduisons ρ qui, selon (2.35), se présente comme suit

$$\rho = \left(\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, l'expression $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{I}, \phi)$ est l'Hamiltonien pour les nouvelles variables canoniques (\tilde{I}, ϕ) . Il peut aussi être écrit comme :

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0(\tilde{I}) + \alpha\tilde{V}(\tilde{I}, \phi; \tau) \quad (2.39)$$

Où, conformément à (2.38), nous avons noté :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(\tilde{I}) &= (n_0\tilde{\omega}_0 - 1)\tilde{I} + \alpha J_{n_0}\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos \phi \\ \tilde{V}(\tilde{I}, \phi; \tau) &= \sum_{m \neq n_0} J_m\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos\left[\frac{m}{n_0}\phi - \left(1 - \frac{m}{n_0}\right)\tau\right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tandis que pour ρ il faut tourner à l'expression (2.39). Nous tournons maintenant notre attention sur le cas de résonance (2.30). Que cette condition est valable pour une certaine valeur $m = n_0$, à savoir, l'égalité suivante :

$$n_0\omega_0 = \omega \quad (2.41)$$

Il s'agit de la définition du nombre qui n'a été officiellement pas introduit avant. Sous la condition (2.41), l'expression de \tilde{H}_0 acquiert la forme suivante :

$$\tilde{H}_0 = \alpha J_{n_0}\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos \phi \quad (2.42)$$

Effectuons une analyse préliminaire du système dynamique dans un cas de résonance. Les deux termes de l'Hamiltonien, \tilde{H}_0 ainsi que \tilde{V} , sont proportionnels à α . Par conséquent, la partie fixe de l'Hamiltonien, qui est indépendante du temps, est induite par une perturbation. Il disparaît à $\alpha \rightarrow 0$. Il s'agit d'un élément nouveau, qui n'existe pas dans les problèmes évoqués ci-dessus.

Prenons $\tilde{H}(\tilde{I}, \phi)$ pour une imperturbable partie de l'Hamiltonien, et \tilde{H}_0 et $\tilde{V}(\tilde{I}, \phi; \tau)$ pour une perturbation. En outre, nous verrons pourquoi il est possible. Le portrait de phase pour l'Hamiltonien (2.40) est présenté dans la figure(2.2). Les séparatrices forment un réseau sur le plan (q, p) sous la forme d'un Web avec un certain nombre de rayons et aucune symétrie de rotation d'un angle $\theta = 2\pi/n_0$ de même n_0 , et avec le nombre de rayons $2n_0$ et la symétrie de rotation par l'angle des pas impairs. Le point singulier du système peut être trouvé à partir des équations suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{I}} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.43)$$

Par conséquent, si l'on remplace l'expression (3.42) \tilde{H} suit un ensemble de points hyperboliques (ρ_h, ϕ_h)

$$J_n(\rho_h) = 0; \quad \phi_h = \mp\pi/2 \quad (2.44)$$

Et les points elliptiques (ρ_e, ϕ_e)

$$J'_n(\rho_e) = 0; \quad \phi_e = 0, \pi \quad (2.45)$$

Une famille de séparatrices est formée par $2 n_0$ rayons et par circonférences avec les rayons qui les traversent, où ρ_h sont les racines de la fonction de Bessel J_{n_0} .

A l'intérieur des cellules d'un réseau formé par ces séparatrices, le mouvement se produit le long des orbites de type fermé, autour des points elliptiques. Ces points (2.45) se trouvent dans les centres des cellules. Ce qui précède est la description du mouvement non perturbé défini par l'Hamiltonien (2.42). Il y a une différence essentielle entre ce mouvement et le mouvement, par exemple, d'un pendule non linéaire. Une particule se déplaçant sur une web peut se déplacer dans une direction radiale, alors que pour les systèmes de type pendule, tout mouvement suivant une direction radiale est exclu.

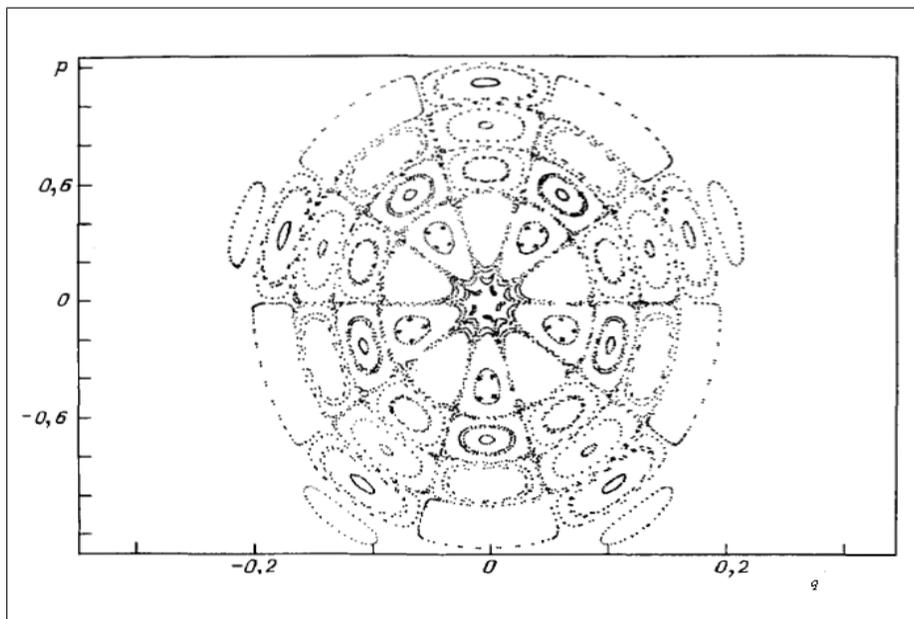


FIG. 2.2: Le portrait de phase d'un système avec un réseau de séparatrices dans la forme d'un web : $n_0 = 5$

Il s'agit d'une caractéristique principale du cas non-linéaire, pour laquelle (2.26) est vraie. Cependant, le mouvement radial qui, en moyenne, est non-nul, est possible seulement le long de séparatrices. Dans les environs des points hyperboliques il est gelé.

Par conséquent, il n'y a pas d'évolution sur le rayon pour l'Hamiltonien H_0 (2.42). Si l'on tient compte de l'effet de la perturbation \tilde{V} (2.40) ce qui devrait entraîner la destruction de séparatrices et la formation de canaux d'une largeur finie, avec une dynamique stochastique ; (Fig. 2.3).

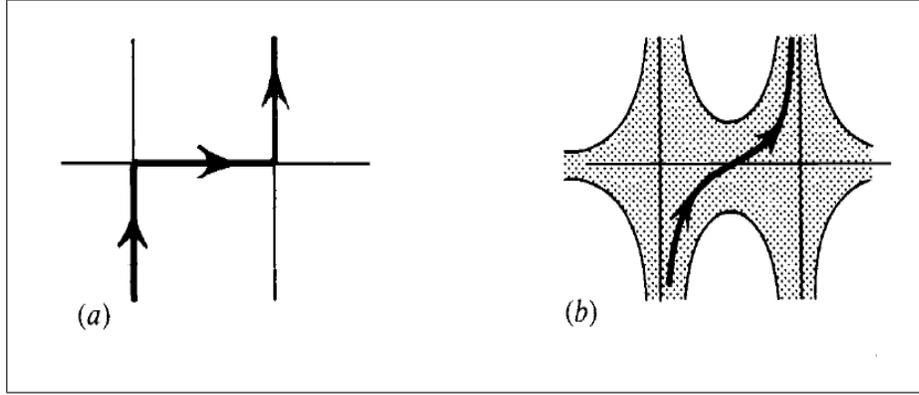


FIG. 2.3: La trajectoire indiquée par les flèches dans (a) est impossible en réalité puisque il lui fallait un temps infiniment long pour atteindre un point hyperbolique. Cependant, elle est possible dans le cas de (b) où une couche stochastique est formée.

2.3.5 Tores invariants à l'intérieur du web et la largeur de la bande

Maintenant, nous allons discuter de mouvement dans le web de façon plus détaillée. Revenons à l'Hamiltonien original (2.39). Nous supposons que la condition de résonance (2.41) est vraie et de retenir dans (2.40) pour \tilde{V} seulement les termes avec $m = n_0 \pm 1$. Comme on le verra plus tard, la contribution d'autres termes dans la somme de \tilde{V} est plus petite (une même technique a déjà été appliquée dans le calcul de largeur de la couche stochastiques). Enfin, de (2.40), on obtient

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= \alpha J_{n_0}(\tilde{\rho}) \cos(\phi) \\ \tilde{V} &= \alpha \left\{ J_{n_0+1}(\rho) \cos\left[\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)\phi + \frac{1}{n_0}\tau\right] + J_{n_0-1}(\rho) \cos\left[\left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\phi - \frac{1}{n_0}\tau\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par souci de simplicité, nous devons aussi considérer les régions suffisamment éloignées des centres d'un réseau, c'est à dire, nous avons :

$$\rho \gg 1 \quad (2.48)$$

Servons-nous des fonctions de Bessel asymptotiques, conformément à (2.48) :

$$J_n(\rho) \sim \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\rho - \frac{1}{2}\pi n - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (2.49)$$

Maintenant, nous distinguons une certaine cellule de la bande et de décrire la famille de trajectoires à l'intérieur, dans un premier temps en omettant la perturbation \tilde{V} Fig (2.4). ρ_0 est un point elliptique dans le centre de la cellule. Selon (2.45) et (2.49), dans le cas de (2.48), nous avons

$$\rho_0 - \frac{1}{2}\pi n_0 - \frac{1}{4}\pi = 0; \pi \quad (2.50)$$

Avec l'aide de l'expansion (2.48) et la condition (2.50) nous récrivons (3.47) comme suit :

$$\tilde{H}_0 = \sigma \alpha \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \pi}} \cos \rho \cos \phi, \quad \sigma = \mp 1 \quad (2.51)$$

où $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ et différents signes correspondent à des coordonnées des points elliptiques, en fonction de la valeur du côté droit de (2.50). Arrêtons-nous sur l'analyse des trajectoires déterminées par l'Hamiltonien (2.51). La taille d'une cellule séparatrice est de l'ordre de 2π .

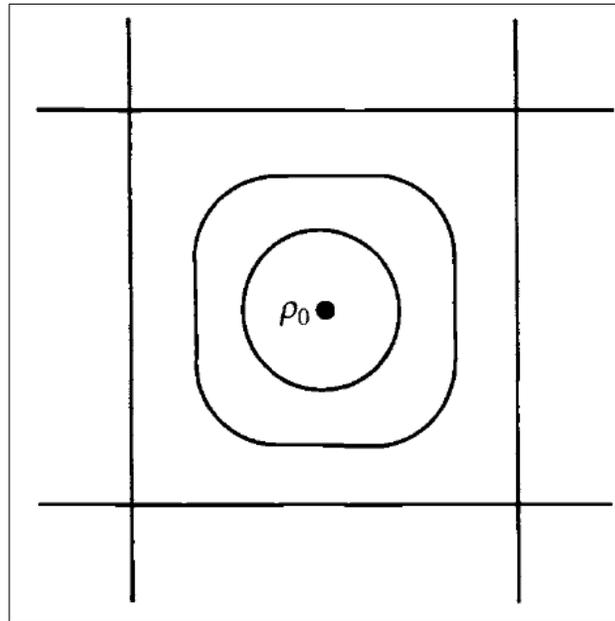


FIG. 2.4: Une cellule d'un web avec un point elliptique ρ_0 dans le centre et une famille des orbites intérieures.

Par conséquent, $\max |\Delta\rho| = 2\pi$ et, selon l'inégalité (2.47) :

$$|\tilde{\rho}| = |\rho - \rho_0| \ll \rho_0 \quad (2.52)$$

La définition de l'action (2.35), on obtient

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\omega}_0 \rho^2}{2n_0} = \frac{\tilde{\omega}_0 \rho_0^2}{2n_0} + \frac{\tilde{\omega}_0}{2n_0} \rho \quad (2.53)$$

Le changement d'une variable $\tilde{I} \leftarrow \tilde{I} - \frac{\tilde{\omega}_0 \rho_0^2}{2n_0}$ est canonique. Avec la même approximation que pour l'Hamiltonien \tilde{H} , la paire de variables $(\tilde{\rho}, \phi)$ peut être considérée comme canonique. En conséquence, les équations Hamiltonienne du mouvement ont la forme suivante :

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{m}{\tilde{\omega}_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \phi}; \quad \dot{\phi} = \frac{m}{\tilde{\omega}_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} \quad (2.54)$$

En effet, elles coïncident avec les suivants à partir de (2.37) sous condition (2.52). Notons

$$\omega_w = -\sigma\alpha \frac{m}{\tilde{\omega}_0} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{\rho}_0}} \quad (2.55)$$

Prenons notre définitions des nouveaux Hamiltoniens approximatifs comme H_w

$$H_w = \omega_w \cos \tilde{\rho} \cos \phi \quad (2.56)$$

Ensuite, les équations

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\frac{\partial H_w}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H_w}{\partial \tilde{\rho}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Sont équivalentes à (2.54). L'Hamiltonien H_w peut être appelé l'Hamiltonien du web. ω_w est la fréquence des petites oscillations des trajectoires enroulées autour du tore. Écrivons (2.57) sous une forme explicite :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\omega_w \cos \tilde{\rho} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega_w \sin \tilde{\rho} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.58)$$

En se servant de (1.56) et l'intégration (1.58), nous obtenons ce qui suit :

$$\sin \phi = \kappa \operatorname{Sn}(\omega_w(\tau - \tau_0); \kappa) \quad (2.59)$$

Là où le Sn est la fonction elliptique de Jacobi, t_0 est le temps et κ est le module de la fonction elliptique :

$$\kappa = (1 - H_w^2 / \omega_w^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.60)$$

Au moyen de solution (2.58) et expressions (2.56) et (2.60), nous obtenons ce qui suit :

$$\sin \tilde{\rho} = \kappa \frac{\operatorname{cn}(\omega_w(\tau - \tau_0); \kappa)}{\operatorname{dn}(\omega_w(\tau - \tau_0); \kappa)} \quad (2.61)$$

Les solutions (2.59) et (2.61) sont des fonctions périodiques du temps. La période des oscillations non-linéaires est :

$$T(H_w) = \frac{1}{|\omega_w|} 4K(\kappa) \quad (2.62)$$

Où $K(\kappa)$ est une intégrale elliptique. Pour $\kappa \rightarrow 0$ nous prenons :

$$T_w = \frac{2\pi}{|\omega_w|}$$

c-à-d, la période des petites oscillations. Près de $\kappa \rightarrow 1$, $H_w \rightarrow 0$ et de l'équation (2.62) il suit cela

$$T(H_w) = \frac{1}{|\omega_w|} 4 \ln \frac{4}{(1 - \kappa_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|\omega_w|} 4 \ln \frac{|\omega_w|}{|H_w|} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{\alpha n_0 \tilde{\omega}_0} (k\rho_0)^{\frac{3}{2}} \ln \left[4\alpha \frac{\tilde{\omega}_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{H}_0} \right]$$

$H_w \longrightarrow 0$

$$T(H_w \longrightarrow 0) \longrightarrow \frac{1}{|\omega_w|} 4 \ln \frac{4}{(1 - \kappa^2)^{1/2}} = \frac{4}{\omega_w} \ln \frac{4|\omega_w|}{H_w} \quad (2.63)$$

Sur des séparatrices, $H_w = 0$. De (2.56), il suit que quatre séparatrices sont définies par les équations suivantes :

$$\cos \tilde{\rho} = 0; \quad \tilde{\rho} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.64)$$

et

$$\cos \phi = 0; \quad \phi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.65)$$

Ils correspondent aux quatre côtés de la séparatrice (sous l'approximation, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$) dans fig(2.4). L'équation du mouvement :

$$\sin \phi = \pm \tanh[2|\omega_w|(\tau - \tau_0)]; \quad \tilde{\rho} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.66)$$

Correspond à deux séparatrices horizontales dans (2.59) et (2.64). Pour deux séparatrices verticales dans (2.61) et (2.65), nous obtenons :

$$\sin \tilde{\rho} = \mp \tanh[2|\omega_w|(\tau - \tau_0)]; \quad \phi = \mp \frac{\pi}{2} \quad (2.67)$$

fig(2.5) La trajectoire fermée définie par l'Hamiltonien (2.51) et (2.56) sont les sections transversales des tores invariables si nous complétons l'espace des phases (I, ϕ) , avec variable du "temps" de la manière habituelle, en tenant compte de la perturbation \tilde{V} , qui est périodique en temps. La différence des tores de KAM se manifeste dans la dépendance de la période T_w de α . Maintenant tournons notre attention à l'image de la destruction de séparatrices et formation d'un réseau stochastique dans leur endroit. Avec en vue, nous considérons l'Hamiltonien original (2.48). De l'utilisation de (2.49), nous pouvons récrire la perturbation \tilde{V} de la manière suivante :

$$\tilde{V} = 2\omega_w \sin \tilde{\rho} \sin \phi \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \quad (2.68)$$

