

Mémoire

Présenté par

Mr MACHTER Rachid

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Thème

**Estimation et contrôle d'erreur de contact appliqués
aux études des pieux par éléments finis**

Soutenu le : 21 / 12 / 2014

Devant le Jury composé de :

Mr MAZA	Mustapha	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr BOUZERD	Hamoudi	Maître de conférences A	Univ. de Skikda	Examineur
Mr HAMRI	Okba	Maître de conférences A	Univ. de Bejaia	Examineur
Mr BECHEUR	Abdelhamid	Maître de conférences B	Univ. de Bejaia	Invité

Année Universitaire : 2013/2014

Remerciements

Je tiens à proclamer toute ma reconnaissance au professeur Mr. TAHAKOURT Abdelkader, pour sa confiance et son soutien afin de mener à bien cette recherche, qu'il en soit profondément remercié.

Je tiens à manifester particulièrement toute ma plus vive gratitude à Mr. BECHEUR Abdelhamid, qui a toujours fait preuve de disponibilité et qui m'a éclairé tout au long de mon travail par ses conseils et orientations. Son enthousiasme ingénieux accentue ma volonté et mon inspiration.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Mr. MAZA Mustapha, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette soutenance.

Mes remerciements vont également à Mr. BOUZERD Hamoudi et Mr. HAMRI Okba pour avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie des membres de jury de ma soutenance.

Enfin, toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin et en particulier l'ensemble des enseignants du département de génie civil de BEJAIA, à ma formation d'études de la graduation et de la post graduation.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes chers parents qui m'ont toujours soutenu et orienté vers le bon chemin. Je leurs dois un grand merci et je leurs éprouve un sentiment de gratitude et d'amour.

A la mémoire de mes grands parents.

A mes très chers frères et leurs maries.

A mes adorables sœurs et leurs maris.

A mes adorables neveux et nièces.

A tous mes amis qui me sont très chers.

Table des matières

Introduction générale.....	1
Chapitre 01 : Le problème de contact unilatéral	
1.1 Généralités	3
1.2 Les types de contacts	3
1.3 Les non linéarité dues au contact	4
1.4 Les lois de frottement existantes dans la littérature.....	4
1.4.1 La loi de Tresca	5
1.4.2 La loi de frottement de Coulomb	6
1.4.3 La loi de Coulomb régularisée	7
1.4.4 Autres lois.....	8
1.4.5 La loi de Coulomb en quasi statique	8
1.5 Hypothèses et données du problème.....	9
1.6 Le contact unilatéral sans frottements.....	10
1.6.1 Formulation locale	10
1.6.2 Formulation variationnelle.....	12
1.6.3 Formulation locale	13
1.6.4 Formulation variationnelle.....	15
1.7 Le problème du point fixe	17
1.8 Conclusion	18
Chapitre 02 : Résolution du problème de contact par la méthode des éléments fini	
2.1 Introduction	19
2.2 La méthode des éléments finis : une brève description	20
2.2.1 Principe de la méthode.....	20
2.2.2 Convergences et mise en œuvre de la méthode	23
2.3 Les défauts de la solution éléments finis.....	25
2.3.1 Le cas général.....	25
2.3.2 Le cas du problème de contact	26
2.4 Résolution du problème de contact par éléments finis	27

2.4.1 Les relations discrètes du contact	27
2.4.2 Formulation discrète du problème de contact.....	30
2.4.3 Les méthodes de résolution.....	30
2.5 Conclusion	35

Chapitre 03 : Estimation et contrôle d'erreur dans les pieux

3.1 Introduction	36
3.2 Estimation des erreurs de discrétisation.....	37
3.2.1 Sur l'estimation d'erreur a priori et a posteriori.....	37
3.2.2 Quelques définitions.....	38
3.2.3 Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement	39
3.2.4 Estimateur basé sur les défauts d'équilibre de la solution.....	42
3.2.5 Estimateur basé sur le lissage du champ de contraintes	44
3.3 Estimation d'erreur pour le problème de contact	48
3.3.1 Erreur de contact associée à l'erreur en relation de comportement ...	48
3.3.2 Erreur de contact associée au lissage du champ de contraintes	50
3.4 Principe des calculs adaptatifs	52
3.5 Les techniques d'adaptation de maillages	53
3.6 Définition d'un maillage optimal	57
3.7 Détermination de maillages optimisés	58
3.7.1 Carte et coefficients de modification de tailles	58
3.7.2 Calcul des coefficients	59
3.8 Conclusion	62

Chapitre 04 : Problème de contact dans les pieux

4.1 Généralités sur les pieux	63
4.2 Définitions	64
4.2.1 Principe de fonctionnement	65
4.2.2 Les différents types de pieu	66
4.2.3 Les pieux mis en place par refoulement du sol.....	67
4.2.4 Les pieux mis en place sans refoulement du sol	68
4.2.5 Choix du type de pieu.....	69
4.3 Aspects phénoménologiques	70

4.3.1	Définition de l'interface sol-structure.....	70
4.3.2	Comportement d'interface sol-pieu.....	70
4.4	Modèles de comportement en adhérence (ou en cohésion) de l'interface sol pieu	71
4.4.1	Modèle élastique parfaitement plastique de Mohr Coulomb	71
4.4.2	Modèles de comportement élastoplastique avec écrouissage	72
4.5	Comportement élastique linéaire	73
4.6	Comportement élastoplastique.....	74
4.6.1	Modèle élastoplastique (Mohr-coulomb).....	74
4.6.2	Modèle élasto-plastique de Cam-Clay modifié.....	75
4.6.3	Modèle élastoplastique de Drucker-Prager.....	78
4.7	Aspects théoriques.....	79
4.7.1	Formulation du problème de contact sol-pieu.....	79
4.7.2	Prise en compte de mécanismes du frottement latéral positif et négatif 5-82	
4.8	Quelques méthodes de calcul pour le frottement latéral	83
4.8.1	Méthode théorique classique (Formule dite statique)	83
4.8.2	Etude à partir d'essais en place.....	86
4.9	Détermination du tassement d'un pieu isole	86
4.9.1	Tassement admissible pour un pieu isole	86
4.9.2	Détermination empirique du tassement	87
4.10	Conclusion.....	88
 Chapitre 05 : Modélisation numérique, résultats et discussion 		
5.1	Introduction.....	90
5.2	Présentation du logiciel Cast3m (un bref aperçu)	91
5.3	Algorithmes implantés dans Cast3m.....	92
5.3.1	Résolution du problème de contact pieu sol avec frottements selon la loi de Coulomb.....	92
5.3.2	Correction de la solution de contact obtenue ou post-traitement	100
5.3.3	Lissage du champ de contraintes corrigées.....	103
5.3.4	Carte de contribution à l'erreur et erreur relative globale, de maillage et de contact	104
5.3.5	Analyse de la convergence de l'erreur globale en fonction du raffinement du maillage dans le cas d'un pieu axialement chargé	106

5.3.6	Calcul de la carte des tailles	111
5.4	Autres résultats intéressants	113
5.4.1	Influence du maillage sur le tassement	113
5.4.2	Déplacements relatifs tangents le long de la ligne de contact	114
5.5	Exemple d'adaptation de maillages utilisant des éléments de type TRI3 ..	116
5.6	Discussion des résultats et conclusion.....	118
6	Conclusion générale.....	120

Liste des figures

Figure 1.1 : Loi de Tresca	5
Figure 1.2 : Loi de Coulomb.....	6
Figure 1.3 : Cône de Coulomb.....	6
Figure 1.4 : Cône de Coulomb en 3D	7
Figure 1.5 : Loi de Coulomb régularisée	7
Figure 1.6 : Loi de Norton Hoff.....	8
Figure 1.7 : Deux corps élastiques déformables en contact unilatéral	9
Figure 2.1 : Schéma de la structure à modéliser par éléments finis.....	21
Figure 2.2 : Cas de non vérification de la condition de non pénétration (ou de contact)	26
Figure 2.3 : Problème des forces généralisées sur les éléments cubiques à 20 nœuds	27
Figure 2.4 : Maillages compatibles sur l'interface.....	28
Figure 2.5 : Maillages incompatibles sur l'interface.....	28
Figure 2.6 : Exemple de situation incompatible	28
Figure 2.7 : Élément nœud à nœud.....	29
Figure 2.8 : Élément nœud-facette.....	29
Figure 3.1 : Patches d'éléments et positions des points et nœuds.....	47
Figure 3.2 : Patch d'éléments pour le lissage des contraintes en zone de contact	51
Figure 3.3 : Procédure d'adaptation	53
Figure 3.4 : r-version.....	54
Figure 3.5 : h-raffinement/déraffinement local.....	54
Figure 3.6 : Nœud "pendant"	55
Figure 3.7 : h-remaillage global.....	56
Figure 3.8 : p-version	57
Figure 3.9 : Définition des tailles	59
Figure 4.1 : Définitions de la hauteur d'ancrage géométrique D et mécanique D_e (C.Plumelle. 2008).....	64
Figure 4.2 : Le domaine de fondation profonde (C.Plumelle. 2008).....	65
Figure 4.3 : Frottement positif et le frottement négatif (S. mezazigh ; D. levacher ; J.garnier.).....	66
Figure 4.4 : Classification des pieux	67

Figure 4.5 : Critère de rupture de Mohr-Coulomb (a) enveloppe bilinéaire pour les joints tenant compte des aspérités (Goodman 1989) ; (b) enveloppe linéaire pour les interfaces (Said, 2006).....	72
Figure 4. 6 : Loi de comportement élastique linéaire (N .PHAM, 2008).....	73
Figure 4.7 : Loi de comportement élastique, parfaitement plastique de Mohr Coulomb (N.PHAM, 2008)	75
Figure 4.8 : Etats limite Cam-Clay (N.PHAM, 2008).....	77
Figure 4.9 : Modèle Cam-Clay modifié (N.PHAM, 2008)	78
Figure 4.10 : Représentation du critère de Drucker–Prager, (a) dans l’espace des contraintes principales, (b) dans le plan $I1–Jb$ [R.von Mises, 1928]	78
Figure 4.11 : Modélisation du contact entre deux corps (Lahmadi, 2006).....	80
Figure 4.12 : Mode de déformation de l’interface (Lahmadi 2006)	81
Figure 4.13 : Mécanismes du frottement latéral positif et négatif [Plumelle.2005]	83
Figure 5-1 : Modèle axisymétrique du pieu axialement chargé.....	103
Figure 5.2 : Maillage du pieu et du sol composé de 507 éléments.....	106
Figure 5.3 : Statut glissant des nœuds sur la ligne de contact.....	107
Figure 5.4 : Effort imposé sur la ligne de contact est confondu sur le cône de Coulomb.....	108
Figure 5.5 : La déformée totale.....	108
Figure 5.6a : Composantes des contraintes normales verticales sigma zz sol.....	109
Figure 5.6b : Composantes des contraintes normales horizontales sigma rr sol.	109
Figure 5.6c : Composantes des contraintes tangentielles de cisaillement sigma rz (sol).....	110
Figure 5.6d : Composantes des contraintes normales verticales sigma zz (pieu)	110
Figure 5.7 : Vecteurs des forces de frottement et de réaction.....	111
Figure 5.8 : Forces nodales appliquées (à gauche) et densités de forces surfaciques équivalentes (à droite).....	112
Figure 5.9 : Exemple de correction des densités tangentes.....	112
Figure 5.10 : Exemple de composantes verticale de contraintes corrigée.....	113
Figure 5.11 : Exemple de patch (ou groupe) d’élément sur lequel se fait le lissage du champ de contraintes.....	114
Figure 5.11 : Champ de contraintes verticales lissées dans le sol.....	115
Figure 5.12 : Carte de contribution à l’erreur globale représentée sur le sol....	116
Figure 5.13 : Carte de contribution à l’erreur globale représentée sur le pieu .	116
Figure 5.14 : Evolution de l’erreur globale en fonction du nombre total d’élément de type TRI3.....	117

Figure 5.15 : Evolution de l'erreur globale en fonction du nombre total d'élément de type TRI6.....	118
Figure 5.16 : Evolution de l'erreur globale en fonction du nombre total d'élément de type QUA4	118
Figure 5.17 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type TRI3.....	119
Figure 5.18 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type QUA4.....	119
Figure 5.19 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type TRI6	119
Figure 5.20 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type TRI3	120
Figure 5.21 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type QUA4.....	120
Figure 5.22 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type TRI6.....	121

Symboles usuels

D	[m]	longueur de fondation enterrée dans le sol
B	[m]	largeur de la fondation ou diamètre.
σ_n	[kPa]	la contrainte normale
τ	[kPa]	la contrainte tangentielle
ΔU_t	[m]	déplacements relatifs tangentiels
ΔU_n	[m]	déplacements relatifs normal
$\bar{\tau}$	[m]	seuil de la contrainte de cisaillement
C'	[kPa]	cohésion
δ'	[°]	angle de frottement de l'interface
F	[kn]	force
δ'_r	[°]	un angle de frottement résiduel
ν		Coefficient de Poisson .
E	[kPa]	module d'élasticité (d'Young)
E_b	[kPa]	Le module de déformation du béton
G	[kPa]	Le module de cisaillement du sol.
E_{oed}	[kPa]	Le module œdométrique
ψ	[°]	angle de dilatance
σ'	[kPa]	contrainte effective normale
σ'_1	[kPa]	contrainte effective majeure
σ'_3	[kPa]	contrainte effective mineure
σ'_v	[kPa]	la contrainte verticale effective
φ'	[°]	angle de frottement interne
p'	[kPa]	contrainte effective moyenne
q	[kPa]	contrainte déviatorique
γ		Déformation de cisaillement
ε_1		Déformation axial
Cs, κ		Indice de gonflement
c_c, λ		Indice de tassement
W	[KN]	le poids du pieu.
A	[m ²]	section de pointe.
P	[m]	périmètre latéral du fut du pieu
c_u	[°]	cohésion non drainée du sol
p_{le}^*	[kPa]	pression limite nette équivalente.
Kp		facteur de portance
K		le coefficient de pression des terres à la rupture
z	[m]	profondeur
Q	[KN]	La charge totale
S	[cm]	tassement
U C		Le champs de déplacement
RC		le champ de densités de réactions
f_d		Densité de forces volumiques
[K]	[kn/m]	matrice de rigidité globale

[F]	[kn]	vecteur forces généralisées
F_d	[kn/m ²]	une densité surfacique d'efforts
u_t	[m]	glissement
\dot{u}_t	[m/s]	la vitesse de glissement
F _n	[kn]	composantes normales des forces de contact
F _t	[kn]	composantes la tangentielles des forces de contact

Liste des abréviations

Introduction générale

Le problème de contact avec frottements est fréquemment présent dans la quasi-totalité des applications du génie civil. Pour le cas des pieux, son importance est particulièrement marquée dans la mesure où la portance en dépend de manière directe. La résolution de ce problème étant souvent effectuée par la méthode des éléments finis, le contrôle et l'estimation de l'erreur inhérente à cette méthode sont nécessaires. L'estimation de cette erreur peut être effectuée soit de manière à priori ou à posteriori. L'analyse à priori fournit des renseignements d'ordre qualitatifs sur la convergence et le taux de convergence des solutions éléments finis. Quant à l'estimation à posteriori, celle-ci permet suite aux résultats numériques obtenus, de quantifier l'erreur de discrétisation. Initialement, trois catégories d'estimateurs d'erreurs a posteriori ont été mis au point : les estimateurs basés sur l'exploitation des résidus des équations d'équilibre (Babuska, 1978); les estimateurs utilisant un lissage des champs de contraintes (Zienkiewicz et Zhu, 1987 et 1991) ; et les estimateurs fondés sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur des techniques associées de construction de champs admissibles (Ladeveze, 1986).

Pour les problèmes de contact de type 2D avec frottements, nous pouvons citer les travaux de Coorevits et al (2001) ainsi que Louf et al (2003) qui ont utilisé l'estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement. Toutefois, cet estimateur nécessite la construction de champs cinématiquement et statiquement admissibles dont la construction constitue une difficulté majeure. Il en est de même pour l'estimateur basé sur les résidus d'équilibre, pour lequel sont dédiés les travaux de Hild et Lieras (2009), et Bostan and Han (2006) qui se sont limités au contact bilatéral en utilisant la loi de frottement de Tresca. Pour les techniques de projection (ou de lissage), nous pouvons citer les travaux de Wriggers et al (1998), et Becheur et al (2008). Par ailleurs, Wohlmuth (2007) a défini un estimateur qui tient compte du frottement de manière implicite en introduisant une discrétisation basée sur des éléments finis mixtes. Pour les problèmes d'estimation et contrôle d'erreurs de contact relatifs aux pieux, il semble que peu de travaux aient été réalisés dans ce domaine.

En utilisant une méthode dans laquelle a été mis au point un indicateur d'erreur, facile à construire et à implanter dans un code éléments finis (Becheur et al, 2008), nous nous intéresserons à l'étude des pieux pour le cas

bidimensionnel auquel nous nous limiterons dans le présent travail. Dans le souci de tenir compte des erreurs de discrétisations et de contact de manière suffisante, nous proposons, à cet effet, de construire cet indicateur sur la base de la combinaison de deux méthodes. La première utilise la technique de recouvrement (ou de lissage) par groupes (ou Patch) d'éléments. Il s'agit de la technique connue sous le nom de la méthode SPR (Super convergent Patch Recovry method) due à Zienkiewicz et Zhu (1992). La seconde tient compte de l'erreur obtenue au niveau de la relation constitutive établie au niveau de la zone de contact. En utilisant des procédures d'adaptation de maillages, des exemples test seront étudiés.

Ce mémoire est structuré comme suit. Il est composé de la recherche bibliographique faisant montrer l'état des connaissances aussi bien dans le domaine des estimateurs d'erreur que dans celui relatif au calcul des pieux. Cette recherche bibliographique sera suivie par la modélisation par éléments finis et analyse élastique linéaire du problème de contact pieu sol en 2D et avec frottements de Coulomb. Il s'ensuivra également l'application de techniques d'estimation et de d'adaptation de maillages pour les applications précédentes ainsi que l'interprétation et la discussion des résultats. Nous terminerons enfin par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

Le problème de contact unilatéral

1.1 Généralités

Du point de vue mathématique, les phénomènes de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non linéaires. Les contributions dédiées à l'étude de ces phénomènes sont relativement récentes. La raison est due au fait que ces non linéarités constituent une grande difficulté. En effet, les premiers travaux dus à Signorini (1933), ou le problème de contact unilatéral entre un corps élastique et une fondation rigide, a été formulé. Fichera (1964) a résolu le problème de signorini en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Par la suite, Duvaut et Lions (1972), ont établi la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d'existence et l'unicité de la solution. Par la suite, Kikuchi et Oden (1998), et Hlavacek et Necas (1988), ont présenté l'analyse numérique de quelques problèmes de contact.

Du point de vue physique, l'étude des contacts entre les solides qui composent une structure est également délicate à mettre en œuvre car on maîtrise difficilement tous les paramètres :

- La forme et les états des surfaces en contact ;
- La vitesse relative ;
- Les conditions de lubrification (cas des pièces mécaniques) ;
- La température ;
- La répartition des pressions de contact.

1.2 Les types de contacts

On distingue deux types de contacts :

- Le contact bilatéral ou le contact est maintenu quels que soit les directions des efforts appliqués.
- Le contact unilatéral ou le contact est maintenu seulement si les efforts appliquent les solides l'un contre l'autre.

Dans le présent travail, nous allons nous limiter uniquement au cas du contact unilatéral car le cas du contact bilatéral est fréquemment bien traité par les théories des résistances des matériaux. D'autre part, les problèmes du contact unilatéral sont très fréquemment rencontrés dans la construction. En revanche, ils y sont rarement étudiés.

Du point de vue zone de contact, on peut distinguer :

- Le contact surfacique : la zone de contact est initialement une surface.
- Le contact linéique : la zone de contact est initialement une ligne, par exemple : le contact entre un cylindre et un cylindre ou bien un cylindre et une surface plane.
- Le contact ponctuel : la zone de contact initial se résume à un point, par exemple : le contact sphère- surface plane.

En résumé, nous allons étudier le cas du contact unilatéral sous ses différents aspects ; surfaciques, linéiques.

1.3 Les non linéarité dues au contact

Dans les problèmes de mécanique des solides et des structures, il existe trois formes de non linéarités :

- Les non-linéarités de type comportement qui portent sur la loi de comportement du matériau : plasticité et endommagement,...
- Les non-linéarités de type géométrique qui sont prises en compte dans le cas de grandes déformations ou de grands déplacements (lorsque la configuration déformée ne peut être confondue avec la configuration non déformée).
- Les non-linéarités de type contact associées au fait que dans le contact parfait entre deux solides du décollement ou du glissement peut apparaître. Elles se séparent en deux catégories, les non-linéarités de contact unilatéral et celles de frottement.

1.4 Les lois de frottement existantes dans la littérature

Une loi de frottement doit essentiellement tenir compte de trois phénomènes :

- l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible
- une éventuelle dépendance de ce seuil vis à vis de l'intensité des efforts normaux appliqués.

- l'existence dans le cas d'un déplacement de glissement, d'une relation entre les forces de frottement et la vitesse de glissement.

Il est clair que ces relations de frottement ne doivent intervenir que lorsqu'il n'y a pas de décollement sur la zone de contact. Pour pouvoir définir les lois de frottement, on définit d'abord le glissement et la vitesse de glissement par :

$$u_t = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) - ((u_2 - u_1) \cdot \bar{n}) \bar{n} \quad (1.1)$$

$$\dot{u}_t = \frac{\partial u_t}{\partial t} \quad (1.2)$$

u_1, u_2 : vecteurs de glissements u_t : glissement n : vecteur normal

1.4.1 La loi de Tresca

Parmi les lois de frottement, la loi de Tresca semble être relativement la plus simple et la plus facile à utiliser en simulation numérique. La raison est que le seuil de glissement utilisé dans cette loi, est à la fois constant et indépendant des intensités des pressions de contact.

Elle s'écrit de la manière suivante :

Soient F_n et F_t les composantes normales et tangentes des forces de contact respectivement, et telles que :

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq g \text{ alors } \dot{u}_t = 0 & (\text{adhérence}) \\ \text{Si } F_t = g \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_t = -\lambda F_t & (\text{Glissement}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où g est un seuil d'adhérence / glissement fixé a priori. Il dépend entre autres de la limite d'élasticité du matériau. Toutefois, cette loi demeure non linéaire. En effet, nous pouvons observer la très forte non linéarité de cette loi sur le graphe de la (figure 1.1).

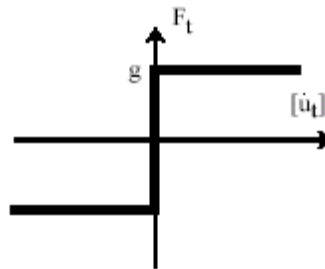


Figure 1.1 : Loi de Tresca

1.4.2 La loi de frottement de Coulomb

Dans la loi précédente, le seuil g de glissement est indépendant de l'intensité des efforts normaux. Ce qui ne correspond pas à la réalité. Pour tenir compte de cette dépendance, Coulomb (1785) a modifié cette loi en adoptant un seuil g proportionnel à l'effort normal.

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq \mu F_n & \text{alors } \dot{u}_t = 0 & \text{(adhérence)} \\ \text{Si } F_t = \mu F_n & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_t = -\lambda F_t & \text{(Glissement)} \end{cases} \quad (1.4)$$

Avec μ le coefficient de frottement qui dépend des états des surfaces en contact. Le graphe de cette loi est tracé sur la (figure 1.2).

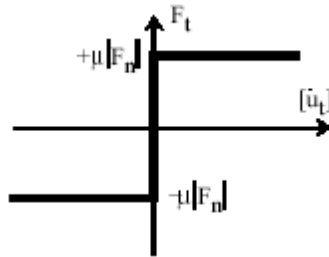


Figure 1.2 : Loi de Coulomb

Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact peut être représenté sous forme d'un cône, en 2D (figure 1.3) ou en 3D (figure 1.4). On l'appelle le cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface seuil du glissement dont la définition et l'utilisation est à rapprocher de la définition de la surface seuil en plasticité.

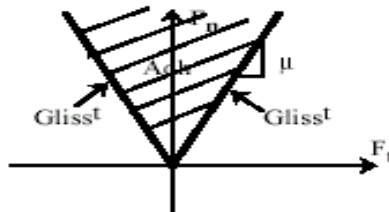


Figure 1.3 : Cône de Coulomb

Cela étant dit, la loi de Coulomb présente certains inconvénients :

- Le manque de relation biunivoque entre les forces de frottement et la vitesse de glissement. En effet, pour toute force de frottement située sur le seuil de glissement, il n'est pas possible de déterminer, selon cette loi, la vitesse de glissement qui lui correspond.
- le caractère non-différentiable de la loi,
- le changement brutal de comportement au passage adhérence/glissement.

Ces inconvénients sont les mêmes que ceux d'une loi de plasticité parfaite, par exemple.

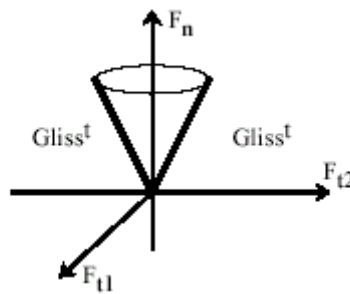


Figure 1.4 : Cône de Coulomb en 3D

1.4.3 La loi de Coulomb régularisée

Pour remédier aux inconvénients précédents, on utilise souvent des lois régularisées qui sont plus douces. Une loi autorisant un glissement élastique réversible paramétré par une raideur élastique K_e , est souvent utilisée. Nous pouvons l'observer sur la (figure 1.5). Toutefois, cette raideur est difficile à évaluer car elle dépend essentiellement de l'élasticité des aspérités des zones en contact. Sa valeur étant généralement très grande, de manière à être proche de la loi de Coulomb, ce qui laisse apparaître des problèmes numériques d'instabilités lors de la résolution.

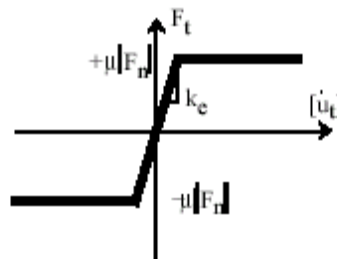


Figure 1.5 : Loi de Coulomb régularisée

Nous signalons également que pour cette loi de Coulomb régularisée, l'inconvénient majeur de relation non biunivoque entre efforts et vitesses lorsqu'il y a glissement irréversible, est toujours conservé.

1.4.4 Autres lois

Parmi les lois les plus couramment utilisées, nous pouvons citer la loi de Norton-Hoff qui s'écrit :

$$F_t = \mu \cdot F_n \cdot \dot{u}_t^{(\rho-1)} \cdot \dot{u}_t \quad (1.5)$$

Avec :

- μ = coefficient de frottement
- \dot{u}_t = vitesse de glissement
- F_n = force normale
- \dot{u}_t = vecteur vitesse de glissement
- ρ = seuil de glissement

Et dont le graphe est représenté sur la (figure 1.6)

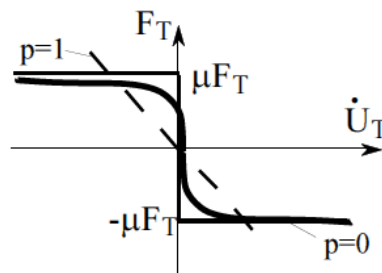


Figure 1.6 : Loi de Norton Hoff

1.4.5 La loi de Coulomb en quasi statique

Au lieu d'une relation entre forces de frottement et vitesse de glissement, la loi de Coulomb peut être réduite, dans le cas de problèmes statiques ou monotones quasi-statiques, à une relation entre les forces de frottement et les déplacements de glissement :

$$\begin{cases} \text{Si } F_t \leq \mu F_n & \text{alors } u_t = 0 & \text{(adhérence)} \\ \text{Si } F_t = \mu F_n & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_t = -\lambda F_t & \text{(Glissement)} \end{cases} \quad (1.6)$$

Toutefois, cette formulation ne peut être adoptée et utilisée que sous la condition qu'en tout point de la zone de contact la variation des efforts soit monotone. Ce qui est le cas des pieux en contact avec le sol.

1.5 Hypothèses et données du problème

Nous considérons le problème du contact unilatéral entre deux solides élastiques notés Ω^1 et Ω^2 respectivement (figure 07). Nous ne supposons que chaque frontière $\partial\Omega^l$ de Ω^l , $l = 1, 2$ est divisée en trois parties :

- Sur la première partie, notée $\partial_1\Omega^l$, nous supposons que le champ de déplacement est donné par :

$$U_{\partial_1\Omega^l}^l = U_d^l \quad l = 1, 2 \quad (1.7)$$

Par souci de simplicité, on supposera que :

$$U_d^l \quad l = 1, 2$$

- Sur la seconde partie notée $\partial_2\Omega^l$, une densité surfacique de forces F_d^l est appliquée
- La dernière partie (complémentaire) notée $\partial_c\Omega^l$ telle que $\partial_c\Omega^l = \partial\Omega^l - (\partial_1\Omega^l \cup \partial_2\Omega^l)$ est la zone de contact.

Nous supposons que $\partial_c\Omega^1 = \partial_c\Omega^2$ que nous noterons Γ_c . Par ailleurs, les corps Ω^l , $l = 1, 2$, sont soumis à de forces volumiques f_d^l . Nous supposons que le tenseur des déformations ε est linéarisé et nous noterons \mathbf{K}^l , l'opérateur d'élasticité du matériau associé à Ω^l .

\mathbf{n}^l : est la normale à la frontière de Ω^l orientée positivement vers l'extérieur.

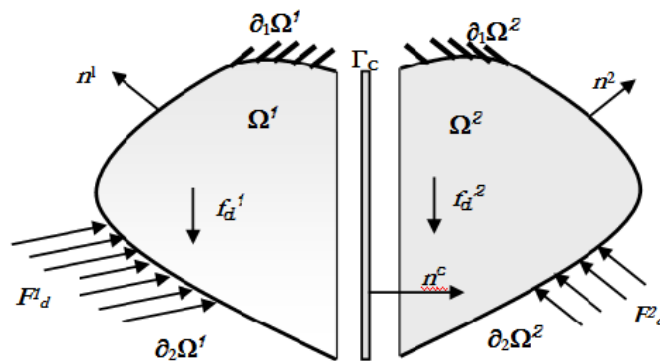


Figure 1.7 : Deux corps élastiques déformables en contact unilatéral

Dans le but d'exprimer clairement l'erreur de contact, nous considérons, comme Ladeveze (1996), la zone de contact Γ_c comme une entité mécanique à part entière munie de sa propre loi constitutive.