Ansi, le problème entier, selon (2.51) et (2.68), est décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$\tilde{H} = \omega_w [\cos \tilde{\rho} \cos \phi + 2 \sin \tilde{\rho} \sin \phi \sin(\frac{\phi + \tau}{n_0})] \quad (2.69)$$

2.3.6 La séparatrice

on utilise les crochet de poisson [28] et on trouve $\dot{\tilde{H}}$:

$$\dot{\tilde{H}} = [\tilde{H}, \tilde{V}]$$

donc

$$\dot{\tilde{H}}_0 = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \phi} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\rho}} + \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \phi} \quad (2.70)$$

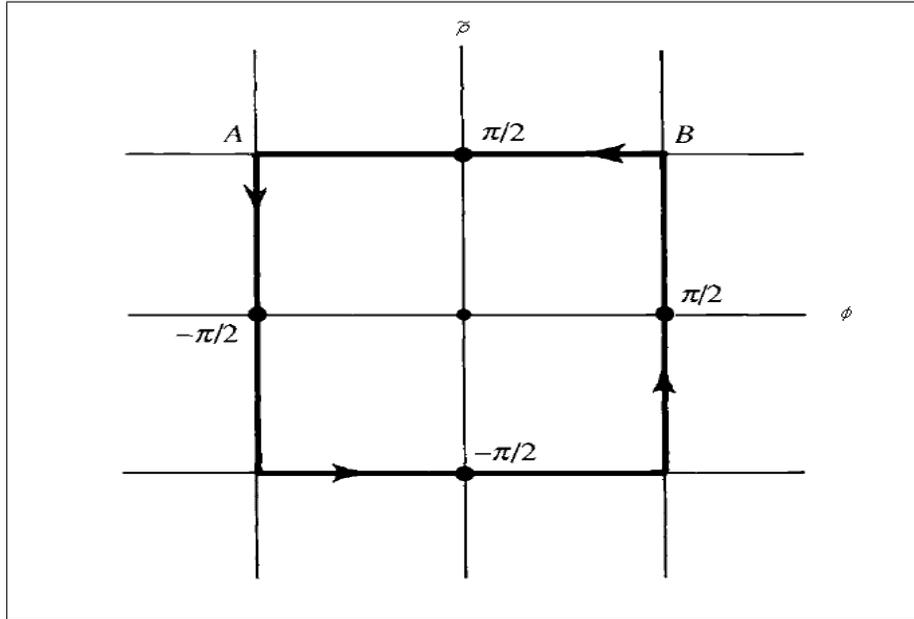


FIG. 2.5: Diverses branches de séparatrices de la cellule d'un réseau.

On utilise les expressions de \tilde{H}_0 et \tilde{V} , on a :

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \phi} = -\omega_w \cos \tilde{\rho} \sin \phi \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} = -\omega_w \sin \tilde{\rho} \cos \phi \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\rho}} = 2\omega_w \cos \tilde{\rho} \sin \phi \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \phi} = 2\omega_w \sin \tilde{\rho} \cos \phi \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \quad (2.74)$$

En remplaçant les équations (1.71), (1.72), (1.73) et (1.74) dans (1.70), on a :

$$\tilde{H} = 2\omega_w^2 \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \cos(2\phi + 1) = 4\omega_w^2 \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \cos \phi \quad (2.75)$$

Sur un bout droit de la trajectoire à proximité d'une séparatrice AB (fig (2.5)), nous avons :

$$\tilde{\rho} = \pi/2 \quad \cos 2\tilde{\rho} = -1$$

Par conséquent,

$$\tilde{H}_0 = 4\omega_w^2 \cos^2 \sin \frac{\phi + \tau}{n_0} \quad (2.76)$$

Calculons le changement près d'un $\Delta\tilde{H}_0$ de la séparatrice sous l'effet de la perturbation. l'intégration (de (2.76))

$$\Delta\tilde{H} = \int \dot{\tilde{H}} d\tau = 4\omega_w \int d\tau \sin\left(\frac{\phi + \tau}{n_0}\right) \cos^2 \phi \quad (2.77)$$

Nous pouvons substituer dans cette formule la valeur de $\cos \phi$ prise sur une séparatrice. De (2.66), et en utilisant la fonction elliptique de Jacobi[29. table 16.6], nous avons :

$$\sin \phi \approx \tanh[2|\omega_w|(\tau - \tau_0)] \implies \cos \phi \approx \frac{1}{\cosh[2|\omega_w|(\tau - \tau_0)]} \quad (2.78)$$

Pour n_0 grand, on peut ignorer le terme $\frac{\phi}{n_0}$ à l'intérieur du terme sin dans l'intégrale (2.77), aussi de $\frac{1}{\cosh[2|\omega_w|(\tau - \tau_0)]}$, on peut tendre la limite de l'intégration dans (2.77) vers l' $+\infty$. donc nous aurons :

$$\Delta\tilde{H} = 4\omega_w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\sin \frac{\tau + \tau_n}{n_0}}{\cosh^2[2|\omega_w|\tau]} = 4\omega_w^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\sin \frac{\tau}{n_0} \cos \frac{\tau_n}{n_0} + \cos \frac{\tau}{n_0} \sin \frac{\tau_n}{n_0}}{\cosh^2[2|\omega_w|\tau]} \quad (2.79)$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{H} &= 8\omega_w^2 \sin \frac{\tau_n}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\frac{\pi}{n_0}}{2(2|\omega_w|)} \\ &= \left(\sin \frac{\tau_n}{n_0}\right) \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{1}{4n_0|\omega_w|}\right]} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Nous avons considéré $\Delta\tilde{H}$ la variation pendant qu'une particule se déplace à proximité des séparatrices, AB (fig. (2.5)). Le même est vrai pour les trois autres branches de la cellule. En raison de la symétrie du problème, l'expression pour $\Delta\tilde{H}$ est semblable pour chacun des quatre segments de l'orbite, qui définissent la position d'une particule quand elle traverse le milieu d'un des quatre segments de l'orbite à proximité d'une séparatrice correspondant. Le temps entre les deux traversées est égal à un quart d'une période, c.-à-d ; $I(H_w)/4$. Ceci nous permet de décrire la dynamique d'un système à l'intérieur d'une cellule, correspondant à \tilde{H} Hamiltonien (2.69), où

$$\omega(H_w) = 2\pi/T(H_w) \quad (2.81)$$

Est la fréquence des oscillations non-linéaires à l'intérieur d'une cellule de séparatrice.

En se servant des formules (2.80) et (2.63), nous obtenons le tracé près des séparatrices du réseau : Maintenant nous avons $\Delta\tilde{H}$. nous avons besoin toujours de $\Delta\tau$, de (2.63) on a

$$\Delta\tau = \frac{T(H_w \rightarrow 0)}{4} = \frac{1}{|\omega_w|} \ln \frac{4|\omega_w|}{H_w} \quad (2.82)$$

et :

$$H_{w,n+1} = H_{w,n} + \left(\sin \frac{\tau_n}{n_0}\right) \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{4n_0|\omega_w|}\right]} \quad (2.83)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \frac{1}{|\omega_w|} \ln \frac{4|\omega_w|}{H_{w,n+1}} \quad (2.84)$$

L'état suivant de la dynamique stochastique K :

$$K \equiv \left| \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} - 1 \right| \quad (2.85)$$

On considère le critère stochastique comme :

$$K = \left. \frac{\partial \Delta \tau}{\partial \tau_n} \right| = \frac{1}{|\omega_w| |H_{w,n+1}| \left| \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{4n_0|\omega_w|}\right]} \right|} \cos \frac{\tau_n}{n_0} \quad (2.86)$$

Donc (2.85) donne :

$$\frac{1}{|\omega_w| |H_{w,n+1}| \left| \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{4n_0|\omega_w|}\right]} \right|} \cos \frac{\tau_n}{n_0} \geq 1 \implies |H_{w,n+1}| \leq \frac{1}{|\omega_w| \left| \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{4n_0|\omega_w|}\right]} \right|} \cos \frac{\tau_n}{n_0} \equiv H_c \quad (2.87)$$

ça définit la frontière d'une couche stochastique formée dans le voisinage des séparatrices. De (2.83) et (2.84), nous prenons ce qui suit :

$$H_c = \frac{1}{\alpha \frac{n_0}{\tilde{\omega}_0} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}}} \frac{\pi}{n_0} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{4n_0 \alpha \frac{n_0}{\tilde{\omega}_0}} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho_0}}\right]} = \frac{\pi^{3/2} \tilde{\omega}_0 \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{2} n_0^3 \alpha} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\sqrt{\rho_0 \pi^3 \tilde{\omega}_0}}{\alpha 4 \sqrt{2} n_0}\right]} \quad (2.88)$$

Pour α est suffisamment petit, on peut utilise l'approximation :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} (x \longrightarrow \infty) \quad (2.89)$$

On obtient :

$$H_c = \frac{\sqrt{2} \pi^{3/2} \tilde{\omega}_0 \sqrt{\rho_0}}{n_0^3 \alpha} \frac{1}{\exp\left[\frac{\sqrt{\rho_0 \pi^3 \tilde{\omega}_0}}{\alpha 4 \sqrt{2} n_0}\right]} \quad (2.90)$$

La largeur du réseau stochastique est $2H_c$. D'après (2.90), elle est exponentiellement petite en terme du paramètre α et, en outre, ça diminue exponentiellement à mesure que le ρ_0 augmente, c.-à-d., plus la distance du centre du réseau est grande.

Un exemple numérique d'un réseau stochastique et de la fonction de distribution est montré dans fig(2.6)

Ainsi, différents tores sont séparés par un réseau stochastique. Il forme un réseau uniforme d'une largeur exponentiellement petite. Dans l'exposant nous voir le facteur de $1/\alpha$ contrairement à $1/\alpha^{1/2}$, pour l'enchaînement d'Arnold. En outre, amincir le réseau quand l'énergie d'une particule augmente, c.-à-d., en tant que la particule se déplace plus loin du centre de l'enchaînement, empêche diffusion le long des distances et pratiquement des coupes considérables d'excédent d'enchaînement il au loin [21].

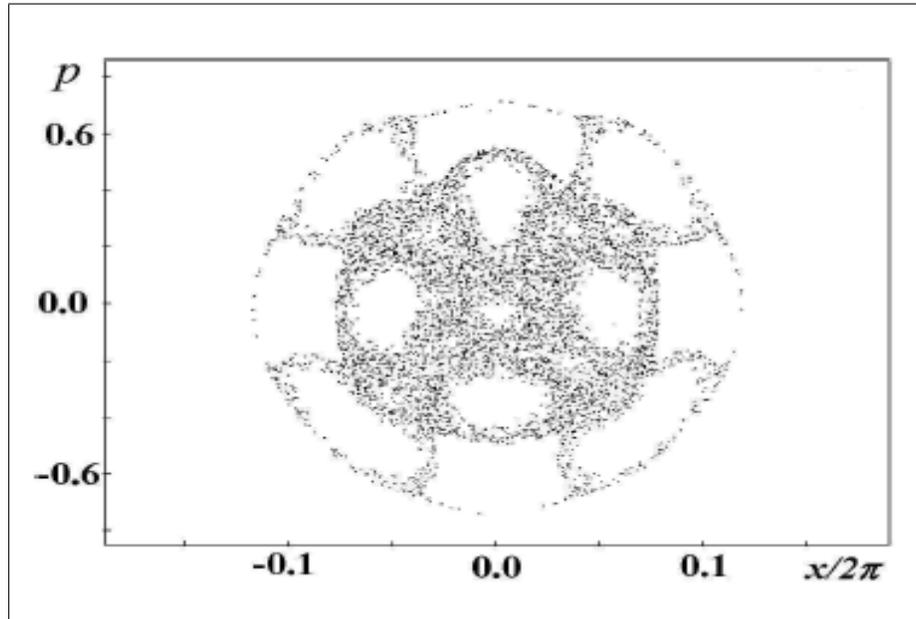


FIG. 2.6: portrait de phase de l'équation (2.26) à $\alpha = 0.1$ et $n_0 = 4$.

2.4 Les résonances non linéaires[25]

La résonance est un phénomène selon lequel certains systèmes physiques (électriques, mécaniques...) sont sensibles à certaines fréquences. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite " fréquence de résonance " ou " fréquence naturelle " ou fréquence propre. Soumis à une telle excitation, le système va être le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipations du système, ou bien jusqu'à une rupture d'un composant du système.

Le phénomène de résonance stochastique (SR) est un phénomène physique apparaissant dans des systèmes bistable excités par une sinusoïde de faible amplitude, bruite. Pour bien appréhender ce phénomène, imaginons une particule de masse nulle soumise à un potentiel bimodal. Si cette particule est soumise à une force sinusoïdale d'amplitude suffisamment faible, elle oscillera au fond de l'un des puits mais ne pourra en sortir. Si au contraire celle-ci est excitée par un bruit blanc Gaussien par exemple, elle a une probabilité non nulle de sauter d'un puits à l'autre [46].

La résonance stochastique est un effet non linéaire par lequel le traitement d'un signal peut se voir améliorer grâce à l'action du bruit. Cet effet paradoxal a été mis en évidence pour la première fois il y a environ une vingtaine d'années dans le contexte de la physique non linéaire. Il a depuis lors été étendu et observé dans une grande variété de processus non

linéaires, incluant des circuits électroniques, des dispositifs optiques, des systèmes neuronaux. La résonance stochastique peut survenir sous des formes diverses, selon les signaux, selon le système réalisant le couplage signal-bruit non linéaire, et selon la mesure de performance qui est améliorée grâce au bruit [47].

La résonance non-linéaire est une propriété essentielle des systèmes dynamiques. Il caractérise leur réponse à une perturbation externe et aide à comprendre le rôle joué par la non-linéarité[48].

Nous décrirons le mouvement non perturbé du système avec un degré de liberté avec l'Hamiltonien $H_0(I)$ et le mouvement perturbé avec l'Hamiltonien

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t) \quad (2.91)$$

Là où ε est un petit paramètre sans dimensions $\varepsilon \ll 1$. La perturbation V est périodique à temps avec la période $T = \frac{2\pi}{\nu}$

Par conséquent, V peut être augmenté d'une double série de Fourier Dans θ et t :

$$V(I, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{k,l}(I) e^{i(k\theta - l\nu t)} + c.c., \quad (2.92)$$

$$V_{k,l}^* = V_{-k,-l}^*$$

là où *c.c.* indique les limites conjuguées complexes. Se servant des expressions (2.91) et (2.92), les équations canoniques du mouvement peut être transformé en ce qui suit :

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \varepsilon \sum_{k,l} k V_{k,l}(I) e^{i(k\theta - l\nu t)} + c.c. \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{dH_0}{d\theta} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} \\ &= \omega(I) + \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{k,l} \frac{\partial V_{k,l}(I)}{\partial I} e^{i(k\theta - l\nu t)} + c.c. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ici la fréquence des oscillations $\omega(I) = \frac{dH_0}{d\theta}$ a été présenté pour le mouvement non perturbé. La condition de résonance pour un système implique que le suivant équation doit être satisfait :

$$k\omega(I) - l\nu = 0 \quad (2.94)$$

Ceci signifie que nous devons indiquer une paire de nombres entiers (k_0, l_0) pour lesquels I_0 correspondant transformera (2.94) en identité suivante :

$$k_0\omega(I_0) - l_0\nu = 0 \quad (2.95)$$

En règle générale, de telles valeurs (k_0, l_0, I_0) peut être trouvé dans l'abondance. C'est en grande partie en raison de la non-linéarité du système, c-à-d., de la dépendance de $\omega(I)$.

La manière de traiter les équations (2.93) est d'analyser certaines situations simplifiées. Premièrement, nous devrions examiner une résonance d'isolement (2.95), ignorer toutes autres résonances possibles. Ceci signifie réellement cela dans des équations du mouvement, seulement ces limites doivent être maintenues ($k = k_0, l = l_0$), qui satisfont la condition de résonance à $I = I_0$:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{2} \varepsilon k_0 V_0 \sin(k_0\theta - l_0\nu t + \phi), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(k_0\theta - l_0\nu t) + \phi \end{aligned} \quad (2.96)$$

Là où nous avons placé

$$V_{k_0, l_0} = |V_{k_0, l_0}| e^{i\phi} = V_0 e^{i\phi} \quad (2.97)$$

On le suppose également que la valeur

$$\Delta I = I - I_0 \quad (2.98)$$

est petit, c.-à-d., que les équations (2.96) sont examinées à proximité de la valeur de résonance de l'action I_0 , Ici nous énumérons les approximations pour davantage d'analyse :

- (i) des côtés droits dans les équations (2.1.6) que nous pouvons placer $V_0 = V_0(I_0)$;
- (ii) nous pouvons augmenter le $\omega(I)$ de fréquence comme suit :
- (ii) nous pouvons augmenter la fréquence $\omega(I)$ comme suit

$$\omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I$$

Où

$$\omega_0 = \omega(I_0), \quad \omega' = d\omega(I_0)/dI$$

tandis que ΔI a été défini dedans (2.98) ;

- (iii) nous pouvons négliger la limite de fréquence de l'ordre de ε dans la seconde équation (2.96).