Nous choisissons l'orientation positive de la normale à Γ_c , en posant $\mathbf{n}^c = \mathbf{n}^1$. Nous introduisons alors sur l'interface Γ_c les fonctions \mathbf{W}^1 , \mathbf{W}^2 , \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^2 et \mathbf{R}^c qui représentent :

- Les deux champs de déplacements W_1 et W_2 (sur chaque côté de l'interface Γ_c).
- Les deux champs de densité de forces surfaciques R_1 et R_2 (densité des efforts de réaction transmis entre Ω_1 et Ω_2), et qui correspondent aux pressions de contact.
- Un champ de contact intérieur à l'interface, de densité de forces surfaciques R^c tel que l'équilibre interne de l'interface soit représenté par :

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{R}^1 \text{ et } \mathbf{R}^c = -\mathbf{R}^2 \text{ sur } \Gamma_c. \quad (1.8a)$$

$$\text{tel que : } \mathbf{R}^l = \boldsymbol{\sigma}^l : \mathbf{n}^l, \quad l = 1, 2 \quad (1.8b)$$

1.6 Le contact unilatéral sans frottements

1.6.1 Formulation locale

Soit \mathbf{W}^c la définition, au niveau de l'interface, du saut en déplacement qui joue un rôle similaire à celui de la déformation, avec :

$$\mathbf{W}^c = \mathbf{W}^1 - \mathbf{W}^2 \quad (1.9)$$

Pour tout vecteur \mathbf{Z} , soient :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T \mathbf{n}^c \text{ et } \mathbf{Z}_t = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_n \mathbf{n}^c \quad (1.10)$$

Les champs de déplacement,

$$\mathbf{W}^c = \mathbf{W}_n^c + \mathbf{W}_t^c \mathbf{t}$$

et les champs de densité de forces,

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{R}_n^c + \mathbf{R}_t^c$$

Vérifient les conditions de contact sans frottement à l'interface Γ_c . Ces conditions peuvent être formulées de la manière suivante :

$$W_n^c \leq 0 \quad (1.11)$$

$$R_n^c \leq 0 \quad (1.12)$$

$$R_n^c W_n^c \leq 0 \quad (1.13)$$

$$R_t^c = 0 \quad (1.14)$$

L'inéquation (1.11) indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration. L'inéquation (1.12) indique les composantes normales des densités de réaction ne peuvent correspondre qu'à de la compression. L'équation (1.13) est appelée condition de complémentarité ; elle indique qu'en tout point il y soit contact, soit décollement. Enfin, l'équation (1.14) statue sur la nullité des composantes tangentielles des vecteurs densités de réactions. Ce qui reflète l'absence de frottements.

Introduisant le potentiel convexe φ^* , tel que :

$$\varphi(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } V_n \geq 0 \\ +\infty, & \text{si } V_n < 0 \end{cases} \quad \text{et.} \quad (1.15)$$

$$\varphi^*(Z) = \begin{cases} 0, & \text{si } Z_n \leq 0 \text{ et } Z_t = 0 \\ +\infty, & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité de Legendre Fenchel (Duvaut et Lions 1972), nous aurons :

$$\varphi(V) + \varphi^*(Z) - Z^T V \geq 0 \quad \forall V \quad \text{et} \quad \forall Z \quad (1.16)$$

La loi constitutive de contact (1.11) à (1.14) peut être écrite sous les trois formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} -W^c &\in \partial\varphi^*(R^c) \\ R^c &\in \partial\varphi(-W^c) \\ \varphi(-W^c) + \partial\varphi^*(R^c) - (R^{cT} W^c) &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Finalement, le problème de contact unilatéral sans frottement, peut être posé de la manière suivante :

Il s'agit de trouver les couples (U^1, σ^1) définis dans Ω^1 et (U^2, σ^2) définis dans Ω^2 et $[(W^1, W^2), (R^1, R^2, R^c)]$ définis sur Γ_c tels que :

- Les couples (U^1, W^1) , satisfassent les conditions cinématiques :

$$U^l = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^l \text{ et } U^l = W^l \text{ sur } \Gamma_c \quad l = 1, 2 \quad (1.18)$$

- Les couples (σ^l, R^l, R^c) , $l = 1, 2$ satisfassent les équations d'équilibre

$$\int_{\Omega^l} Tr[\sigma^l \varepsilon(V^l) d\Omega] + \int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS + \int_{\Gamma_c} R^{lT} V^l dS = 0 \quad \forall V^l \in U_0^l \quad (1.19a)$$

avec $U_0^l = \{U^l \text{ définis et suffisamment régulière sur } \Omega^l \text{ tels que } U^l = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^l\}$

$$\text{Et } R^l = R^1 \text{ et } R^c = R^2 \text{ sur } \Gamma_c \quad (1.19b)$$

- $(U^l, \sigma^l, W^l, R^c)$, $l = 1, 2$ satisfassent les relations constitutives :

$$\begin{cases} \sigma^l = K^l \varepsilon(U^l) \\ \phi(-W^c) + \phi^*(R^c) + R^{cT} W^c = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

1.6.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (1.18) à (1.20) a été obtenue par Devaut et Lions (1972). Soit $U_0^1 \times U_0^2$ ou U_0^1 et U_0^2 ont été introduits dans (I-19a).

Nous posons, pour tout couple $U = (U^1, U^2)$ et tout couple $V = (V^1, V^2)$ appartenant à U_0 :

$$a(U, V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} Tr[\varepsilon(U^l) K^l \varepsilon(V^l)] d\Omega \quad (1.21)$$

$a(\dots)$ est appelée la forme bilinéaire symétrique en élasticité.

Nous posons également, pour tout couple V appartenant à U_0 :

$$L(V) = \sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS \right) \quad (1.22)$$

La forme linéaire $L(V)$ prend en compte les chargements extérieurs f_d^l et F_d^l . Nous définissons donc le champ convexe, noté U_{ad} , de déplacements admissibles comprenant la condition de non pénétration entre les deux corps :

$$U_{ad} = \{V = (V^1, V^2) \in U_0, \text{ tels que } V^{1T} n^1 + V^{2T} n^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\} \quad (1.23)$$

La formulation variationnelle consiste à trouver

$$a(U, V - U) \geq L(V - U) \quad \forall V \in \mathbf{U}_{ad} \quad (1.24)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité. Il est du même genre qu'un problème d'optimisation et les méthodes de résolution sont toutes issues des méthodes d'optimisation. Si $\partial_1 \Omega^1$ et $\partial_2 \Omega^2$ sont de mesure positives, ce problème est bien posé et admet une solution unique (Devaut et lions 1972). Nous pouvons donc conclure sur l'existence et l'unicité de la solution dans le cas du contact unilatéral sans frottement. Le contact unilatéral avec frottements :

1.6.3 Formulation locale

Nous adaptons comme loi de frottement, la loi de coulomb en quasi statique. Les champs de déplacements \mathbf{W}^C et les champs de densité de réactions \mathbf{R}^C tels que définis dans le paragraphe 1.6.1 précédent, vérifient les conditions de contact avec frottement à l'interface Γ_c .

Ceci peut être formulé de la manière suivante :

$$W_n^C = W_n^1 - W_n^2 \leq 0 \quad (1.25)$$

$$R_n^l \leq 0 \quad l = 1, 2 \quad (1.26)$$

$$R_n^l - W_n^C = 0 \quad l = 1, 2 \quad (1.27)$$

$$|R_t^l| \leq \mu |R_n^l| \quad l = 1, 2 \quad (1.28)$$

$$|R_t^l| \leq \mu |R_n^l| \Rightarrow W_t^l = 0 \quad , l = 1, 2 \quad (1.29)$$

$$|R_t^l| \leq \mu |R_n^l| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } W_t^l = -\lambda R_t^l \quad , l = 1, 2 \quad (1.30)$$

Introduisons cette fois ci le potentiel convexe φ et son conjugué φ^* (Ekeland et Temam, 1976),

Tel que :

$$\varphi(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } V_n \geq 0 \\ +\infty, & \text{si } V_n < 0 \end{cases} \quad (1.31a)$$

$$\varphi^*(Z) = \begin{cases} 0, & \text{si } Z_n \leq 0 \\ +\infty, & \text{si } Z_n > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{et } |Z_t| \leq \mu |Z_n| \\ \text{ou } |Z_t| > \mu |Z_n| \end{array} \quad (1.31b)$$

Pour le cas avec frottement, De Saxcé (1992) a défini la fonction (V, Z) telle que :

$$\phi(V, Z) = \varphi(V) + \varphi^*(Z) + \mu|Z_n||V_t| \quad (1.31c)$$

Les propriétés de cette fonction $\phi(V, Z)$ ainsi que leur démonstration peuvent être trouvées dans la référence précédente. En particulier $\phi(V, Z)$ est un bipotentiel tel que :

- Pour un V fixé, $\phi(V, Z)$ est convexe par rapport à Z
- Pour un Z fixé, $\phi(V, Z)$ est convexe par rapport à V
- Pour tout V et Z , on a :

$$\phi(V, Z) - Z^T V \geq 0 \quad (1.31d)$$

Il est à signaler qu'en appliquant l'inégalité de Legendre Fenchel (Devaut et lions 1972), l'inéquation (1.16) est également vérifiée, et la relation constitutive du contact peut être écrite sous les trois formes suivante :

$$\begin{cases} -W^C \in \partial\varphi^*(R^C), \\ R^C \in \partial\varphi(-W^C), \\ \varphi(-W^C) + \varphi^*(R^C) + \mu|R_n^C||W_t^C| + R_t^C W_t^C + R_n^C W_n^C \end{cases} \quad (1.32a)$$

D'après la définition introduite dans l'expression (1.31c), les expressions précédentes peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -W^C \in \partial\varphi^*(R^C), \\ R^C \in \partial\varphi(-W^C), \\ \phi(-W^C, R^C) + W_n^{C^T} R^C \end{cases} \quad (1.32b)$$

Remarque

Introduite par De Saxcé (1992), la fonction $\phi(-W^C, R^C)$ représente le bipotentiel de la zone de contact avec frottement a déjà été utilisé par Louf et Coll (2003). On peut noter que cette fonction est toujours positive ou nulle. En effet, elle est égale à $+\infty$ si la condition de non pénétration (1.29) n'est pas vérifiée, ou bien $-W^C \notin \partial\varphi^*(R^C)$ ou si la densité de réactions normales est positive ($R_n^C > 0$) ou si la densité des réactions tangentes est située en dehors du cône de coulomb autrement dit si $R^C \notin \partial\varphi(-W^C)$.

Finalement, le problème de contact unilatéral avec frottement, peut être posé de la manière suivante :

Trouver les couples (U^1, σ^1) définis dans Ω^1 et (U^2, σ^2) définis dans Ω^2 et $[(W^1, W^2), (R^1, R^2, R^C)]$ définis sur Γ_c tels que :

- Les couples (U^l, W^l) , satisfassent les conditions cinématiques :

$$U^l = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega^l \text{ et } U^l = W^l \text{ sur } \mathbf{c} \quad l = 1, 2 \quad (1.35)$$

- Les couples (σ^l, R^l, R^C) , $l=1,2$ satisfassent les équations d'équilibre

$$\int_{\Omega^l} \text{Tr}[\sigma^l \varepsilon(V^l)] d\Omega + \int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS + \int_{rc} R^{lT} V^l dS = 0 \quad \forall V^l \in U_0^l \quad (1.36a)$$

avec $U_0^l = \{U^l \text{ définis et suffisamment régulière sur } \Omega^l \text{ tels que } U^l = 0 \text{ sur } \Omega^l\}$

$$\text{Et } R^c = R^1 \text{ et } R^c = -R^2 \text{ sur } \Gamma_c \quad (1.36b)$$

- $(U^l, \sigma^l, W^l, R^C)$, $l = 1, 2$ satisfassent les relations constitutives :

$$\begin{cases} \sigma^l = K^l \varepsilon(U^l) \\ \phi(-W^C + R^C) + W^{CT} R^C = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

1.6.4 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (1.35) à (1.37) a également été obtenue par Duvaut et Lions (1972). En effet, soit $U_0 = U_0^1 \times U_0^2$ où U_0^1 et U_0^2 ont été introduits dans (I-19a).

Nous posons, pour tout couple $U = (U^1, U^2)$ et tout couple $V = (V^1, V^2)$ appartenant à U_0 :

$$a(U, V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} \text{Tr}[\varepsilon(U^l) K^l \varepsilon(V^l)] d\Omega \quad (1.38)$$

a (...)

 est appelée la forme bilinéaire symétrique en élasticité.

Nous posons également, pour tout couple V appartenant à U_0 :

$$L(V) = \sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Omega^l} f_d^{lT} V^l d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} F_d^{lT} V^l dS \right) \quad (1.39)$$

$$\text{et } J(V) = \sum_{l=1}^2 \int_{\partial_c \Omega^l} \mu |R_n^l| |V_t^l| dS \quad (1.40)$$

Les formes linéaire $L(V)$ et $J(V)$ prennent en compte respectivement les chargements extérieurs f_d^l et F_d^l ainsi que le contact avec frottement.

De la même manière, nous définissons donc le champ convexe, noté U_{ad} , de déplacements admissibles comprenant la condition de non pénétration entre les deux corps :

$$U_{ad} = \{V = (V^1, V^2) \in U_0, \text{ tels que } V^{1T} n^1 + V^{2T} n^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\} \quad (1.41)$$

La formulation variationnelle consiste à trouver $U \in U_{ad}$

$$a(U, V - U) + J(V) - L(V) \geq L(V - U) \quad \forall V \in U_{ad} \quad (1.42)$$

Nous remarquons qu'il s'agit également d'un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité.

Les premiers résultats d'existence pour ce problème de contact avec frottement, ont été obtenus par Necas, Jarusek et Haslinger (1980). Ils ont prouvé l'existence de la solution pour une barre élastique en dimension deux sous la condition d'un coefficient de frottement assez petit. Ensuite Jarusek (1983) ont apporté des améliorations à ce résultat. En effet, ces derniers ont montré l'existence de la solution quand le coefficient de frottement μ est inférieur à $\frac{\sqrt{3-4\nu}}{2-2\nu}$, ν étant le coefficient de Poisson dans Ω^1 .

La difficulté est qu'il n'existe pas de relation bi univoque (dans la loi de Coulomb) entre l'effort normal et les déplacements. En effet, soit la solution $U \in U_{ad}$ et minimisant l'énergie potentielle :

$$U \in U_{ad} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} a(U, U) + J(U) - L(U) \quad (1.43)$$

Avec

$$J(U) = \sum_{l=1}^2 \int_{\partial_c \Omega^l} g |U_t^l| dS \quad (1.44)$$

Dans le cas de la loi de Coulomb et ou $g = \mu |R_n^l|$, $l = 1, 2$; on voit bien que l'énergie dépend de l'effort normal. Ainsi, cette énergie de déformation ne dépend pas

uniquement des déplacements. Par contre, dans la loi de Tresca ou le seuil g est fixé, on peut appliquer le théorème de minimisation de l'énergie potentielle.

Il en est de même pour le cas du contact sans frottement.

Cela étant dit, on peut maintenant voir plus clairement l'intérêt des lois de frottement régularisées. En effet, grâce aux relations bi univoques qu'elles comportent (entre efforts et déplacements), la minimisation de l'énergie devient possible.

1.7 Le problème du point fixe

Cette méthode consiste à remédier aux insuffisances de la loi de Coulomb en adoptant une stratégie de résolution dite du point fixe. En effet la technique de résolution consiste, à chercher à chaque itération, un point fixe sur le seuil de glissement tel que $g = \mu |\mathbf{R}_n^\ell|$, $\ell=1,2$; et puis d'utiliser le théorème de minimisation de l'énergie de déformation de la loi de Tresca.

Il s'agit donc de trouver le point fixe de l'application :

$$g \rightarrow \mu |\mathbf{R}_n^\ell(\mathbf{U})| \quad (g = \text{seuil}) \quad (1.45)$$

Tel que $\mathbf{U} \in \mathbf{U}_{ad}$ et minimise l'énergie potentielle :

$$\mathbf{U} \in \mathbf{U}_{ad} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{J}(\mathbf{U}) - \mathbf{L}(\mathbf{U}) \quad (1.46)$$

avec

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\partial_c \Omega^\ell} \mathbf{g} |\mathbf{U}_t^\ell| dS \quad (1.47)$$

Toutefois, en dépit de l'adoption d'un seuil fixé g , la résolution demeure non seulement non linéaire mais des problèmes d'instabilités peuvent apparaître. Ces dernières (les instabilités) sont parfois dues à des mauvais conditionnements des matrices de rigidité lors des itérations d'équilibre. Elles sont également dues à la forte non linéarité de la loi de Tresca.

1.8 Conclusion

De ce chapitre, nous pouvons conclure sur la très forte non linéarité du problème de contact. Cette non linéarité est d'avantage accentuée dans le cas avec frottements. Parmi les lois de frottements qui semblent être plus « réalistes », nous pouvons citer la loi de Coulomb. Toutefois, cette loi présente une difficulté majeure. En effet, hormis le problème d'existence de la solution qui a été résolu, le problème de l'unicité demeure encore posé. Cela dit, en plus de l'absence de résultats disponibles dans la littérature, ce problème d'unicité a été mis en évidence lors de la formulation variationnelle. De cette formulation, nous avons pu constater que l'une des stratégies de résolution qu'on peut adopter consiste à utiliser la méthode du point fixe, tout en se basant sur un calcul itératif. Ce qui semble être en adéquation avec la méthode des éléments finis.

Chapitre 02

Résolution du problème de contact par la méthode des éléments finis

2.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que de très fortes non linéarités sont engendrées par la prise en compte des conditions de contact unilatéral. Pour résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, de nombreuses techniques ont été mises au point. Certaines de ces techniques sont simples et d'autres plus complexes. Toutefois, en dépit de leur nombre et de leur complexité, beaucoup de difficultés demeurent non levées. Ceci s'explique par le fait que chacune de ces méthodes s'applique à un problème précis où certaines difficultés sont levées, mais en contre partie d'autres persistent ou apparaissent. En somme, il n'existe pas à notre connaissance, de techniques de résolution parfaitement efficaces pour lever en totalité toutes les difficultés liées au problème de contact.

Cela étant, l'objectif de ce chapitre est de présenter les principales méthodes de résolution du problème de contact par éléments finis d'une part, et d'autre part, de voir les conséquences engendrées par ces différentes méthodes sur les erreurs de discrétisation du problème de contact. A cet effet, nous commencerons par un bref rappel des fondements de la méthode des éléments finis ainsi que des défauts de la solution obtenue. Cette dernière étant de nature approchée, nous mettrons d'avantage l'accent sur les défauts qui sont à l'origine des erreurs de discrétisation, voir également de contact. Ensuite, nous présenterons de manière non exhaustive, les principales techniques de résolution du problème de contact ainsi que les difficultés qui leur sont liées.

Nous rappelons que la formulation de problème de contact est obtenue sous forme d'inéquations variationnelles. La résolution de ces inéquations nécessite leur

transformation en équations variationnelles et ce, après la suppression des conditions cinématiques et l'introduction de variables duales (ou conjuguées). Du point de vue mathématique, le problème à résoudre est donc un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalité. Les méthodes de résolution sont nombreuses et sont toutes issues du domaine de l'optimisation. Parmi elles, nous pouvons citer : les méthodes des statuts ou du point fixe, de la relaxation projetée, du gradient projeté, de la pénalisation, des multiplicateurs de Lagrange etc.

Pour la suite de notre travail, nous allons adopter (au chapitre 03) comme méthode de résolution, la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La raison de ce choix est surtout d'intérêt pratique. En effet, comme mentionné plus haut, cette méthode est très utilisée par les codes de calcul par éléments finis. Ce choix est également justifié par le fait, qu'en dépit des lenteurs et des problèmes de convergence qu'elle connaît lors de la résolution, notamment dans le cas avec frottements, cette méthode demeure l'une des plus précises. D'autre part, l'efficacité et la performance de cette méthode sont d'avantage marquées par la croissance sans cesse de la capacité et de la vitesse de résolution des ordinateurs.

2.2 La méthode des éléments finis : une brève description

2.2.1 Principe de la méthode

Pour illustrer la méthode, on considère le problème d'élasticité suivant. Soit un solide occupant un domaine Ω (Figure 2.1). Sur une partie $\partial_1\Omega$, du bord $\partial\Omega$, le champ de déplacement est imposé :

$$U = U_d \quad (2.1)$$

Sur la partie complémentaire $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$, on impose une densité surfacique d'efforts F_d .

D'autre part, Ω est soumis à une densité de forces volumiques f_d .

On fait l'hypothèse que le solide Ω subit uniquement de petites déformations.

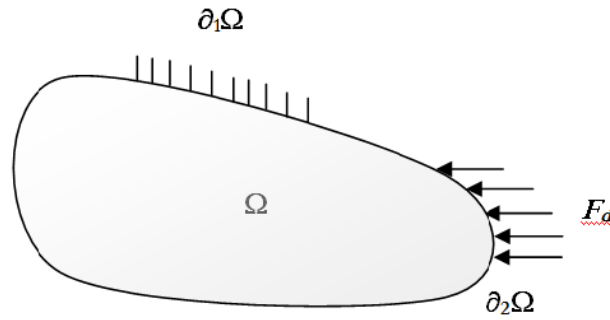


Figure 2.1 : Schéma de la structure à modéliser par éléments finis

Soit V l'ensemble des champs de déplacements V cinématiquement admissibles dans Ω , tels que :

$$V = \{ V \text{ définis et suffisamment réguliers sur } \Omega \text{ tels que } V = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \}$$

Soit un point M quelconque appartenant au domaine Ω . Le problème consiste à trouver le champ de déplacement $U(M)$ solution de :

$$U(M) \in V \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \sigma(U) + f_d = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$\sigma(U) = H \varepsilon(U). \quad (2.3)$$

On pose ce problème sous forme globale à l'aide d'une approche énergétique, le théorème de l'énergie potentielle.

Trouver $U \in V$, tel que U minimise l'énergie potentielle :

$$E_p(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} H \varepsilon(U) : \varepsilon(U) d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} F_d U dS + \int_{\Omega} f_d U d\Omega \quad (2.4)$$

Pour illustrer la méthode, on approche $U(M)$ par :

$$U_h(M) = q_i \omega_i(M), \quad i = 1 \dots N, \quad (2.5)$$

Les q_i sont des paramètres scalaires et les $\omega_i(M)$ sont des fonctions définies sur Ω qui dépendent du type de problème traité ainsi que de la richesse de l'approximation. La recherche de la solution $U(M)$ est remplacée par la recherche de N paramètres scalaires q_i .

Pour que le problème puisse être posé, les fonctions $\omega_i(M)$ doivent être suffisamment dérivables sur Ω . Si les $\omega_i(M)$ forment une base, $\mathbf{U}_h(M)$ est la projection de $\mathbf{U}(M)$ dans le sous espace vectoriel engendré par les $\omega_i(M)$. $\omega_i(M)$ deviennent alors des fonctions de base.

L'énergie potentielle s'écrira alors :

$$E_p(\mathbf{U}_h) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_i \left(\int_{\Omega} \mathbf{H} \varepsilon(\omega_i) : \varepsilon(\omega_j) d\Omega \right) \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i \left(\int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \omega_i dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \omega_i d\Omega \right) \quad (2.6)$$

Ou bien sous la forme matricielle :

$$E_p(\mathbf{U}_h) = \frac{1}{2} [\mathbf{q}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{q}] - [\mathbf{q}]^T [\mathbf{F}] \quad (2.7)$$

$[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{F}]$ sont appelés respectivement, matrice de rigidité globale et vecteur forces généralisées

Le minimum de l'énergie potentielle est atteint pour :

$$\frac{\partial E_p(\mathbf{U}_h)}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.88)$$

La solution du problème approché est obtenue par résolution du système linéaire de taille N :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{q}] = [\mathbf{F}] \quad (2.9)$$

Ce sont les équations d'équilibre discrétisées. Ce système linéaire peut être résolu soit par des méthodes directes (Gauss, Cholesky, Crout...) soit par des méthodes itératives (Gauss-Seidel, gradient conjugué,...).

Concernant les conditions aux limites, on peut les écrire sous la forme générale suivante :

$$[\mathbf{C}][\mathbf{q}] = [\beta] \quad (2.10)$$

Où $[\mathbf{C}]$ contient la réduction au zones de liaison considérées et $[\beta]$ les valeurs à imposer.

Le problème à résoudre est donc de trouver le vecteur des inconnues $[\mathbf{q}]$ tel que :

$$[\mathbf{q}] \text{ minimise } E_p(\mathbf{U}_h) = \frac{1}{2} [\mathbf{q}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{q}] - [\mathbf{q}]^T [\mathbf{F}] \quad \text{et} \quad \text{vérifie } [\mathbf{C}] [\mathbf{q}] = [\boldsymbol{\beta}] \quad (2.11)$$

Finalement, on a remplacé un problème continu d'équations aux dérivées partielles par un problème approché et discret d'équations algébriques linéaires. Le système (2.11) résolu, on pourra remonter aux déplacements puis aux déformations et aux contraintes.

2.2.2 Convergences et mise en œuvre de la méthode

Pour pouvoir l'utiliser en modélisation des structures, la formulation précédente demeure insuffisante. Elle doit satisfaire à des exigences de mise en œuvre, principalement :

- La prise en compte simple et efficace de toute sorte de géométrie,
- La capacité d'intégrer les fonctions de base sur le domaine
- Le calcul simple de la valeur des déplacements, des contraintes ou des déformations en tout point du domaine Ω
- La possibilité de pouvoir enrichir l'approximation localement
- Et enfin, la nécessité de converger rapidement soit vers la solution exacte lorsque celle-ci est disponible ; soit vers une solution de référence, le cas échéant.

Pour satisfaire ces conditions, un certain nombre de techniques ont été adoptées. Parmi elles, nous citerons :

A. Un maillage adéquat du domaine Ω

Le domaine Ω est divisé en un nombre N_e fini de sous domaines E_i avec $i = 1, \dots, N_e$; de dimensions finies ou d'éléments finis de formes géométriques simples. Le résultat de cette discrétisation constitue le maillage éléments finis du solide. Pour être valide, ce maillage doit satisfaire à des conditions dites de conformité et assurer une couverture maximale du domaine Ω .

La convergence vers la solution exacte ainsi que la vitesse de convergence dépendent de la topologie de ce maillage. Autrement dit, la qualité de la solution obtenue dépend de cette discrétisation géométrique. Celle ci pourra être améliorée soit par raffinement, ou bien par adaptation (qu'on verra plus loin) du maillage, et ce, sans modifier l'interpolation. Ce type de convergence est nommée : convergence $-h$. En effet, si les fonctions de base utilisées sont simples,

de type polynomiales et de bas degré, la richesse de l'approximation pour la convergence $-h$ pourrait être obtenue en modifiant les tailles des éléments du maillage (finesse globale ou locale du maillage).

B. Un choix adéquat des fonctions de base

Les fonctions de base utilisées par la MEF sont locales. Chaque fonction est associée à un nœud du maillage. En effet, elles sont choisies de telle manière que :

$$\omega_i = 1 \text{ au nœud } i \text{ et } \omega_j = 0 \text{ au nœud } j \quad \forall j \neq i. \quad (2.12)$$

Et la fonction ω_i est non nulle sur les éléments dont le nœud i est un sommet.

Cela implique que lorsque $\mathbf{U}_h(\mathbf{M}) = q_i \omega_i(\mathbf{M})$, q_i est directement la valeur de $\mathbf{U}_h(\mathbf{M})$ au nœud i .

Ainsi, dans chaque élément \mathbf{E}_i , les champs inconnus de déplacements \mathbf{U}_h qu'il faut calculer sont approchés de manière nodale ; les inconnues q_i étant les valeurs que prend \mathbf{U}_h aux nœuds de l'élément fini \mathbf{E}_i . Avec un choix de fonctions polynomiales continues et dérivables, les champs \mathbf{U}_h ainsi construits sont continus et suffisamment réguliers. Ainsi, en plus des conditions de conformité du maillage, ces champs pourront être considérés comme cinématiquement admissibles (Frey et Jirousek, 1998).

Pour améliorer la convergence, une autre méthode consiste en l'enrichissement de l'interpolation et ce, sans changer le maillage. Cet enrichissement pourra être obtenu en augmentant le degré des fonctions polynomiales dans chaque élément. Ceci est connu sous le nom de convergence $-p$.

On peut également utiliser les deux techniques précédentes $-h$ et $-p$ simultanément. C'est la convergence $h-p$. Elle consiste à améliorer le maillage et à enrichir l'interpolation simultanément.

C. Vers un contrôle et une automatisation des calculs

D'autres techniques ont significativement facilité la mise en œuvre de la méthode. Essentiellement, il s'agit de :

- L'écriture des termes à intégrer sous forme élémentaire ;
- L'utilisation d'éléments dits de référence et d'éléments isoparamétriques ;

- Une procédure de transformation entre éléments réels et éléments de référence ;
- Des techniques d'intégration numériques sur l'élément de référence ;
- Des méthodes de prise en compte de conditions aux limites ;
- Des techniques d'assemblages de matrices élémentaires et de résolution du système d'équations ;
- Des techniques de génération de maillages ;
- Des techniques d'estimation a posteriori d'erreurs globales et locales ;
- Et enfin des techniques d'adaptation du maillage en fonction d'une carte des contributions à l'erreur.

Toutes ces procédures doivent permettre l'automatisation des calculs éléments finis, et un meilleur contrôle de l'erreur de discrétisation.

2.3 Les défauts de la solution éléments finis

2.3.1 Le cas général

En dépit de tous les développements qu'a connus la M E F à travers toutes les techniques citées précédemment, le problème de la discontinuité du champ de contraintes demeure posé. En effet, on constate, en comparant le problème de référence (2.1) à (2.3) avec le problème approché (2.11), que la solution approchée (U_h, σ_h) du problème discrétisé vérifie, comme la solution exacte (U_{ex}, σ_{ex}) du problème continu les liaisons cinématiques et la relation de comportement. Par contre, le champ de contrainte approché σ_h , calculé élément par élément au moyen de la loi de comportement, n'est pas statiquement admissible. On en déduit que l'approximation par la méthode des éléments finis porte sur les équations d'équilibre.

Plus précisément, les trois types de défauts d'équilibre de la contrainte approchée σ_h sont :

- La non vérification des équations d'équilibre locales :

$$\mathbf{div} \sigma_h + f_d \neq 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.13)$$

- Le non-respect des conditions limites en effort : la contrainte normale n'équilibre pas les charges données :

$$\sigma_h n \neq F_d \text{ sur } \hat{\partial}_2 \Omega \quad (2.14)$$

- La non continuité de la contrainte normale à l'interface entre deux éléments :

$$\sigma_h n_{E_1} + \sigma_h n_{E_2} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_{E_1 E_2} \quad (2.15)$$

Ces défauts précédents sont dus au fait que la formulation énergétique du problème ait été établie en déplacements. Elle a été effectuée sur la base de champs de déplacements cinématiquement admissibles CA. Cette méthode est donc précise pour trouver les champs de déplacements \mathbf{U}_h mais moins précise pour trouver les champs de contraintes σ_h .

Pour parer à cet inconvénient, une formulation énergétique du problème peut être établie cette fois ci en contraintes. Elle est basée sur des champs de contraintes statiquement admissibles (SA). La résolution repose sur le principe de la minimisation de l'énergie potentielle complémentaire et les fonctions de base choisies doivent être statiquement admissibles. Cette méthode est précise en contraintes mais de moindre qualité en déplacements. Toutefois, sa mise en œuvre est difficile à réaliser, notamment dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels. C'est pour cette raison qu'elle est très rarement utilisée par les codes de calcul éléments finis.

Pour la suite de notre travail, nous nous limiterons uniquement aux éléments formulés en déplacements. Ce choix est motivé par le fait que ces éléments sont moins difficiles à utiliser dans le cadre d'un problème de contact. D'autre part, ce sont les éléments plus utilisés par les codes de calcul, les industries, les bureaux d'études etc.