En conclusion, nous avons ramené notre système (2.96) à simplifié :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta I) &= \varepsilon k_0 V_0 \sin \psi \\ \frac{d}{dt}(\psi) &= k_0 \omega' \Delta I \end{aligned} \quad (2.99)$$

là où une nouvelle phase a été présentée :

$$\psi = k_0 \theta - l_0 \nu t + \phi \quad (2.100)$$

L'ensemble d'équations (2.99) peut être présenté sous une forme Hamiltonienne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta I) &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi} & \frac{d}{dt}(\psi) \\ &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Delta I} \end{aligned} \quad (2.101)$$

où

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k_0 \omega' (\Delta I)^2 + \varepsilon k_0 V_0 \cos \psi \quad (2.102)$$

L'expression (2.102) est une Hamiltonienne efficace décrivant la dynamique d'un système à proximité d'une résonance. Variables $\Delta I, \psi$ forme une paire canoniquement conjuguée. Une comparaison des expressions (2.102) et (1.91) montre cela \bar{H} l'Hamiltonien décrit les oscillations d'un pendule non-linéaire (avec l'exactitude de déphasage par π pour $\omega' > 0$). Il suit (2.99) de celui

$$\ddot{\psi} + \Omega^2 \sin \psi = 0 \quad (2.103)$$

où $\tilde{\psi} = \psi + \pi$ et :

$$\Omega_0 = (\varepsilon k^2 V_0 |\omega'|)^{1/2} \quad (2.104)$$

La valeur Ω_0 est la fréquence des oscillations de phase. Pour le pendule non-linéaire peuvent automatiquement être appliqué au Hamiltonien (2.102) si nous substituons $k_0 \omega' t$ à t dans elles. Sur l'avion de phase (p, q) une courbe de phase définie par l'action I_0 (voir la fig.(2.7)) correspond à une résonance exacte. Changement dans l'équation (2.100) de l'angle polaire θ avec la phase ψ nous porte à un système du même rang rotation avec la fréquence du $l_0 \nu$. Deux échantillons du portrait de phase de la résonance non-linéaire dans le système du même rang tournant sont montrés dans Fig. (2.7) et fig. (2.8). Il suit cela dans le cas d'une résonance de l'ordre de l_0 sur l'avion de phase, l_0 cellules de séparatrice sont formés avec l_0 points singuliers hyperboliques et l_0 points singuliers elliptiques. Ainsi, le non-linéaire la résonance transforme la topologie du portrait de phase. Déterminons les conditions dans lesquelles le système "est emprisonné" par une résonance non-linéaire. Nous présenterons le paramètre sans dimensions α caractériser le degré de non-linéarité des oscillations.

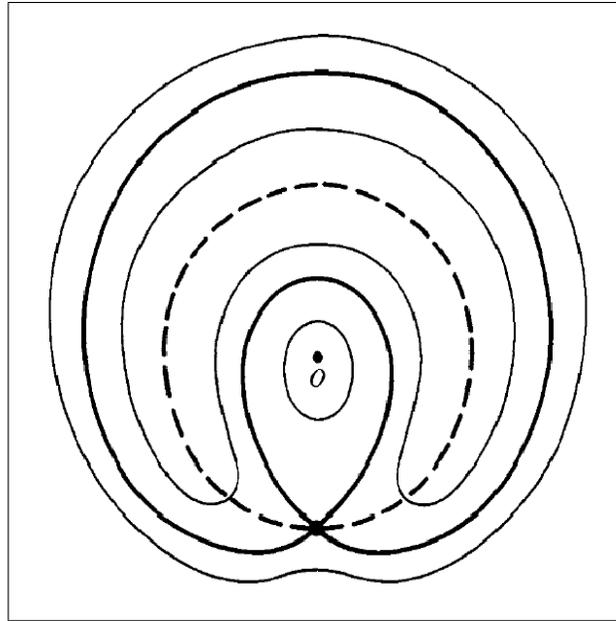


FIG. 2.7: La résonance non-linéaire au $k_0 = 1$, $l_0 = 1$.

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \equiv \frac{I_0}{\omega_0} |\omega'| \quad (2.105)$$

Les trois approximations ci-dessus sont valides si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\epsilon \ll \alpha \ll 1/\epsilon \quad (2.106)$$

La première inégalité signifie que la non-linéarité doit être assez forte et si tendent à zéro. À partir du l'Hamiltonien (2.102) et (de 2.105) nous peut estimer l'amplitude des oscillations de phase exprimées en action :

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\varepsilon \frac{V_0}{\omega'}\right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2} \quad (2.107)$$

Tandis que $V_0 \sim H_0 \sim \omega_0 I_0$. De même, avec l'aide de la définition (2.104).

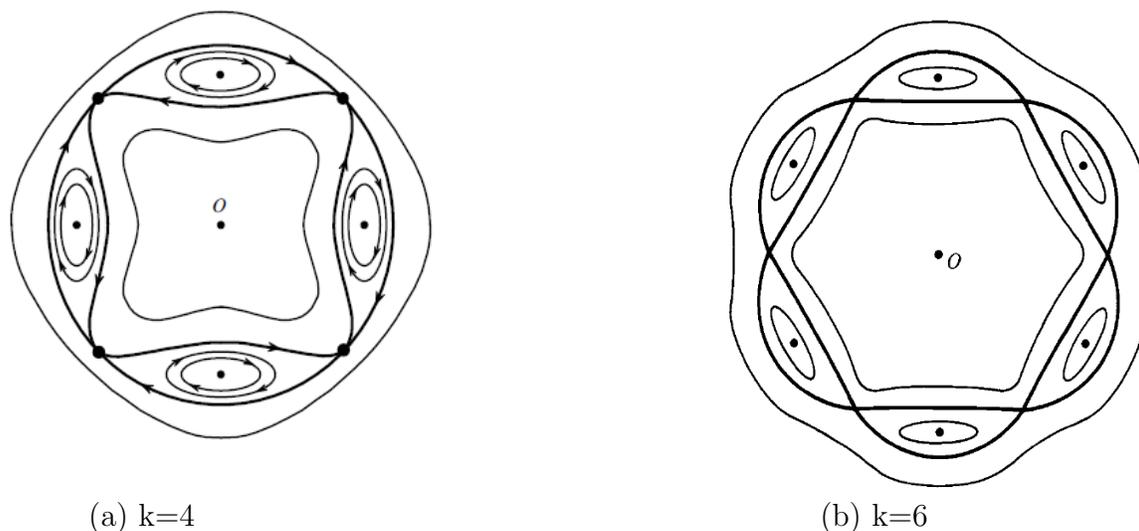


FIG. 2.8: La résonance non-linéaire.

Pour la largeur de la résonance dans la fréquence nous obtenons

$$\frac{\max \Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = (\varepsilon\alpha)^{1/2} \quad (2.108)$$

L'expression (2.107) explique la signification de la première équation dans (2.106), et l'expression (2.108) la signification de la deuxième équation, c-à-d, celle des changements relatifs de l'action et de la fréquence dans le cas d'un non-linéaire la résonance doit être petite.

La condition de résonance (2.95) en peut généralement être satisfaite à k_0 . Dans ce cas-ci, toutes les prétentions et formules demeurent sans changement. Mais parce que la phase est déterminée par l'expression $\psi = k_0\theta - l_0\nu t + \phi$, ceci mène à une guirlande de boucles de séparatrice. Le nombre de telles boucles est k_0 . Par conséquent, le nombre de paires elliptique-hyperbolique de points est également égal à k_0 (fig. 2.8).

Conclusion

Dans ce chapitre on fait quelque rappel sur la physique des plasmas en générale, et en particulier le mouvement d'une particule charge dans un plasma magnétique avec une onde électrostatique. Nous avons aussi calculé l'Hamiltonien de problème à partir de principe fondamentale de la dynamique et on divisé ce Hamiltonien à deux parties : un est l'Hamiltonien exact qui décrit le mouvement complet, l'autre est l'Hamiltonien approximatif qui décrit le mouvement de la partie non stochastique. Nous avons analysé les points fixes comme nous avons concentré sur le paramètre de résonance n_0 qui détermine la position des îles et du séparatrice dans l'espace de phase. On termine ce chapitre par une notion sur les résonances non linéaire qui utiliser pour étudier notre problème.

Chapitre 3

Etude numérique

Introduction

Dans le premier chapitre nous avons fait quelques rappels sur les système dynamiques en général et Hamiltoniens en particulier. Nous avons rappelé aussi les notions des points fixes, de stabilités et de chaos. Dans le deuxième chapitre nous avons étudié la dynamique d'une particule chargée dans un plasma magnétique avec une onde électrostatique, les formalismes Hamiltoniens et nous avons discrétisé les équations de Hamilton qui décrivent l'évolution du système dynamique et interpréter les structure obtenues dans l'espace des phases.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux solutions numériques des équations qui discrétisé dans du deuxième chapitre. La résolution numérique des équation nous permettra d'étude le comportement régulier et chaotique du système, et comprendre l'évolution des différents structures dans l'espace des phases en fonction de l'amplitude de perturbation α et du nombre de résonance n_0 qui sont des paramètre importants dans cette étude.

3.1 Formulation du problème

Certains modèles physiques sont tout à fait universels. Un exemple est le mouvement d'une particule chargé dans plasma magnétisé devient comme le mouvement d'un d'oscillateur non linéaire perturbé. La discussion consiste à étudier la dynamique et le comportement de l'oscillateur non linéaire perturbé en fonction de la variation, premièrement du nombre de conditions initiales, deuxièmement de la valeur de la constante de perturbation α , et troisièmement le nombre de résonance n_0 .

Ce modèle peut être employé pour expliquer le principe fondamental et propriétés typiques de la formation d'une couche stochastique. Avant de procéder à tout ça, nous devons d'abord déterminer les équations du mouvement d'oscillateur et les discrétisations pour qu'elles soient prêtes aux manipulations numériques.

3.1.1 Les équation de mouvement

La dynamique d'un système Hamiltonien et complètement décrite par une simple fonction, l'Hamiltonien $H(p, q)$. L'état du système est indiqué par son impulsion p et sa position q .

Alors la forme l'Hamiltonien est :

$$H(q, p, \tau) = \frac{p^2}{2} + \tilde{\omega}_0^2 q^2 + \alpha \sin(q - \tau) \quad (3.1)$$

Les équations canoniques qui y ont découlent sont :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\tilde{\omega}_0^2 q + \alpha \sin(q - \tau) \end{cases} \quad (3.2)$$

Donc l'équation différentielle qui vérifie le système est :

$$\ddot{q} + \tilde{\omega}_0^2 q - \alpha \sin(q - \tau) = 0 \quad (3.3)$$

Tous les types non-triviaux du mouvement résultent de la perturbation et son interaction avec le mouvement non perturbé. Toute fois, la situation actuelle peut être très différente de celle définie par la théorie KAM.

Pour s'assurer de cela, écrivons (3.1) avec de nouvelles variables angle-action (I, ψ) . Pour les variables (q, \dot{q}) Posons :

$$\begin{cases} p = \sqrt{2I\tilde{\omega}_0} \cos \psi \\ q = \sqrt{\frac{2I}{\tilde{\omega}_0}} \sin \psi \end{cases} \quad (3.4)$$

Exprimé en ces variables

$$\begin{aligned} H &= \omega_0 I + \alpha V(I, \psi; \tau) \\ V(I, \psi; \tau) &= \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{2I}{\tilde{\omega}_0}} \sin \psi - \tau\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

La partie non perturbée de l'Hamiltonien $H_0 = \tilde{\omega}_0 I$ ne satisfait pas la condition de non-dégénérescence. Par conséquent, dans le cas d'une résonance

$$n_0 \omega_0 = \omega \quad (3.6)$$

Où n_0 est un nombre entier, l'amplitude d'un oscillateur peut augmenter considérablement. Il est non-linéaire et il est possible d'échapper à la résonance seulement en raison de la perturbation. En outre, nous verrons que cette situation est commune à tous les systèmes quasi-linéaires.

Montrons comment dans l'équation (3.1) sur le Web apparaît, si la condition de résonance (3.6) est satisfaite. Laissez-nous ensuite effectuer un certain nombre de changements de

variables. Dans un premier temps, nous allons introduire de la manière habituelle manière dont les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} q = \rho \sin \psi \\ p = \rho \tilde{\omega}_0 \cos \psi \end{cases} \quad (3.7)$$

et utilise le développement

$$\cos(q - \tau) = \cos(\rho \sin \psi - \tau) = \sum_m J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (3.8)$$

Où J_m sont les fonctions de Bessel. En tenant compte de ce qui précède analogie avec mouvement dans un champ magnétique, ρ est le rayon de Larmor. L'Hamiltonien (3.1) exprimée dans les nouvelles variables (3.7) s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_0 \rho^2 + \alpha \sum_m J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (3.9)$$

et (3.8), prend la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_0 \rho^2 + \alpha J_{n_0}(\rho) \cos(n_0\psi - \tau) + \alpha \sum_{m \neq n_0} J_m(\rho) \cos(m\psi - \tau) \quad (3.10)$$

Dans la somme, nous distinguons un terme avec $m = n_0$ de

$$I = \tilde{\omega}_0 \rho^2 / 2n_0 = m\tilde{I}; \quad \phi = n_0\psi - \tau \quad (3.11)$$

Maintenant, nous introduisons de nouvelles variables et d'écrire l'expression suivante :

$$\tilde{H} = H - I \quad (3.12)$$

Où \tilde{H} est exprimé en fonction de (\tilde{I}, ϕ) là par des calculs directs, nous peut facilement faire en sorte que les équations

$$\dot{\tilde{I}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi}; \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{I}} \quad (3.13)$$

En substituant (3.11) dans (3.10) et (3.12) nous obtenons :

$$\tilde{H} = (n_0 \tilde{\omega}_0 - 1) \tilde{I} + \alpha J_{n_0}(\rho) \cos \phi + \alpha \sum_{m \neq n_0} J_m(\rho) \cos\left[\frac{m}{n_0} \phi - \left(1 - \frac{m}{n_0}\right) \tau\right] \quad (3.14)$$

Où, à la recherche d'une notation plus compacte, nous introduisons ρ qui, selon (3.11), se présente comme suit

$$\rho = \left(\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, l'expression $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{I}, \phi)$ est l'Hamiltonien pour les nouvelles variables canoniques (\tilde{I}, ϕ) . Il peut aussi être écrit comme :

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0(\tilde{I}) + \alpha \tilde{V}(\tilde{I}, \phi; \tau) \quad (3.15)$$

Où, conformément à (3.14), nous avons noté :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0(\tilde{I}) &= (n_0\tilde{\omega}_0 - 1)\tilde{I} + \alpha J_{n_0}\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos \phi \\ \tilde{V}(\tilde{I}, \phi; \tau) &= \sum_{m \neq n_0} J_m\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos\left[\frac{m}{n_0}\phi - \left(1 - \frac{m}{n_0}\right)\tau\right]\end{aligned}\quad (3.16)$$

Tandis que pour ρ il faut retourner à l'expression (3.15). Nous tournons maintenant notre attention sur le cas de résonance (3.6).

$$n_0\omega_0 = \omega \quad (3.17)$$

Il s'agit de la définition du nombre qui n'a été officiellement pas introduit avant. Sous la condition (3.16), l'expression de \tilde{H}_0 acquiert la forme suivante :

$$\tilde{H}_0 = \alpha J_{n_0}\left(\sqrt{\frac{2m\tilde{I}}{\tilde{\omega}_0}}\right) \cos \phi \quad (3.18)$$

Laissez-nous effectuer une analyse préliminaire du système émergent dans le cas de résonance. Les deux termes de l'Hamiltonien, \tilde{H}_0 ainsi \tilde{V} que, sont proportionnels à α . Par conséquent, la partie fixe de l'Hamiltonien, qui est indépendante du temps, est induite par une perturbation. Il disparaît à $\alpha \rightarrow 0$. Il s'agit d'un élément nouveau, qui n'existe pas dans les problèmes évoqués ci-dessus.

Maintenant, nous allons discuter de mouvement dans le web de façon plus détaillée. Revenons à l'original Hamiltonien (3.15) afin de simplifier. Nous supposons que la condition de résonance (3.17) est vrai et de retenir dans (3.16) pour \tilde{V} seulement les termes avec $m = n_0 \pm 1$. Comme on le verra plus tard, la contribution d'autres termes dans la somme de \tilde{V} est faible (une même technique a déjà été appliquée dans le calcul de la largeur de la couche stochastiques). Enfin, (3.16), on obtient

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0 &= \alpha J_{n_0}(\rho) \cos(\phi) \\ \tilde{V} &= \alpha \left\{ J_{n_0+1}(\rho) \cos\left[\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)\phi + \frac{1}{n_0}\tau\right] + J_{n_0-1}(\rho) \cos\left[\left(1 - \frac{1}{n_0}\right)\phi - \frac{1}{n_0}\tau\right] \right\}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Par souci de simplicité, nous devons aussi considérer les régions suffisamment éloignées des centre du réseau, c'est à dire, nous avons :

$$\rho \gg 1 \quad (3.21)$$

Servons-nous la fonctions de Bessel, conformément à (3.21) :

$$J_n(\rho) \sim \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\rho - \frac{1}{2}\pi n - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.22)$$

Maintenant, nous distinguons une certaine cellule de la bande et de décrire la famille de trajectoires à l'intérieur, dans un premier temps en omettant perturbation \tilde{V} . ρ_0 est un point elliptique dans le centre de la cellule. Selon de (3.21), nous avons

$$\rho_0 - \frac{1}{2}\pi n_0 - \frac{1}{4}\pi = 0; \pi \quad (3.23)$$

Avec l'aide de la condition (3.53) nous réécrire (3.20) comme suit :

$$\tilde{H}_0 = \sigma\alpha\sqrt{\frac{2}{\rho_0\pi}} \cos \rho \cos \phi, \quad \sigma = \mp 1 \quad (3.24)$$

où $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ et différents signes correspondents à des coordonnées des points elliptiques, en fonction de la valeur du côté droit de (2.51). Arrêtons-nous sur l'analyse des trajectoires déterminées par le Hamiltonien (3.24). La taille d'une cellule séparatrice est de l'ordre de 2π . Par conséquent, $\max |\Delta\rho| = 2\pi$ et, selon l'inégalité (3.20) :

$$|\tilde{\rho}| = |\rho - \rho_0| \ll \rho_0 \quad (3.25)$$

de la définition de l'action (3.11), on obtient

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\omega}_0\rho^2}{2n_0} = \frac{\tilde{\omega}_0\rho_0^2}{2n_0} + \frac{\tilde{\omega}_0}{2n_0}\rho \quad (3.26)$$

Le changement suivant d'une variable $\tilde{I} \leftarrow \tilde{I} - \frac{\tilde{\omega}_0\rho_0^2}{2n_0}$ est canonique (changement par une constante). Avec la même approximation que pour l'Hamiltonien \tilde{H} , la paire de variables $(\tilde{\rho}, \phi)$ peut être considérée comme canonique. En conséquence, les équations du mouvement ont la forme suivant :

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{m}{\tilde{\omega}_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \phi}; \quad \dot{\phi} = \frac{m}{\tilde{\omega}_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} \quad (3.27)$$

Notons

$$\omega_w = -\sigma\alpha \frac{m}{\tilde{\omega}_0} \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{\rho}_0}} \quad (3.28)$$

Considérons la définitions du nouvel Hamiltonien approximatif comme H_w

$$H_w = \omega_w \cos \tilde{\rho} \cos \phi \quad (3.29)$$

Ensuite, les équations

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\frac{\partial H_w}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H_w}{\partial \tilde{\rho}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sont équivalentes à (3.27). L'Hamiltonien H_w peut être appelé le Hamiltonien de tore de web. ω_w est la fréquence des petites oscillations des trajectoires enroulé autour de tore de web. réécrivons (3.30) sous une forme explicite :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\omega_w \cos \tilde{\rho} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega_w \sin \tilde{\rho} \sin \phi \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2 Réalisation du programme numérique

Pour passer à la résolution numérique, il nous faut un programme écrit avec un certain langage informatique, dans ce travail nous utilisons le langage FORTRAN 77.

Le programme contient deux parties : partie déclaration et partie instructions. Dans la partie déclaration, on définit les objets qui seront manipulés par le programme, on déclare toutes les variables de notre programme. Tandis que, la partie instruction, est la partie qui consiste à dérouler dans l'ordre toutes les instructions de la partie exécutable du programme principal.

Donc dans cette partie, on fait entrer le nombre de conditions initiales, itérations, le paramètre de résonance, le paramètre de la perturbation, et le nombre de points à afficher pour chaque itération. Ainsi, on choisit les conditions initiales au hasard.

La méthode d'intégration utilisée ici est basée sur séries Taylor de huitième ordre de l'équation du mouvement. La méthode de Taylor est utilisée en partie à cause de sa simplicité, mais surtout à cause de la vitesse impliquée. La sortie du fichier est en "traj.dat". À la fois "init.dat" et "traj.dat" sont simplement deux fichiers avec deux colonnes étant q et p les coordonnées d'une particule qui défini dans (2.16) et (2.17).

"Setup. f" doit être utilisé en conjonction avec "integrate. f". "Setup. f" crée le fichier "init.dat" qui contient les conditions initiales pour "integrate. f". Les conditions initiales sont arrangées pour être dans les coordonnées (ψ, I) . Le fichier de configuration "config. f" contient la configuration des conditions initiales et comprend : l'amplitude de l'onde (α qui est stocké dans *eps*), la fréquence de l'onde et la fréquence cyclotron, le nombre des particules et de leurs positions dans I et ψ . Le modèle carré de particules dans (I, ψ) sont ensuite converties en les coordonnées (q, p) et stockés dans "init.dat". Les résultats finaux des coordonnées (q, p) stocké dans "traj.dat".

3.3 Résultats numériques

Après la réalisation du programme numérique en Fortran, nous ferons des manipulations qui nous permettront de voir l'évolution et le changement de la structure de l'espace des phases de notre système Hamiltonien. En jouant sur le paramètre de contrôle ou de stochasticité α , et les conditions initiales. Et nous cherchons la valeur critique de ce paramètre qui est la valeur à partir de laquelle le phénomène de chaos commence à se manifester.

Pour chaque valeur de α , soit-elle : nulle, faible ou forte, nous démarrons d'une condition initiale (p_0, q_0) , pour obtenir la suite des points de l'espace de phase : $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), \dots, (p_N, q_N)$ pour un nombre N d'itérations (temps intermédiaires) assez grand. Puis, on recommence avec d'autres conditions initiales, pour obtenir d'autres séries de points.

Et ainsi de suite, pour remplir l'espace de phase d'une dizaine de séries de points, ce qui représente quelques milliers de points au total. On obtient des graphes relatifs à chaque valeur du paramètre α et conditions initiales. La comparaison entre ces divers graphes est très instructive pour la compréhension du passage de l'ordre au désordre (chaos).

Il est à noter que la validité du travail est faite en comparant nos résultats à ceux qu'on a pu trouver dans la littérature. On remarque bien que les deux figures (3.1 et 3.2) se ressemblent en matière de structures contenues dans chacune et aussi la forme des différentes courbes. Peut être il y a toute une petite légère différence qui est du : premièrement a la nature intrinsèque du phénomène du chaos et deuxièmement aux calculateurs utilisés pour faire les manipulations numériques et aussi au logiciels traduisant les résultats sous forme de figure.

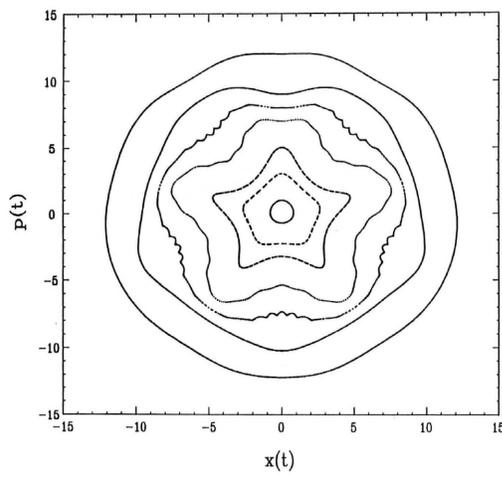
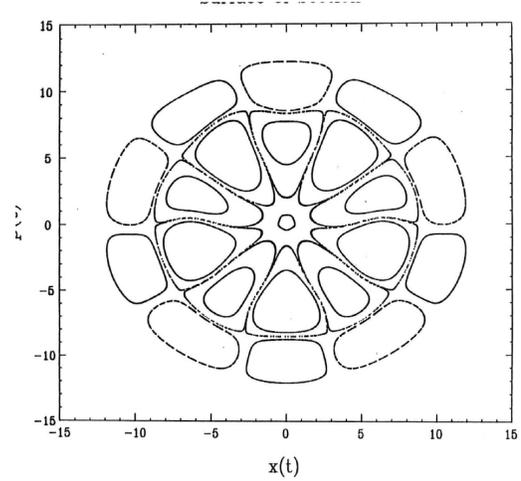
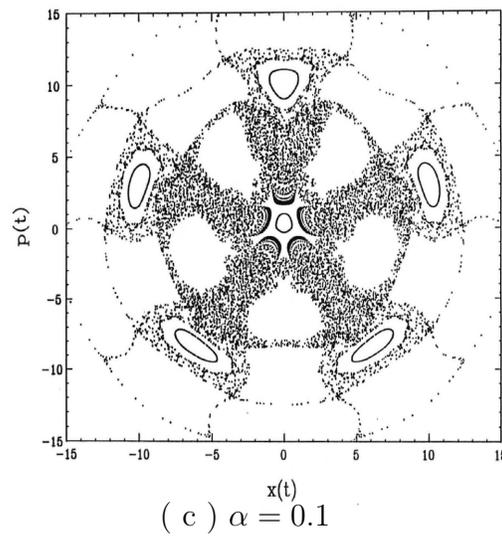
(a) $\alpha = 0.01$ (b) $\alpha = 0.05$ (c) $\alpha = 0.1$

FIG. 3.1: portrait de phase pour $n_0 = 5$ présenté dans la littérature pour différentes valeurs de α [26].

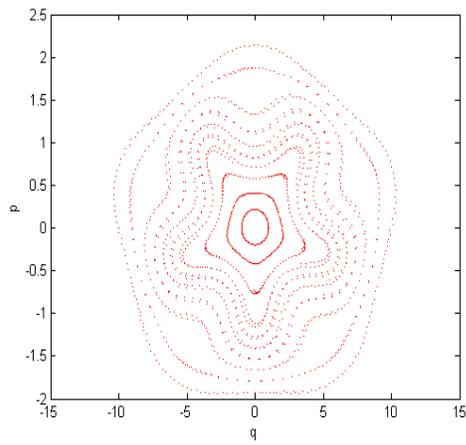
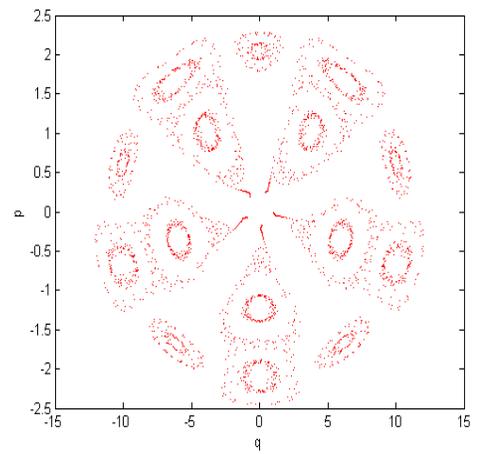
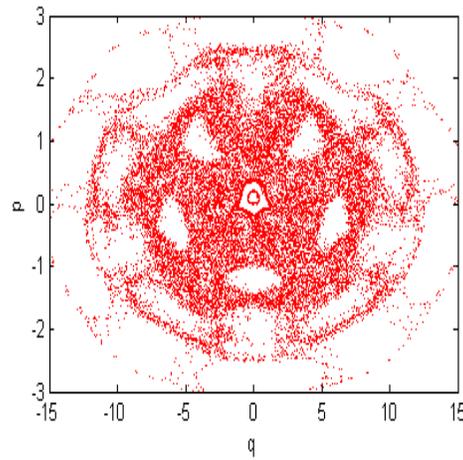
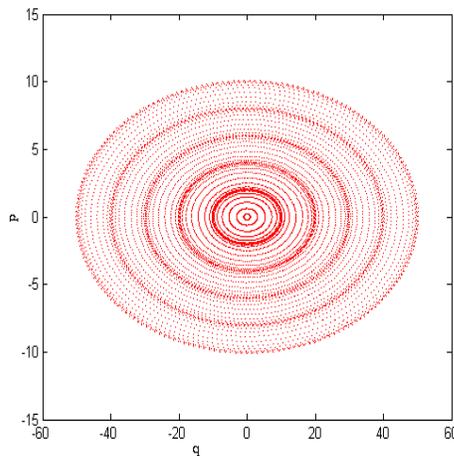
(a) $\alpha = 0.01$ (b) $\alpha = 0.05$ (c) $\alpha = 0.1$

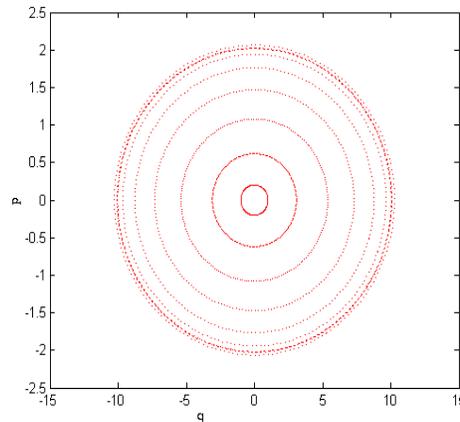
FIG. 3.2: portrait de phase pour $n_0 = 5$ construit à base de notre programme pour différent valeur de α

3.3.1 Cas non perturbé $\alpha = 0$

Dans le cas non perturbé, le système est demeuré linéaire en absence de la partie perturbé qui contient de terme $\cos(q - t)$ (est un oscillateur harmonique). Il suffit de donner la ou les conditions initiales.



(a) 50 conditions initiales



(b) 10 conditions initiales

FIG. 3.3: portrait de phase pour $\alpha = 0$

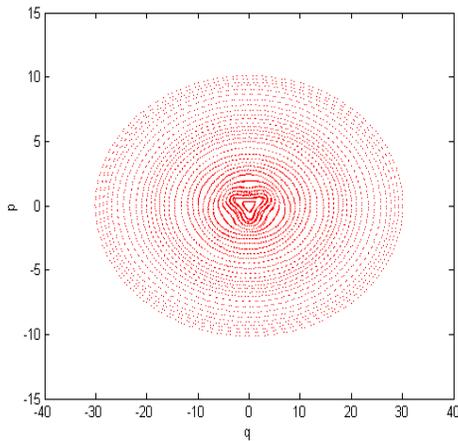
3.3.1.1 Faible perturbation $\alpha = 0.01$

Dans le cas perturbé $\alpha \neq 0$, et on remarquera comment l'espace de phase va se déformé . Dans ce ca le système devient non autonome, donc il n'y a pas d'intégrale premier, et une trajectoire peut explorer tous l'espace de phase. Il suffit de choisir un nombre assez grand de valeur de α et construire les sections de poincaré correspondantes.

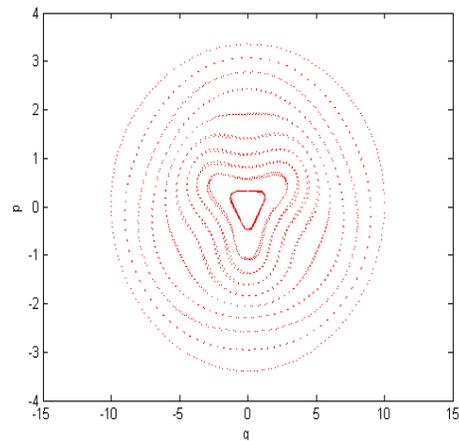
Dans notre cas on prend $\alpha = 0.01$, et on change le paramètre de resonance n_0 et le nombre des conditions initiales.

3.3.1.2 Cas $n_0 = 3$

La figure (3.3) présente l'espace de phase du système avec $n_0 = 3$ pour 30 et 10 conditions initiales.