2.3.2 Le cas du problème de contact

Pour le cas du problème de contact, signalons également certains défauts de cette solution approchée. En effet, lorsqu'on utilise des éléments d'ordre supérieur (non linéaires), la vérification des conditions de contact aux nœuds n'entraîne pas forcément la vérification de ces conditions en tout point de la zone de contact (Figure 2.2). Il est à remarquer que ce problème ne se pose pas pour des éléments finis linéaires.

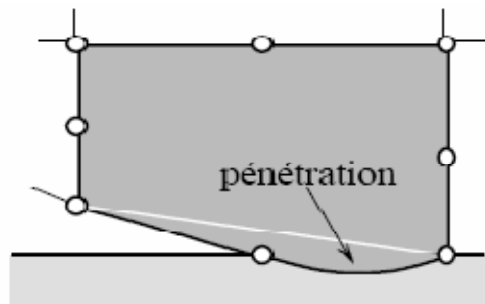


Figure 2.2 : Cas de non vérification de la condition de non pénétration (ou de contact)

Un autre défaut est constaté lorsque la condition de contact utilisée, porte sur le signe des multiplicateurs de Lagrange qui représentent la contrainte normale sur la zone de contact. En effet, considérons, à titre d'exemple, des éléments de type cube à 20 nœuds (Figure 2.3). A une répartition uniforme des pressions correspondent des forces généralisées (ou nodales) dont le signe varie entre les différents nœuds. Par conséquent, les solutions obtenues par ces méthodes peuvent être aberrantes. Pour remédier à ce type de défauts, il est préconisé d'utiliser des méthodes basées sur des conditions portant sur les signes des déplacements relatifs ou sur le signe des forces nodales.

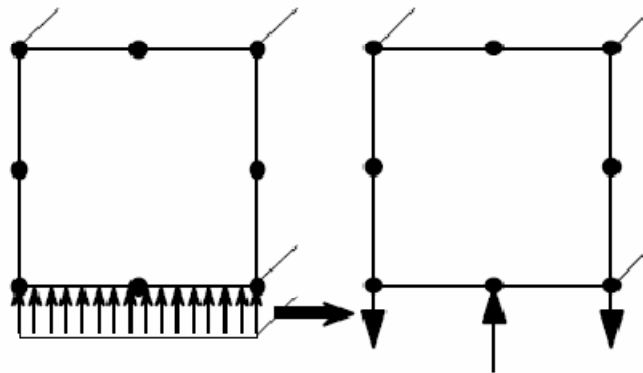


Figure 2.3 : Problème des forces généralisées sur les éléments cubiques à 20 nœuds

2.4 Résolution du problème de contact par éléments finis

2.4.1 Les relations discrètes du contact

En vue de leur discrétisation, les relations de contact peuvent être écrites de deux manières différentes. La première sous forme nodale où les conditions de contact sont portées par des inconnues nodales au niveau des noeuds. La seconde sous forme élémentaire, où les conditions de contact sont écrites au niveau des éléments.

A. Les relations de types nodales

Pour ce type de relations, les conditions de contact sont portées par des inconnues nodales. En effet, lorsque les maillages des deux corps sont compatibles sur Γ_c (Figure 2.4), les conditions de non pénétration sont des relations simples entre les degrés de liberté des noeuds en vis-à-vis. Par contre, lorsque les maillages en présence sont incompatibles (Figure 2.5), les relations entre les degrés de liberté deviennent beaucoup moins simples à écrire.

Par exemple, dans le cas de la (figure 2.6), on peut imposer la condition de non pénétration en moyenne sous la forme :

$$\left(U_C - \frac{1}{2}(U_A + U_B) \right) \cdot n \geq 0 \quad (2.16)$$



Figure 2.4 : Maillages compatibles sur l'interface

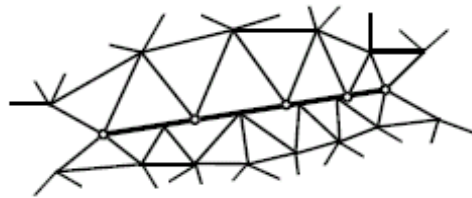


Figure 2.5 : Maillages incompatibles sur l'interface

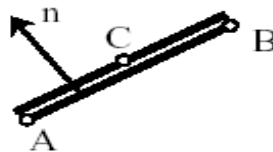


Figure 2.6 : Exemple de situation incompatible

Notons qu'il existe une autre méthode pour exprimer (ou bien pour imposer) la condition de non pénétration et ce, de manière plus globale sur la zone de contact. En effet, une relation entre les composantes normales des déplacements des nœuds des maillages en contact, est introduite en calculant l'intégrale de la fonction définie par le produit de la matrice des fonctions de base définies sur ce maillage, par le vecteur portant les composantes normales du champ de déplacements.

Pour vérifier cette condition de non pénétration, cette intégrale doit rester en chaque nœud du maillage de contact, positive ou nulle (Coorevits et coll, 1999).

B. Les relations de types élémentaires

Dans ce cas, les relations de contact (1.11) à (1.14) ou bien (1.29) à (1.34) dans le cas avec frottement, sont portées par des éléments dits de contact et qui doivent avoir une loi de comportement. Cette dernière peut être soit sous forme d'une loi de frottement (loi de Coulomb par exemple), soit sous forme de raideurs normales et tangentielles, utilisées par la méthode de la pénalisation. La définition de ce type d'éléments rejoint en quelque sorte la notion d'interface Γ_c introduite par Ladeveze (1996) (cf paragraphe 1.5 du chapitre I) munie de sa propre loi constitutive. Ils sont donc d'épaisseur nulle et disposés entre les maillages de deux solides en contact.

Par ailleurs, du point de vue géométrique, ces éléments peuvent être soit de type ponctuel (élément de contact « nœud à nœud »), soit de type linéique (élément de contact « nœud segment »), ou de type surfacique (élément de contact « nœud facette »). Tous ces éléments spécifiques de contact ont été développés dans la littérature (Chamoret 2002).

En général, l'élément de contact « nœud à nœud » est utilisé pour résoudre le problème de contact entre deux corps déformables lorsqu'ils subissent de petits déplacements relatifs. En effet, pour un problème où les glissements attendus sont petits, un maillage compatible des deux corps suffit. Ce maillage met alors en vis à vis les nœuds des deux surfaces (Figure 2.7). Par contre, pour les grands glissements, ceux ci nécessitent l'utilisation des éléments de contact « nœud segment » pour les problèmes bidimensionnels, et des éléments de contact « nœud-facette » pour les cas tridimensionnels. L'élément « nœud-facette » est constitué d'un nœud esclave et de nœuds maîtres caractérisant la facette de contact (Figure 2.8). Parmi les travaux où ont été utilisés ces types d'éléments, on peut citer Chamoret (2002) ainsi que Laursen (2002).

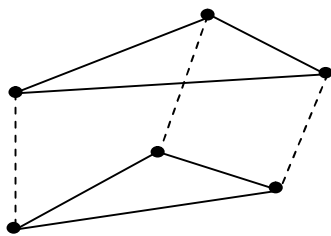


Figure 2.7 : Élément nœud à nœud

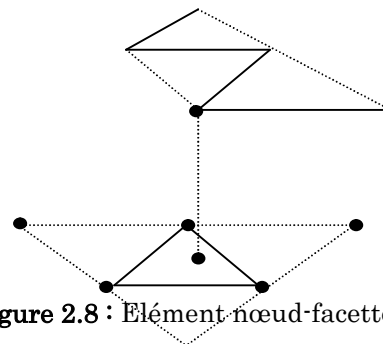


Figure 2.8 : Élément nœud-facette

2.4.2 Formulation discrète du problème de contact

Dans ce paragraphe, nous allons écrire la forme discrète du problème continu établi au paragraphe 1.5 du chapitre précédent. Après discrétisation, le théorème de l'énergie potentielle devient :

Soit \mathbf{H} la forme discrète du convexe \mathbf{U}_{ad} défini dans l'expression (1.32) et tel que :

$$\mathbf{H} = \{ [\mathbf{q}] \quad \text{tels que} \quad [\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta] \geq [0] \} \quad (2.17)$$

La solution \mathbf{U}_h est telle que $\mathbf{U}_h \in \mathbf{H}$ et minimise l'énergie potentielle

$$E_p(\mathbf{U}_h) = \frac{1}{2} [\mathbf{q}]^T [\mathbf{K}][\mathbf{q}] - [\mathbf{q}]^T [\mathbf{F}] \quad (2.18)$$

parmi tout les vecteurs $[\mathbf{q}] \in \mathbf{H}$.

Ici, $[\mathbf{K}]$ est la matrice de rigidité globale des deux solides en contact ($\Omega^1 \cup \Omega^2$) du problème et $[\mathbf{F}]$ le vecteur des forces généralisées appliqué sur les deux solides ($\Omega^1 \cup \Omega^2$).

La matrice $[\mathbf{C}]$ assure la restriction à la zone de contact Γ_c . Le vecteur des jeux éventuels $[\beta]$ représente la construction des écarts en déplacement normaux. La solution discrétisée $[\mathbf{q}]$ est alors la solution du système linéaire :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{q}] = [\mathbf{F}] \quad \text{sous la condition} \quad [\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta] \geq [0] \quad (2.19)$$

Il s'agit donc de résoudre un problème discret de minimisation sous contraintes d'inégalité.

2.4.3 Les méthodes de résolution

Pour la résolution du problème défini dans l'expression (2.19), il existe un grand nombre de méthodes. Les plus connues sont :

- la méthode du point fixe (ou bien méthode des statuts)
- les méthodes de projection
- la méthode de la pénalisation
- la méthode des multiplicateurs de Lagrange
- les méthodes mixtes, tels que le Lagrangien augmenté ou le Lagrangien perturbé etc...

2.4.3.1 La méthode de la pénalisation

Dans cette approche, on minimise la quantité :

$$E_p(\mathbf{q}) + \frac{g}{2} [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] \quad (2.20)$$

Ainsi, nous remarquons en (2.20) que plus le paramètre scalaire g est élevé (tend vers l'infini par exemple), plus la condition à imposer $[\mathbf{C}][\mathbf{q}] = [\beta]$ est assurée.

Cette approche est simple car elle ne consiste qu'à l'ajout de termes élevés dans le système linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(E_p(\mathbf{q}) + \frac{g}{2} [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] \right) = 0 \quad (2.21)$$

Ce qui donne :

$$[[\mathbf{K}] + g[\mathbf{C}]^T[\mathbf{C}]][\mathbf{q}] = [\mathbf{F}] + g[\mathbf{C}]^T[\beta] \quad (2.22)$$

L'inconvénient majeur de cette méthode est le choix du paramètre de pénalisation g . D'un point de vue mathématique, et d'après l'expression (2.20), le coefficient g doit tendre vers l'infini pour obtenir l'approximation la plus juste. Par contre, d'un point de vue numérique, un paramètre de pénalisation trop important conduit à de sérieux problèmes de convergence. En effet, des problèmes numériques de conditionnement de la matrice du système linéaire apparaissent. D'autre part, un paramètre de pénalisation trop faible conduit à des pénétrations inacceptables d'un point de vue physique. Donc la précision de la solution du problème se trouve fortement affectée. Ainsi, avec cette méthode, les conditions de contact de type Signorini ne sont pas satisfaites car la pénétration d'un corps dans un autre est possible.

Par ailleurs, cette méthode possède certains avantages :

- une facilité de mise en œuvre : En effet, elle ne nécessite pas de modification de la structure du code de calcul élément fini ;
- ne nécessite pas l'introduction de variables supplémentaire dans le problème.
- S'adapte parfaitement aux schémas de résolution explicites (dans le cas d'une résolution temporelle par exemple).

2.4.3.2 La méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'avantage de cette méthode permet d'éviter les problèmes liés au choix arbitraire des coefficients de pénalisation. Elle consiste à chercher les extremums de :

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] \quad (2.23)$$

Avec $[\lambda]^T$ le vecteur ligne des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque nœud en contact. Ces extremums correspondent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} (\mathbf{E}_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]]) &= 0 \\ \Rightarrow [\mathbf{K}][\mathbf{q}] - [\mathbf{F}] + [\lambda]^T [\mathbf{C}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (\mathbf{E}_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]]) &= 0 \\ \Rightarrow [\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta] &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'avantage principal de cette approche réside dans le fait que les conditions à imposer $[\mathbf{C}][\mathbf{q}] = [\beta]$ sont parfaitement vérifiées. En effet, on voit bien dans le système précédent que la condition sur les inconnues est imposée strictement.

Le système linéaire à résoudre devient alors :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}]^T \\ [\mathbf{C}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{F}] \\ [\beta] \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

On peut montrer que les λ_i sont les actions dans les liaisons servant à imposer les conditions sur les inconnues. Autrement dit, dans le cas du problème de contact, les λ_i sont les densités de réaction de contact associées aux nœuds i . La résolution consiste donc à remplacer ces multiplicateurs par des densités de réactions de contact :

$$\mathbf{R}^c = \lambda \quad (2.27)$$

D'autre part, la vérification des conditions de contact portent sur les signes de ces multiplicateurs λ_i .

Par ailleurs, l'inconvénient principal de cette méthode est dû au fait que des inconnues supplémentaires soient introduites dans le problème (multiplicateurs de Lagrange en plus des déplacements nodaux). L'autre inconvénient est que des

zéros peuvent apparaître sur la diagonale de la matrice de rigidité globale, rendant impossible la résolution par certaines méthodes (Cholesky par exemple).

Par ailleurs, dans le cas d'une résolution temporelle d'un mouvement par exemple, il est impossible d'utiliser, dans le cadre de cette méthode, un schéma explicite et de pouvoir ainsi découpler les équations. Ce qui n'est pas le cas de la méthode de la pénalisation. En effet, la méthode des multiplicateurs de Lagrange nécessite une résolution implicite du système d'équations. Néanmoins, aux vues des avantages qu'elle présente par rapport à la méthode de la pénalisation, Zhong et Nilson (1994 b) ont cherché à la modifier pour l'utiliser dans une analyse explicite.

2.4.3.3 Les méthodes mixtes

Afin d'obtenir une efficacité et une précision optimales, des méthodes dites mixtes ont été mises au point. Elles ont pour objectif de combiner les avantages des deux méthodes précédentes (pénalisation et multiplicateurs de Lagrange). Parmi ces méthodes, les plus connues sont : la méthode du Lagrangien perturbé et la méthode du Lagrangien augmenté.

A. La méthode du Lagrangien perturbé

Cette méthode a été mise au point pour le problème de contact par Simo et coll (1985). La fonctionnelle de l'énergie totale utilisant les multiplicateurs de Lagrange est régularisée ou bien perturbée par un terme quadratique de la manière suivante :

$$E_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[C][\mathbf{q}] - [\beta]] - \frac{1}{\mathbf{g}} [\lambda]^T [\lambda] \quad (2.28)$$

\mathbf{g} étant toujours un paramètre de pénalisation choisi arbitrairement mais qui génère cette fois ci, une base de multiplicateurs $[\lambda]$. Toutefois, on voit bien que lorsque \mathbf{g} tend vers l'infini, la solution obtenue sera identique à celle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Par minimisation de cette fonctionnelle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left(E_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[C][\mathbf{q}] - [\beta]] - \frac{1}{\mathbf{g}} [\lambda]^T [\lambda] \right) = 0 \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow [K][\mathbf{q}] - [F] + [\lambda]^T [C] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\mathbf{E}_p(\mathbf{q}_i) + [\lambda]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] - \frac{1}{g} [\lambda]^T [\lambda] \right) = 0$$

$$\Rightarrow [\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta] - \frac{1}{g} [\lambda] = 0 \quad (2.30)$$

La résolution de (2.30) et la substitution de $[\lambda]$ dans (2.29) nous ramène à la méthode de la pénalisation. L'avantage est que tous les termes diagonaux de la matrice de rigidité sont non nuls. L'inconvénient est que l'on retombe sur le même problème qui est le choix du coefficient de pénalisation g .

B. Les méthodes du Lagrangien augmenté

Ces méthodes de Lagrangien augmenté (Simo et Laursen, 1992), (Paczelt et T. Szabo, 1995) utilisent la même fonctionnelle de l'énergie que celle utilisée dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange et y ajoutent un terme de pénalisation qui n'est pas forcément infini pour assurer la vérification des conditions de contact. La méthode de la pénalisation est donc utilisée mais l'objectif est de générer une base de multiplicateurs de Lagrange. La fonctionnelle de l'énergie totale augmentée, est comme suit :

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{q}) + [\lambda]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] + \frac{g}{2} [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]]^T [[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta]] \quad (2.31)$$

Par minimisation, on obtient le système suivant :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{q}] - [\mathbf{F}] + [\lambda]^T [\mathbf{C}] + g[\mathbf{C}]^T [\mathbf{C}][\mathbf{q}] - g[\mathbf{C}]^T [\beta] = 0 \quad (2.32)$$

$$[\mathbf{C}][\mathbf{q}] - [\beta] = 0 \quad (2.33)$$

Par itérations successives, les valeurs des multiplicateurs de Lagrange ainsi que la solution en déplacement sont obtenues.

Le premier avantage de cette approche réside dans le fait que de tous petits paramètres de pénalisation peuvent être utilisés et ce, sans affecter la précision. D'autre part, la taille du problème n'est pas augmentée. Ainsi, la solution exacte du problème est déterminée. Le second avantage réside dans le fait qu'avec cette méthode, les termes diagonaux de la matrice de rigidité globale sont non nuls. Les risques de mauvais conditionnement de la matrice de rigidité sont donc moins élevés. Toutefois, le nombre d'itérations nécessaires pour trouver cette solution, est fortement augmenté. Ce qui semble être un inconvénient.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue, tous les aspects liés à la résolution du problème de contact par éléments finis, ainsi que les principales techniques utilisées. Nous avons vu qu'hormis, la méthode du Lagrangien augmenté, les autres méthodes présentaient des difficultés plus ou moins grandes lors de la résolution. Toutefois, la méthode des multiplicateurs de Lagrange présente essentiellement des inconvénients en termes d'inconnues supplémentaires. La précision de la solution n'est généralement pas affectée. De plus, contrairement à la méthode du Lagrangien augmenté, son implantation dans un code de calcul est relativement moins difficile. Ce qui explique sa large utilisation dans les milieux industriels.

Chapitre 03

Estimation et contrôle d'erreurs pour les problèmes de contact

3.1 Introduction

Par rapport à la solution exacte, il existe essentiellement dans la solution éléments finis trois catégories de sources d'erreur :

- les erreurs de type numérique dues à l'arrondi, aux intégrations numériques, etc.
- les erreurs dues aux hypothèses du modèle mathématique adoptées lors de la formulation d'un problème. les erreurs dues à la discrétisation qu'on peut diviser essentiellement en deux catégories :
 - les erreurs dues à la discrétisation géométrique (exemple : maillage grossier, raffiné, etc),
 - les erreurs dues à la discrétisation fonctionnelle et qui proviennent du remplacement d'un champ exact par un champ discrétisé (par exemple, les cas des champs de déplacement ou de contraintes).

Dans le cas d'un problème de contact, on peut également estimer les erreurs de discrétisation du contact. En effet, en plus des erreurs de discrétisation précédentes (géométriques et fonctionnelles), on peut estimer l'erreur de discrétisation des conditions ou bien des relations constitutives du contact. Comme on l'a vu dans le chapitre 01, il s'agit en l'occurrence de la discrétisation de la condition de non pénétration, de la condition de signe portée sur la densité de réaction normale, de la condition de complémentarité, ainsi que la condition portant sur la loi de frottement adoptée.

Pour la suite de ce chapitre ; nous nous intéresserons d'abord aux erreurs de discrétisations de manière générale (dues aux discrétisations géométriques et fonctionnelles), et puis aux erreurs inhérentes aux problèmes de contact.

3.2 Estimation des erreurs de discrétisation

3.2.1 Sur l'estimation d'erreur a priori et a posteriori

Sous certaines hypothèses de régularité, l'estimation d'erreur à priori de l'approximation par éléments finis, s'écrit comme suit :

$$\exists C > 0 \text{ tel que: } \|U_{ex} - U_h\| \leq Ch^q \quad (3.1)$$

$\|\bullet\|$ est une norme sur les champs de déplacement, h la borne supérieure des tailles des éléments utilisés et q un réel positif dépendant du degré d'interpolation des éléments et de la régularité de la solution exacte.

Le second membre de l'inéquation (3.1) ne faisant pas intervenir la solution approchée, il est donc connu avant tout calcul éléments finis. C'est donc une estimation a priori de l'approximation.

Cette estimation est surtout de nature qualitative. En effet, elle caractérise la convergence de la solution approchée (U_h, σ_h) vers la solution exacte (U_{ex}, σ_{ex}) lorsque le maillage est raffiné, c'est-à-dire quand la taille h des éléments tend vers 0. Pour sa part, la vitesse de convergence est précisée par l'exposant q .

Par ailleurs, la constante C étant généralement impossible à évaluer, l'inéquation (3.1) ne donne aucune information quantitative sur l'ordre de grandeur de l'erreur de discrétisation. Nous pouvons donc affirmer que l'estimation a priori est uniquement d'ordre qualitative et non quantitative. En effet, si on divise la taille des éléments par deux, l'erreur est, en principe, divisée par 2^q , mais la valeur exacte de l'erreur demeure inconnue.

Pour pouvoir quantifier l'erreur de discrétisation, on doit effectuer une estimation a posteriori. C'est à dire que l'erreur est cette fois calculée à partir des résultats d'un calcul éléments finis. Lors des trente dernières années, de nombreux travaux ont été effectués sur les estimations d'erreurs a posteriori. Et des outils permettant réellement de quantifier la qualité des modélisations éléments finis ont été développés. Parmi ces travaux, on peut distinguer essentiellement, et par ordre chronologique :

- la démarche, basée sur les travaux de Ladevèze, (1975), qui a utilisé la notion d'erreur en relation de comportement et des techniques associées de construction de champs admissibles,
- la démarche, basée sur les travaux de Babuska et Rheinboldt (1978) qui ont utilisé la notion de résidu mesurant la non vérification des équations d'équilibre,
- la démarche de Zienkiewicz et Zhu (1987) qui ont utilisé l'écart en énergie entre la contrainte éléments Finis et une contrainte obtenue par lissage.

3.2.2 Quelques définitions

Soient les couples (U_{ex}, σ_{ex}) et (U_h, σ_h) respectivement la solution exacte du problème ; et la solution approchée obtenue après un calcul par éléments finis.

On définit l'erreur ponctuelle du champ des déplacements par la différence entre le champ des déplacements exact et le champ des déplacements éléments finis

$$(\mathbf{e}_h)_u = U_{ex} - U_h \quad (3.2)$$

On définit l'erreur ponctuelle du champ des contraintes par la différence entre le champ des contraintes exactes et le champ des contraintes éléments finis :

$$(\mathbf{e}_h)_\sigma = \sigma_{ex} - \sigma_h \quad (3.4)$$

La solution exacte n'étant en général pas connue, il faut donc calculer une estimation de l'erreur sur la solution éléments finis. L'erreur estimée au niveau global étant notée ε , nous pouvons donc l'écrire comme suit:

$$\varepsilon \cong (\mathbf{e}_h)_\Omega \quad (3.5)$$

Pour sa part, l'erreur estimée au niveau local ou élémentaire est notée ε_e ; nous pouvons donc l'écrire comme suit:

$$\varepsilon_e \cong (\mathbf{e}_h)_{\Omega_e} \quad (3.6)$$

Au niveau global, l'erreur relative exprimée en norme énergétique, est définie de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\|(\mathbf{e}_h)_\Omega\|}{\|U_h\|_\Omega} \quad (3.7)$$

Cette grandeur ne pouvant pas être calculée, elle est remplacée par l'expression suivante :

$$\tilde{\eta} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|\mathbf{u}_h\|_{\Omega}^2 + \varepsilon^2}} \quad (3.8)$$

Et au niveau local, on peut écrire :

$$\tilde{\eta}_e = \frac{\varepsilon_e}{\sqrt{\|\mathbf{u}_h\|_{\Omega_e}^2 + \varepsilon_e^2}} \quad (3.10)$$

Par ailleurs, quand la solution exacte est disponible, il existe deux indices qui permettent de mesurer la qualité de l'estimation de l'erreur. Le premier est l'indice d'effectivité (ou d'efficacité) qui peut être mesuré :

- soit au niveau de l'élément par l'indice d'effectivité élémentaire :

$$\theta_e = \frac{\varepsilon_e}{\|\mathbf{e}_h\|_{\Omega_e}} \quad (3.11)$$

- soit au niveau global par l'indice d'effectivité globale :

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{e}_h\|_{\Omega}} \quad (3.12)$$

Le second est l'indice d'uniformité :

$$SD = \left[\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N (\theta_e - \bar{\theta})^2 \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

Où $\bar{\theta}$ est la moyenne arithmétique des θ_e .

Un estimateur est considéré comme fiable si. $0.8 \leq \theta \leq 1.2$ et $SD \leq 0.2$ (Zhong , 1991).

3.2.3 Estimateur fondé sur la notion d'erreurs en relation de comportement

La notion d'erreur en relation de comportement repose sur la classification des équations en liaisons cinématiques, équations d'équilibre et relations de comportement. Cet estimateur mesure l'écart entre la relation de comportement vérifiée par la solution élément finis et la relation de comportement du matériau en partant de l'hypothèse que, de toutes les équations du problème, celle-ci est « la moins fiable ». La difficulté apparaît dans la construction d'un couple

déplacements contraintes admissibles. Ce concept d'erreur en relation de comportement introduit par Ladevèze (1975) est donc basé sur le principe de la dualité. En effet, cette méthode consiste d'abord à construire un champ de déplacements \hat{U} cinématiquement admissibles (C A) et ensuite, un champ de contraintes $\hat{\sigma}$ statiquement admissibles (S A). A partir de ces 2 champs, on définit l'erreur en relation de comportement.

Principe

Soit un couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ de champs de déplacement \hat{U} cinématiquement admissible et de contrainte $\hat{\sigma}$ statiquement admissible. Ce couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ est supposé connu.

Ce couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ est la solution exacte du problème mécanique si et seulement si il vérifie la relation de comportement :

$$\hat{\sigma} = K\varepsilon(\hat{U}) \quad (3.14)$$

Si $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ ne vérifie pas l'équation (3.14), il constituera une solution approchée du problème.

Dans ce cas, la quantité $e = \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})$, sera non nulle. Cette quantité est appelée erreur en relation de comportement. Elle permet de mesurer la qualité de la solution éléments finis.

Comme nous l'avions vu dans le chapitre précédent, après un calcul par éléments finis, la solution approchée obtenue (U_h, σ_h) n'est, en général, pas admissible. En effet, pour les éléments formulés en déplacement, le champ de déplacement U_h est cinématiquement admissible ; par contre, le champ de contraintes σ_h , calculé via la relation de comportement, n'est pas statiquement admissible.

Pour pouvoir calculer la quantité $(\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}))$, il faut donc construire le couple admissible $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ à partir de la solution (U_h, σ_h) et des données du problème. Une fois construit, ce couple de champs admissibles $(\hat{U}, \hat{\sigma})$, est alors considérée comme étant la solution approchée du problème.

L'erreur en relation de comportement est mesurée par la norme en énergie sur la structure considérée Ω . On définit l'erreur absolue globale par :

$$e = \|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma, \Omega} \quad \text{avec : } \|\bullet\|_{\sigma, \Omega} = \left[\int_{\Omega} \text{Tr}(\bullet K^{-1} \bullet) d\Omega \right]^2 \quad (3.15)$$

A partir de cette erreur absolue, on associe une erreur relative globale sur toute la structure :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\left\| \hat{\sigma} - K \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}}{\left\| \hat{\sigma} + K \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \quad (3.16)$$

De même, on peut définir la contribution à cette erreur d'une partie E de la structure. En pratique, on considère comme partie E de , un élément E du maillage utilisé. La contribution locale à cette erreur de chaque élément E de est définie par:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E = \frac{\left\| \hat{\sigma} - K \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, E}}{\left\| \hat{\sigma} + K \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \quad \text{avec : } \|\bullet\|_{\sigma, E} = \left[\int_E \text{Tr}(\bullet K^{-1} \bullet) dE \right]^2 \quad (3.17)$$

Si la structure est l'union d'un ensemble d'éléments E , on en déduit la relation entre l'erreur globale et les contributions locales :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \sum_E \boldsymbol{\varepsilon}_E^2 \quad (3.18)$$

L'erreur globale $\boldsymbol{\varepsilon}$ permet d'évaluer la qualité globale de la solution approchée (U_h, σ_h) et de mesurer l'erreur globale de discrétisation. Les contributions à l'erreur globale $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ permettent d'évaluer les erreurs locales de discrétisation.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement, on choisit généralement :

$$\hat{U} = U_h \quad (3.19)$$

Pour appliquer cette méthode, la difficulté est de construire un champ $\hat{\sigma}$ qui vérifie rigoureusement les équations d'équilibre. De telles techniques ont été développées par plusieurs auteurs depuis plusieurs années. On peut citer les travaux de Ladevèze et coll (1986), Pelle et Rougeot (1989), Gastine et coll (1992), etc. La procédure est généralement divisée en deux phases. La première phase consiste à construire des efforts aux frontières de chaque élément. Puis en seconde phase, on construit un champ de contraintes élémentaires en équilibre. Il s'agit donc de constructions locales. La méthode dépend donc du type d'élément à équilibrer et de la situation du nœud dans le maillage (frontière, zone de contact, intérieur, etc...).

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Prager-Synge (1947), on montre que l'erreur en relation de comportement majeure (ou bien surestime) toujours les erreurs en solution

$$\|e_h\| = \|K\varepsilon(U - U_h)\|_{\Omega} \leq e \quad (3.20)$$

U étant la solution exacte.

Ce résultat est important car il garantit à l'utilisateur de ne jamais sous-estimer l'erreur obtenue. La mesure d'erreur en relation de comportement est donc conservative et l'indice d'effectivité est toujours supérieur ou égal à 1.

3.2.4 Estimateur basé sur les défauts d'équilibre de la solution

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les erreurs de la solution éléments finis d'un modèle cinématiquement admissible, se traduisent essentiellement par l'apparition de résidus dans les équations d'équilibre, et par la présence de discontinuités du champ de contraintes le long des interfaces séparant les éléments.

La non vérification des équations d'équilibre locales est représentée par le résidu r_h , défini par :

$$r_h = \operatorname{div}\sigma_h + f_d \text{ dans l'élément } E \quad (3.21)$$

La non continuité de la contrainte normale à l'interface entre deux éléments et la non vérification des conditions d'équilibre sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$, où les efforts F_d sont appliqués, sont mesurées par le résidu t_h défini par :

$$t_h = \sigma_h n_E - F_E \text{ sur chaque face de } \partial E (\Gamma \not\subset \partial_1\Omega) \quad (3.22)$$

Si la face Γ d'un élément E n'appartient pas à la frontière $\partial\Omega$, et si \bar{E} désigne l'élément adjacent à E suivant la face, on a :

$$F_E = -\sigma_h n_{\bar{E}} \quad (3.23)$$

et si la face Γ appartient à $\partial_2\Omega$, on a :

$$F_E = F_d \quad (3.24)$$

Ces défauts d'équilibre sont des indicateurs d'erreur, mais ne constituent pas directement une mesure de l'erreur. L'estimation de l'erreur consiste à trouver

des relations approximatives entre la norme énergétique de l'erreur et ces défauts d'équilibre.