(a) 30 conditions initiales

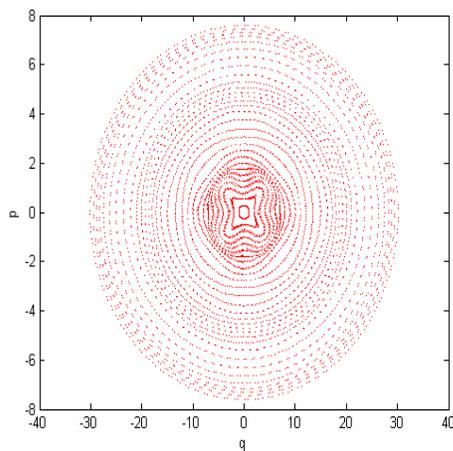


(b) 10 conditions initiales

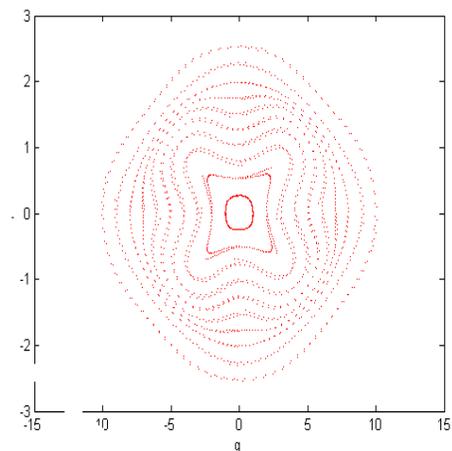
FIG. 3.4: portrait de phase pour $\alpha = 0.01$ et $n_0 = 3$

3.3.1.3 Cas $n_0 = 4$

deuxième cas, La figure (3.4) présente l'espace de phase du système avec $n_0 = 3$ pour 30 et 10 conditions initiales.



(a) 30 conditions initiales

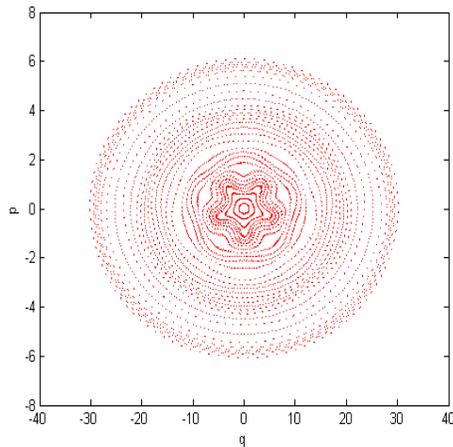


(b) 10 conditions initiales

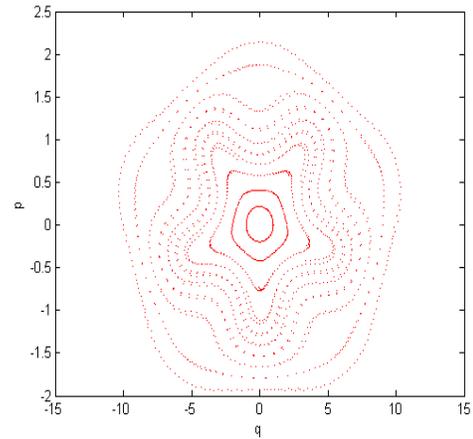
FIG. 3.5: portrait de phase pour $\alpha = 0.01$ $n_0 = 4$

3.3.1.4 Cas $n_0 = 5$

La troisième cas, La figure (3.5) présente l'espace de phase du système avec $n_0 = 5$ pour plusieurs valeurs de nombre des conditions initiales (30, et 10 conditions initiales).



(a) 30 conditions initiales



(b) 10 conditions initiales

FIG. 3.6: portrait de phase pour $\alpha = 0.01$ $n_0 = 5$

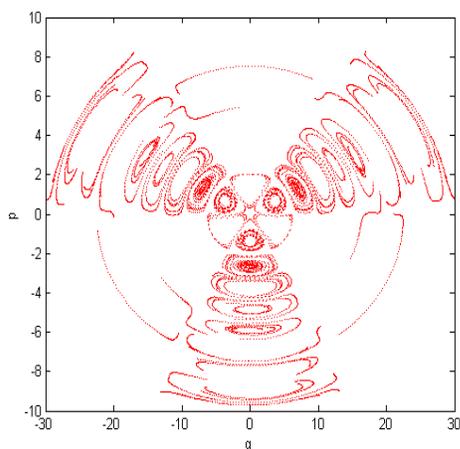
3.3.2 Moyenne perturbation

3.3.3 $\alpha = 0.05$

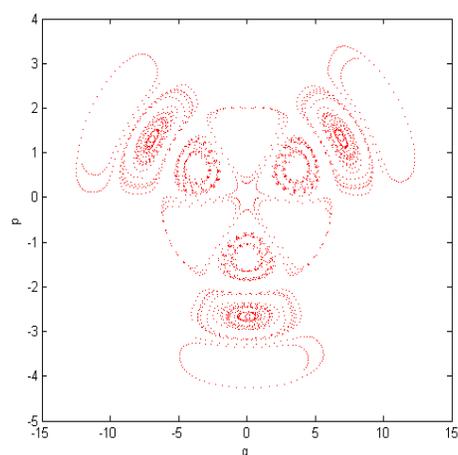
Dans cette section, nous augmentons la valeur de du paramètre de perturbation α , et faisons quelques manipulations pour premièrement pour $n_0 = 3$, puis $n_0 = 4$ et en fin $n_0 = 5$. Et à chaque valeur de nombre de résonance on change le nombre de conditions initiales. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure (3.7) pour une valeur du paramètre de perturbations $\alpha = 0.05$.

3.3.3.1 Cas $n_0 = 3$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.05$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 3$ pour le nombre de conditions initiales 30 et 10. Les résultats sont représentés sur la figure (3.7).



(a) 30 conditions initiales



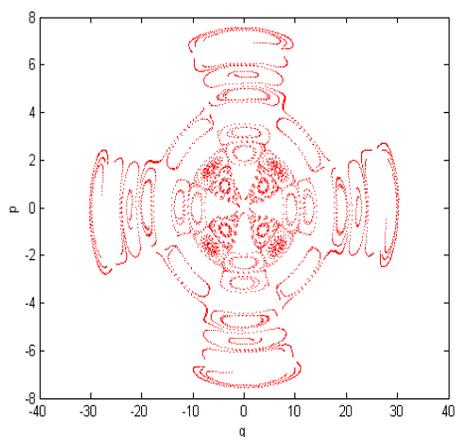
(b) 10 conditions initiales

FIG. 3.7: portrait de phase pour $\alpha = 0.05$ $n_0 = 3$

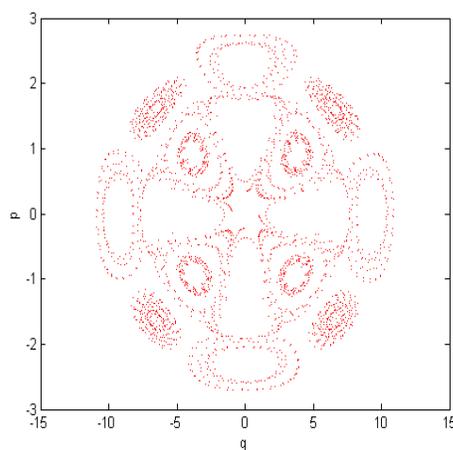
3.3.3.2 Cas $n_0 = 4$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.1$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 4$ pour le nombre de conditions initiales 30 et 10.

Les résultats sont représentés sur la figure (3.8).



(a) 30 conditions initiales



(b) 10 conditions initiales

FIG. 3.8: portrait de phase pour $\alpha = 0.05$ $n_0 = 4$

3.3.3.3 Cas $n_0 = 5$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.05$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 5$ pour le nombre de conditions initiales 30 et 10.

Les résultats sont représentés sur la figure (3.9).

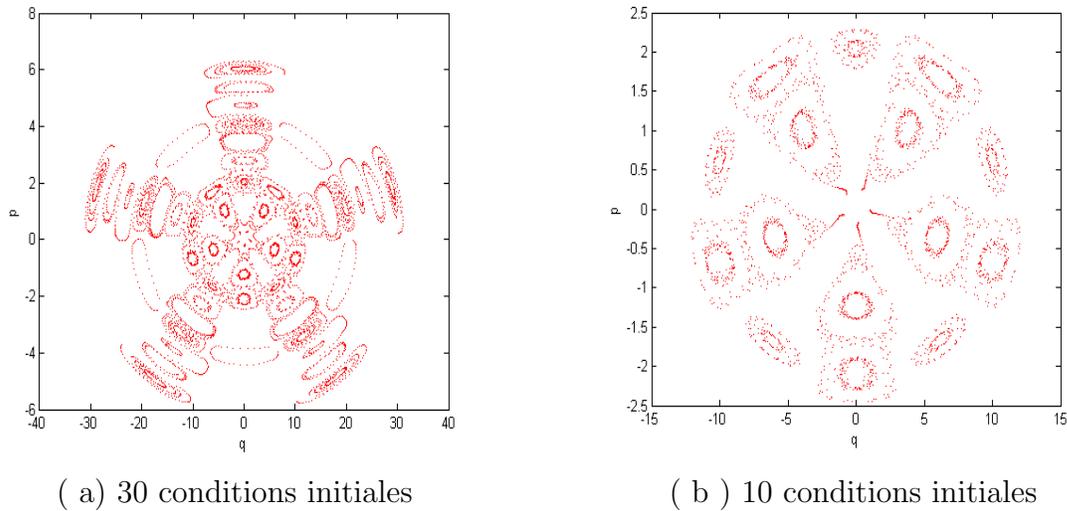


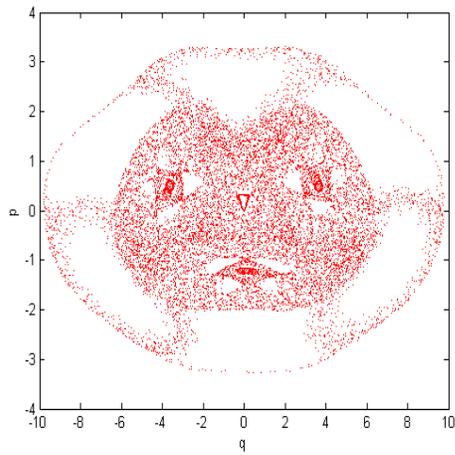
FIG. 3.9: portrait de phase pour $\alpha = 0.05$ $n_0 = 5$

3.3.4 $\alpha = 0.1$

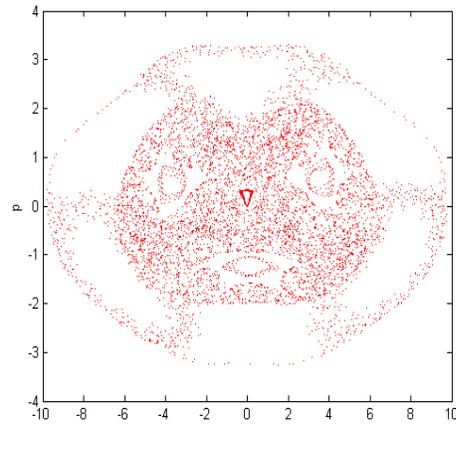
Dans cette section, nous augmentons plus la valeur de du paramètre de perturbation α , et faisons quelques manipulations pour premièrement pour $n_0 = 3$, puis $n_0 = 4$ et en fin $n_0 = 5$. Et à chaque valeur de nombre de résonance on change le nombre de conditions initiales pour une valeur du paramètre de perturbations $\alpha = 0.1$.

3.3.4.1 Cas $n_0 = 3$

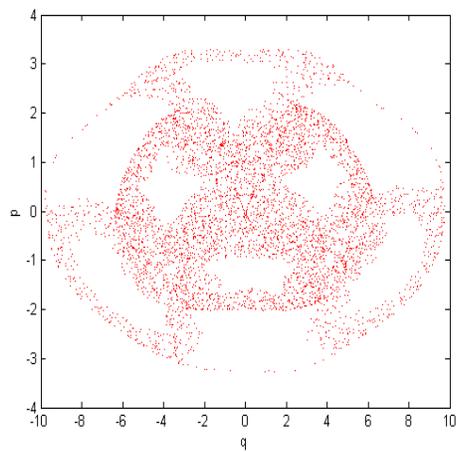
Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.2$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 3$ pour le nombre de conditions initiales 100, 50 et 30. Les résultats sont représentés sur la figure (3.10).



(a) 100 conditions initiales



(b) 50 conditions initiales

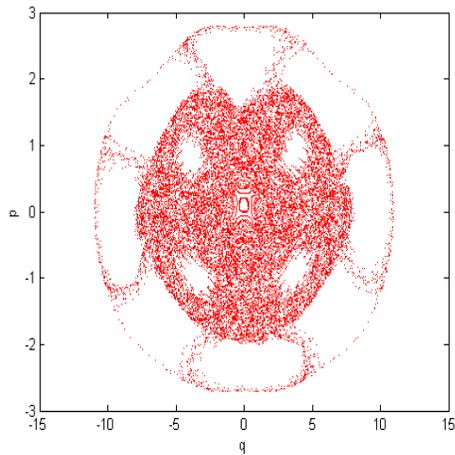


(c) 30 conditions initiales

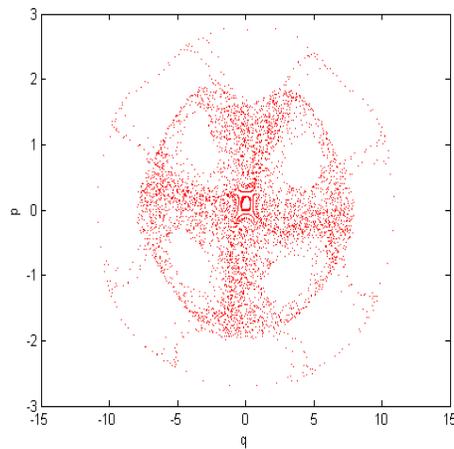
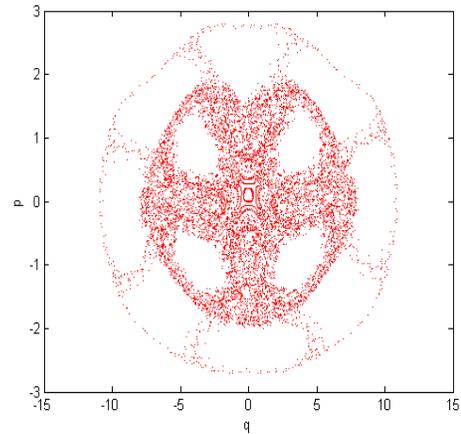
FIG. 3.10: portrait de phase pour $\alpha = 0.2$ $n_0 = 3$

3.3.4.2 Cas $n_0 = 4$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.1$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 4$ pour le nombre de conditions initiales 100, 50 et 30. Les résultats sont représentés sur la figure (3.11).



100 conditions initiales



50 conditions initiales

30 conditions initiales

FIG. 3.11: portrait de phase pour $\alpha = 0.1$ $n_0 = 4$

3.3.4.3 Cas $n_0 = 5$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.1$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 5$ pour le nombre de conditions initiales 100, 50 et 30. Les résultats sont représentés sur la figure (3.12).

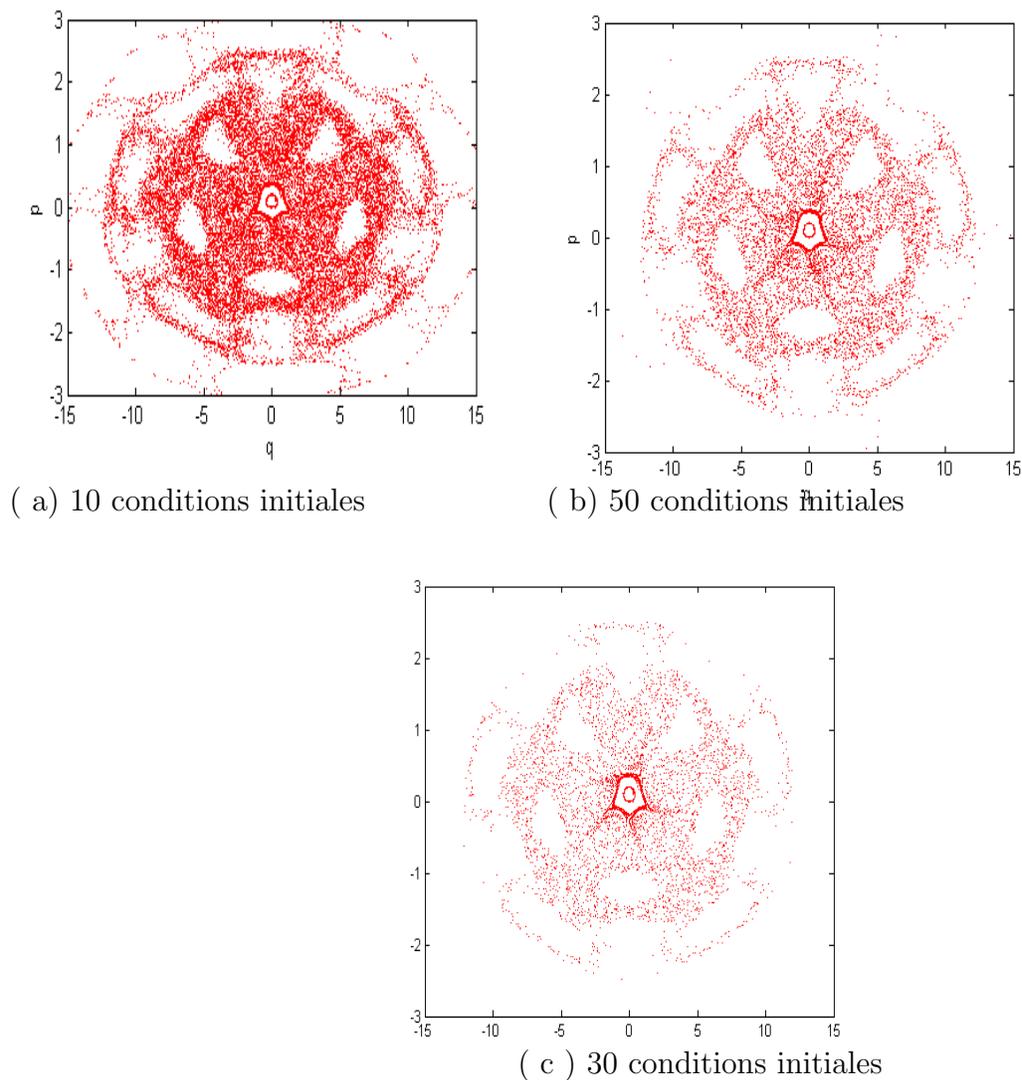


FIG. 3.12: portrait de phase pour $\alpha = 0.1$ $n_0 = 5$

3.3.5 $\alpha = 0.3$

Dans cette section, on prend une grande valeur du paramètre de perturbation $\alpha = 0.2$, et faisons quelques manipulations pour premièrement pour $n_0 = 3$, puis $n_0 = 4$ et en fin $n_0 = 5$.

3.3.5.1 Cas $n_0 = 5$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.2$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 5$.

Les résultats sont représentés sur la figure (3.13).

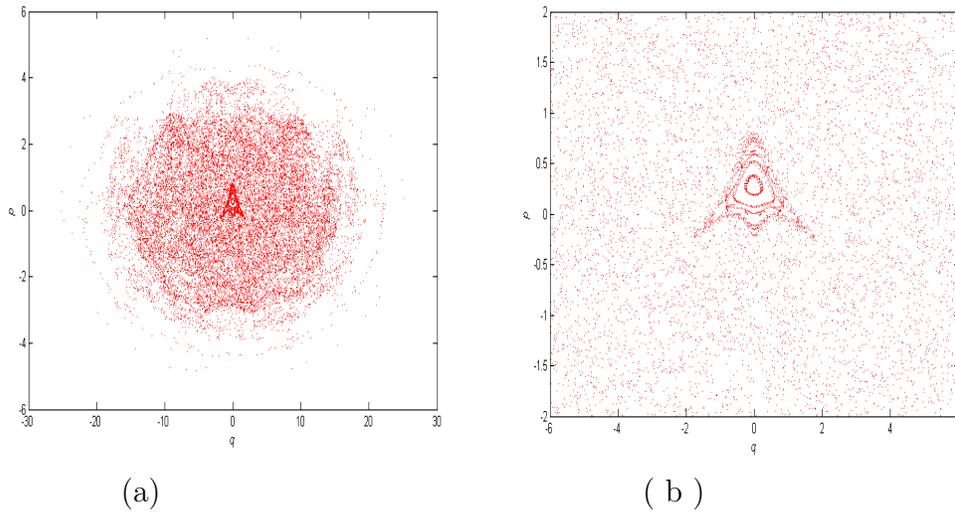


FIG. 3.13: portrait de phase pour $\alpha = 0.3$ $n_0 = 5$

3.3.5.2 Cas $n_0 = 4$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.2$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 4$.

Les résultats sont représentés sur la figure (3.14).

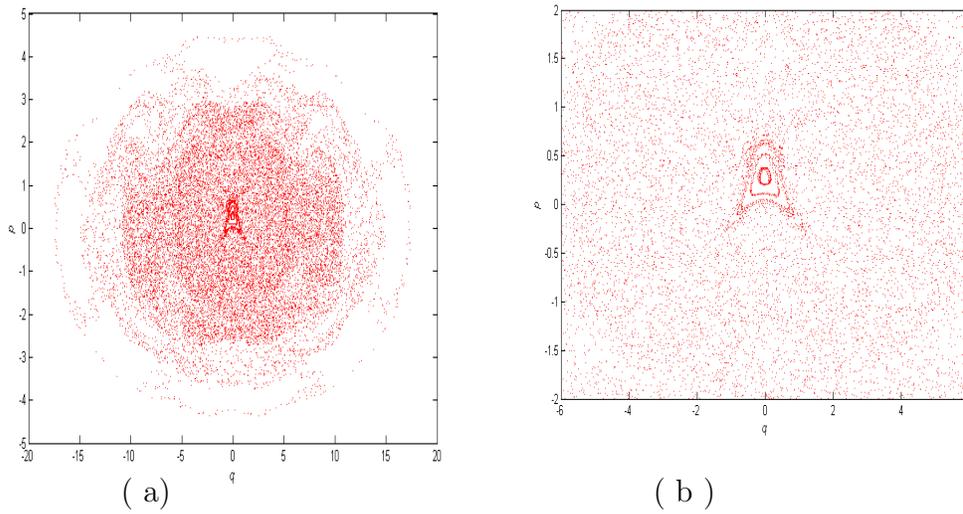


FIG. 3.14: portrait de phase pour $\alpha = 0.3$ $n_0 = 4$

3.3.5.3 Cas $n_0 = 3$

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 0.4$, et la valeur de paramètre de résonance $n_0 = 3$.

Les résultats sont représentés sur la figure (3.15).

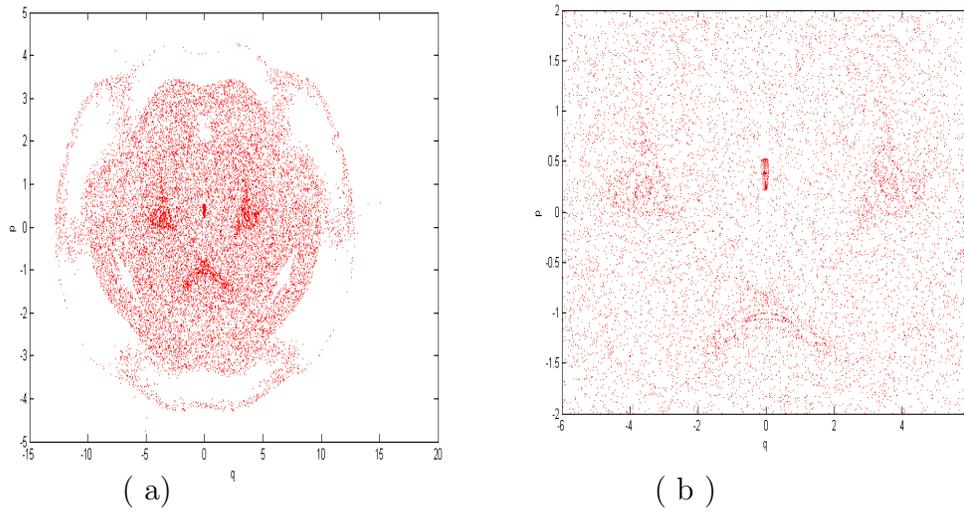


FIG. 3.15: portrait de phase pour $\alpha = 0.4$ $n_0 = 3$

3.3.6 Forte perturbation

Si on choisit la valeur de perturbation $\alpha = 2$. Les résultats sont représentés sur la figure (3.16).

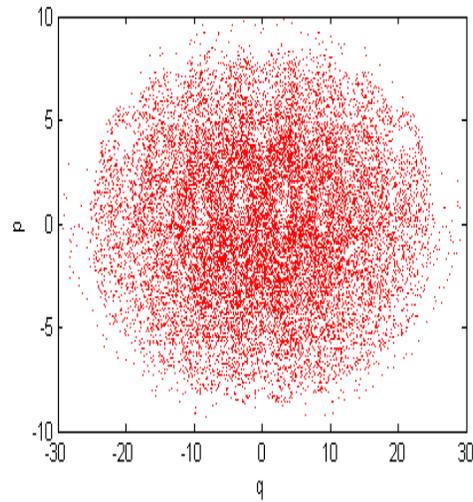


FIG. 3.16: portrait de phase pour $\alpha = 2$

3.4 Analyse et discussion des résultats

3.4.1 Non perturbé

La figure (3.2) est le portrait de phase du cas non perturbé ($\alpha = 0$) de système est intégrable. Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude est donné par les valeurs propres $\tilde{\omega}_0$.

Toutes les orbites sont fermées. cela signifie le système repasse périodiquement par le même état. A une orbite fermée correspond un régime périodique.

Le nombre des orbite fermée est égale à le nombre des conditions initiales.

3.4.2 Faible perturbation

Nous avons considéré α est faible. Les figures (3.4),(3.5), et (3.6) respectivement avec les paramètres de résonance $n_0 = 3$, $n_0 = 4$, et $n_0 = 5$ montrent l'espace de phase de notre problème proche du cas intégrable (α faible).

Ces figures affichent une série de tores emboîtés comme prédit par le théorème KAM avec des tranches sont des points des nouvelles orbite périodiques, où le nombre des tranches est égale à le nombre de résonance n_0 puis une zone des orbites invariants non tracées.

3.4.3 Moyenne perturbation

L'espace de phase dans ce cas où $\alpha = 0.05$ est donné par les figure (3.7), (3.8), et (3.9) respectivement avec nombre des résonances $n_0 = 3$, $n_0 = 4$, et $n_0 = 5$.

La structure devient plus complexe : les figures sont centrés sur le point qui $(0, 0)$ un point fixe. On a autour de centre la résonance principale comprenant elle-même des accrochages 3, 4 et 5 ; puis une zone des tores prisées. L'accrochage $n_0 = 3$ (la figure (3.6)) montre une première particularité : les trois îlots aux quels il donne naissance apparaissent à distance finie du cœur de la résonance non pas à son centre ; comme dans les cas des accrochages de $n_0 = 4$ et $n_0 = 5$ (les figures (3.8) et (3.9)).

De plus la structure de ces îlots est différente de celle observée pour les autres accrochages. Fait intéressant, la violation du théorème KAM dans ce cas, comme une conséquence de n_0 étant un nombre entier, permet une diffusion d'énergies sur le réseau stochastique de façon arbitraire.

Ces image montrent le processus de déformations des sections transversales des tores de KAM.

Au cœur de la résonance, les deux fréquences sont commensurables ; il y a donc accrochage de fréquences entre les mouvements d'oscillation ω_0 et ceux induits par la perturbation

ω . L'existence d'un accrochage traduit la sensibilité de ces deux mouvements à leur phase relative. Comme celle-ci est différente de la phase au point centre de la résonance, elle va osciller autour de cette valeur. Le chapelet d'îlots manifeste cette oscillation.

On peut voir à partir de les figures (3.7), (3.8), et (3.9) respectivement avec nombre des résonances $n_0 = 3$, $n_0 = 4$, et $n_0 = 5$, celui pour la valeur de $\alpha = 0.1$ la dynamique de notre système est régulière dans quelques régions dans l'espace de phase. noter cela même à cette valeur de α là existe des régions relativement grandes dans l'espace de phase avec un composant chaotique.

Comme on peut voir que la dynamique dans l'espace de phase correspondant à la proximité aux point (0,0) reste régulier (point fixe).

Ceci signifie que la largeur de la couche stochastique diminue exponentiellement rapidement à mesure que la distance du centre de la série augment.

Dans les trois cas, le fusionnement des couches stochastiques dans l'espace de phase peut provoquer un réseau chaotique simple appelé la série stochastique. Le plus grand est α , la série stochastique est plus large. À l'intérieur des cellules de la série, existe un ensemble d'îles de mouvement régulier appelées les série dont dimensions sont inversement proportionnelles à la force de perturbation : pour des perturbations fortes, elles sont englobées par la mer stochastique. Notre système présente ce genre de comportement, qui est présenté dans les figures (3.7), (3.8), et (3.9).

On a longtemps connu que les frontières des îles du mouvement régulier peuvent être collantes, signifiant que les orbites chaotiques peuvent passer un long temps près des îles et puis s'échapper en mer chaotique.

Les cas représenté par les figure (3.13), (3.14), et (3.15). L'espace de phase se compose à deux régions, stochastique et régulière, la région régulière aux centre de figure, il y a des tore invariant puis une zone chaotique, les deux régions sont reliées.

Nous volons dire qu'une particule avec la vitesse initiales faible peut subir d'abord l'accélération régulière et puis stochastique, atteignant des énergie élevées.

Cependant, même les particules piégées peuvent s'échapper dans le domaine stochastique si nous considérons un plasma de collision, étant donné qu'une particule piégée peut gagner assez d'énergie pendant une collision pour surmonter la barrière d'énergie.

3.4.4 Forte perturbation

Augmentons de façon progressive l'importance de la percussion et recommençons les simulations précédentes. La figure (3.16) montre l'espace des phases de 100 conditions initiales, toutes prises à une valeur du paramètre de contrôle $\alpha = 2$.

On constate que dans les trois cas, l'espace des phases est complètement régi par le comportement chaotique des trajectoires. Tout cet espace est appelé mer chaotique. A force de faire tendre la perturbation vers l'infini, ces îlots de stabilité vont disparaître et laissant le chaos envahir complètement et indéfiniment tout l'espace des phases (voire la figure(3.16)).

Nous constatons les comportements suivants.

✓ En comparant les figures (3.7), (3.8),et (3.9) respectivement à les figures (3.10),(3.11), et (3.12), il devient clair que la augmentation de l'amplitude des ondes produit un élargissement du réseau stochastique,tandis que les figures (3.13), (3.14), et (3.15), on peut voir que cela conduit à un éclatement de tore invariant.

✓ Autour des points fixes stables d'ordre 1, d'ordre 2 ou plus, il existe encore des courbes invariants que l'on appelle îlots de stabilité, et qui ont la forme d'ellipse. En augmentant la valeur de α , la région de stabilité entourant ces points fixes décroît (les ellipses s'aplatissent) en même temps que les points fixes dérivent (ils sont fonction de α), et de maniéré d'autant plus rapide qu'est grand l'ordre du point fixe. En prenant au hasard nos conditions initiales, nous aurons fort peu de chance de tomber sur de tels îlots. Une étude théorique de la position des points fixes et de leur stabilité, peut nous aider à les mettre en évidence. Ainsi, la stabilité se cache encore au milieu d'un océan de chaos mais elle est bien cachée. Notons aussi que les points stables deviennent brusquement instables pour une valeur bien précise de α , mais s'entourent en même temps d'une paire de points fixes stables d'ordre 2 fois plus élevé.

✓ Dans la figure (3.11), le point stable (0,0) a cède la place à un point fixes ; c'est la signification de la présence des une île isolée bien reconnaissable.

Au-delà de la valeur particulière $\alpha = 0.1$ il y a disparition complète des courbes KAM correspondant à une rotation. Les îlots de stabilité ont de plus en plus de mal a résister au chaos qui se généralise.

✓ On observe l'installation progressive d'une propriété d'invariance d'échelle. Quel que soit le zoom utilise pour examiner une portion de la section de Poincaré, nous retrouvons gross modo la même allure que la section complète (voir la figure (4.13)). On trouve autant de diversités de structures (points fixes stables, instables, ellipses, hyperboles, chaos,...) dans une portion que dans la totalité. Autrement dit, Gardons une image de la totalité de section de Poincaré que nous conservons comme image témoin. Ainsi, prenons une copie d'une petite portion de la section de Poincaré, agrandissons-là pour la ramener a la même dimension de l'image témoin. Si nous prenons la précaution d'avoir calculé un très grand nombre d'intersections pour un très grand nombre de conditions initiales, alors l'image agrandie sera identique a l'image témoin. Cette ressemblance troublante se manifeste quel que soit l'endroit et quelle que soit la grandeur de la portion où nous avons réalise le zoom.

✓ Si la perturbation est suffisamment importante, les points fixes existent encore, mais soient ils sont stables où instables, soit les îlots de stabilité autour d'eux se rétrécissent et, à la limite des grandes perturbations, la mesure des zones de stabilité tend à être nulle. Une trajectoire va remplir tout l'espace des phases de façon dense. C'est le chaos généralise qui

se manifeste, comme le montre la figure 3.10 (a).

Nous voyons ainsi que la structure des résonances est hiérarchique : une résonance engendre des résonances qui engendrent elles-mêmes des résonances et ainsi de suite. On dit que l'espace des phases a une structure auto-similaire.

Conclusion

A partir de l'analyse des résultats numériques on peut conclure.

Le nombre des conditions initiales peut influencer le remplissage de l'espace des phases. c-à-d, la structure de l'espace des phases correspondant aux conditions initiales, avec la même valeur de paramètre de perturbation. En effet, la concentration des points sur les figures diffère d'un nombre des conditions initiales à l'autre. Dans le cas où le nombre des conditions initiales est plus grand, la structure de l'espace des phases est riche par des îlots de stabilité claire.