En effet, le calcul de l'erreur $e_h = U - U_h$, telle que e_h soit nulle sur $\partial_1\Omega$, se fait par la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \forall U^* \text{ tel que } U^* = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \\ \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e_h)K \varepsilon(U^*)]d\Omega = \sum_E \int_E r_d U^* dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_h U^* d\Gamma \end{cases} \quad (3.25)$$

où les données en effort sont les résidus d'équilibre r_h et t_h définis pour tout élément E de la discrétisation et qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \text{div}[K\varepsilon(e_h)] + r_h = 0 \text{ dans } E \\ K\varepsilon(e_h)n_E + K\varepsilon(e_h)n_{\bar{E}} = -t_h \text{ sur } \Gamma \subset \partial E \text{ } (\Gamma \not\subset \partial_2\Omega) \\ K\varepsilon(e_h)n_E = -t_h \text{ sur } \Gamma \subset \partial E \cap \partial_2\Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

Si on choisit $U^* = e_h$ dans (3.25), on obtient :

$$\|e_h\|_{u,\Omega}^2 = \sum_E \int_E r_h e_h dE - \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_h e_h d\Gamma \quad (3.27)$$

Cette équation (3.27) montre clairement que l'erreur de discrétisation dépend directement du niveau des résidus des équations d'équilibre. Autrement dit, que la qualité d'un calcul élément finis est liée au niveau de ces résidus. Elle exprime donc d'avantage les défauts de la solution approchée, et qui ont été énoncés au paragraphe II.3 du chapitre précédent.

En partant de cette idée et en résolvant de façon plus ou moins approchée le système (3.25), plusieurs types d'estimateurs d'erreur ont été construits.

Les estimateurs proposés par Babuska et Rheinboldt (1978) pour le cas unidimensionnel; et ensuite Kelly et coll (1983) pour le cas bidimensionnel, sont de la forme suivante :

$$\|e_h\|_{\Omega} = C_1 \int_{\Omega} R^T R d\Omega + C_2 \int_I J^T J dI \quad (3.28)$$

C_1 et C_2 sont des constantes dépendant de la taille des éléments et de leur degré d'interpolation. Ω est le volume de la structure et I l'ensemble des interfaces entre éléments.

Il est à signaler que cet estimateur d'erreur est calculé explicitement à partir de la solution éléments finis. Il est donc connu sous le nom d'estimateur explicite. Toutefois, cet estimateur explicite présente un inconvénient majeur. Il réside dans le choix des constantes C_1 et C_2 qui sont en général inconnues. En effet, leurs valeurs sont dictées par des critères de sécurité. Ce qui conduit à un estimateur particulièrement pessimiste.

3.2.5 Estimateur basé sur le lissage du champ de contraintes

A. La version ZZ¹

En général, le degré polynomial des éléments peut être insuffisant pour représenter correctement la solution exacte qui peut être soit de degré plus élevé, soit une fonction non polynomiale. D'autre part, les contraintes sont discontinues de part et d'autre des interfaces entre éléments. Toutes ces raisons ont pour conséquence que la solution éléments finis soit généralement moins lisse que la solution exacte.

A partir de cette observation, et en adoptant l'hypothèse que le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ peut être considéré comme une bonne approximation de la contrainte exacte σ_{ex} , Zienkiewicz et Zhu (1987) ont eu l'idée de construire un estimateur d'erreur basé sur le lissage des champs de contraintes. Le principe de cet estimateur consiste à construire, à partir de la solution éléments finis, un champ de contraintes lissé de degré supérieur afin de mieux approcher la solution exacte. Pour sa mise au point, ils ont utilisé la propriété de super convergence du champ de contraintes. En effet, Hinton et Campbell (1974) ont constaté que la solution éléments finis oscillait autour de la solution exacte et qu'en certains points appelés points de super convergence les deux solutions coïncidaient.

L'erreur en énergie pouvant être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \|e_h\|_{u,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e_h)K\varepsilon(e_h)]d\Omega \\ &= \int_{\Omega} Tr[(\sigma_{ex} - \sigma_h)K^{-1}(\sigma_{ex} - \sigma_h)]d\Omega \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'indicateur global est obtenu en remplaçant σ_{ex} par $\tilde{\sigma}_h$:

$$\theta^2 = \int_{\Omega} Tr[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)K^{-1}(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)]d\Omega \quad (3.30)$$

Les indicateurs locaux pour les éléments E de Ω sont définis par :

$$\theta_E^2 = \int_E \text{Tr}[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)] dE \quad (3.31)$$

où $\tilde{\sigma}_h$ est le champ de contraintes lissé.

La difficulté de cette technique est de construire un champ $\tilde{\sigma}_h$ donnant un indicateur fiable. Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est obtenu en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}_h$ et le champ éléments finis σ_h . Par exemple, $\tilde{\sigma}_h$ peut être défini par :

$$\tilde{\sigma}_h = \mathbf{N} \bar{\sigma}_h \quad (3.32)$$

où \mathbf{N} représente la matrice des fonctions de base utilisées dans l'analyse éléments finis et $\bar{\sigma}_h$ des valeurs nodales qui sont déterminées par la minimisation de :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^T \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega \quad (3.33)$$

Donc $\tilde{\sigma}_h$ est obtenu en résolvant le système obtenu à partir de la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Donc

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{\sigma}_h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_h d\Omega \quad (3.35)$$

Ce qui donne un système linéaire :

$$\mathbf{M} \{ \bar{\sigma}_h \} = \mathbf{b} \quad (3.36)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_h d\Omega. \quad (3.37)$$

La matrice \mathbf{M} est une sous matrice de la matrice des masses correspondant à une composante du champ des déplacements. Cette matrice est symétrique et définie positive et ne doit être évaluée qu'une seule fois, car elle est indépendante du champ des contraintes.

On obtient ainsi l'indicateur ZZI proposé par Zienkiewicz et Zhu (1987). Le système global, (3.36) est à résoudre sur chacune des composantes du tenseur des contraintes. Toutefois, cette méthode est coûteuse car, pour un problème 3-D

(tenseur de contraintes à 6 composantes) on doit résoudre 6 systèmes du même ordre de grandeur que le système éléments finis.

Pour pallier à cet inconvénient, d'autres méthodes locales (qualifiées soit de nodales soit d'élémentaires), consistent à utiliser des procédés de lissage conduisant à des calculs plus locaux. A ce titre, nous pouvons citer les travaux de Ainsworth et coll. (1989), Zienkiewicz et Zhu (1991), Beckers et Zhong (1991), Strouboulis & Haque (1992 a, b). Toutefois Strouboulis et Haque (1992a) et Dufeux (1997), ont montré que ces méthodes locales (élémentaires et nodales) ne sont fiables que pour des éléments de degré 1.

B. La version ZZ²

L'une des techniques locales les plus connues est la version ZZ² proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a, b). Cette technique est également connue sous le nom de méthode de recouvrement ou en anglais sous le nom de : « the Super convergence Patch Recovery » (S.P.R).

Le champ lissé $\tilde{\sigma}_h$ est évalué à partir de domaines (généralement appelés "patch") comportant plusieurs éléments finis et se superposant. Ces domaines peuvent être définis à partir de la notion de distance ou de la connectivité des éléments. En utilisant la notion de « superconvergence » des points d'intégrations, cette méthode consiste à construire sur un patch d'éléments S_E autour d'un nœud (figure 16), une approximation du type :

$$\tilde{\sigma}_{h|_S} = \mathbf{P}a_S \quad (3.38)$$

où \mathbf{P} contient les termes polynomiaux appropriés et a_S les coefficients inconnus des monômes correspondants. Par exemple, pour les triangles à 3 nœuds, on a :

$$\mathbf{P} = [1, x, y] \quad \text{et} \quad a_S^T = [a_1, a_2, a_3] \quad (3.39)$$

La détermination des coefficients du polynôme a_S se fait en minimisant la fonctionnelle :

$$F(a) = \sum_{i=1}^N \left(\sigma_h(x_i, y_i) - \tilde{\sigma}_{h|_S}(x_i, y_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sigma_h(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i) a_S \right)^2 \quad (3.40)$$

où N est le nombre total de points d'intégrations des éléments du patch et (x_i, y_i) leurs coordonnées ; soit la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i) a_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (3.41)$$

Ce qui donne un système linéaire :

$$\mathbf{A} a_s = \mathbf{b} \quad (3.42)$$

avec : $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i)$ et $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i)$ (3.43)

La matrice \mathbf{A} peut être très mal conditionnée voire impossible à inverser. Une normalisation des coordonnées sur chaque patch est alors utilisée [Zienkiewicz et coll., 1993].

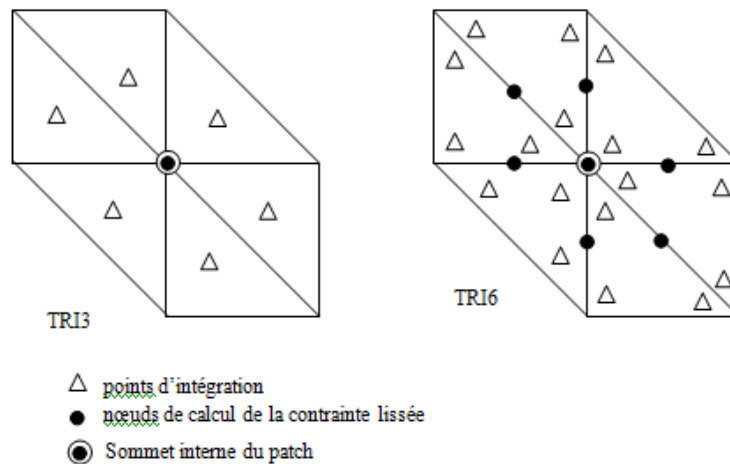


Figure 3.1 : Patches d'éléments et positions des points et nœuds

La version ZZ^2 présente, dans le cas de mélange d'éléments, un problème de validité de a_s si l'espace est trop riche, et en contre partie, une perte de super convergence s'il ne l'est pas (Desroches, 1994). De plus, son extension au cas 3D semble délicate.

Cette méthode a ensuite été améliorée par d'autres auteurs (Wiberg et Abdulwahab, 1993), (Boroomand et Zienkiewicz, 1997) ainsi que (Zienkiewicz et coll. 1998). Ces auteurs ont enrichi le champ lissé $\tilde{\sigma}$ en introduisant des conditions supplémentaires sur l'équilibre interne et sur les tractions imposées sur la surface du modèle (Dufeu 1997) et (Beckers et Dufeu 1998).

3.3 Estimation d'erreur pour le problème de contact

Dans le cadre des problèmes de contact unilatéral, il semble que peu de travaux aient été réalisés sur les estimations d'erreur *a posteriori*. On peut citer néanmoins les travaux de Wriggers et Miehe (1994) qui ont utilisé une méthode de pénalisation permettant de transformer l'inéquation variationnelle en une équation variationnelle et ainsi de construire, dans ce cadre, un estimateur d'erreur basé sur les résidus des équations d'équilibre. L'inconvénient majeur de cette démarche est que le paramètre de pénalisation intervient directement dans l'estimation de l'erreur.

Un autre indicateur d'erreur a été proposé, dans le cadre d'une étude comparative, par Wriggers et Sherf (1998). Cet indicateur est basé sur des techniques locales de lissage des contraintes, appliquées sur des groupes d'éléments ou « Patch ». Il s'agit de la version ZZ^2 proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a et b). L'inconvénient majeur de cette technique est que la prise en compte des erreurs de contact, ait été faite de manière implicite. En effet, on ne peut pas distinguer entre les contributions à l'erreur de la discrétisation du maillage seul et celles des conditions de contact.

Dans le cadre des estimateurs fondés sur l'erreur en relation de comportement, Coorevits et coll (1999) ont proposé une méthode d'estimation pour le problème de Signorini sans frottement. Puis cette méthode a été étendue au cas du contact (toujours sans frottements) de solides déformables avec des maillages compatibles et incompatibles (Coorevits et coll, 2000). Ensuite une extension au cas du problème avec frottements de Coulomb en quasi statique, a été réalisée par Coorevits et coll (2001) pour le cas du problème de Signorini ; et par Louf et coll (2003) pour le cas du contact entre deux solides déformables. Toutefois, leur principale difficulté consiste en la construction des champs admissibles, notamment pour le cas tridimensionnel où celle ci (la construction) semble délicate.

3.3.1 Erreur de contact associée à l'erreur en relation de comportement

Pour la présentation de ce type d'estimateur, nous nous limiterons uniquement aux cas de deux corps déformables en contact tels qu'illustrés par les données du problème de la figure 07 du paragraphe III du chapitre 01.

➤ *Le cas avec frottement*

On dit qu'un couple $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{c})$ est admissible si :

- $\hat{u} = (\hat{U}^1, \hat{U}^2, \hat{W}^1, \hat{W}^2)$ vérifie les liaisons cinématiques (1.37)
- $\hat{c} = (\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{R}^1, \hat{R}^2, \hat{R}^C)$ vérifie les équations d'équilibre (1.38)

Pour tout couple admissible $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{c})$, on définit l'erreur en relation de comportement comme suit :

$$e(\hat{s}) = \left[\sum_{\ell=1}^2 \left\| \hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell) \right\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} \left(\varphi(-\hat{W}^C) + \varphi^*(\hat{R}^C) + \mu \left| \hat{R}_n^C \right| \left| \hat{W}_t^C \right| + \hat{R}_t^C \hat{W}_t^C + \hat{R}_n^C \hat{W}_n^C \right) d\Gamma_C \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

On remarque que $e(\hat{s})$ est toujours positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si les relations de comportement (1.39) sont vérifiées. La quantité $e(\hat{s})$ est par définition la mesure d'erreur en relation de comportement associée au couple admissible \hat{s} .

On associe à l'erreur en relation de comportement, l'erreur relative ε et définie par :

$$\varepsilon = \left[\frac{\sum_{\ell=1}^2 \left\| \hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell) \right\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2 + 2 \int_{\Gamma_C} \left(\varphi(-\hat{W}^C) + \varphi^*(\hat{R}^C) + \mu \left| \hat{R}_n^C \right| \left| \hat{W}_t^C \right| + \hat{R}_t^C \hat{W}_t^C + \hat{R}_n^C \hat{W}_n^C \right) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \left\| \hat{\sigma}^\ell + K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell) \right\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (3.45)$$

Soit E une partie de Ω^ℓ . On définit alors la contribution locale de l'élément E à l'erreur globale (3.45) par la quantité ε_E :

$$\varepsilon_E = \left[\frac{\left\| \hat{\sigma}^\ell - K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell) \right\|_{\sigma, E}^2 + 2 \int_{\Gamma_C \cap E} \left(\varphi(-\hat{W}^C) + \varphi^*(\hat{R}^C) + \mu \left| \hat{R}_n^C \right| \left| \hat{W}_t^C \right| + \hat{R}_t^C \hat{W}_t^C + \hat{R}_n^C \hat{W}_n^C \right) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \left\| \hat{\sigma}^\ell + K^\ell \varepsilon(\hat{U}^\ell) \right\|_{\sigma, \Omega^\ell}^2} \right]^{1/2} \quad (3.46)$$

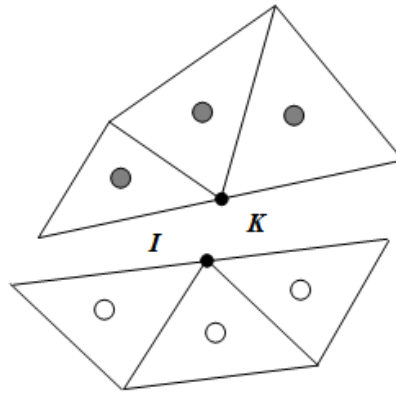
Par ailleurs, dans le cas du contact avec frottement, Coorevits et al (2001) ont également montré, en effectuant une extension du théorème de Prager-Synge (1947) en élasticité linéaire, que cet estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement majore toujours les erreurs en solution. Par conséquent, quel que soit le cas (avec ou sans frottement), l'estimation d'erreur de contact basée sur l'erreur en relation de comportement garantit à l'utilisateur de ne jamais sous-estimer l'erreur obtenue.

Par ailleurs, signalons qu'en écrivant l'erreur de contact de manière explicite, ces estimateurs basés sur la notion d'erreur en relation de comportement, possèdent l'avantage principal de pouvoir dissocier entre l'erreur de contact et l'erreur de discrétisation du maillage seul. Cette dissociation a permis de montrer (Louf et coll, 2003) que la seule adaptation du maillage est insuffisante pour améliorer la qualité du calcul lorsque les erreurs dues au traitement approché des conditions de contact et de frottement sont importantes. En effet, ces auteurs ont montré à travers des exemples traités, que l'erreur de contact stagne rapidement en augmentant le nombre d'éléments du maillage. En conséquence, le raffinement du maillage ne peut pas toujours avoir l'influence souhaitée sur la qualité globale des calculs.

3.3.2 Erreur de contact associée au lissage du champ de contraintes

Dans le cadre du problème de contact sans frottements, un indicateur d'erreur basé sur des techniques de lissage, a été proposé par Wriggers et Sherf (1998). Par la suite, il a été étendu au cas tridimensionnel par Rieger et Wriggers (2001). Il est à signaler que l'indicateur mis au point, est basé sur des techniques locales. Plus précisément, les lissages sont effectués sur des groupes d'éléments ou « Patch ». Il s'agit donc de l'application au problème de contact, de la version ZZ^2 (ou de la méthode dite « Super convergent Patch Recovery ») proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992 a,b).

En effet, cette technique de projection particulièrement adaptée au problème de contact, utilise des groupes d'éléments spécifiques ou « Patch d'éléments » qui sont définis au voisinage de la zone de contact de la manière suivante. Pour chaque nœud I appartenant à $\partial_c \Omega^1$, on cherche le nœud K le plus proche et appartenant à $\partial_c \Omega^2$ (figure 17). Au nœud I , sont connectés des éléments appartenant à Ω^1 et définissant un « Patch dit primitif ». Au nœud K , sont connectés des éléments appartenant à Ω^2 et définissant un « Patch dit étendu ». Ces deux « Patches » (primitif et étendu) vont alors former un « Patch global et unique » sur lequel l'opération de lissage des contraintes sera effectuée.



● : Points de Gauss pour patch d'éléments primitifs ;
 ○ : Points de Gauss pour patch d'éléments étendus.

Figure 3.2 : Patch d'éléments pour le lissage des contraintes en zone de contact

Par ailleurs, en adoptant l'hypothèse que le champ de contraintes est non seulement continu mais ne comportant pas de sauts au niveau de la zone de contact, il est procédé au lissage des contraintes au niveau de ces « Patch globaux » définis précédemment. En utilisant cette procédure ainsi que les propriétés de super convergence des éléments (Hinton et Campbell 1974), le champ de contraintes lissées sera calculé sur l'ensemble des deux solides $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et ce, en minimisant la quantité $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{P}[\tilde{\sigma}_h - \sigma_h]$; \mathbf{P} étant un opérateur de projection.

Le champ de contraintes lissées $\tilde{\sigma}_h$, est donc obtenu en résolvant

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{P}[\tilde{\sigma}_h - \sigma_h] = 0 \quad (3.47)$$

Par la suite, l'erreur globale sera définie de la manière suivante :

$$e = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \text{Tr}[(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) \mathbf{K}^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)] d\Omega \quad (3.48)$$

Dans le cadre d'une procédure d'adaptation des maillages, les performances de cet estimateur ont été étudiées par Wriggers et Sherf (1998). Les maillages obtenus par cette procédure d'adaptation étant incompatibles, ces auteurs ont essayé d'étudier la qualité de plusieurs estimateurs à travers trois paramètres :

- la continuité des contraintes principales sur la zone de contact,
- la distribution de l'erreur sur la zone de contact en fonction des maillages adaptés

- la convergence et le taux de convergence vers la solution exacte de référence (nous rappelons que nous sommes toujours dans le cas sans frottement).

Par rapport à l'estimateur en résidu d'équilibre (défini dans le paragraphe précédent), les résultats de cette étude comparative, ont montré que l'adaptation de maillages basée sur cet estimateur donne un état de contraintes principales, jugé moins satisfaisant (du point de vue continuité) au niveau de la zone de contact. Il est à signaler également, une meilleure convergence vers la solution de référence pour des maillages adaptés et issus de l'erreur portant sur les résidus d'équilibre.

Par ailleurs, nous remarquons que la prise en compte des erreurs de contact, a été faite de manière implicite. En effet, on ne peut pas distinguer, dans l'expression (3.55), entre les contributions à l'erreur de la discrétisation des conditions de contact et celle de la discrétisation du maillage seul. Ce qui constitue un inconvénient majeur.

Cela étant, nous proposons dans le chapitre 05, un estimateur basé sur des techniques de lissage et qui dissocie entre l'erreur de contact proprement dite et l'erreur de discrétisation du maillage seul.

3.4 Principe des calculs adaptatifs

L'amélioration de la qualité d'un calcul par la modification des paramètres de discrétisation nécessite la mise en place de procédures efficaces qui permettent d'atteindre le niveau de qualité désirée par l'utilisateur tout en minimisant au mieux les coûts de calcul.

Schématiquement, ces procédures (03.3), appelées procédures d'adaptation, consistent à effectuer un premier calcul sur un maillage (qui peut être relativement grossier) avec des interpolations de faible degré (généralement linéaire) puis à évaluer les erreurs de discrétisation commises. Ensuite, en utilisant ces résultats, il s'agit de déterminer les paramètres (tailles des éléments et degré d'interpolation) qui permettent d'obtenir une précision donnée tout en minimisant les coûts. La nouvelle discrétisation est alors effectuée en respectant ces paramètres et une nouvelle analyse éléments finis est réalisée.

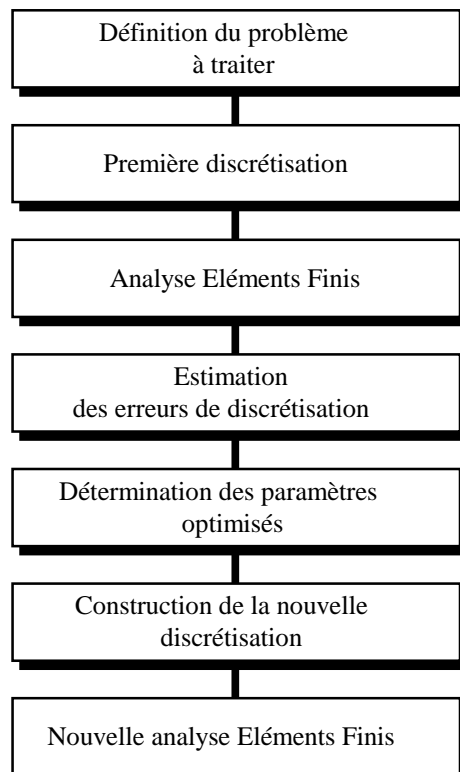


Figure 3.3 : Procédure d'adaptation

3.5 Les techniques d'adaptation de maillages

Depuis de nombreuses années, diverses techniques ont été développées pour adapter les maillages de façon à améliorer la qualité des solutions, mais c'est surtout depuis l'apparition de méthodes efficaces de contrôle d'erreur que les techniques adaptations des maillages ont vraiment été utilisées. Actuellement, on distingue généralement trois méthodes adaptation connues sous les noms de r -version, de h -version et de p -version.

A. La r -version

Cette méthode est apparue dans les années 70 [Carrol & Barker, 1973], [Turcke & Mc Neice, 1974]. Elle consiste, dans son principe, à garder la topologie du maillage (nombre de nœuds et connectivité) ainsi que le type d'interpolation et à chercher à positionner les nœuds de façon à minimiser l'erreur entre la solution exacte et la solution éléments finis (03.4).

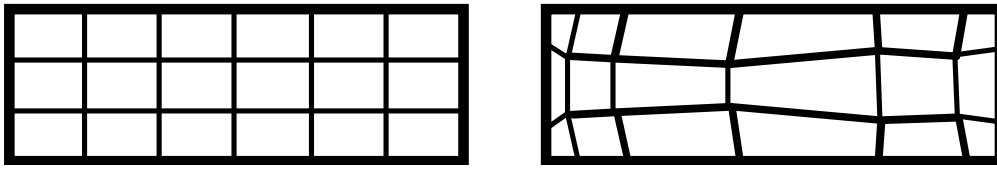


Figure 3.4 : r-version

Son application conduit à résoudre un problème d'optimisation sur la structure comportant les coordonnées des nœuds comme variables d'optimisation. Il s'agit donc d'une méthode numériquement très coûteuse. Diverses variantes ont été proposées pour en diminuer le coût :

- positionnement des nœuds sur les courbes iso-densité de déformation.
- algorithmes itératifs adaptés [Kikuchi, 1986].

Néanmoins, ces méthodes sont très peu utilisées en calcul de structures, surtout depuis l'apparition des mailleurs automatiques.

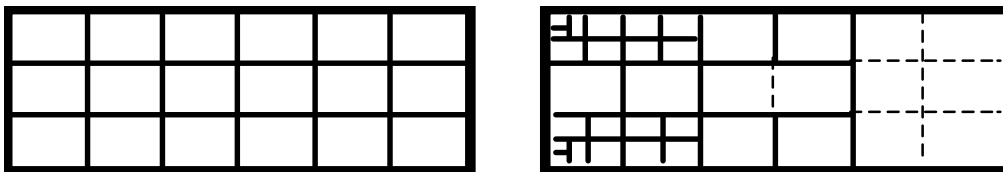
B. La h-version

Dans cette méthode, on conserve toujours le type d'interpolation, mais on modifie partiellement ou complètement le maillage (position et nombre des nœuds, connectivité, etc...). En pratique cette méthode a été utilisée sous deux formes différentes :

- la méthode locale de h -raffinement/déraffinement
- la méthode globale de h -remaillage

• La méthode locale de h -raffinement/déraffinement

Dans ce cas, la méthode consiste à conserver la trame du maillage initial et à subdiviser ou à regrouper certains éléments (Figure 3.5). Cette méthode a été très utilisée en liaison avec les indicateurs d'erreur [Babuska & Szabo, 1982], [Baudron & Trompette, 1986], [Rivara, 1984], [Rivara, 1989], [Aubry & Tie, 1991].

Figure 3.5 : h -raffinement/déraffinement local

En particulier lorsqu'on se limite à des raffinements locaux, elle peut être facilement utilisée avec un mailleur relativement rudimentaire puisque le

maillage initial est conservé. Elle présente néanmoins quelques difficultés de mise en œuvre. Lorsque l'on effectue un raffinement local, on crée des nœuds "pendants" qui nécessitent un traitement spécial pour assurer la continuité du champ de déplacement. Une première technique consiste à imposer le déplacement de ces nœuds en fonction du déplacement des nœuds voisins de façon à assurer la continuité à l'interface (03.6).

Par exemple, dans le cas de quadrilatères à 4 nœuds, on impose :

$$U_3 = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (3.49)$$

Cependant, si le maillage comporte beaucoup de nœuds de ce type, il en résulte un accroissement important des coûts de résolution (résolution d'un système linéaire avec de nombreuses relations linéaires entre les degrés de liberté). Une autre technique consiste à introduire des éléments finis spéciaux dissymétriques pour prendre en compte ces nœuds "pendants".

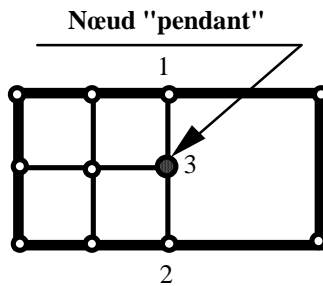


Figure 3.6 : Nœud "pendant"

Le traitement le plus élégant est dû à Zienkiewicz, [Zienkiewicz & al., 1982], [Aubry & Tie, 1992].

Il consiste à introduire des éléments hiérarchiques. Mais cette méthode, qui nécessite une organisation spéciale des calculs, n'est pas actuellement disponible dans les codes industriels classiques.

Si le nœud milieu est "pendant", en bloquant à zéro les degrés de liberté correspondants, on assure la continuité du champ de déplacement sur le côté considéré.

- **La méthode globale de h-remailage**

Dans cette méthode, le maillage est entièrement recréé. Le maillage initial sert uniquement de support pour définir les tailles des éléments du nouveau maillage (Figure 3.7).

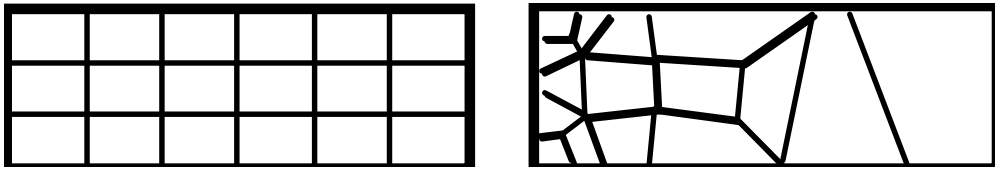


Figure 3.7 : h-remailage global

Cette méthode a été utilisée plus tardivement car elle nécessite l'utilisation de mailleurs automatiques capables de respecter correctement des consignes de tailles. Les premières utilisations peuvent être trouvées dans [Ladevèze & Leguillon, 1983] pour des problèmes de thermique 2D en utilisant un mailleur automatique frontal développé par Carnet, dans [Coffignal & Ladevèze, 1983] pour des problèmes d'élasticité et de plasticité 2D en utilisant le mailleur automatique Araignée dans [Ladevèze & Pelle, 1984], [Pelle, 1985] pour les problèmes de vibrations en utilisant le mailleur de Carnet.

Actuellement pour les problèmes 2D, il s'agit de la méthode d'adaptation de maillages la plus utilisée car de nombreux mailleurs automatiques 2D ont été développés.

En dimension 3, cette méthode pose encore des difficultés pour sa mise en œuvre, même si des progrès récents ont été réalisés [Coorevits & al., 1995b,c], [Dumeau, 1995], [Coorevits & al., 1996].

o *La p-version*

La p-version est plus une méthode d'adaptation du type interpolation qu'une méthode d'adaptation du maillage au sens strict [Babuska & al., 1981], [Szabo, 1986], [Szabo, 1990]. En effet, cette méthode consiste à conserver le maillage initial et à augmenter dans certaines zones le degré de l'interpolation utilisée (Figure 3.8).

Cependant, ce maillage "grossier" ne doit pas être réalisé sans quelques précautions si l'on veut pouvoir utiliser des valeurs élevées de p . En particulier, il faut éviter les éléments trop aplatis ; pour des pièces 3D un peu complexes, ceci conduit à des maillages finalement plus fins que ce que l'on pouvait espérer a priori.

Cette méthode a des aspects très séduisants notamment au niveau des coûts de réalisation du maillage. En effet, un seul maillage est nécessaire. De plus, dans les applications qui sont généralement présentées, le maillage utilisé comporte toujours très peu d'éléments et il est donc très facile à réaliser. En compensation, des fonctions d'interpolation de degré élevé sont utilisées.

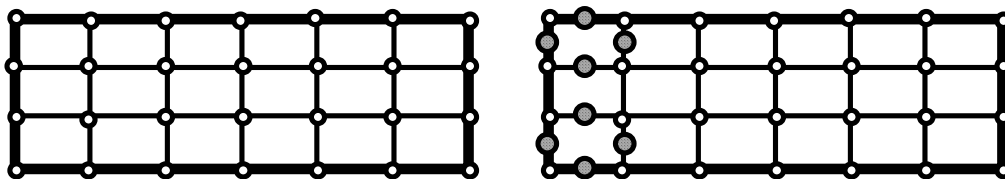


Figure 3. 8 : p-version

De plus, en cas de changement local de degré d'interpolation, cette méthode introduit également des nœuds "pendants". Là encore l'utilisation de bases hiérarchiques [Zienkiewicz & Taylor, 1988] permet de résoudre élégamment cette difficulté.

Actuellement cette méthode est encore peu utilisée car, à l'exception de quelques codes réalisés spécialement pour la p-version les codes industriels possèdent rarement des éléments de degré supérieur à 2.

Une autre difficulté, qui actuellement n'est pas correctement résolue, est de prévoir le degré p à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant les coûts de calcul.

o *La h-p-version*

Pour terminer ce bref aperçu sur les méthodes d'adaptation des maillages, signalons également les recherches effectuées sur la h-p-version, qui consiste à effectuer à la fois des changements de maillages et des changements de fonctions d'interpolation [Babuska, 1986], [Zienkiewicz & al., 1989], [Oden & Demkowicz, 1991].

Cette technique sophistiquée permet d'obtenir des taux de convergence très élevés. Mais comme pour la p-version, la prédiction des paramètres pour obtenir une qualité donnée n'est pas facile à réaliser.

3.6 Définition d'un maillage optimal

Dans la suite, nous utiliserons uniquement la h-version.

L'objectif de toute procédure d'adaptation est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision ϵ_0 tout en minimisant les coûts de calcul. Pour évaluer les erreurs de discrétisation, on utilise une mesure globale relative ϵ et les contributions locales associées ϵ_E .

Comme critère d'optimalité nous utilisons le critère introduit dans [Pelle, 1985] et [Ladevèze & al., 1986] :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ϵ si :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^* = \varepsilon_0 \text{ précision demandée} \\ N^* \text{ nombre d'éléments minimum} \end{array} \right\} \quad (3.50)$$

Ce critère d'optimisation conduit naturellement à minimiser les coûts de calcul.

Un autre critère est également souvent utilisé [Ladevèze & Leguillon, 1981], [Oden & al., 1989], [Strouboulis & Haque, 1992], ...

Il consiste à définir un maillage optimal \mathbf{T}^* par :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^* = \varepsilon_0 \text{ précision demandée} \\ \varepsilon_E^* \text{ uniforme sur } \mathbf{T}^* \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

La définition (3.50) revient à dire que le meilleur maillage correspond à une répartition uniforme des erreurs de discrétisation. Contrairement à la définition (3.51), il n'est pas du tout évident que ce choix conduise à minimiser les coûts de calcul.

Pour des problèmes dont la solution est régulière, nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes. Par contre, ceci n'est plus vrai pour des solutions qui présentent des singularités.

Sans informations supplémentaires, il est évidemment impossible de déterminer un maillage optimal. Par contre, si l'on utilise, comme informations supplémentaires, les résultats d'une première analyse éléments finis et si l'on dispose d'une méthode fiable et robuste d'évaluation des erreurs de discrétisation, on peut déterminer un maillage optimal selon le schéma de principe suivant :

- On effectue un premier calcul sur un maillage \mathbf{T} relativement grossier,
- On calcule pour ce maillage l'erreur globale ε et les contributions locales ε_E ,
- On utilise ces informations pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* .

On construit ensuite le maillage \mathbf{T}^* à l'aide d'un mailleur automatique et l'on effectue une seconde analyse éléments finis.

3.7 Détermination de maillages optimisés

3.7.1 Carte et coefficients de modification de tailles

Une fois le premier calcul éléments finis effectué sur le maillage \mathbf{T} , l'idée est d'utiliser la valeur de l'erreur globale ε et les contributions locales ε_E pour définir les tailles des éléments du nouveau maillage afin de respecter la précision désirée tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage.

Pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* , notre méthode consiste à calculer sur chaque élément E du maillage \mathbf{T} un coefficient de modification de tailles :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E}$$

où h_E est la taille de l'élément E et h_E^* la taille (inconnue) qu'il faut imposer aux éléments de \mathbf{T}^* dans la zone de E pour assurer l'optimalité (Figure 3.9).

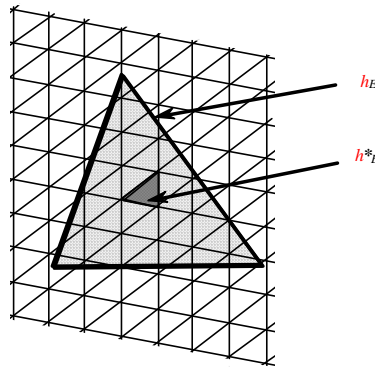


Figure 3.9 : Définition des tailles

Le calcul des coefficients r_E est basé sur le taux de convergence de l'erreur :

$$\varepsilon = O(h^q)$$

Où q dépend du type d'élément utilisé mais aussi de la régularité de la solution.

On suppose que le taux de convergence de l'estimateur d'erreur est égal à l'ordre de convergence de la solution éléments finis.

3.7.2 Calcul des coefficients

Supposons que la solution du problème soit régulière et considérons par exemple un problème 2D.

Alors, q ne dépend que du type d'élément utilisé. Par exemple, on a :

$$q = 1 \text{ pour les triangles à 3 nœuds}$$

$$q = 2 \text{ pour les triangles à 6 nœuds}$$

c'est-à-dire le taux de convergence du type d'élément utilisé [Strang & Fix, 1976].

Dans ce cas, pour prédire les tailles optimales, on écrit que le rapport des tailles est lié au rapport des contributions à l'erreur par :

$$\frac{\varepsilon_E^*}{\varepsilon_E} = \left[\frac{h_E^*}{h_E} \right]^q = r_E^q$$

où ϵ_E^* représente la contribution des éléments de \mathbf{T}^* situés dans la zone E , c'est-à-dire :

$$\epsilon_E^* = \left[\sum_{\mathbf{E}^* \subset E} \epsilon_{\mathbf{E}^*}^2 \right]^{1/2}$$

Le carré de l'erreur sur le maillage \mathbf{T}^* peut donc être évalué par :

$$\sum_E (\epsilon_E^*)^2 = \sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2$$

et le nombre d'éléments de \mathbf{T}^* par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2}$$

Le problème à résoudre est donc :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2} \text{ avec } \sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2 = \epsilon_0^2 \quad (3.52)$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec une contrainte sur les variables d'optimisation.

En introduisant un multiplicateur de Lagrange, noté A , le problème (3.52) revient à rendre extremum le Lagrangien :

$$L(\{r_E\}_{E \in \mathbf{T}}; A) = \sum_E \frac{1}{r_E^2} + A \left(\sum_E r_E^{2q} \epsilon_E^2 - \epsilon_0^2 \right)$$

Les conditions d'extrémalité donnent :

$$-\frac{2}{r_E^3} + A (2q \epsilon_E^2) r_E^{2q-1} = 0 \quad \forall E \in \mathbf{T}$$

On en déduit :

$$r_E^2 = \left[\frac{1}{Aq \epsilon_E^2} \right]^{1/(q+1)}$$

En reportant dans la seconde équation (3.52), on a alors :

$$\left[\frac{1}{Aq} \right]^{q/(q+1)} = \frac{\epsilon_0^2}{\sum_E \epsilon_E^{2/(q+1)}}$$

et :

$$r_E = \frac{\epsilon_0^{1/q}}{\epsilon_E^{1/(q+1)} \left[\sum_E \epsilon_E^{2/(q+1)} \right]^{1/2q}}$$

On en déduit en particulier que, sur le maillage optimisé, la contribution à l'erreur d'un élément E^* de \mathbf{T}^* est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{E^*}^2 = r_E^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_E^*)^2 = r_E^{2q+2} \boldsymbol{\varepsilon}_E^2 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{2+2/q}}{\left[\sum_E \boldsymbol{\varepsilon}_E^{2/(q+1)} \right]^{1+1/q}}$$

ce qui montre que, dans ce cas, les contributions sont uniformes sur le maillage optimisé.

Remarques

Si la solution du problème considéré n'est pas suffisamment régulière (par exemple si elle présente des singularités), la méthode précédente ne s'applique plus.

Le calcul précédent à été présenté, pour fixer les idées, en dimension 2. Un calcul analogue en dimension n (en pratique $n = 1, 2$ ou 3) conduit au résultat suivant :

$$r_E = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0^{1/q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_E^{2/(2q+n)} \left[\sum_E \boldsymbol{\varepsilon}_E^{2n/(2q+n)} \right]^{1/2q}}$$

Pour cela, il suffit de reprendre le calcul précédent en changeant simplement l'estimation de N^* :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^n}$$

Le calcul précédent repose sur l'hypothèse suivante : sur un élément du maillage initial, on impose une répartition uniforme des éléments du maillage optimal. Dans des situations sévères telles que les zones à forts gradients, nous verrons qu'il est préférable d'utiliser une hypothèse plus fine.

La prédiction sur le calcul des tailles suppose en 2D que le triangle de référence est toujours un triangle équilatéral parfait, la taille h_E est en effet liée, en dimension 2, à la surface de l'élément E par :

$$h_E = \left[\frac{4 \text{mes}(E)}{\sqrt{3}} \right]^{1/2}$$

On parle dans cette situation de maillage "isotrope".

Pour certaines applications, notamment en dynamique ou en présence de bandes de cisaillement, il peut être intéressant d'utiliser des éléments pour lesquels la référence est un triangle rectangle dont l'une des dimensions est petite devant l'autre. On parle alors de maillage "anisotrope".

3.8 Conclusion

De ce chapitre, nous pouvons conclure que l'estimation de l'erreur pour le problème est effectuée par la méthode des erreurs de contact associée à l'erreur en relation de comportement. En raison de la difficulté de la construction des champs admissibles, cet estimateur semble, du point de vue de facilité de la construction d'un estimateur et de son implantation dans un code de calcul est difficile. Par contre, cet estimateur possède non seulement l'avantage de toujours surestimer les erreurs en solution, mais surtout de sa capacité de pouvoir dissocier entre l'erreur de discrétisation du maillage seul et l'erreur de contact. Et on a utilisé la méthode $-h$ avec remaillage globale pour l'adaptation du maillage.

Chapitre 04

Le problème de contact dans les pieux

4.1 Généralités sur les pieux

Les fondations profondes permettent de reporter les charges d'un ouvrage au niveau des couches situées en profondeur. Elles sont en général utilisées quand la résistance des couches des terrains superficiels, n'est pas suffisante ou quand les tassements induits, par les chargements en surface, sont trop importants. Généralement, les fondations profondes peuvent être classées en fondations sur pieux ou bien sur puits.

Les puits sont des fondations faiblement élancés dont le diamètre est proche de 01 mètre et dont la longueur ne dépasse pas 06 mètres. Ils sont souvent réalisés avec du béton non armé et faiblement dosé en ciment (gros béton). Par contre les pieux sont généralement très élancés, et leur longueur dépasse souvent les six mètres de profondeur.

Par ailleurs, les efforts repris par les pieux, peuvent être équilibrés soit partiellement (cas des pieux travaillant en frottement et en pointe), soit totalement (cas des pieux travaillant uniquement en frottement), et ce, grâce à la mobilisation du phénomène naturel de frottement existant entre la surface latérale et les différentes couches traversées.

Les fondations profondes sont généralement classées en deux catégories : les pieux et les micropieux. Ils se différencient essentiellement par leurs dimensions et leurs utilisations. En effet, les micropieux ont souvent un diamètre ne dépassant pas 20 cm et un élancement élevé. Toutefois, leurs longueurs ne dépassent généralement pas les 10 m. Ils sont souvent réalisés par battage.

4.2 Définitions

Un pieu est défini comme étant une fondation élancée qui reporte les charges de la structure sur des couches de terrain de caractéristiques mécaniques suffisantes pour éviter la rupture du sol et réduire les déplacements (ou tassements) en surface, à des valeurs faibles.

Les 03 parties principales d'un pieu sont la tête, la pointe, et le fût compris entre la tête et la pointe. La longueur d'ancrage h est la longueur de pénétration du pieu dans les couches résistantes du sol.

D'un point de vue mécanique on distingue la longueur totale D du pieu, de la hauteur d'encastrement mécanique D_e . Cette valeur de D_e tient compte du fait que les caractéristiques mécaniques de la couche d'ancrage sont nettement supérieures à celles des couches supérieures (mauvais sol) traversées par le pieu (Figure 4.1). A ce titre, selon le fascicule 62 titre V, on considère qu'un élément de fondation est de type profond (pieu) lorsque sa hauteur d'encastrement relatif D_e/B est supérieure à 5.

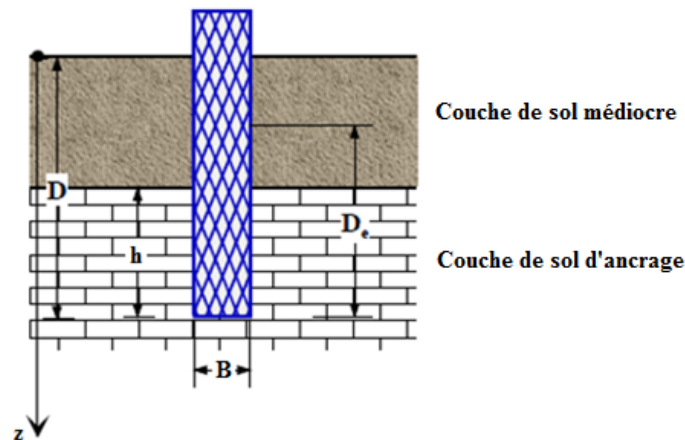


Figure 4.1 : Définitions de la hauteur d'ancrage géométrique D et mécanique D_e (C.Plumelle, 2008)

Une fondation profonde est caractérisée par la manière dont le sol est sollicité pour résister aux charges appliquées.

- Résistance en pointe
- Par frottement latéral
- Résistance de pointe et frottement latéral (cas courant).

Ses dimensions sont définies par :

- D : longueur de fondation enterrée dans le sol
- B : largeur de la fondation ou diamètre.

Par ailleurs, le même document (fascicule 62 titre V) classe les fondations profondes dans le cas de la vérification des conditions suivantes (Figure 4.2).

$D/B > 5$ et $D > 3$.

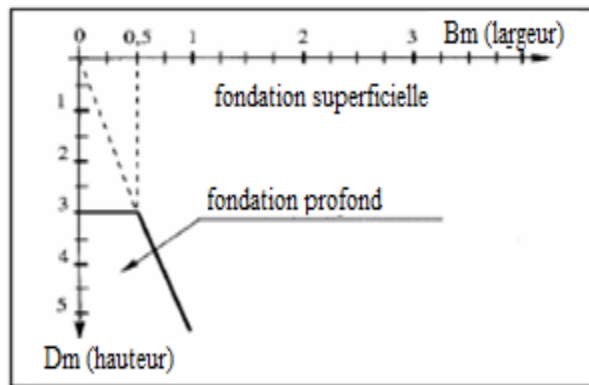


Figure 4.2 : Le domaine de fondation profonde (C.Plumelle. 2008)

4.2.1 Principe de fonctionnement

Un pieu transmet au sol les charges qu'il supporte :

- Par l'appui de sa base sur le sol résistant (effort de pointe noté Q_p)
- Par le frottement latéral entre le sol et le pieu (effort de frottement latéral noté Q_s)

L'effort total résistant de pointe Q_p est proportionnel à :

- La section de la base du pieu
- la résistance du substratum

L'effort total résistant de frottement latéral Q_s , est proportionnel à

- la surface de contact entre le pieu et le sol

et aux densités de réactions tangentes dues en partie à la cohésion d'adhérence, sol béton suite aux réactions d'hydratation, et aux frottements qui agissent au niveau de la surface latérale de contact sol-pieu. Concernant les densités de réactions tangentes de frottement, celles-ci dépendent essentiellement du coefficient de frottement pieu-sol et de la de la pression latérale de confinement appliquée par le sol. Ce coefficient de frottement dépend de la rugosité de la surface latérale extérieure du pieu, et du frottement interne au niveau du sol (angle de frottement interne).

Toutefois, il faut signaler le cas des frottements négatifs dus aux cas particuliers de mouvements relatifs pour lesquels le sol a tendance à « tasser plus que le pieu » (cas d'un chargement dû aux remblais extérieurs posés sur couches compressibles par exemple). Dans ce cas, le frottement sol-pieu est considéré comme étant négatif. Cela a pour conséquence de surcharger d'avantage le pieu. Pour remédier à ce problème. La solution consiste à chemiser le pieu par un tubage en paroi lisse, afin de diminuer l'effet du frottement négatif (figure.4.3).

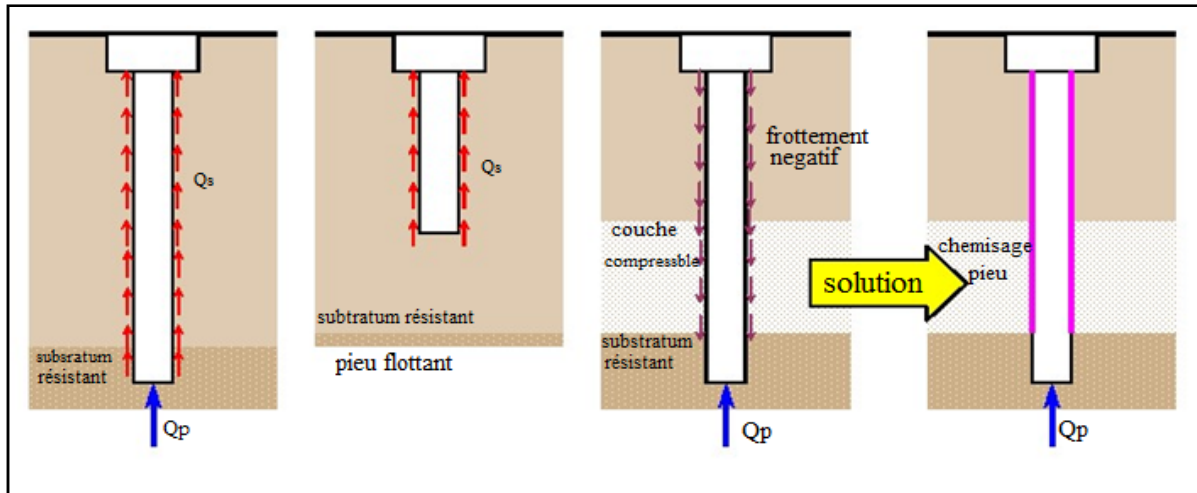


Figure 4.3 : Frottement positif et le frottement négatif (S. mezazigh ; D. levacher ; J.garnier.)

4.2.2 Les différents types de pieu

Les différents types de pieux sont récapitulés dans l'organigramme de la (Figure.4.4) réalisée par le laboratoire de mécanique des roches de l'école polytechnique (fédérale de LAUSANNE).

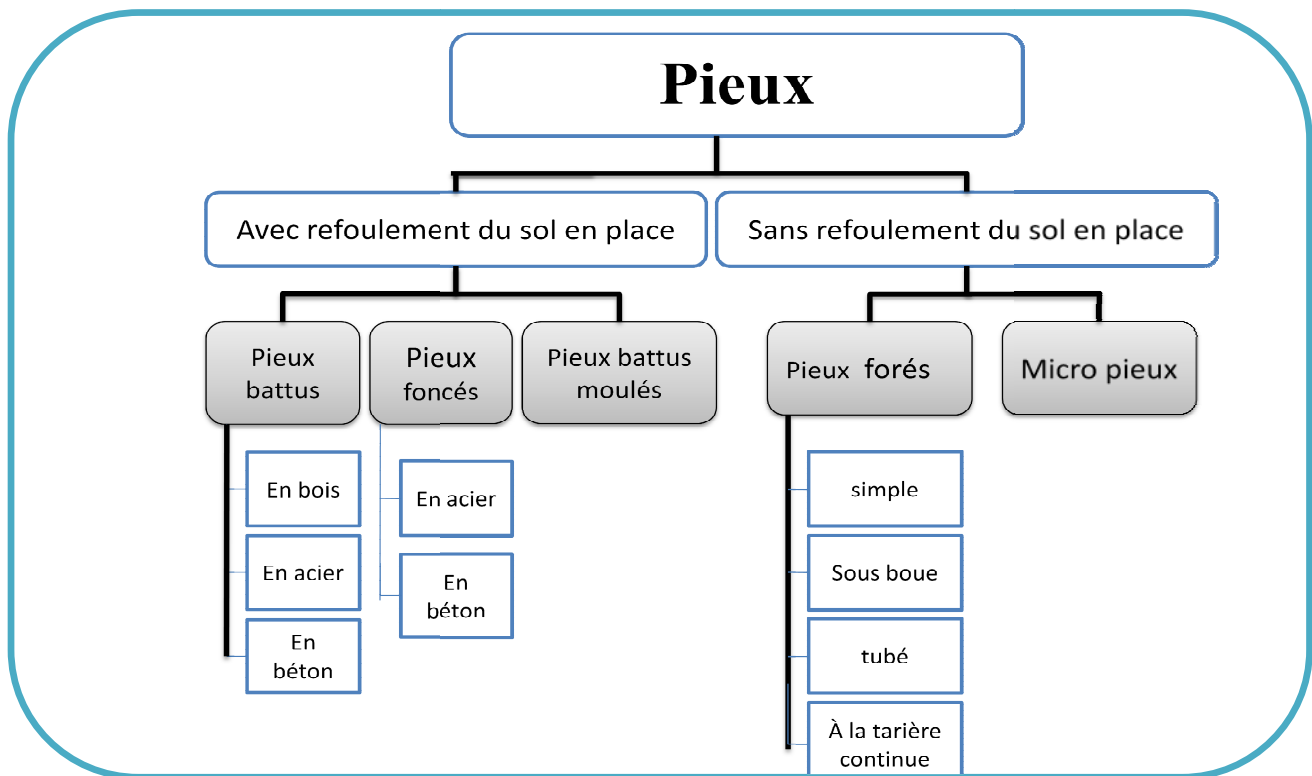


Figure 4.4 : Classification des pieux

Pour l'évaluation de la capacité portante, il est plus important de tenir compte du type de sollicitation imposée au sol lors de la mise en place du pieu. Ainsi, les pieux peuvent être classés en deux groupes.

4.2.3 Les pieux mis en place par refoulement du sol

Ils concernent les pieux battus et les pieux foncés. Ce sont des pieux soit façonnés à l'avance soit à tube battu exécutés en place. Pour les premiers il s'agit de :

Les pieux métalliques sont généralement sous forme de tube ou en forme de H. Les tubes peuvent être ouverts ou fermés à leur base.

L'exécution des pieux battus moulés consiste d'abord à battre un tube muni à sa base d'une plaque métallique dans le sol, à mettre, si nécessaire, en place la cage d'armature, puis à remplir le tube de béton pendant son extraction.

Leur mise en place se fait par vérinage battage ou vibro-fonçage. Ils repoussent le sol et le compriment ce qui génère un bon frottement latéral.

Avantages

- Contrôle possible avant l'insertion dans le sol,
- Stabilité dans les sols compressibles,
- De très grandes longueurs de pieux peuvent être mises en œuvre.

Inconvénients

- Risque de dommages (pour le moule) lors de la mise en place,
- Peut s'avérer parfois peu économique,
- Impossibilité d'insérer de gros diamètres.

4.2.4 Les pieux mis en place sans refoulement du sol

Ils concernent les pieux forés et les puits. Leur mise en place se fait par substitution. Ce qui a pour effet de remanier le sol et de le décompresser. Le frottement latéral est donc diminué, sauf pour certains procédés de mise en œuvre tels que celui des pieux exécutés à la tarière creuse, ou vissés moulés.

Leur exécution nécessite un forage préalable exécuté dans le sol avec les outils appropriés avec ou sans protection à l'aide d'un tubage ou de boue permettant d'assurer la stabilité des parois. Après mise en place, une cage d'armatures est souvent insérée. Le pieu est ensuite bétonné en utilisant une colonne de bétonnage, selon la technique du tube plongeur qui descend jusqu'à la base du pieu.

Par ailleurs, la technique des pieux à la tarière creuse a connu un très fort développement ces dernières années notamment dans le secteur du bâtiment. Le principe consiste à visser dans le sol une tarière à axe creux sur une longueur totale au moins égale à la longueur du pieu à réaliser, puis à l'extraire du sol sans dévisser pendant que, simultanément, le béton est injecté par l'axe creux de la tarière. La mise en place des armatures sous leur propre poids ou par vibration devient délicate pour des pieux d'une longueur supérieure à 22-25m. Au-delà, des techniques de béton armé de fibres en acier ont été développées et permettent d'injecter directement dans le sol les fibres mélangées au béton.

Avantages

- Variation de la longueur pour mieux s'adapter aux cas où les couches résistantes se trouvent à des profondeurs variables,
- Possibilité d'insertion de gros diamètres,
- Pas de risque de soulèvement de sol parfois nuisible pour les constructions avoisinantes et les chaussées.

Inconvénients

- Risque de striction (réduction de section transversale) dans les sols compressibles,
- Coulage du béton parfois exécuté dans de mauvaises conditions sur chantier (béton non vibré).
- Des précautions particulières doivent être prises vis-à-vis du risque d'éboulement des terres à l'intérieur du pieu. Faute de quoi, des tassements importants pourraient apparaître dans la structure.

4.2.5 Choix du type de pieu

Le choix du type de pieu dépend de :

- La structure qui est supportée par la fondation,
- La nature du sol,
- L'environnement du pieu.

La structure imposera à la fondation un système de charge auxquelles le sol devra résister à court et à long terme sans trop se déformer. Le projet de fondation doit donc prendre en compte :

- La nature des charges : statiques ou dynamiques
- L'intensité, la répartition et la direction des efforts
- Les déformations (tassement des fondations) ; ces tassements et les éventuels déplacements horizontaux doivent être compatibles avec le comportement de la structure.

La nature du sol intervient par la constitution et la disposition de ses différentes couches, par les caractéristiques mécaniques de celles-ci, et enfin par son hydrologie (niveau de la nappe phréatique et degré de perméabilité des couches).

L'environnement du pieu conditionne le choix par plusieurs paramètres :

- Surface de travail au sol plus au moins réduite ;
- Présence de nombreux pieux voisins déjà mis en place. A titre d'exemple, le battage de pieux ou de tubes fermés refoulant le sol peut entraîner la remontée de pieux voisins ou même les endommager).
- Proximité d'immeubles ou de construction diverses : bruit des engins de battage, ébranlements dus à l'enfoncement pouvant provoquer des fissurations.
- Déformations entraînées par des décompressions latérales provenant de forage en gros diamètres.

4.3 Aspects phénoménologiques

Dans le cas des fondations profondes, la compréhension de l'aspect complexe de l'interaction sol-pieu et des déformations du sol qui en résultent, permet de bien maîtriser les techniques de la modélisation et de la construction des ouvrages. La stabilité de la structure dépend essentiellement du comportement des surfaces de contact, car le voisinage de ces zones de contact est, en général, soumis à de fortes concentrations de contraintes et de déformations. Cette zone est définie comme une fine couche de sol, communément appelée **interface**. D'où la nécessité souvent de la prise en compte des conditions de contact et d'interaction entre les pieux et le sol. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons d'abord à l'aspect phénoménologique de l'interaction mécanique entre le sol et un pieu soumis un chargement quasistatique. A cet effet, certaines lois de frottements les plus connues seront d'abord présentées. Par la suite, quelques lois de comportement du sol, seront également présentées.

4.3.1 Définition de l'interface sol-structure

D'un point de vue géométrique, l'interface sol-structure est définie comme la fine zone de sol qui se forme entre la surface de la structure et le volume de sol l'entourant (De Gennaro (1999) ; Cai et Ugai (2002)). Cette zone est le siège de grands changements de structure et de rupture de grains dus au cisaillement localisé intervenant au contact d'une inclusion dans le sol. Elle est également décrite comme une discontinuité entre deux matériaux aux propriétés différentes (Desai et Rigby(1995)) ou, encore, comme une zone mince de sol **remanié** (perturbé) au contact direct de la structure (Desai et Toth (1996) ; De Gennaro (1999) ; Karabatakis et Hatzigogos (2002) ; Gaba et al. (2003)). Les problèmes d'interaction sol-structure dépendent principalement du comportement de cette interface. La réponse des systèmes sol-structure comme les fondations profondes et superficielles, les tunnels, les murs de soutènement est ainsi influencés par les caractéristiques des interfaces.

4.3.2 Comportement d'interface sol-pieu

La modélisation du comportement d'un pieu dans un massif constitue un bon exemple d'interaction sol-structure. Les principaux paramètres de l'interaction sol-pieu sont :

- Pour les sols pulvérulents : la densité initiale du sol, le chemin des contraintes de cisaillement, la géométrie et les propriétés mécaniques des grains constituant le sol, la rugosité des surfaces de contact, l'effet d'un écoulement plastique ;

- Pour les sols cohérents : l'adhérence entre le sol et le fut du pieu, les surpressions interstitielles, la rigidité de la structure, la rugosité des surfaces de contact et l'effet d'un écoulement plastique;

4.4 Modèles de comportement en adhérence (ou en cohésion) de l'interface sol pieu

Dans ce cadre, plusieurs types de modèle ont été proposés. Le matériau d'interface a été supposé élastique linéaire par Beer (1985) et (Bhatia et Bakeer (1989)) et ou élastique non linéaire par Yuan et Chua (1992). Citons également les modèles élastiques parfaitement plastiques qui ont été proposés pour l'interface en s'appuyant sur l'analogie avec le comportement des joints rocheux. D'autres modèles plus complexes ont été proposés pour décrire le comportement cohésif de l'interface. Ces modèles incorporent : l'écroûissage, l'adoucissement, la contractance, la dilatance et l'endommagement.

4.4.1 Modèle élastique parfaitement plastique de Mohr Coulomb

Historiquement, la première utilisation des interfaces a concerné des analyses des joints rocheux. Pour reproduire le comportement des joints rocheux et des interfaces, la plupart des auteurs ont considéré des modèles linéaires élastiques parfaitement plastiques utilisant le critère de rupture par cisaillement de Mohr-Coulomb comme surface de charge. Les auteurs qui ont étudié les fractures des roches Platten (1966) ; Goodman et Dubois (1972) ; Goodman (1989), ont considéré l'influence de la rugosité des joints. En effet, l'angle de frottement d'un joints rugueux dont la surface des aspérités est inclinée d'un angle i est égal à $\delta' + i$. D'autre part, l'abrasion progressive des aspérités est à l'origine d'une stabilisation à une valeur résiduelle de la contrainte de cisaillement pour les grandes déplacements ce qui correspond à un angle de frottement résiduel δ'_r (Figure 4.5a). Le critère de rupture est donc défini par une enveloppe bilinéaire. D'autres auteurs comme Goodman et al. (1986) ; Pande et Sharma (1979) ; Lee et al. (1992) ; Day et Potts (1998), ont adopté un critère de rupture de Mohr-Coulomb plus simple (Figure 4.5b) avec une règle d'écoulement associée qui définit la fonction de charge F :

$$F = |\tau| - \sigma_n \tan \delta' + C' \quad (4.1)$$

avec C' et δ' : cohésion et angle de frottement de l'interface.