Le paramètre de perturbation lui aussi peut influencer la structure de l'espace des phases. C-à-d, que si la valeur de paramètre de perturbation est plus grande, l'espace des phases est change. A $\alpha = 0$ notre système est intégrable (oscillateur harmonique). mais si on augmente la valeur de α plus de $\alpha = 0.01$ l'information sur le comportement de la structure de l'espace de phase est perdue à chaque fois α augmente.

Nous découvrons l'anéantissement des courbes de KAM régulières dans l'espace, l'anéantissement de ces courbes est une preuve de mouvement chaotique, et de la perte de stabilité du système.

En fin, concernant l'influence du nombre de résonance sur la structure de l'espace des phases, nous avons constaté que si on fait varier le paramètre de résonance la structure de l'espace de phase est change.

Conclusion générale

On a étudié dans ce mémoire le comportement chaotique d'un système dynamique Hamiltonien. Cette étude a intéressée théoriquement et numériquement.

Le premier chapitre préliminaire sur les notions de base des systèmes dynamiques Hamiltonien. Dans ce chapitre nous avons fait quelques rappels sur les systèmes dynamique en générale, et les systèmes Hamiltoniens, en particuliers, les systèmes Hamiltoniens sont traités en utilisant le formalisme Hamiltonien qui consiste à calculer l'Hamiltonien H du système qui n'est rien d'autre que son énergie totale qui est une fonction des variables canoniques qui sont généralement les positions et les impulsions du système. Nous avons aussi rappelé les notions points fixes et de stabilité qui sont la base de notre étude. En effet la représentation des états du système dans le plan des phases fait appel à ces notions de points fixes. Ce qui nous a appelé à parler dans ce chapitre des représentations des systèmes dans le plan de l'énergie potentielle pour que le lecteur puisse faire une liaison avec le portait de phase et comprendre le concept. on termine ce chapitre par un bref historique du chaos et quelques modèles utilisés pour l'étudier.

Tandis que la deuxième partie a été consacrée à l'étude du phénomène de l'interaction onde-particule dans un plasma magnétique. Dans ce chapitre nous avons étudié la propagation perpendiculaire de cas des vagues électrostatiques dans le plasma immergé dans un champ magnétique constant. Nous avons analysé le mouvement des points fixes d' Hamiltonien non perturbé \tilde{H}_0 .

Nous avons vérifié que en changeant α , nous pouvons indiquer exactement la position de la région stochastique afin de focaliser seulement le changement de sa largeur en ce qui concerne le divers α . Nous avons regardé le cas de résonance. De la main l'état de stochasticité discuté en ce chapitre avec dépend de la génération et le chevauchement des îles secondaires, peut être appliqué aux cas où la largeur du web stochastique devient comparable à la dimension d'une cellule web.

Ainsi comme vu en chapitre 3, l'application numérique via la réalisation d'un programme numérique en fortran. Cette étude numérique qui a été menée de déterminer l'influence du paramètre du contrôle et le nombre de conditions initiales sur la structure de l'espace des phases, c'est à dire la dynamique du système.

La comparaison des résultats obtenus dans ce travail avec ceux trouvés dans la littérature nous a permis de tirer la validité du programme utilisé. Ceci nous a permis de tirer quelques remarques concernant le comportement du système :

- Premièrement, le nombre de conditions initiales peut influencer sur le remplissage de l'espace des phases non pas sur sa structure.
- Deuxièmement, concernant la constante de perturbation ; le comportement ou la dynamique du système est sensible à la variation de la constante de perturbation. Tel que lorsque α augmente le système perd son caractère régulier et l'espace de phase sera de remplie de courbes chaotiques.
- Troisièmement, le paramètre de résonance n_0 peut influencer sur la structure de l'espace des phases.

Ce travail rentre dans un projet d'étude des systèmes chaotiques, il s'agit d'utiliser tous ces calculs pour étudier le phénomène de la diffusion des particules dans les systèmes hamiltoniens.

Annexe A

Fonction de Jacobi elliptique et propriétés de H_w

Fonctions de Jacobi elliptique

la fonction doublement périodique est appelé une fonction elliptique.
Laisser m, m_1 soit des nombres tels que

$$m + m_1 = 1$$

Nous appelons m le paramètre, m_1 le paramètre complémentaire.

Ce qui suit nous supposons que le paramètre m est un vrai nombre. Sans perte de généralité nous pouvons alors supposer cet $0 \leq m \leq 1$. Nous définissons les quart-périodes K et iK' par

$$\begin{aligned} K(m) &= K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ iK'(m) &= iK' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m_1 \sin^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \tag{A.1}$$

de sorte que K et K' soient de vrais nombres. K s'appelle le vrai, iK' l'imaginaire quart-période .

Nous notons cela

$$K(m) = K'(m_1) = K'(1 - m). \tag{A.2}$$

Nous notons également cela si des n'importe quels des nombres $m, m_1, K(m), K'(m), K'(m)/K(m)$ est indiqué, tout le le repos sont déterminés. Ainsi K et K' ne peuvent pas tous les deux soient choisis arbitrairement.

Dans le diagramme d'Argand dénoter les points $0, K, K + iK', iK'$ par s, c, d, n respectivement. Ceux-ci les points sont aux sommets d'un rectangle. Les traductions de ce rectangle

par $\lambda K, \mu iK'$, où λ, μ sont donnés toutes les valeurs intégrales positives ou négatives, mènera au treillis

$$\begin{array}{cccc} s & c & s & c \\ n & d & n & d \\ s & c & s & c \\ n & d & n & d \end{array}$$

Le modèle étant répété indéfiniment de tous les côtés.

Laisser p, q soit n'importe quels deux des lettres s, c, d, n .

Puis p, q déterminent dans le treillis par minimum rectangle dont les côtés sont de la longueur K et K' et à qui sommets s, c, d, n être dans l'ordre dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition

La fonction de jacobini elliptique u de de Jacobian est défini par les trois propriétés suivantes.

- (i) le pq u a un zéro simple à p et un poteau simple à q .
- (ii) L'étape de p à q est une demi période de u . de pq ceux des nombres $K, iK', K + iK'$ qui diffèrent de cette étape sont seulement des quart-périodes.
- (iii) Le coefficient de la principale limite dans l'expansion du pq u dans des puissances croissantes de u au sujet $u = 0$ est unité.

En ce qui concerne (iii) la principale limite est $u, l/u, 1$ selon que $u = 0$ est un zéro, un poteau, ou un point ordinaire. Ainsi les fonctions avec un poteau ou zéro à l'origine (c.-à-d., les fonctions dans lesquelles une lettre est s) sont impaires, et les autres sont égales.

Si nous souhaitons attirer une attention explicite sur la valeur du paramètre, nous écrivons à pq ($u|m$) au lieu du u . de pq la fonctions de Jacobien elliptiques peuvent également être définies en ce qui concerne certaines intégrales. Ainsi si

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - m \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A.3})$$

l'angle φ s'appelle l'amplitude.

$$\varphi = amu \quad (\text{A.4})$$

et nous définissons

$$\begin{aligned} snu &= \sin \varphi \\ cnu &= \cos \varphi \\ dnu &= (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} = \Delta(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De même tout le $pq u$ de fonctions peut être exprimé en termes de φ . Cet deuxième ensemble de définitions, bien qu'apparemment différent, est mathématiquement équivalent à la définition précédemment donnée dans limites d'un trellis.

Relation des fonctions de Jacobien

$$cdu = \frac{cnu}{dnu}, \quad dcu = \frac{dnu}{cnu}, \quad nsu = \frac{1}{snu} \quad (\text{A.6})$$

$$sdu = \frac{snu}{dnu}, \quad ncu = \frac{1}{cnu}, \quad dsu = \frac{dnu}{snu} \quad (\text{A.7})$$

$$ndu = \frac{1}{dnu}, \quad scu = \frac{snu}{dnu}, \quad csu = \frac{cn}{snu} \quad (\text{A.8})$$

Solution de l'équation de mouvement de H_w

Les équations de mouvement de H_w sont (2.58). On écrit (2.56)

$$H_w = \omega_w \cos \tilde{\rho} \sin \phi \implies \cos \tilde{\rho} = \frac{H_w}{\omega_w \sin \phi} \quad (\text{A.9})$$

De (2.58) on a

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_w \sin \tilde{\rho} \cos \phi \\ &= \omega_w \cos \phi \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{\rho}} \\ &= \omega_w \sqrt{\cos^2 \phi - \frac{H_w^2}{\omega_w^2}} \\ &= \omega_w \sqrt{1 - \sin^2 \phi - \frac{H_w^2}{\omega_w^2}} \\ &= \omega_w \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Donc

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \omega_w \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \phi} \quad (\text{A.11})$$

Où

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{H_w^2}{\omega_w^2}} \quad (\text{A.12})$$

Nous intégrons A.11 on trouve

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \sin^2 \phi}} = \int_{\tau_n}^\tau \omega_w \kappa d\tau = \omega_w \kappa (\tau_n - \tau) \quad (\text{A.13})$$

Où τ_n est le temp quand la particule croise l'axe $\phi = 0$

A partir de la definition de fonction de Jaconien elliptique :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= sn(\omega_w \kappa (\tau_n - \tau); \frac{1}{\kappa}) \\ &= \kappa sn(\tau_n - \tau); \kappa \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ce qui est (2.59). on utilise la propriété de la fonction de jacobi elliptique de ainsi que (2.58) pour obtenir (2.62) :

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\rho} &= \frac{\dot{\phi}}{\omega_w \cos \phi} \\ &= \frac{\dot{\phi} \cos \phi}{\omega_w \cos^2 \phi} \\ &= \frac{\frac{d}{d\tau}(\sin \phi)}{\omega_w (1 - \sin \phi)} \\ &= \frac{\kappa cn(\omega_w (\tau_n - \tau)) dn(\omega_w (\tau_n - \tau)) \omega_w}{\omega_w [\kappa^2 sn^2(\omega_w (\tau_n - \tau))]} \\ &= \frac{cn(\omega_w (\tau_n - \tau))}{dn(\omega_w (\tau_n - \tau))} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Là où nous avons omis le module κ de la fonction elliptique jacobian pour simplifier la notation.

là où nous avons omis le module κ de la fonction elliptique jacobian pour simplifier la notation. Par conséquent nous avons pour obtenir la solution de l'équation du mouvement comme noté dedans (2.59), (2.60) et (2.61).

Annexe B

Programme de Calcul

Pour passer à la résolution numérique, il nous faut un programme écrit avec un certain langage informatique, dans ce travail nous utilisons le langage Fortran.

Le programme contient deux parties : partie déclaration et partie instructions. Dans la partie déclaration, on définit les objets qui seront manipulés par le programme, on déclare toutes les variables de notre programme Tandis que, la partie instruction, est la partie qui consiste à dérouler dans l'ordre toutes les instructions de la partie exécutable du programme principal.

Donc dans cette partie, on fait entrer le nombre de conditions initiales, itérations, le nombre de résonance, le paramètre de perturbation, et le nombre de points à afficher pour chaque itération. Ainsi, on choisit les conditions initiales au hasard.

La méthode d'intégration utilisée ici est basée sur séries Taylor de huitième ordre de l'équation du mouvement. La méthode de Taylor est utilisée en partie à cause de sa simplicité, mais surtout à cause de la vitesse impliquée. La sortie du fichier est en "traj.dat". À la fois "init.dat" et "traj.dat" sont simplement deux fichiers avec deux colonnes étant q et p les coordonnées d'une particule qui défini dans (2.16) et (2,17).

"Setup. f" doit être utilisé en conjonction avec "integrate. f". "Setup. f" crée le fichier "init.dat" qui contient les conditions initiales pour "integrate. f". Les conditions initiales sont arrangées carrés pour être dans les coordonnées (ψ, I) . Le fichier de configuration "config. f" contient la configuration des conditions initiales et comprend : l'amplitude de l'onde (α qui est stocké dans *eps*), la fréquence de l'onde et la fréquence cyclotron, le nombre des particules et de leurs positions dans I et ψ . Le modèle carré de particules dans (I, ψ) sont ensuite converties en les coordonnées (q, p) et stockés dans "init.dat". Les résultats finales des coordonnées (q, p) stocké dans "traj.dat".

Ce qui suit est le programme "integrate.f"

```

C*****INTEGRATE.F
C*****C
C*****LINEAR OSCILLATOR PERTURBED BY ONE WAVE*****C
C*****ALL THIS IS IN THE NORMALIZED SET OF COORDINATES*****C
C*****C
C This program gets its input from file "init.web"
C which is a list of q against p.
C Usually it is created by the program "steup.f"

      real q(200), p(200),pp(200)
      real arg(200), c(200), s(200), xi(200)
      real q1(200), q2(200), q3(200), q4(200)
      real q5(200), q6(200), q7(200), q8(200)
      real p1(200), p2(200), p3(200), p4(200)
      real p5(200), p6(200), p7(200), p8(200)
      C
C*****DONNEES*****C
C DONNEES
C eps : Amplitude normalisee de l'onde perturbatrice
C qui correspond à 'Alpha'
C wosc : Frequences d oscillation
C wwave :Frequence de l'onde
C Dans le programme, le rapport des deux fréquences
C est utilisée.
C La frequence de l'oscilateur est normalisée par rapport
C a la fréquence de l'onde
C*****C
C*****normalized amplitude of the perturbing wave*****C
C*****oscillator frequency and the wave frequency*****C
C***** (in the program the ratio of the two is taken since the****C
C*****oscillator frequency is normaklized to the wave frequency)*C
C namelist /input/eps, wosc,wwave
C*****C
C
C-----C
C npart : nombre de particules
C ndtpi2 : nombre d etapes dans une periode  $2 * \pi$ 

```

```

C ntime : nombre d'etapes en temps pour enregistrer
C la valeur de l'orbite
C norb : nombre d'orbite a enregistrer
C-----C
C*****C
C-----CE QUI ECRIT DANS LE PROGRAMME ORIGINAL-----C
C*****number of particles*****C
C*****number of step in one two - pi period*****C
C*****number of time steps later when orbit values should be stored**C
C*****for surface of section ntime should equal ndtpi2*****C
C*****number of such orbits to be stored*****C
C*****C
C*****DONNEES*****C
C namelist /info/npart,ndtpi2,ntime,norb
C C*****name of the input file*****C
C*****name of the output file*****C
C*****C
c la valeurs de eps'
eps = 0.2
c          la valeurs de wosc'
wosc = 1.00
c Write(*,*)'Donner la valeurs de wwave'
wwave = 3
c write(*,*)'donner le nombre de particule : npart'
npart = 100
c write(*,*)'donner le nombre d etapes dans 2pi : ndtpi2'
ndtpi2 = 200
c write(*,*)'donner le nombre de d etapes : ntime'
ntime = 200
c write(*,*)'donner le nombre d orbites : norb'
norb = 250
C*****C

      C open(3,file ='integrate.config')
C read(3,input)
C read(3,info)
open(4, file = "init.dat", status = 'old')
open(7, file = "traj.dat", status = 'unknown')
C          pi = 3.141592653589793238462643
twopi = 6.283185307179586476925287

```

```

C
C*****normalized oscillator frequency*****C
w0 = wosc/wwave
C
C*****time step for each integration
dt=twopi/float(ndt $\pi$ 2)
C
C*****parameters for taylor's series expansion*****C
C
co2 = 0.5
co3 = 1./6.
co4 = 1./24.
co5 = 1./120.
co6 = 1./720.
co7 = 1./5040.
co8 = 1./40320.

C
do 4 i = 1,npart
read(4,*) pp(i),q(i),p(i)
4 continue

C
C*****all orbits have been set to start at time zero*****C
C
t = -dt
C
do 5 iorb = 1,norb
C
do 6 itime = 1,ntime
C
t = t + dt
C
do 7 np = 1,npart
C
q1(np) = p(np)
C
arg(np) = amod(q(np) - t, twopi)
c(np) = eps * cos(arg(np))
s(np) = eps * sin(arg(np))

```

$$xi(np) = q1(np) - 1.$$

C

$$p1(np) = -q(np) * w0 * *2 + s(np)$$

C

$$q2(np) = p1(np)$$

$$p2(np) = -q1(np) * w0 * *2 + c(np) * xi(np)$$

C

$$q3(np) = p2(np)$$

$$p3(np) = -q2(np) * w0 * *2 - s(np) * xi(np) * *2 + c(np) * q2(np)$$

C

$$q4(np) = p3(np)$$

$$p4(np) = -q3(np) * w0 * *2 - c(np) * xi(np) * *3 - 3. * q2(np) * s(np) * xi(np) + c(np) * q3(np)$$