Dans ce cas, lorsque la contrainte de cisaillement τ atteint la limite de rupture de Mohr-Coulomb, la valeur de rigidité tangentielle devient nulle ; la rigidité normale reste la même.

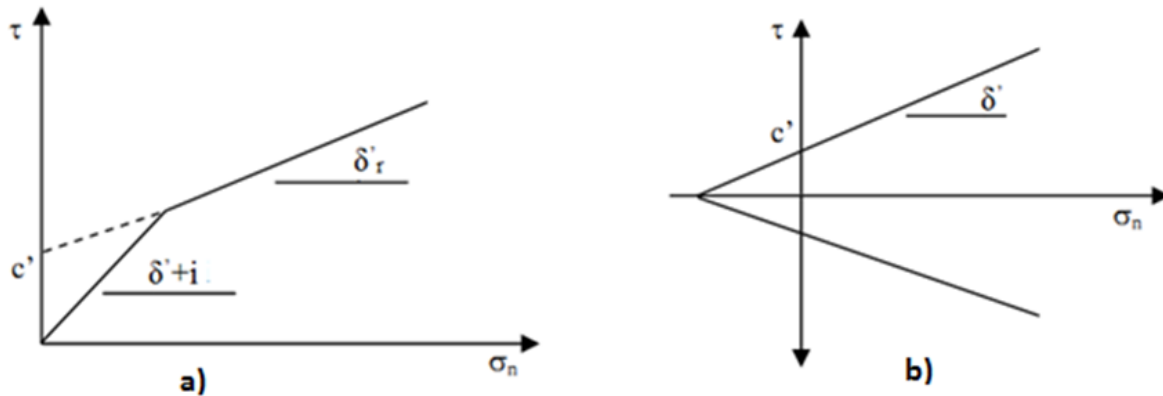


Figure 4.5 : Critère de rupture de Mohr-Coulomb (a) enveloppe bilinéaire pour les joints tenant compte des aspérités (Goodman 1989) ; (b) enveloppe linéaire pour les interfaces (Said, 2006)

4.4.2 Modèles de comportement élastoplastique avec écoulement

Un corps est dit avoir un comportement élastoplastique quand au-delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations irréversibles (plastique) et que ces déformations et ces contraintes obéissent à des lois bien précises. On définit d'abord un critère de plasticité qui est une fonction des contraintes, éventuellement variable (ou écouissable) avec les déformations. Ce critère ne peut être dépassé en aucun point, lorsqu'il est atteint, débutent les déformations irréversibles ou plastiques. Ces déformations sont régies par une loi dite loi d'écoulement.

➤ Les lois de comportements des sols

Les matériaux naturels peuvent être regroupés en trois catégories : les roches, les sols pulvérulents (sols granulaires à forte perméabilité, par exemple la plupart des sables et les graves) et les sols cohérents (sols cohérents à faible perméabilité, par exemple la plupart des argiles et des limons). Ces matériaux ont des comportements relativement distincts.

Pour suivre leurs comportements tout le long de sa déformation, on dispose de modèles de plus en plus complexes qui simulent son comportement réel mieux que les modèles élastiques ou plastiques classiquement utilisés en mécanique des sols.

Ces modèles se développent grâce aux possibilités offertes par les méthodes numériques, telle que la méthode des éléments finis.

Les études théoriques entreprises dans ce domaine se sont limitées, jusqu'à présent, aux cas de milieux élastiques et de milieux dilatants modélisés d'une manière relativement simpliste. Des modèles élastoplastiques, incorporant des lois de dilatance plus réalistes, ont récemment été mis au point. Détaillons maintenant les principaux types de lois de comportement.

4.5 Comportement élastique linéaire

Lorsque, dans un essai, la courbe contrainte – déformation est la même au chargement et au Déchargement, le comportement du matériau est dit élastique. D'une manière plus générale, le comportement est dit élastique lorsque l'histoire du chargement n'intervient pas et qu'un état de contraintes correspond à un état de déformations et un seul.

Le comportement élastique peut être linéaire : le tenseur des déformations est alors proportionnel au tenseur des contraintes au cours des sollicitations.

La relation contrainte – déformation est linéaire, caractérisée par deux paramètres : un module d'élasticité axiale (d'Young) E dans le cas d'un essai de compression ou traction simple, ou un module de cisaillement G pour un essai de cisaillement simple (figure 2.8) et le coefficient de Poisson ν .

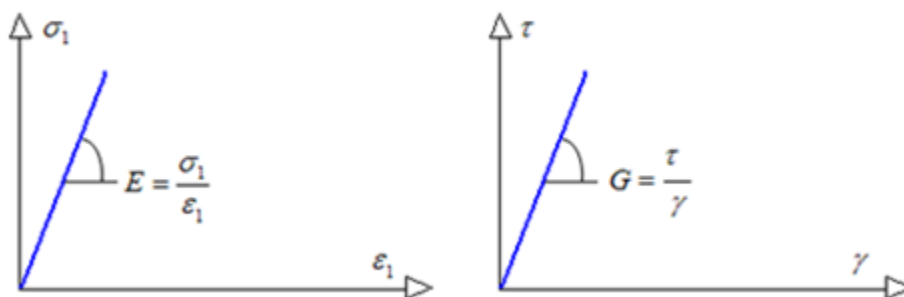


Figure 4. 6 : Loi de comportement élastique linéaire (N .PHAM, 2008)

La relation entre le module de Young et les autres modules sont données comme suit :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad E_{oed} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.2)$$

Avec :

- G : Le module de cisaillement du sol ;
- E_{oed} : Le module œdométrique.

Cependant, cette loi de comportement n'est pas représentative en général du comportement des sols qui, très rapidement, même pour de faibles déformations, ont un comportement plastique. Des lois plastiques ont été proposées pour écrire un comportement plus proche de celui des sols.

4.6 Comportement élastoplastique

Les essais réalisés sur les solides montrent que le domaine de réversibilité des déformations ou domaine d'élasticité, est relativement limité. À partir d'un certain niveau de contraintes, la courbe chargement – déchargement est différente de la courbe de chargement suivie jusque là. Des déformations irréversibles ou plastiques apparaissent.

4.6.1 Modèle élastoplastique (Mohr-coulomb)

Le modèle le plus simple de cette famille est le modèle élastique linéaire parfaitement plastique, initialement développé pour décrire, de manière approchée, le comportement des métaux. Cependant, l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe de comportement contraintes - déformations de nombreux matériaux a suggéré d'étendre ce modèle aux bétons, aux sols et aux roches. En particulier, l'application à la description du comportement des massifs de sols s'est révélée fructueuse et a permis d'analyser la rupture des sols dans les problèmes de fondations, de stabilité de pentes, de tunnels, des murs de soutènements. Plusieurs critères de rupture ont été proposés. Parmi eux, le critère de rupture de Mohr-Coulomb (figure 4.7).

Ce modèle bien connu est utilisé généralement comme une première approximation du comportement du sol. Ce modèle comporte cinq paramètres : le module d'Young E , le coefficient de poisson ν , la cohésion c , l'angle de frottement φ , et l'angle de dilatance ψ .

Le critère de rupture de Mohr-Coulomb est représenté dans le plan des contraintes de Mohr (contrainte effective normale σ' et contrainte tangentielle, par l'équation (Figure 4.7a) :

$$\tau = \sigma' \tan\varphi' + c \quad (4.3)$$

En termes de contraintes effectives principales (σ'_1, σ'_3), il s'écrit aussi (Figure 4.7b)

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \varphi' - 2c \cos \varphi' \tag{4.4}$$

avec :

- σ'_1, σ'_3 : contraintes effectives principales majeure et mineure,
- φ' : angle de frottement interne,
- c : cohésion.

Le comportement élastique linéaire parfaitement plastique avec le critère de rupture de Mohr-Coulomb (Figure 4.7b) est finalement caractérisé par une élasticité linéaire (E, ν) et un seuil de plasticité, défini par la cohésion c' , l'angle de frottement interne φ' , en plus de l'état initial. Il faut réaliser au moins deux essais triaxiaux à des pressions de confinement différentes pour déterminer les paramètres du modèle.

La surface de charge (droite intrinsèque) $F(\sigma_{ij})$ s'exprime de façon suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma'_1 - \sigma'_3) - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \sin \varphi' - 2c' \cos \varphi' \tag{4.5}$$

Elle est représentée dans le plan (σ', τ) par une droite (Figure 4.7a).

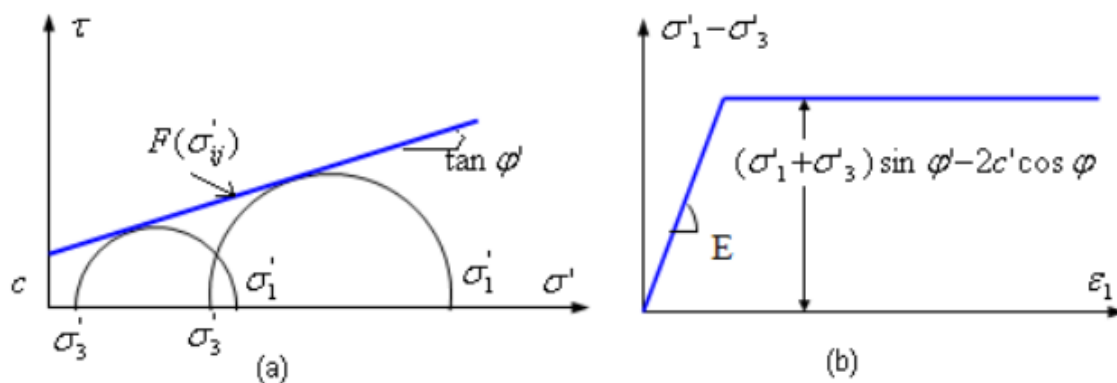


Figure 4.7 : Loi de comportement élastique, parfaitement plastique de Mohr Coulomb (N.PHAM, 2008)

4.6.2 Modèle élasto-plastique de Cam-Clay modifié

Le modèle de Cam-Clay est un des modèles élastoplastiques le plus connu et le plus utilisé en mécanique des sols. Il est spécialement adapté aux matériaux

argileux. Il y a plusieurs types de modèles Cam-Clay, celui présenté ici est le plus courant et est appelé Cam-Clay modifié. Ce modèle comporte 7 paramètres :

- 'E0' : indice des vides initial ;
- 'M' : coefficient de frottement ;
- 'COHE' : cohésion ;
- 'P0' : pression de préconsolidation ;
- 'KAPA' : pente élastique dans un diagramme $e-\log(p)$;
- 'LAMD' : pente plastique dans un diagramme $e-\log(p)$;
- 'G1' : module de cisaillement.

Des observations en laboratoire sur l'argile reconstituée avec l'essai de consolidation isotrope et l'essai triaxial, où $\sigma'_1 = \sigma'_3$ ont abouti à construire les modèles Cam-Clay (original et modifié) (Roscoe *et al.* 1963 ; Roscoe et Burland, 1968 ; Schofield et Worth, 1968), qui sont des modèles de types élastoplastique avec écoulement, développés dans le plan de contrainte moyenne (p') et contrainte déviatorique (q), avec :

$$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} ; \quad q' = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (4.6)$$

La (figure 2.10) présente la compression isotrope ou consolidation isotrope d'une argile remaniée. À partir d'un état initial proche de la limite de liquidité, sous une contrainte isotrope croissante, son indice des vides va diminuer suivant la droite OE avec une pente C_c , (ou λ), qui est définie comme l'indice de compression :

$$e = e_\lambda - c_c \Delta \lg p' \quad \text{Ou} \quad e = e_\lambda - \lambda \Delta \lg p' \quad (4.7)$$

Si, après avoir atteint A, on réduit la contrainte effective moyenne de p'_A à p'_R , l'indice des vides de l'éprouvette va augmenter légèrement de e_A à e_R suivant la loi :

$$e = e_\kappa \kappa - c_s \Delta \lg p' \quad \text{Ou} \quad e = e_\kappa - \kappa \Delta \lg p' \quad (4.8)$$

où :

C_s (ou κ) est l'indice de gonflement.

Si l'on reprend alors le chargement isotrope, la variation de l'indice des vides va suivre RA, puis, pour les contraintes effectives moyennes supérieures à p'_A , l'indice des vides va retrouver la ligne OE comme au début de l'essai. Entre R et

A les déformations sont petites, réversibles et peuvent être approchées par une loi élastique. De manière plus générale, tout le demi espace $e - \lg p'$, à gauche de la droite OE correspondant au domaine surconsolidé, a un comportement élastique.

Entre A et B, les déformations sont grandes et irréversibles, donc de nature plastique. La courbe OE, qui correspond à l'état normalement consolidé, représente aussi un domaine de comportement plastique.

Les points A et B, constituant des points de passage d'un état de comportement élastique à un état de comportement plastique, sont des points d'état limite. La courbe OE est appelée la courbe d'état limite (Figure 4.8). L'état limite peut être donc défini comme un état où se passe la transition entre une déformation petite et réversible à une déformation grande et irréversible.

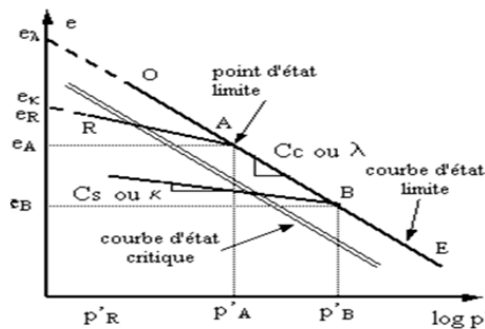


Figure 4.8 : Etats limite Cam-Clay (N.PHAM, 2008)

Les modèles Cam-clay et Cam-clay modifié ont été développés pour décrire le comportement des argiles reconstituées normalement consolidées ou faiblement sur consolidées.

La surface de charge est exprimée comme suit dans le plan (p', q) :
Cam-clay modifié:

$$F(P, q) = \frac{q^2}{M^2 p'} + p' - P_0 \quad (4.9)$$

$$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{2} ; \quad q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (4.10)$$

- q : contrainte déviatorique,
- M : pente de la courbe du critère de rupture ou courbe d'état critique,
- p'_0 : contrainte moyenne initiale.

La (Figure 4.9) présente la forme de la surface de charge de modèle Cam-clay modifié

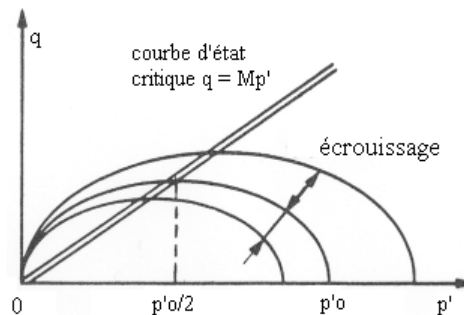


Figure 4.9 : Modèle Cam-Clay modifié (N.PHAM, 2008)

4.6.3 Modèle élastoplastique de Drucker-Prager

Le Modèle de DRUCKER-PRAGER à écoulement non associé et écrouissage. C'est une extension du critère de Von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'altitude sur la trissectrice des axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de contraintes principales. (Figure 4.10a)

$$f(\sigma) = (1 - \alpha)J + \alpha I - \sigma_y \tag{4.11}$$

La limite d'élasticité en traction reste σ_y , et la limite d'élasticité en compression est :

$$\frac{-\sigma_y}{(1 - 2\alpha)}$$

Le coefficient α dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 1/2, et on retrouve le critère de Von Mises pour $\alpha = 0$ (Figure 4.10b). Une expression plus complexe de ce même critère fait intervenir une forme plus compliquée de la contribution déviatorique, prenant en compte le troisième invariant.

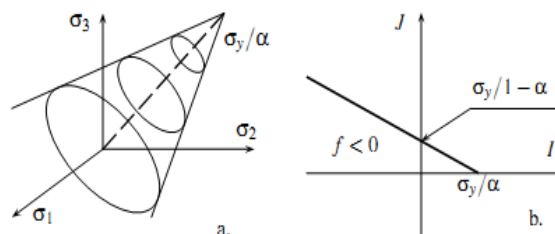


Figure 4.10 : Représentation du critère de Drucker-Prager, (a) dans l'espace des contraintes principales, (b) dans le plan $I_1 - J$ [R.von Mises, 1928]

Les équations du modèle sont de la forme :

- \mathbf{S} : tenseur des contraintes ;
- S_{eq} : contrainte équivalente au sens de Von Mises ;
- \mathbf{p} : déformation plastique équivalente cumulée ;
- Critère initial: $ALFA * Tr(\mathbf{S}) + BETA * S_{eq} = K$;
- Critère ultime : $ETA * Tr(\mathbf{S}) + MU * S_{eq} = KL$;
- Ecrouissage : $dK = H * dp$ (H en valeur algébrique) ;
- Potentiel d'écoulement : $GAMM * Tr(\mathbf{S}) + DELT * S_{eq}$.

Les paramètres à définir sont:

ALFA, BETA, K, ETA, MU, KL, H, GAMM, DELT.

4.7 Aspects théoriques

La réponse d'un pieu soumis à un chargement axial statique est typiquement un problème d'interaction sol-pieu ; la réaction du sol dépend du déplacement du pieu, et ce dernier dépend de la réaction du sol. Les méthodes de dimensionnement de la capacité portante des pieux les plus couramment utilisées en pratique à savoir la méthode classique rigide-plastique et les méthodes des essais in-situ prennent en considération l'interaction entre le pieu et le sol mais d'une façon simplifiée.

Nous exposerons d'abord brièvement la formulation du problème de contact sol-pieu. Par la suite, les différentes méthodes de dimensionnement de la capacité portante des pieux sous charge axiale statique et leurs tassements.

4.7.1 Formulation du problème de contact sol-pieu

Une modélisation mécanique réaliste doit donc prendre en compte les zones de contact : les frottements et/ou adhésions, les glissements et les décollements qui peuvent apparaître aux différents endroits.

Le contact sol-pieu peut être modélisé à l'aide du modèle de contact entre deux corps déformables. En vue de modéliser le problème, une discrétisation de la surface de contact doit être effectuée.

A cet effet, considérons deux points 1 et 2 appartenant respectivement aux corps A et B, dans le repère local (\vec{t}, \vec{n}) (Figure 4.11), les déplacements et les contraintes de liaisons sont donnés par :

$$\vec{U}_1 = \begin{cases} U_t^1 \\ U_n^1 \end{cases} \quad \vec{U}_2 = \begin{cases} U_t^2 \\ U_n^2 \end{cases} \quad \vec{\sigma} = \begin{cases} \tau \\ \sigma_n \end{cases}$$

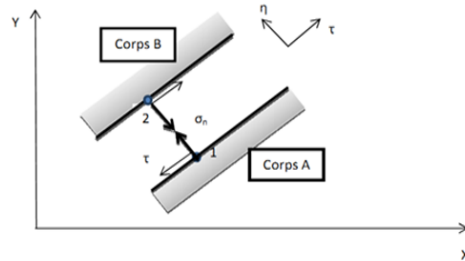


Figure 4.11 : Modélisation du contact entre deux corps (Lahmadi, 2006)

La modélisation du contact se caractérise par la vérification de certaines conditions sur la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ s'exerçant sur l'élément de contact. De cet état de contrainte (τ, σ_n) résulte un état de déplacements relatifs tangentiels et normaux $(\Delta U_t, \Delta U_n)$ caractérisant la cinématique de l'élément de l'interface :

$$\Delta U = \begin{cases} \Delta U_t = U_t^2 - U_t^1 \\ \Delta U_n = U_n^2 - U_n^1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Donc au cours du chargement, le contact entre A et B peut évoluer, il suit l'un des trois modes suivants :

- **Mode adhésion**

Dans ce mode (Figure 4.12a), il n'y a pas de déplacement relatif entre les nœuds 1 et 2, on a alors les équations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} \Delta U_t = 0 \\ \Delta U_n = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

- **Mode glissement**

Quand la contrainte normale est de compression et la contrainte tangentielle atteint le seuil $\bar{\tau}$ il y a un glissement relatif entre le nœud 1 et 2 (Figure 4.12b) ; dans ce cas, on a les conditions :

$$\begin{cases} \Delta U_n = 0 \\ \Delta U_t \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma_n > 0 \\ \tau = \bar{\tau} \end{cases} \quad (4.14)$$

• **Mode décollement**

Dans le cas où la composante σ_n devient négative, il y a un décollement (séparation des corps A et B) (figure 4.12c) ; on a alors les conditions suivantes :

$$\Delta U_n > 0 ; \quad \sigma_n < 0 \quad \text{et} \quad \tau = 0 \quad (4.15)$$

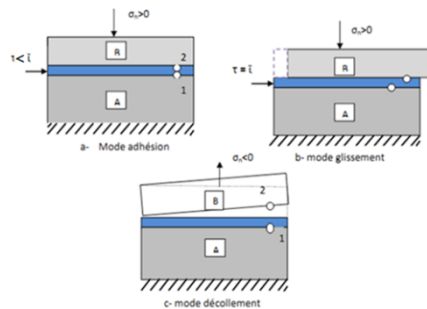


Figure 4.12 : Mode de déformation de l'interface (Lahmadi 2006)

Notons qu'en présence de sollicitations cycliques, après séparation, il peut y avoir à nouveau un recollement entre les deux corps. On retrouve alors l'un des deux modes : adhésion ou glissement.

• **Formulation locale**

Pour la formulation locale du problème de contact, nous adoptons comme loi de frottement, la loi de Coulomb en quasi statique. Les champs de déplacement \mathbf{U}^C et les champs de densités de réactions \mathbf{R}^C , vérifient les conditions de contact avec frottement à l'interface.

Ceci peut être formulé de la manière suivante :

$$U_n^C = U_n^1 - U_n^2 \leq 0 \quad (4.16)$$

$$R_n^\ell \leq 0 \quad , \ell = 1,2 \quad (4.17)$$

$$R_n^\ell U_n^C = 0 \quad , \ell = 1,2 \quad (4.18)$$

$$|R_t^\ell| \leq \mu |R_n^\ell| \quad , \ell = 1, 2 \quad (4.19)$$

$$|R_t^\ell| < \mu |R_n^\ell| \Rightarrow U_t^\ell = 0 \quad , \ell = 1, 2 \quad (4.20)$$

$$|R_t^\ell| = \mu |R_n^\ell| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } U_t^\ell = -\lambda R_t^\ell \quad , \ell = 1, 2 \quad (4.21)$$

L'inéquation (4.15) indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration. L'inéquation (4.16) indique que les composantes normales des densités de réactions ne peuvent correspondre qu'à de la compression. L'équation (4.17) est appelée condition de complémentarité ; elle indique qu'en tout point il y a soit contact, soit décollement. Enfin, l'inéquation (4.18) et les équations (4.19) et (4.20) donnent la loi de Coulomb en présence de frottements.

4.7.2 Prise en compte de mécanismes du frottement latéral positif et négatif

Pour qu'il y ait frottement latéral il faut qu'il y ait un déplacement relatif entre le pieu et le sol. Si le pieu se déplace plus vite que le sol, le sol par réaction en s'opposant au déplacement exercera un frottement latéral positif f_p , vers le haut (Figure 3.6). Si le sol se déplace plus vite que le pieu (terrain médiocre qui tasse (s_s) sous des surcharges appliquées au niveau de la surface du sol), le sol en tassant entraîne le pieu vers le bas et lui applique un frottement négatif f_n qui le surcharge. Pour un même pieu on pourra avoir la partie supérieure soumise à un frottement négatif et la partie inférieure à un frottement positif. Le point neutre est le point pour lequel le déplacement du pieu est égal à celui de sol.

Les observations expérimentales montrent que le frottement latéral est un phénomène très localisé autour du fut d'un pieu. En particulier, dans le cas des sols pulvérulents, les déformations de cisaillement du sol sont concentrées dans une étroite bande de sol d'épaisseur très faible, d'environ 10 fois le diamètre moyen des grains. Ces observations permettent de suggérer que ce mécanisme d'interaction sol-structure peut être reproduit approximativement en laboratoire par un essai de cisaillement direct à la boîte [Boulon et Foray (1986)].

Les expérimentations indiquent également que le frottement latéral augmente approximativement de façon linéaire avec la profondeur jusqu'à 10 fois, voire 20 fois le diamètre du pieu. Au-delà, le frottement latéral est à peu près constant [Broms (1981), Fleming et al.(1992)].

Le frottement négatif se produit généralement dans des sols fins saturés qui se consolident avec le temps. Il augmente donc avec la consolidation du sol et devient maximal à long terme (généralement plusieurs années).

Le frottement négatif maximal dépend :

- l'effet d'un rabattement de la nappe
- de la compressibilité du sol
- des surcharges de longue durée appliquées sur le terre-plein
- de l'interface entre le sol et le pieu
- le tassement du sol sous son poids propre.

Le principal effet du frottement négatif est donc d'augmenter la charge axiale dans le pieu et d'accroître le tassement du pieu.

Ce phénomène peut causer de graves désordres dans les structures supportées par les pieux, entraîner la rupture du sol sous la pointe, la rupture du sol par écrasement. Ces effets sont plus importants pour les pieux chargés en pointe que pour les pieux flottants.

Il pourra être évalué conformément à la méthode de COMBARIEU préconisée par le fasc.62–titre V.

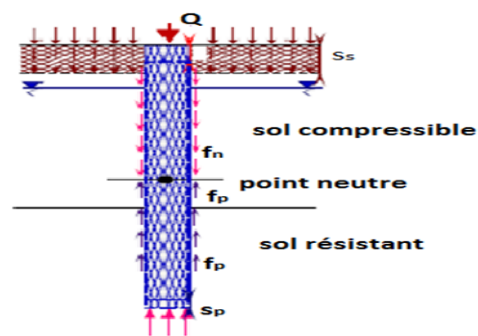


Figure 4.13 : Mécanismes du frottement latéral positif et négatif [Plumelle.2005]

4.8 Quelques méthodes de calcul pour le frottement latéral

4.8.1 Méthode théorique classique (Formule dite statique)

La charge limite de frottement latéral en compression est déterminée à partir du frottement latéral unitaire donné par le critère de Coulomb :

$$|\tau(z)| - \sigma(z) \tan \delta - c' = 0 \quad (4.22)$$

où $\tau(z)$ et $\sigma(z)$ sont respectivement les contraintes tangentielle et normale à l'interface entre le sol et le pieu à la profondeur z ;

- c' : est la cohésion (caractérisant l'adhérence du sol à la fondation profonde) ;
- δ : l'angle de frottement de l'interface.

A. Cas des sols pulvérulents

Pour un pieu circulaire situé dans un sol pulvérulent, le frottement latéral unitaire est donné par la relation suivante :

$$q_s(z) = \sigma'_{rr}(z) \tan \delta + c' \quad (4.23)$$

où $\sigma'_{rr}(z)$ est la contrainte radiale effective. Cette contrainte est en général supposée égale à une certaine proportion K de la contrainte verticale effective.

Le frottement unitaire s'écrit alors :

$$q_s(z) = K \sigma'_{zz}(z) \tan \delta + c' \quad (4.24)$$

Le coefficient K représente la poussée du sol (étrointe sur le pieu) qui dépend de l'état initial du sol (défini par le poids volumique et le coefficient de poussée des terres au repos K_0), de la compressibilité du sol, de la manière dont le pieu a été mise en place, des dimensions et de la forme du pieu. Les valeurs de K sont très imprécises car les contraintes normales sont rarement mesurées en place. Beaucoup d'auteur pensent néanmoins que le coefficient K varie entre 0,5 (état au repos) et 2 pour la plupart des pieux, avec toutefois des valeurs voisines de 5 dans certaines cas exceptionnels :

- Pour les sols normalement consolidés, le coefficient K est une constante qui varie entre 0,1 et 5. Le frottement q_s est linéaire avec la profondeur ;
- Pour les sols surconsolidés, le coefficient K dépend de la profondeur puisque le coefficient de poussée des terres au repos est lui-même fonction de la profondeur. Le frottement q_s est alors une fonction non linéaire avec la profondeur z ;

- Pour les sables denses, le coefficient K décroît avec la profondeur et augmente avec la densité initiale du sol, pouvant atteindre la valeur de 4 (d'après des essais réalisés en cuve par Boulon et Plytas (1986)).

D'une manière générale, l'angle de frottement de l'interface δ dépend de la rugosité du pieu et de la nature du sol (densité, déformabilité et résistance), il est inférieure ou égal à l'angle de frottement interne φ' du sol. Pour un sol purement frottant, la valeur de c' est nulle. Pour un sol pulvérulent présentant une certaine cohésion, la valeur de c' est inférieure à la cohésion non drainée. Les paramètres c' et δ peuvent être déterminés en laboratoire à partir d'un essai à la boîte de cisaillement direct, qui permet de simuler approximativement le comportement d'interface entre le pieu et le sol.

B. Cas des sols cohérents

Dans le cas d'un sol cohérent saturé, le frottement latéral unitaire est donné par la relation empirique :

$$q_s = \alpha c_u \quad (4.25)$$

- c_u : est la cohésion non drainée du sol.
- α : un coefficient qui dépend de la nature du sol, de celle du pieu et de sa mise en œuvre.

La valeur de α est déduite d'essais en vraie grandeur est en général égale à l'unité pour les argiles molles, et inférieure à l'unité pour les argiles raides. Pour les pieux forés dans des argiles raides, une valeur proche de 0,45 est souvent utilisée.

Pour des pieux battus dans des argiles molles et lorsque c_u est inférieur à 50 KPa, Broms (1981) conseille d'utiliser un coefficient égal à 1 pour des pieux en bois, à 0,8 pour des pieux en béton et à 0,5 pour des pieux en acier.

C. Cas des terrains stratifiés

La charge limite totale de frottement latéral est donnée par l'équation suivante :

$$Q_s = Q_s(D_1) + Q_s(D_2) + \dots + Q_s(D_n) \quad (4.26)$$

4.8.2 Etude à partir d'essais en place

4.8.2.1 Pour le pressiomètre

Avec des essais PMT, le frottement axial unitaire limite q_s est donné en fonction de la pression limite nette p_l^* sous forme d'abaque, la valeur q_s est fonction de la compacité du sol, de la nature du sol et du type de pieu.

4.8.2.2 Pour le Pénétromètre

Le frottement latéral est donné comme une proportion de la résistance unitaire en pointe.

A partir des essais CPT, la valeur de q_s est déterminée par l'expression suivante :

$$q_s(z) = \min \left\{ \frac{q_c(z)}{\beta}; q_{s \max} \right\} \quad (4.27)$$

Où

- $q_c(z)$ est la résistance en pointe à la profondeur z ;
- $q_{s \max}$ et β deux paramètres donnés en fonction de la nature du sol et du type de pieu.

4.9 Détermination du tassement d'un pieu isole

4.9.1 Tassement admissible pour un pieu isole

Le tassement des pieux sous charge axiale est dû :

- à la déformation du pieu sous charge qu'il supporte. Ce tassement dépend des caractéristiques du pieu (géométrie, rhéologie du matériau et technique de construction) et de la distribution du frottement latéral le long du pieu.
- aux tassements des couches de sol au voisinage et sous la pointe du pieu. Ce tassement est plus important pour les pieux flottants.

Une évaluation réaliste du tassement nécessite donc de prendre en compte ces deux composantes. Mais comme il n'existe pas de solution analytique à ce problème, il faut avoir recours à des approximations théoriques (utilisation de solutions élastiques), à des logiciels spécialisés (éléments finis), ou à des règles empiriques issues de l'analyse d'essai in situ.

Parmi ses méthodes on distingue.

- Méthodes semi-empiriques : fondées sur l'observation de pieux au cours d'essais de charge

- Méthode de Cambefort-Cassan
- Méthode de Rollberg
- Méthode analytiques : basées sur la théorie de l'élasticité et les formules de Mindlin
 - Méthode de Poulos

Le tassement d'un pieu isolé est souvent faible et n'excède que très rarement le centimètre sous une charge de référence égale à 40% de la charge limite.

4.9.2 Détermination empirique du tassement

Des formules empiriques simples ont été proposées pour estimer le tassement S sous cette charge de référence :

A. Pour les pieux forés

$S = 0,006B$ (avec des valeurs extrêmes de 0,003 et 0,010 B)

B. Pour les pieux battus :

$S = 0,009B$ (avec des valeurs extrêmes de 0,008 et 0,012 B).

Avec : B diamètre du pieu en(m).

Ces résultats sont valables pour une très large gamme de pieux (de longueur comprise entre 6 et 45m, de diamètre comprise entre 0,3 et 1,5m).

Pour des chargements d'intensité pas trop proche de la charge de rupture, le tassement d'un pieu S peut être estimé par la formule empirique suivante (d'après Vesic (1977), cité par le manuel canadien des fondations (1994)) :

$$S = \frac{B}{100} + \frac{Q_t D}{A E_{\text{pieu}}} \quad (4.28)$$

Où B est le diamètre du pieu ; Q_t : la charge appliquée en tête ; A : la section moyenne du pieu ; D : la longueur du pieu et E_{pieu} : le module d'élasticité du matériau qui le constitue.

➤ Relation de Cassan

C'est une déduite de la théorie pressiométrique. Elle permet de calculer une déformation globale de l'ensemble (sol-pieu). Cette relation s'écrit :

- Pour un pieu circulaire de diamètre B

$$S = \frac{4.Q}{\pi.B} * \frac{1 + \frac{R}{E_b} \cdot \frac{D}{B}}{R + 4.b \frac{D}{B}} \quad (4.29)$$

Avec :

- Q : La charge totale
- D : La longueur du pieu
- E_b : Le module de déformation du béton
- R et b : Les coefficients de déformabilité du sol définis comme suit :
 - R = 4,5E pour des pieux forés
 - R = 13,5E pour des pieux battus

$$b = \frac{E}{2(1+\nu)l_0} \quad (4.30)$$

- $l_0 = 0,9m$ pour les pieux forés
- $l_0 = 0,3m$ pour les pieux battus

La relation de Cassan n'est valable que si :

$$a = 2 \sqrt{\frac{b}{B.E_b}} < \frac{0,8}{D} \quad (4.31)$$

De plus les formules données sont approchées mais sont cependant commodes d'emploi.

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la formulation du problème du contact et les différentes méthodes d'analyse du comportement des pieux isolés sous charge axiale, par le calcul de capacité portante (méthodes analytiques). Nous avons exposé la théorie classique rigide –plastique et les méthodes d'essais in-situetc. Ces méthodes modélisent le système sol-pieu d'une manière simplifiée. On a présenté, Par la suite les différents méthodes de calcul du tassement, et une application numérique à été faite.

Cependant, ces méthodes ne permettent pas de prendre en considération la géométrie réelle du système pieu-sol, les conditions d'interface entre le sol et le pieu, des lois de comportement sophistiqué pour le sol.

Chapitre 05

Modélisation numérique, résultats et discussion

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter un certain nombre de résultats liés aux calculs d'un pieu axialement chargé, et de les analyser. Ce pieu repose sur deux couches de sol différentes. La première couche (ou mauvais sol) est constituée d'argile limoneuse. La seconde couche (bon sol) est une marne grise compacte. Les caractéristiques mécaniques de ces couches sont tirées du rapport du LCTP Bejaia, pris à partir de résultats d'essais in situ et en laboratoire et sont comme suit :

Pour la première couche :

- le module d'Young est estimé à $E = 1.95 \text{ KN} / \text{cm}^2 = 19500 \text{ KPa}$
- le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- le poids volumique $\rho = 18.5 \text{ KN} / \text{m}^3$

Pour la seconde couche :

- le module d'Young est estimé à $E = 3.8608 \text{ KN} / \text{cm}^2 = 38608 \text{ KPa}$
- le coefficient de Poisson $\nu = 0.27$
- le poids volumique $\rho = 20.5 \text{ KN} / \text{m}^3$

Il s'agit d'un pieu battu (avec refoulement de sol)

- le diamètre $\Phi = 30 \text{ cm}$;
- la longueur de pieu $L = 20 \text{ m}$ et ancré dans la seconde couche de bon sol sur une profondeur de cinq mètres.
- le module d'Young $E = 3216.42 \text{ KN} / \text{cm}^2 = 32164200 \text{ KPa}$
- le coefficient de Poisson $\nu = 0.2$
- le poids volumique $\rho = 25.48 \text{ KN} / \text{m}^3$

Ce pieu subit une charge permanente axiale et centrée d'intensité $N = 459 \text{ KN}$ (voir figure 5-01 ci-dessous)

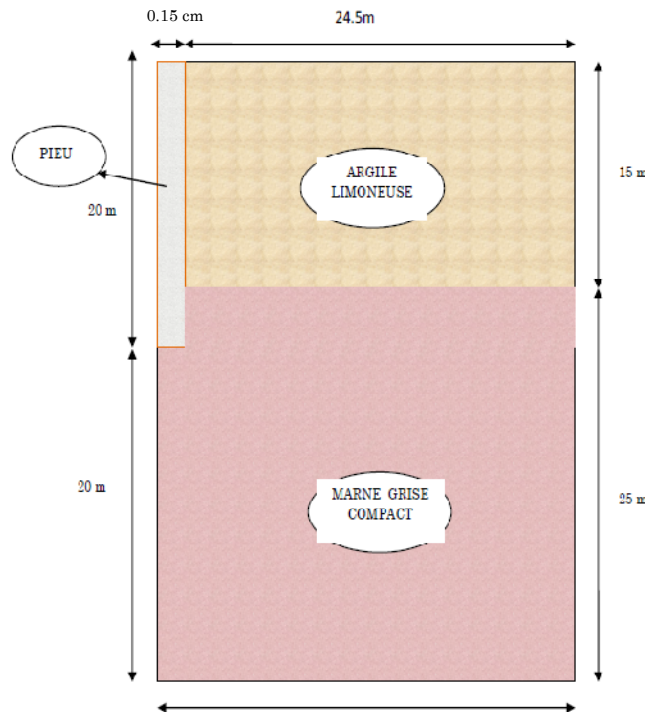


Figure 5-1 : Modèle axisymétrique du pieu axialement chargé

5.2 Présentation du logiciel Cast3m (un bref aperçu)

Cast3M est un code de calcul « ouvert », utilisant la méthode des éléments finis et qui a été développé par le commissariat à l'énergie atomique CEA de France, à des fins de développement et de recherche. Son domaine d'application est assez large et concerne les mécaniques des structures, des fluides, des sols ainsi que les calculs thermiques, etc...

Cast3M contient un préprocesseur, une bibliothèque d'éléments finis, un solveur linéaire et non linéaire, un post-processeur et un langage de programmation de type orienté objet : **Gibiane**. Pour cela, Cast3M est un logiciel qui permet à l'utilisateur de développer, selon ses besoins, des procédures, des lois de comportement etc.

5.3 Algorithmes implantés dans Cast3m

Dans la présente étude, nous avons implanté plusieurs algorithmes (ou sous programmes). Il s'agit :

- d'un algorithme de résolution du problème de contact adapté au calcul d'un pieu axialement chargé dénommé KCALPIEU en axisymétrie (ou symétrie de révolution),

- d'un algorithme de post traitement ou de correction de la solution obtenue dénommé KPOSTPIEU,

- de l'algorithme de calcul de l'erreur relative globale ainsi que de la carte d'erreur dénommé KINDICP. Cet algorithme combine à la fois : l'erreur de discrétisation ou de maillage de type ZZ^2 utilisant la méthode SPR : Super Convergent Patch Recovry SPR method (Zienkiewicz Zhu 1992) ainsi que l'erreur de contact définie dans le chapitre 03 précédent.

- Et enfin, un algorithme de calcul de la carte des tailles à prescrire suite à l'obtention de la carte d'erreur obtenue sur un maillage précédent grossier dénommé KTAILLEP.

5.3.1 Résolution du problème de contact pieu sol avec frottements selon la loi de Coulomb

Tout d'abord, pour utiliser cet algorithme KCALPIEU, on doit commencer par introduire les données du problème telles que :

- les maillages du pieu et du sol en contact
- La définition des surfaces de contact (ou des lignes de contact)
- le modèle de comportement des matériaux composant le pieu et les différentes couches de sol ainsi que leurs caractéristiques mécaniques
- La loi de frottement adoptée notamment la valeur du coefficient de frottement. Pour notre cas, il s'agit de la loi de Coulomb en quasistatique.
- Et enfin, la définition des conditions aux limites qui sont soit sous forme de déplacements imposés, soit sous forme de forces (ou de chargements) imposés.

Le problème consiste à trouver les champs de déplacements (tassements en particulier), de déformations, de contraintes ainsi que de réactions notamment au niveau des zones de contact.

La méthode de résolution adoptée est celle des multiplicateurs de Lagrange associée à la méthode des statuts (ou du point fixe). En effet, en raison de la non linéarité du problème, la résolution consiste en un calcul itératif. En vue de calculer les champs de réactions de contact entre les deux solides, on impose « provisoirement » à la première boucle d'itération, un blocage total des déplacements relatifs au niveau des zones de contact. A cette étape, la résolution se fera donc comme si les deux solides ne constituaient qu'un seul corps. Toutefois, ceci nous permettra de calculer les champs de réactions au niveau de ces zones de contact. Celui-ci (le champ de réactions) sera ensuite décomposé en deux champs : un champs de réactions normales \mathbf{R}_n portées par les normales aux surfaces (ou lignes) de contact, et un champs de réactions tangentielles \mathbf{R}_t portés tangentiellement à ces lignes.

A partir de la seconde itération, on supprime les blocages au niveau de la zone de contact mais en contrepartie, on impose un champ d'efforts tangents \mathbf{G} au niveau du maillage de contact. Cet effort tangent \mathbf{G} à imposer n'est rien d'autre que le champ de réactions tangentielles. Le problème sera donc résolu en imposant les champs \mathbf{G} sur les deux lignes de contact. Toutefois, en raison des possibilités de glissement et de décollements lors du chargement, l'aire de contact doit à chaque fois être actualisée, et cet effort tangent ne doit être imposé que sur l'aire de contact effective (actualisée). Ainsi, le maillage de contact de l'aire actualisée ne doit contenir que les nœuds qui sont soit en état d'adhérence, soit en état de glissement relatif. Les nœuds se trouvant en état de décollement doivent être exclus ; et aucun effort tangent ne doit leur être appliqué.

Par ailleurs, dans le cadre de la loi de frottement de type Coulomb, les efforts tangents à imposer aux nœuds glissants doivent avoir pour intensité celle correspondante au cône de frottement μR_n . Ainsi, nous pouvons constater que, de même que pour l'aire de contact, les champs d'efforts tangents \mathbf{G} doit lui aussi être actualisé à chaque itération et ce, en fonction des statuts des nœuds en vis-à-vis.

Cela étant dit, nous avons remarqué que les nœuds du maillage de contact sont à chaque itération classés dans l'une de ces trois catégories : adhérents, glissants ou décollants. Ainsi, la définition de seuils de glissement et de décollement s'avère nécessaire. En effet, soient S_n et S_t des seuils définis respectivement pour le décollement et le glissement des nœuds en vis-à-vis, Les valeurs de ces seuils sont généralement définies en fonction du degré de

précision requis, des dimensions des pièces en contact ainsi que de la taille des éléments du maillage de contact.

Pour illustrer la méthode, considérons le cas de deux nœuds i et j initialement en contact. Soient W_n et W_t les composantes normales et tangentielles du déplacement relatif entre ces deux nœuds, telles que :

$$W_n = u_i - u_j \quad W_t = u_t - u_{t_j}$$

1. Ces nœuds auront un statut « d'adhérents » : si leurs déplacements relatifs normal et tangentiel sont négligeables. Autrement dit, si les relations suivantes sont vérifiées :

$$W_n < S_n \quad \text{et} \quad W_t < S_t .$$

2. Ces nœuds auront le statut « de glissants » : si leur déplacement relatif normal est négligeable mais en contre partie le déplacement relatif tangentiel est important. Autrement dit, ceci peut être écrit de la manière suivante :

$$W_n < S_n \quad \text{et} \quad W_t \geq S_t .$$

3. Ces nœuds auront le statut « de décollants » : si leurs déplacements relatifs normal est important (non négligeable). Autrement dit, ceci peut être écrit de la manière suivante :

$$W_n \geq S_n$$

En effet, soit l'exemple d'un maillage composé d'éléments linéaires de type TRI3 composé d'un nombre total de 507 éléments. Voir (Figure 5.2).

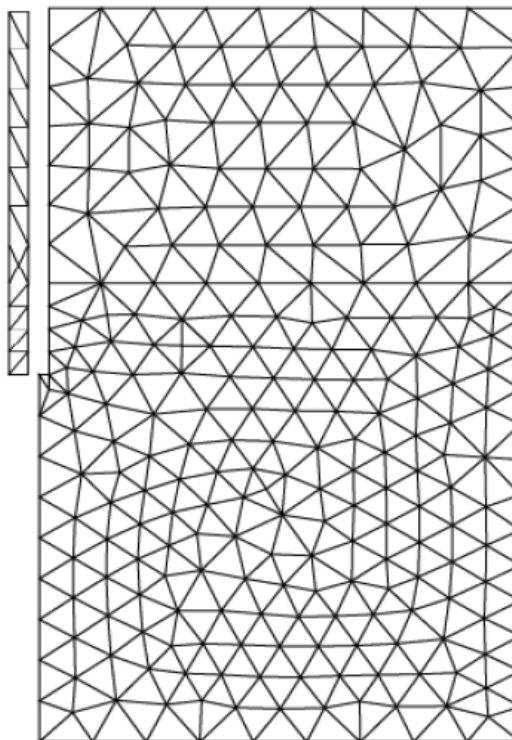


Figure 5.2 : maillage du pieu et du sol composé de 507 éléments

Lors de chargement, il est possible d'y avoir des nœuds glissants ou adhérents sur la ligne de contact, donc à chaque itération, le statut des nœuds de la ligne de contact doit être actualisé. Après la première itération, au début des calculs (avant convergence), on voit bien la présence de nœuds adhérents, glissants et décollants. Après de nombreuses itérations et convergence des calculs (six dans notre cas), tous les nœuds ont pris le statut de glissants. Ce qui est logique vu que le tassement du pieu est d'environ 3 cm. Voir (**Figure 5.3**).



Figure 5.3 : statut glissant des nœuds sur la ligne de contact

Par ailleurs, la résolution porte sur l'effort tangent à imposer sur la ligne de contact, le critère de convergence des calculs portera également sur cet effort. La figure 5-4 ci- dessous montre que l'effort imposé dans notre cas est confondu avec celle du cône de coulomb à la dernière itération c'est-à-dire $R_t = \mu R_n$. Ce qui est également logique puisque tous les nœuds du maillage ont glissé.

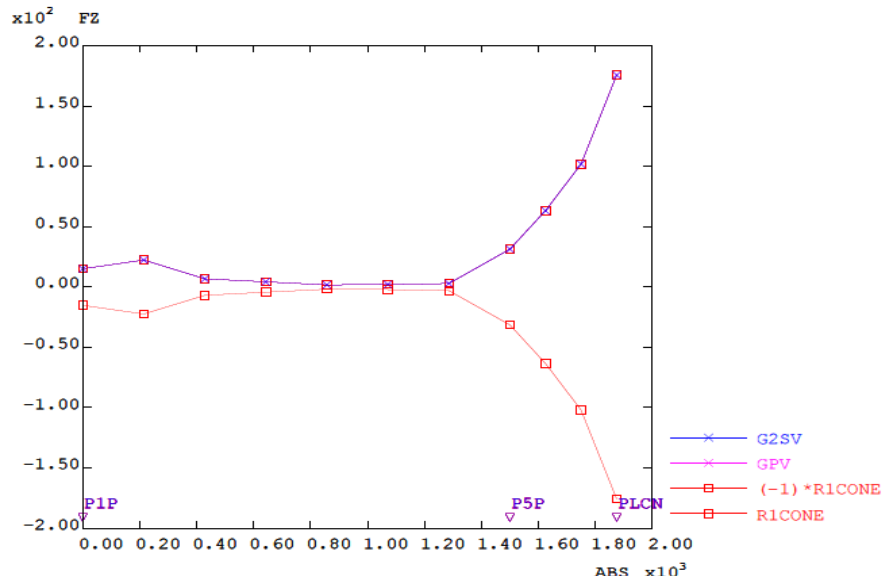


Figure 5.4 : Effort imposé sur la ligne de contact est confondu sur le cône de Coulomb

Après convergence sur G, on calcule le nouveau champ de déplacement qu'on peut visualiser à travers la déformée (Figure 5.5) ainsi que le champ de contraintes dont les différentes composantes sont représentées en figure 5.6.

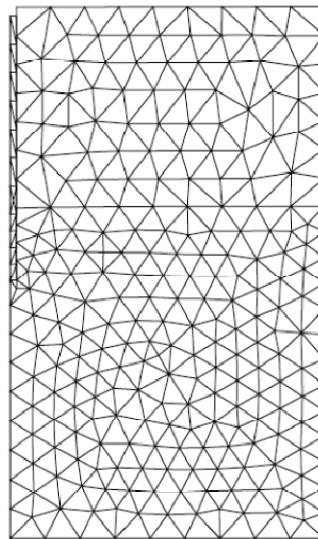


Figure 5.5 : La déformée totale

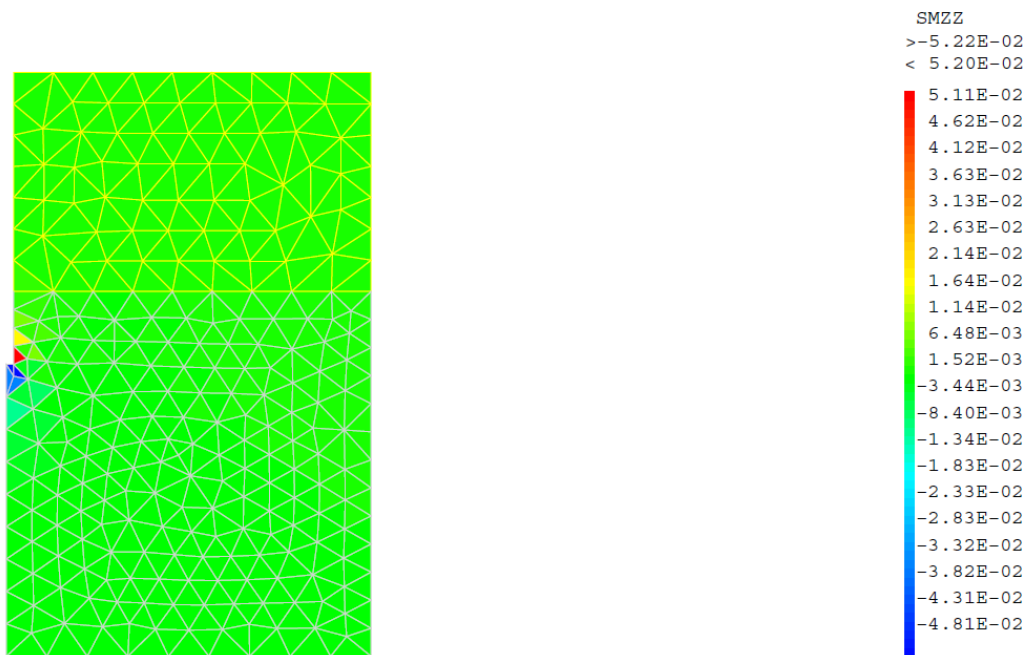


Figure 5.6a : Composantes des contraintes normales verticales sigma zz (sol)

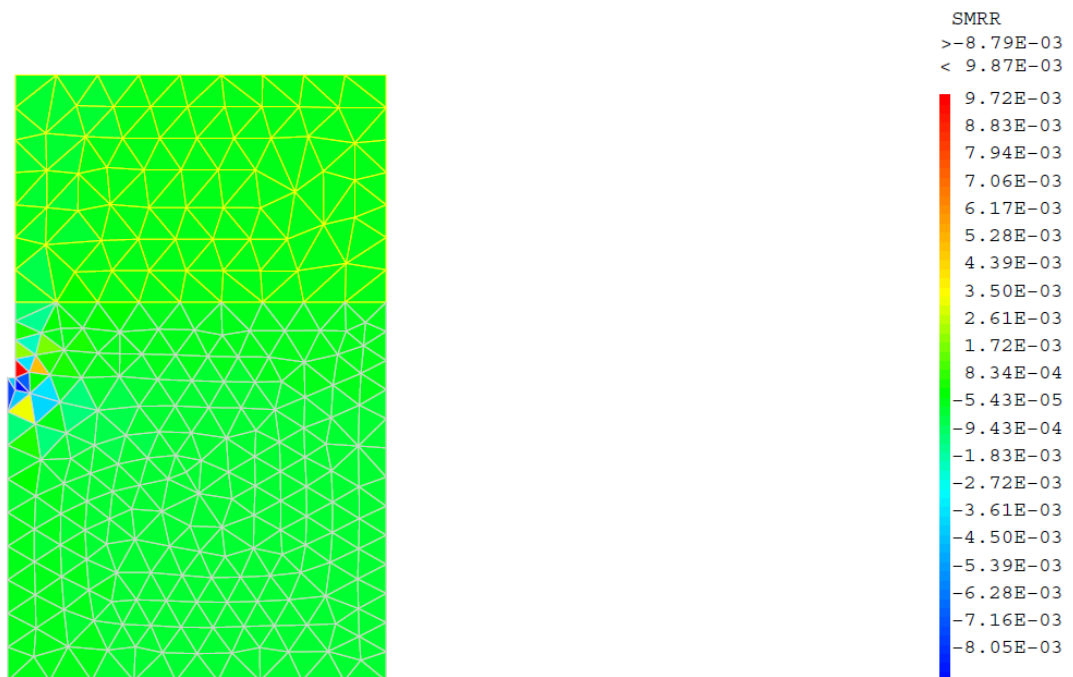


Figure 5.6b : Composantes des contraintes normales horizontales sigma rr (sol)

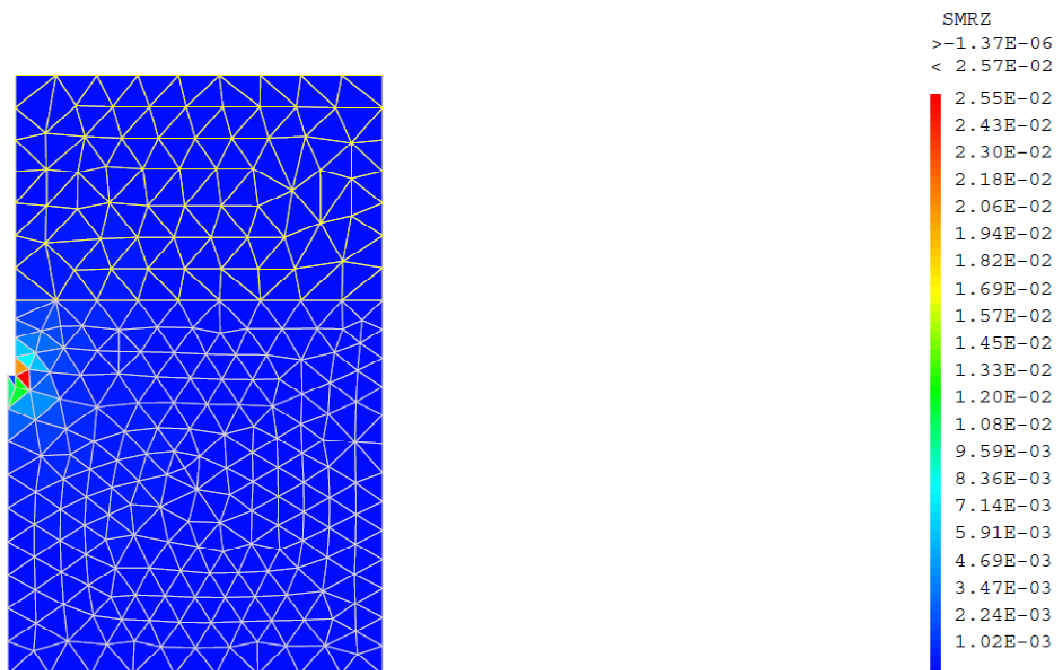


Figure 5.6c : Composantes des contraintes tangentielles de cisaillement σ_{rz} (sol)



Figure 5.6d : Composantes des contraintes normales verticales σ_{zz} (pieu)

D'après les figures précédentes 5.6.a jusqu'à 5.6.d, on peut facilement remarquer que la zone de pointe, en particulier, l'extrémité ou le bord de la section horizontale, constitue une zone à très forte concentration de contraintes aussi bien pour le pieu que pour le sol.

On peut également visualiser les forces tangentielles de frottement du sol sur le pieu et (vice versa du pieu sur le sol) 5.7a où l'on peut remarquer que la plus grande partie de ces forces de frottement se trouve au niveau du bon sol. La couche de mauvais sol semble participer de manière très faible. Par ailleurs, la figure 5.7.b montre la distribution des réactions normales du pieu sur le sol et vice versa. On peut constater sur cette figure la forte intensité de la réaction normale au niveau de la zone "singulière" ou à forte concentration de contraintes.

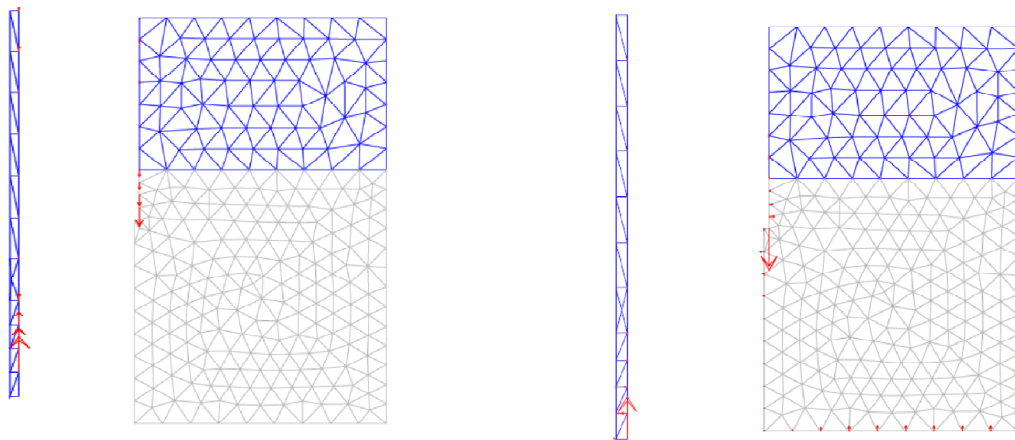


Figure 5.7 : Vecteurs des forces de frottement et de réaction

5.3.2 Correction de la solution de contact obtenue ou post-traitement

Conformément à l'indicateur d'erreur mis au point, il est nécessaire de corriger la solution de contact à travers la correction des densités surfaciques de réactions au niveau des zones de contact. Pour cela, nous devons convertir les forces nodales G obtenues par l'algorithme de résolution du contact KCALPIEU en densités surfaciques nodales équivalentes. (figure 5.8). Par la suite, nous devons nous assurer que ces densités projetées sur les axes locaux \mathbf{n} et \mathbf{t} c'est-à-dire les densités tangentées et normales vérifient la loi de frottement de Coulomb en quasi statique. A cet effet, dans le cas où ces densités tangentées R_t dépassent le cône $\mu.R_n$ (se trouvent en dehors du cône), celles-ci doivent être corrigées et remises sur la frontière du cône (voir figure 5.9)

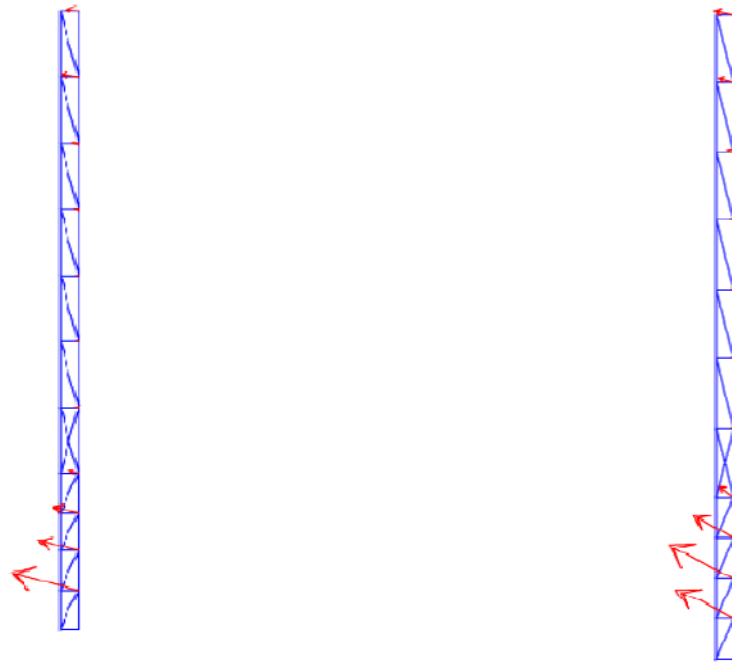


Figure 5.8 : Forces nodales appliquées (à gauche) et densités de forces surfaciques équivalentes (à droite)

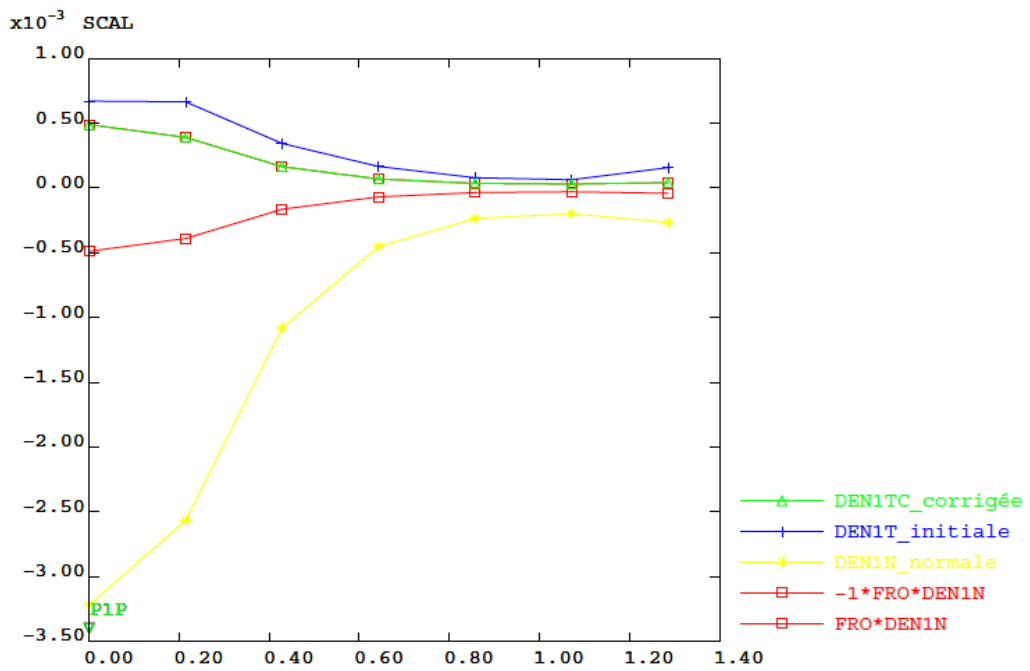


Figure 5.9 : Exemple de correction des densités tangentes.