C

$$q5(np) = p4(np)$$

$$p5(np) = -q4(np) * w0 * *2 + s(np) * xi(np) * *4$$

$$-6. * c(np) * q2(np) * xi(np) * *2$$

$$-4. * q3(np) * s(np) * xi(np)$$

$$-3. * q2(np) * *2 * s(np) + c(np) * q4(np)$$

C

$$q6(np) = p5(np)$$

$$p6(np) = -q5(np) * w0 * *2 + c(np) * xi(np) * *5$$

$$+10. * q2(np) * s(np) * xi(np) * *3$$

$$-10. * q3(np) * c(np) * xi(np) * *2$$

$$+(-15. * q2(np) * *2 * c(np) - 5. * s(np) * q4(np)) * xi(np)$$

$$-10. * q2(np) * q3(np) * s(np) + c(np) * q5(np)$$

C

$$q7(np) = p6(np)$$

$$p7(np) = -q6(np) * w0 * *2 - s(np) * xi(np) * *6$$

$$+15. * c(np) * q2(np) * xi(np) * *4$$

$$+20. * q3(np) * s(np) * xi(np) * *3$$

$$+(45. * q2(np) * *2 * s(np) - 15. * c(np) * q4(np)) * xi(np) * *2$$

$$+(-60. * c(np) * q2(np) * q3(np) - 6. * q5(np) * s(np)) * xi(np)$$

$$-15. * c(np) * q2(np) * *3$$

$$+(-15. * q2(np) * q4(np) - 10. * q3(np) * *2) * s(np) + c(np) * q6(np)$$

C

$$q8(np) = p7(np)$$

$$p8(np) = -q7(np) * w0 * *2 - c(np) * xi(np) * *7$$

$$-21. * q2(np) * s(np) * xi(np) * *5$$

$$+35. * c(np) * q3(np) * xi(np) * *4$$

$$+(105. * c(np) * q2(np) * *2 + 35. * q4(np) * s(np) * xi(np) * *3$$

```

+(210. * q2(np) * q3(np) * s(np) - 21. * c(np) * q5(np)) * xi(np) * *2
+(105. * q2(np) * *3 * s(np) + (-105. * c(np) * q2(np) * q4(np)
-70. * c(np) * q3(np) * *2) - 7. * q6(np) * s(np)) * xi(np)
-105. * c(np) * q2(np) * *2 * q3(np)+
(-21. * q2(np) * q5(np) - 35. * q3(np) * q4(np)) * s(np)
+c(np) * q7(np))

```

C

```

q(np) = q(np) + q1(np) * dt+
co2 * q2(np) * dt * *2 + co3 * q3(np) * dt * *3+
co4 * q4(np) * dt * *4 + co5 * q5(np) * dt * *5+
co6 * q6(np) * dt * *6 + co7 * q7(np) * dt * *7+
co8 * q8(np) * dt * *8

```

C

```

p(np) = p(np) + p1(np) * dt+
co2 * p2(np) * dt * *2 + co3 * p3(np) * dt * *3+
co4 * p4(np) * dt * *4 + co5 * p5(np) * dt * *5+
co6 * p6(np) * dt * *6 + co7 * p7(np) * dt * *7+
co8 * p8(np) * dt * *8

```

C

7 continue

C

6 continue

C

```

do 9 i = 1,npart
write(7,*)q(i),p(i)

```

9 continue

C

5 continue

C

```

c format(2g18.10)

```

C

stop

end

Ce qui suit est le programme "setup.f"

```

C*****C
C*****LINEAR OSCILLATOR PERTURBED BY ONE WAVE*****C
C***** (ALL THIS IS IN THE NORMALIZED SET OF COORDINATES)*****C
C***** detting up of initial conditions *****C
C*****C
C This program takes in a file "config.web" which contains
C the information of the initial conditions of the set of
C particles its output a file of initial conditions of
C the particles p-q coordinates

C Maximum number of particle it can track=200
real q(200),p(200)
C C*****DONNEES*****C
C DONNEES
C Amplitude normalisee de l'onde perturbatrice
C eps qui correspond à 'Alpha'
C Frequences d oscillation : wosc
C Frequence de l'onde : Wwave
C Dans le programme, le rapport des deux fréquences
C est utilisée.
C La frequence de l'oscilateur est normalisée par rapport
C a la fréquence de l'onde
C*****C
C*****CE QUI ECRIT DANS LE PROGRAMME ORIGINAL*****C
C normalized amplitude of the perturbing wave
C oscillator frequency and the wave frequency
C ( in the program the ratio of the two is taken since the
C oscillator frequency is normalized to the wave frequency)
C namelist/wave/eps,wosc,wwave
C*****C
C*****INITIALISATION*****C C act : l'action
initiale
C dact : le pas de l'action
C nact : nombre d'action
C ang : angle initiale entre 0 et 1
C dang : pas de l'angle
C nang : nombre d'angle
C*****C

```

```

C*****C
C*****CE QUI ECRIT DANS LE PROGRAMME ORIGINAL*****C
C initial action of these particles ; step-size in action
C number of step-sizes in action
C namelist/acti/act,dact,nact
C C initial angle(normalized to 2*pi) ; step-size in angle
C (so this angle is between 0 and 1)
C number of step-sizes in angle (this is for each action)
C thus the number of particles (initial conditions) is nang*npart
C namelist/phas/ang,dang,nang
C*****C
c 'Donner la valeur de l amplit de l onde perturbée : eps'
eps = 0.1
c ' la valeur de la frequence de l oscillateur : wosc'
wosc = 1
c ' la valeur de la frequence de l onde : wwave'
wwave = 5
c 'la valeur initiale de l action :act'
act = 0.5
c le pas de l action :dact'
dact = 0.5
c ' le nombre d action :nact'
nact = 10
c les valeurs de l angle : ang'
ang = 0.0
c ' le pas de l angle : dang'
dang = 0.05
c le nombre d angle : nang'
nang = 10
C*****C c open(3,file='config.dat')
c read(3,wave)
c read(3,acti)
c read(3,phas)
c read(3,outfile)

open(4,file =' init.dat',status='unknown')

C total number of particles (or initial conditions)
npart=nact*nang
C          pi = 3.141592653589793238462643

```

$twopi = 6.283185307179586476925287$

C*****normalized oscillator frequency*****C

$w0 = wosc/wwave$

C

C converting the input action and angle data into (q,p)

$ipart = 0$

do 1 $nacton = 1, nact$

$action = act + float(nacton - 1) * dact$

do 2 $nangle = 1, nang$

$angle = (ang + float(nangle - 1) * dang) * twopi$

$ipart = ipart + 1$

$q(ipart) = sqrt(action/w0) * sin(angle)$

$p(ipart) = sqrt(action * w0) * cos(angle)$

2 continue

1 continue

C

C save them

do 3 $i = 1, npart$

write(4,*) $i, q(i), p(i)$

3 continue

stop

end

Bibliographie

- [1] Benisti D et al 1998 Phys. Plasmas 5 3224
- [2] V.K. Melnikov, On the behavior of trajectories of system near to autonomous Hamiltonian systems. Soviet Mathematics-Doklady, 3, 109-112, 1962.
- [3] Poincare, H., Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste, Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [4] V.K. Melnikov, On the stability of the center for time periodic perturbations. Transaction Moscow Mathematical Society, 12, 1-57, 1963.
- [5] B.V. Chirikov, Resonance processes in magnetic traps. Journal of Nuclear Energy, Part C Plasma, 1, 253-260, 1960.
- [6] M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor and G.M. Zaslavsky. Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Nuclear Fusion, 6, 297-300, 1966.
- [7] F.M. Izrailev and B.V. Chirikov, Statistical properties of a nonlinear string. Doklady Akademik Nauk SSSR, 166, 57-59, 1966.
- [8] M.N. Rosenbluth, Phys.Rev.Lett.17, 377-379, 1966.
- [9]] N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev and G.M. Zaslavsky. Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities : Part 11, Nuclear Fusion, 7, 253-266, 1967.
- [10] G.M. Zaslavsky, and N.N. Filonenko. Stochastic instability of trapped particles and conditions of application of the quasi-linear approximation. Soviet Physics JETP, 27, 851-857, 1968.
- [11] G. M. Zaslavskii and N. N. Filonenko. Soviet Physics JETP, 27 :851, 1968.
- [12] Gary R. Smith and Allan N. Kaufman. Physical review letters, 34 :1613, 1975.
- [13] Atsushi Fukuyama. Theoretical Investigations on nonlinear effects in lower Hybrid Wave Heating. Department of Electronics, School of Engineering, Okayama University, Japan, 1980.
- [14] A. Fukuyama, H. Momota, R. Itatani T. Takizuka. Physical Review letters, 38 :701, 1977.
- [15] C.F.F. Karney and A. Bers. Plasma research report ; PRR 76/24, MIT, 1976.
- [16] C.F.F. Karney and A. Bers. Physical Review Letters, 39 :550, 1977.

- [17] C.F.F.Karney .Phys.Fluids, 21 :1584, 1978.
- [18] G.M.Zaslavskii, A.A. Chernikov, R.Z. Sagdeev, and D.A.Unsikov. Weak chaos and structures. Soviet Scientific Reviews/sections C, 1989.
- [19] G.M. Zaslavskii, M.Yu. Zakharov, R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov and A.A. Chernikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz 91, 500 (1986) [Sov. Phys. JEPT 64, 294 (1986)].
- [20] V.I. Arnol'd, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 159, 9 (1964).
- [21] D.W. Longcope and R.N. Sudan, Phys. Rev. Lett. 59, 1500 (1987) ; See also, A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics and edn. (Springer-Verlag, New York (1992)).
- [22] H. Karimabadi and V. Angelopoulos, Phys. Rev. Lett. 62,2342 (1989).
- [23] G. M. Zaslavskii, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, Minimal chaos, stochastic webs, and structures of quasicrystal symmetry, Institute of Space Research, Academy of Sciences of the USSR Usp. Fiz. Nauk 156, 193-251 (October 1988).
- [24] A.I. Lichtenberg M.A. Lieberman,Regular and Chaotic Dynamics,Second Edition.
- [25] G. M. Zaslavsky, Superduffision, New York University, New York, N.Y. 10012, October 1993.
- [26] J. Candy, Stochastic ion Heating by lower hybrid turbulence, Exploratory Studies Group, Accelerator Fusion Research Division, Lawrence Berkeley Laboratory, Cyclotron Road, Berkeley, CA 94720, May 1990.
- [27] H.Golstein. Classical Mecanics. Addison-Weasley Pub.Co.,1980.
- [28] M.Abramowitz and I.A.Stugun. Handbook of Mathematical Functions. Dover.
- [29] Jonathan Ferreira, Cours d'Electrostatique-Electrocinétique, Université Joseph Fourier DEUG SMA, Année universitaire 2001-2002.
- [30] Jean-Luc Raimbault, Introduction à la Physique des Plasmas, Laboratoire de Physique des Plasmas, Université Paris-Sud 11.
- [31] Thierry Dudok de Wit, Physique non-linéaire, Université d'Orléans, Janvier 2010.
- [32] Benjamin Mauclaire, Le chaos dans le Système Solaire, Nouvelle édition, AAAOV 1997.
- [33] Laurette Turckeman, Majeure de Mécanique Enseignement d'Approfondissement Instabilités et Chaos.
- [34] Jacques Le Burlot, Introduction aux systèmes dynamiques dissipatifs, Année 2007-2008.
- [35] Jean Lévnin Mines Paris Tech et et Pierre Rouchon Mines Paris Tech, Systèmes dynamiques et commande,Centre Automatique et Systèmes.
- [36] Arnold, V.I., 1978. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, Berlin.
- [37] Zaslavsky, G.M., Zakharov, M.Yu., Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A., Chernikov, A.A., 1986. Sov. Phys. JETP 64, 294.

- [38] Zaslavsky, G.M., Sagdeev, R.Z., Chernikov, A.A., 1988. JETP 67, 270 Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A., Zaslavsky, G.M., 1988. Nonlinear Physics : From the Pendulum to Turbulence and Chaos. Harwood, New York.
- [39] Zaslavsky, G.M., Zakharov, M.Yu., Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A., Chernikov, A.A., 1986. Sov. Phys. JETP 64, 294.
- [40] Paul Manneville, Dynamique non linéaire Appliquée au chaos à son contrôle, DEA Mécanique, DEA de Dynamique des Fluides et des Transferts, Paris VI. Paris-Sud. Ecole polytechnique 2003-2004.
- [41] Claude Gomez, Systèmes dynamiques, INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau BP 105 78153, Le Chesnay Cedex, Février 2007.
- [42] David Sénéchal, Mécanique II, PHQ 310, Département de physique, Faculté des sciences, Université de Sherbrooke, 18 décembre 2010.
- [43] Douglas C. Giancoli, Physique Générale, Mécanique et Thermodynamique, De Deoek Université.
- [44] D. Strauffer H.E. Stanley A. Lesne, Cours de Physique de Newton.
- [45] Steeve Zozor et Pierre-Olivier Amblard, Résonance Stochastique via des SETAR. (1 ; N ; 0 ; . . . ; 0) discrets non-linéaires, CEPHAG, ENSIEG, Domaine Universitaire, B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France.
- [46] David ROUSSEAU, François Chapeau-Blondeau, Résonance stochastique et performance améliorée par le bruit pour un estimateur optimal, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), FRE CNRS 2656, Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, France.
- [47] G.M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov and A. A. Chernikov, Weak chaos and quasi-regular patterns, Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Translated from the Russian by A. R. Sagdeeva.
- [48] G. M. Zaslavsky, The physics of Hamiltonian systems, Second Edition, Department of Physics and Courant Institute of Mathematical Sciences New York University, USA.
- [49] George M. Zaslavskii, Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics, Department of Physics and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.
- [50] A. Loskutov, Dynamical chaos : systems of classical mechanics, Physics-Uspekhi 50(9)939-964(2007).

Résumé

L'interaction auto cohérente entre une onde électrostatiques et un faisceau de particules chargée est omniprésente dans la physique des plasmas. L'évolution conjointe de l'onde générée et du faisceau de N électrons a été décrite, de manière simplifiée, dans le formalisme Hamiltonien. Nous avons étudié dans ce mémoire le phénomène de chaos d'un système de particule perturbé par une onde électrostatique, de faire des simulations numériques pour illustrer les orbites dans le plan de phase pour bien délimiter les zones chaotiques et l'évolution de portrait de phase à partir de paramètre de perturbation α et de résonance n_0 . Nous représentons ensuite, les résultats par des sections de Poincaré, qui présentent plusieurs structures.

En générale, on peut remarquer trois types de structures différentes dans le portrait de phase: les courbes de KAM qui représentent le mouvement de rotation du système; les courbes périodiques fermées: les îlots de stabilité, qui représentent un mouvement oscillatoire du système; et en fin l'espace dense ou mer chaotique qui représente le mouvement chaotique du système.

Mots-clés : Systèmes Dynamiques, Chaos Hamiltonien, Portrait de Phase

Abstract

The self-consistent interaction between a wave electrostatic and charged particle beam is ubiquitous in plasma physics. The joint evolution of the wave and generate N electron beam has been described, in a simplified manner, in the Hamiltonian formalism. We studied in this paper the phenomenon of chaos of a particle system perturbed by an electrostatic wave, to make numerical simulations to illustrate the orbits in the phase plane to clearly delineate the zones and the evolution of chaotic phase portrait from a perturbation parameter α and n_0 . Then we represent the results of Poincare sections, which have several structures.

In general, we can notice three different types of structures in the phase portrait: KAM curves that represent the rotation system; periodic closed curves: the islands of stability, which represents an oscillatory motion of the system and end the chaotic sea or dense space which represents the chaotic motion of the system.

Key words: Dynamical Systems, Chaos Hamiltonian, Phase Portrait

ملخص

التفاعل المتناسق بين موجة كهر وساكنة و حزمة من الجسيمات المشحونة له أهمية كبيرة في فيزياء البلازما. وقد وصفت التطور المتعلق بموجة مولدة و حزمة N إلكترون، بطريقة مبسطة، في صيغ هاملتون. درسنا في هذه المذكرة ظاهرة الفوضى لنظام جسيم مضطرب بواسطة موجة كهر وساكنة، لإجراء عمليات المحاكاة العددية و توضيح المدارات في فضاء الطور من أجل التحديد الجيد لمناطق الفوضى وتطور فضاء الطور انطلاقاً من معامل الاضطراب α و الرنين n_0 ثم نمثل النتائج بمقاطع بوانكاريه، والتي لها العديد من الهياكل. بشكل عام، يمكن أن نلاحظ ثلاثة أنواع مختلفة من الهياكل في فضاء الطور: منحنيات كام التي تمثل الحركة الدائرية للنظام؛ المنحنيات المغلقة الدورية: جزر الاستقرار، وهو ما يمثل حركة متذبذبة للنظام و الفضاء الكثيف أو بحر الفوضى الذي يمثل الحركة الفوضوية للنظام.

الكلمات المفتاحية : الأنظمة الديناميكية، الفوضى الهاميلتونية، فضاء الطور