Une fois ces densités surfaciques corrigées (réintroduites à la limite du cône de Coulomb), il est procédé à la reconstruction des forces nodales sur la zone de contact G_{corr} . Ce dernier, combiné avec les autres forces telles que les charges extérieures appliquées, ainsi que les conditions aux limites, une seconde résolution du problème est effectuée et qui donnera lieu à un champ de contraintes corrigées (figure 5.10)

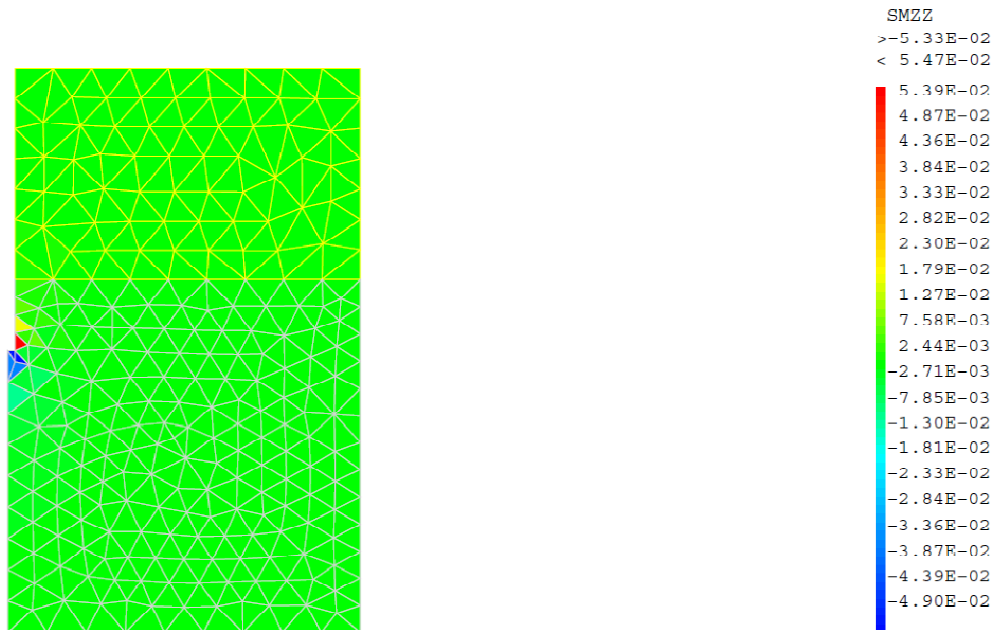


Figure 5.10 : Exemple de composantes verticale de contraintes corrigées.

Par ailleurs, on doit également corriger les pénétrations en rabotant tous des déplacements relatifs normaux "excessif" c'est-à-dire qu'on doit remettre les nœuds pénétrants aux mêmes endroits que les nœuds qui leur sont situés en vis-à-vis. Cette correction du champ de déplacement exige une seconde et dernière correction du champ de contraintes.

Ainsi, cette procédure de post traitement KPOSTP donne finalement lieu à des champs de :

- densités surfaciques de réactions corrigés (correction vis-à-vis du cône de Coulomb)
- un champ de déplacement corrigé (correction de la pénétration)
- un champ de contraintes corrigées.

5.3.3 Lissage du champ de contraintes corrigées

La solution exacte n'étant pas connue, il faut donc calculer une estimation de l'erreur sur la solution éléments finis. L'idée consiste à remplacer, dans notre cas, $\sigma^\ell, \ell=1,2$ (le champ de contraintes exact) par un champ de contraintes $\tilde{\sigma}^\ell, \ell=1,2$ dont les propriétés d'équilibre interne ou de continuité entre éléments sont vérifiées. En constatant que la solution éléments finis est moins lisse que la solution exacte, le principe consiste à construire, à partir de la solution éléments finis, un champ de contraintes lissé de degré supérieur afin de mieux approcher la solution exacte. Pour cela, on utilise la propriété de super convergence du champ de contraintes. Hinton et Campbell (1974) ont constaté que la solution éléments finis oscillait autour de la solution exacte et qu'en certains points appelés points de super convergence les deux solutions coïncidaient.

Afin de calculer l'erreur relative globale ainsi que la carte de contribution à l'erreur, il est donc nécessaire de remplacer la solution exacte ou de référence (non disponible) par un champ de contraintes lissées selon la méthode du lissage par patch successifs d'éléments appuyés sur des nœuds du maillage.

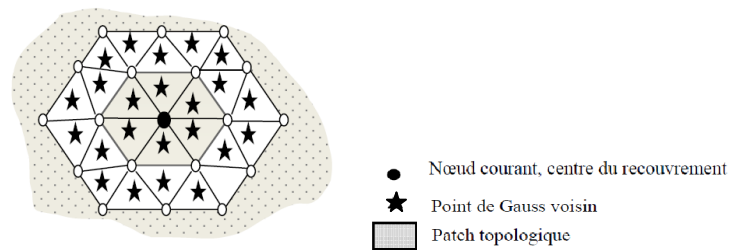


Figure 5.11 : Exemple de patch (ou groupe) d'élément sur lequel se fait le lissage du champ de contraintes

Cette technique consiste à calculer une expansion polynomiale de chaque composante du tenseur des contraintes éléments finis sur chaque sous-domaines de maillage centré sur un noeud et contenant un ensemble de points d'intégration, appelés des patches topologiques, (figure 5.11) telle que :

$$\tilde{\sigma}_h^k(x, y) = P \cdot a^k$$

où P constitue la base de l'expansion polynomiale et a^k est le vecteur contenant les coefficients du polynôme dans le patch Ω_k . Pour un problème 2D et pour des éléments linéaires :

$$P = (1, x, y) \text{ et } a^k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k)^t$$

Les paramètres inconnus a_j^i sont obtenus par la résolution du système d'équation qui est obtenu par la minimisation au sens des moindres carrés de $\sum_{s=1}^n (\tilde{\sigma}_i^s - \sigma_{ci}^s)^2$ où n le nombre de points d'intégration de gauss dans le patch d'éléments. Ceci conduit à la

résolution d'un système d'équations linéaires pour chaque composante i ($i = x, y, xy$) du tenseur des contraintes.

A titre d'exemple, les figures 5.10 et 5.11 (ci-dessous) montre le champ de contraintes verticales lissées dans le sol.

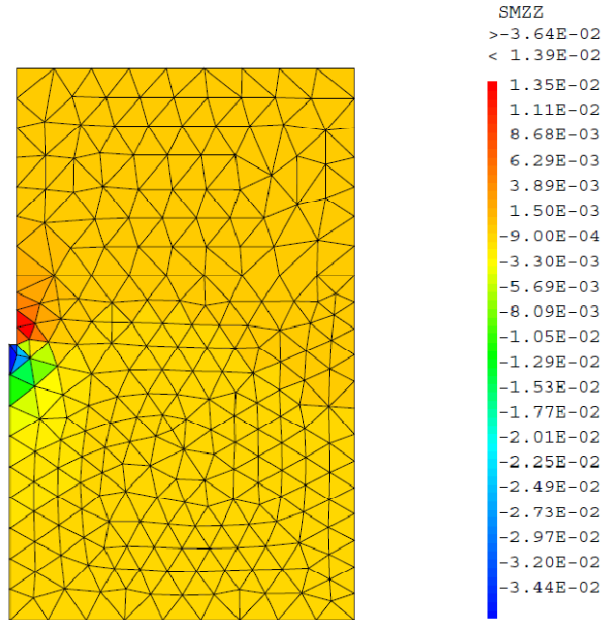


Figure 5.11 : champ de contraintes verticales lissées dans le sol.

5.3.4 Carte de contribution à l'erreur et erreur relative globale, de maillage et de contact

Après avoir corrigé les solutions et lissé les champs de contraintes, nous devons calculer l'erreur relative globale selon l'expression suivante :

$$\varepsilon = \left[\frac{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^{\ell} - \sigma_c^{\ell}\|_{\sigma, \Omega^{\ell}}^2 + \int_{\Gamma_C} (\mu |R_{c_n}^{\ell}| |W_{c_t}^{\ell}| + R_{c_t}^{\ell} W_{c_t}^{\ell} + R_{c_n}^{\ell} W_{c_n}^{\ell}) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^{\ell} + \sigma_c^{\ell}\|_{\sigma, \Omega^{\ell}}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Le premier terme de cette expression représente l'erreur de maillage liée à la taille et aux fonctions d'interpolation utilisées. Tandis que le second terme représente l'erreur portée par la solution de contact que sont les densités surfaciques de réaction ainsi que les déplacements relatifs.

Ainsi ε est une précision globale qui permet d'évaluer la qualité globale de la solution E. F. Soit E une partie de Ω^{ℓ} . On définit alors la contribution locale de E à l'erreur globale ε par la quantité ε_E , telle que :

$$\varepsilon_E = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}^{\ell} - \sigma_c^{\ell}\|_{\sigma, E}^2 + \int_{\Omega^{\ell} \cap \Gamma_C} (\mu |R_{c_n}^{\ell}| |W_{c_t}^{\ell}| + R_{c_t}^{\ell} W_{c_t}^{\ell} + R_{c_n}^{\ell} W_{c_n}^{\ell}) d\Gamma_C}{\sum_{\ell=1}^2 \|\tilde{\sigma}^{\ell} + \sigma_c^{\ell}\|_{\sigma, \Omega^{\ell}}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

En pratique, E est un élément quelconque du maillage associé à Ω^ℓ . Les contributions locales permettent ainsi de localiser les erreurs sur la structure. Par construction, on a :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2$$

Sur la 5.12 ci-dessous, est illustrée la carte des contributions à une erreur relative globale de 27 % d'un maillage grossier composé de 507 éléments.

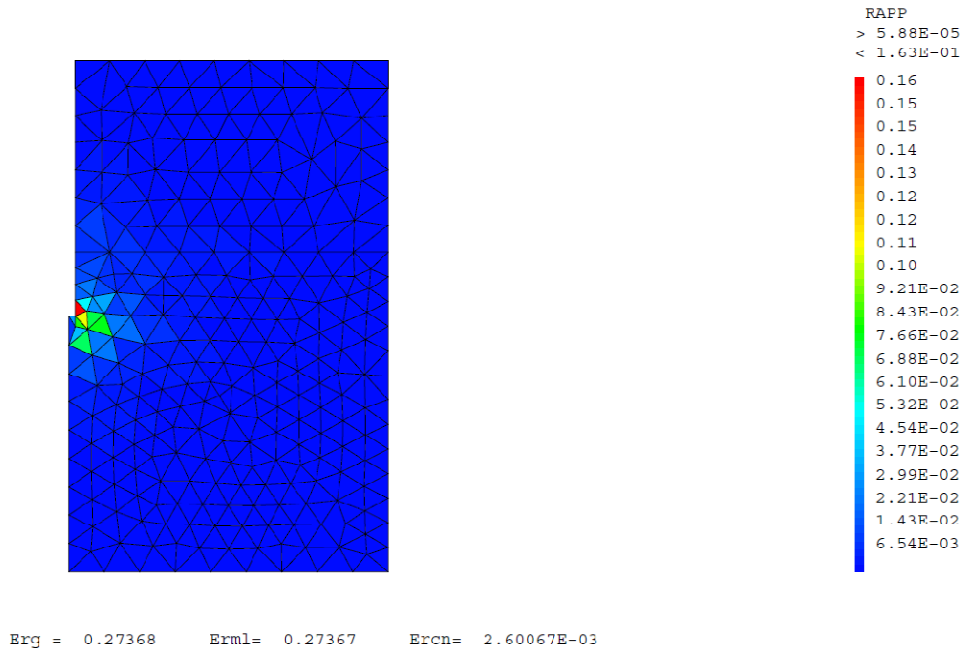


Figure 5.12 : Carte de contribution à l'erreur globale représentée sur le sol



Figure 5.13 : Carte de contribution à l'erreur globale représentée sur le pieu

5.3.5 Analyse de la convergence de l'erreur globale en fonction du raffinement du maillage dans le cas d'un pieu axialement chargé

5.3.5.1 Evolution de l'erreur globale

Avant toute procédure d'adaptation de maillage, et eu égard à la présence d'une forte singularité en pointe, notre stratégie consiste d'abord à effectuer, pour chaque type d'élément (TRI3, QUA4 et TRI6), l'analyse de la convergence de l'erreur globale en fonction du raffinement uniforme et progressif du maillage et où la taille h des éléments diminue et à l'opposé le nombre total d'éléments augmente.

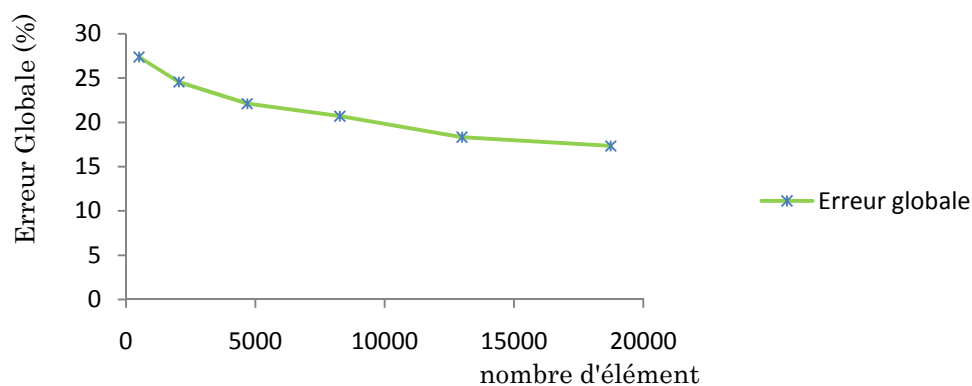


Figure 5.14 : Evolution de l'erreur globale en fonction du nombre total d'élément de type TRI3

L'analyse de la courbe de convergence pour les éléments linéaires de type TRI3, (figure 5.14) permet de constater une difficulté majeure de convergence et ce, à cause de la présence d'une forte singularité (zone à fort gradient) en pointe. En effet, l'erreur passe de 27 % pour le premier maillage composé de 507 éléments à 17.34 % pour un maillage composé de 18740 éléments. Il est constaté uniquement une diminution de l'erreur globale de 10 % pour une augmentation de 18000 éléments. Ce qui montre la forte contribution de cette zone singulière. Il y a lieu de mentionner également que l'erreur de contact reste très faible (inférieure 0.8 % grâce au post traitement) tandis que l'erreur de maillage reste très élevée notamment au voisinage de la singularité.

Pour les éléments quadratiques de type TRI6, l'erreur globale passe de 17% pour un maillage grossier composé de 507 éléments à 10.86 % pour un maillage composé de 12989 éléments. Il y a lieu de mentionner que les temps de calcul CPU sont nettement plus importants pour les éléments quadratiques que pour les éléments linéaire car le nombre de nœuds augmente de n . Chaque nœud possédant trois degrés de liberté. Ainsi le nombre d'équations à résoudre augmentera de $3*n$. ce qui est considérable. toutefois , la richesse de

l'interpolation donne dès le départ une erreur de 17% alors que les éléments linéaires n'ont donné que 27 %. Un raffinement à 12989 éléments a permis d'atteindre 10.86 %. L'erreur de contact ayant augmenté très légèrement (de 0.3% environ), la seule erreur qui demeure sensible à la singularité en pointe est l'erreur de maillage.

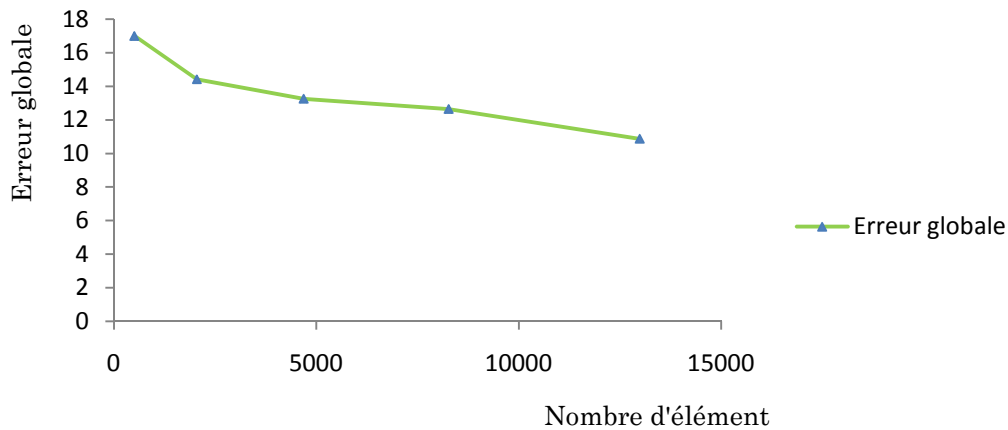


Figure 5.15 : Evolution de l'erreur globale en fonction du nombre total d'élément de type TRI6

Quant aux éléments linéaires de type QUA4, où le temps de calcul CPU est nettement moins important que celui des éléments quadratiques; l'erreur globale passe de 24.46% pour un maillage grossier composé de 206 éléments à 18.94 % pour un maillage composé de 6661 éléments. On remarque l'efficacité de tels éléments où l'erreur globale a diminué de 6% pour une augmentation du nombre total d'éléments de l'ordre 6000. Alors que les éléments triangulaire TRI3 sont moins efficaces où l'erreur a diminué de 10% pour une augmentation de 18000 éléments.

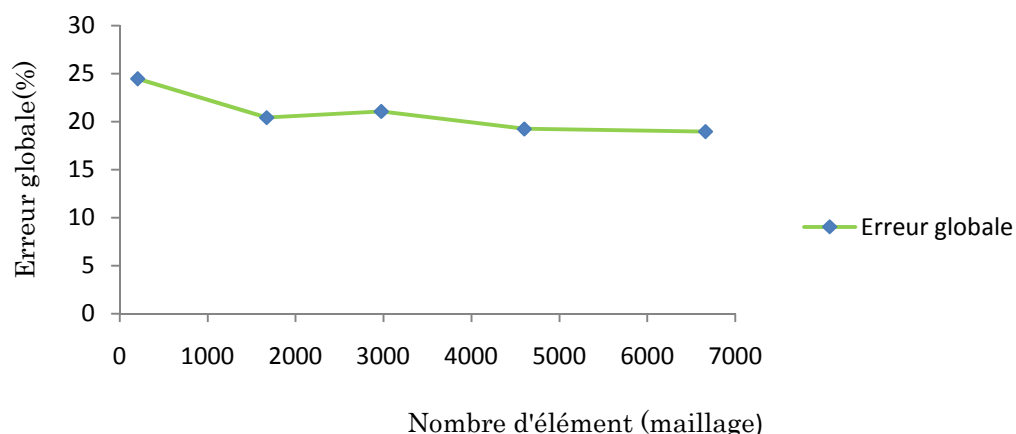


Figure 5.16 : Evolution de l'erreur globale en fonction du nombre total d'élément de type QUA4

5.3.5.2 Evolution de l' erreur de contact

Les figures 5.17, 5.18 et 5.19 ci-dessous montre l'allure de l'évolution de l'erreur de contact en fonction du nombre d'éléments. Pour les trois types d'éléments, cette erreur ne présente aucune allure de convergence. Toutefois, elle demeure assez faible où elle ne dépasse pas 0.3 % pour les éléments linéaires et 1% pour les éléments quadratiques.

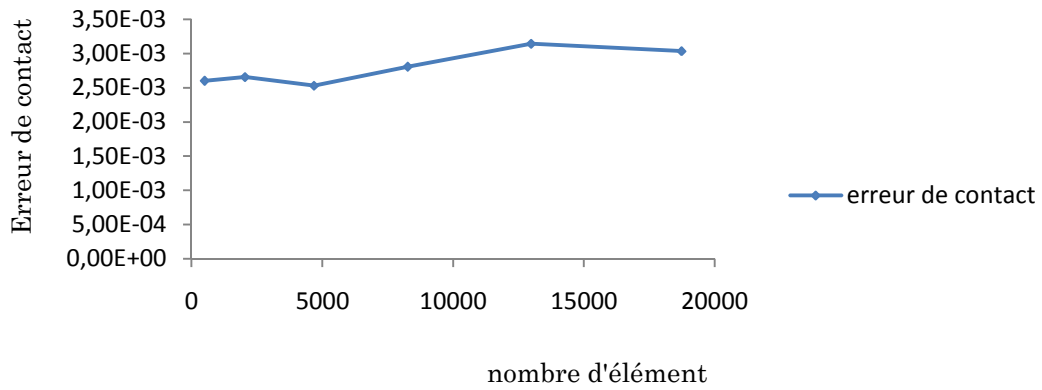


Figure 5.17 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type TRI3

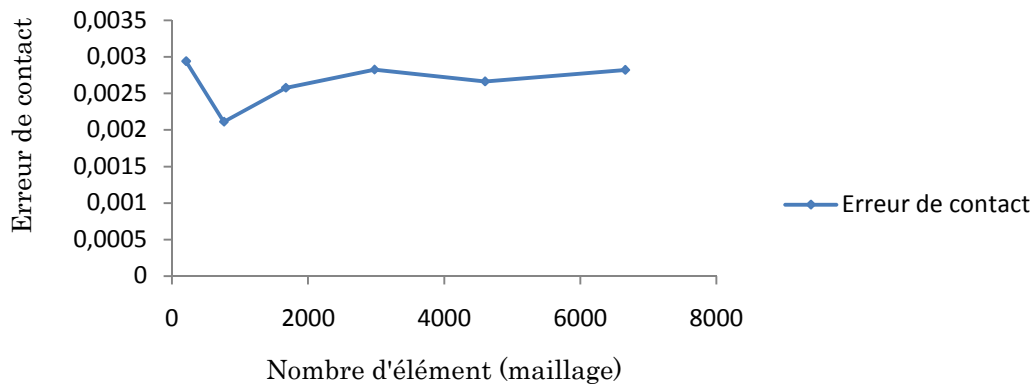


Figure 5.18 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type QUA4

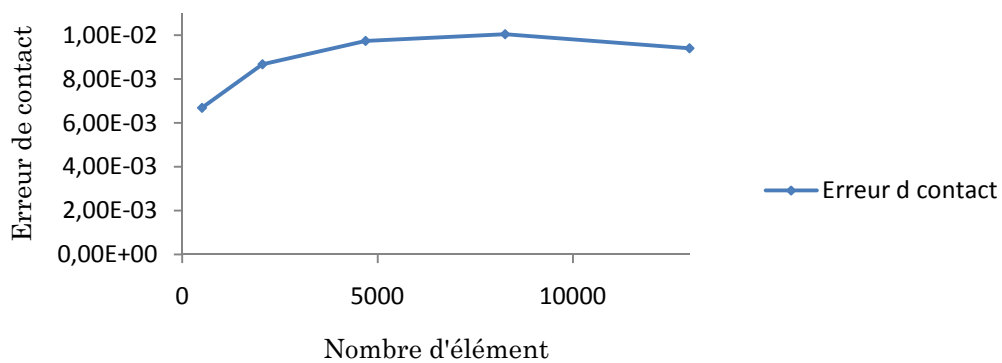


Figure 5.19 : Evolution de l'erreur de contact en fonction du nombre total d'élément de type TRI6

5.3.5.3 Evolution de l'erreur de maillage

Les figures 5.20, 5.21 et 5.22 ci-dessous montrent l'allure de l'évolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre d'éléments. Pour les trois types d'éléments, cette erreur présente les mêmes allures de convergence que celles de l'erreur globale des figures 5.14, 5.15 et 5.16.

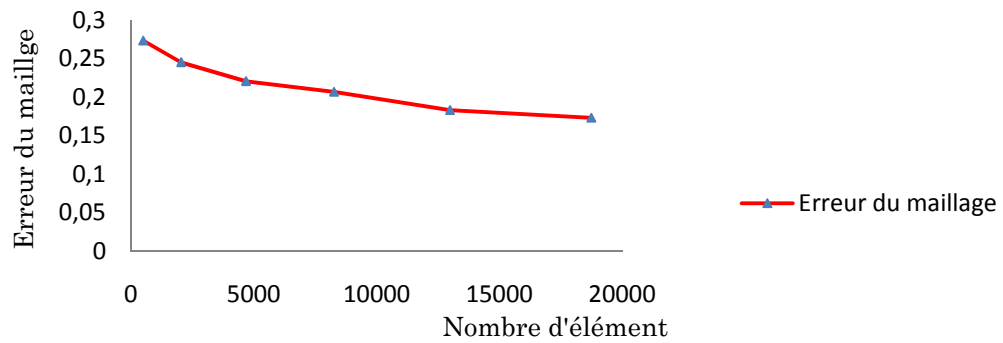


Figure 5.20 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type TRI3

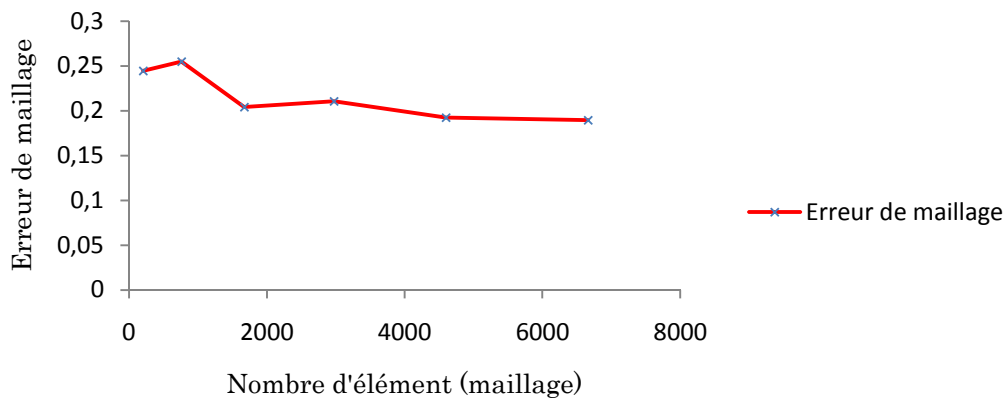


Figure 5.21 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type QUA4

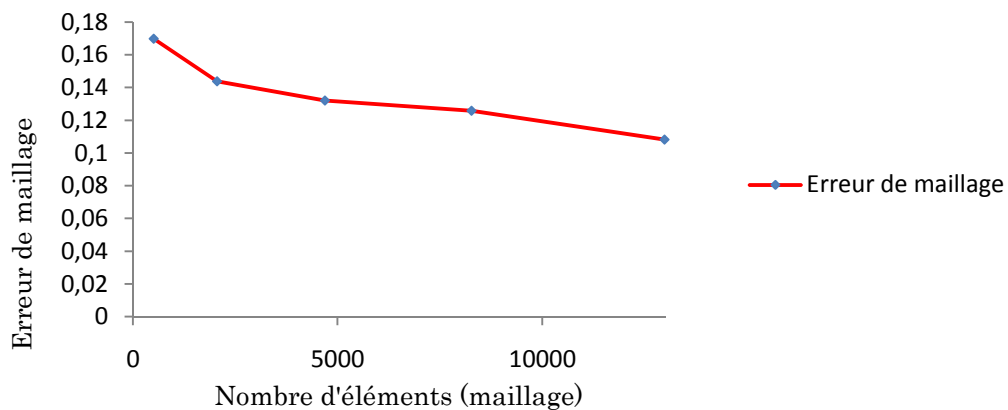


Figure 5.22 : Evolution de l'erreur de maillage en fonction du nombre total d'élément de type TRI6

5.3.5.4 Mesure de l'erreur locale au point singulier (en pointe)

Aussi bien pour les éléments linéaires que quadratiques, et en fonction de la diminution de la taille moyenne des éléments connectés au point singulier, nous constatons une augmentation progressive et importante de l'erreur locale au fur et à mesure du raffinement du maillage. Ce qui montre effectivement que ce point est une véritable singularité où l'adaptation de maillages doit non seulement la détecter automatiquement et doit en tenir compte dans le calcul de la carte des tailles des éléments à prescrire.

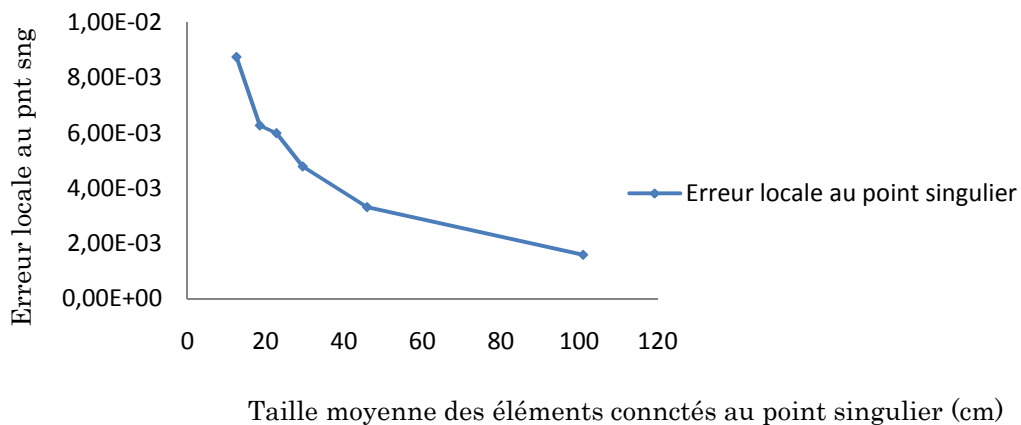


Figure 5.23 : Evolution de l'erreur locale au point singulier en fonction de la taille moyenne des éléments de type TRI3 connectés à ce point.

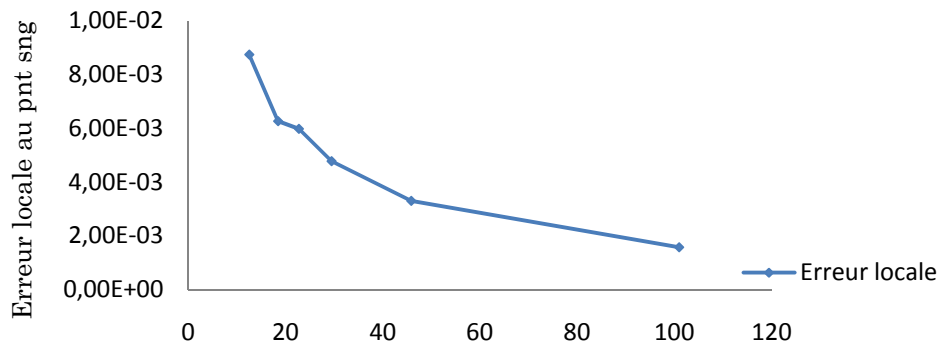


Figure 5.23 : Evolution de l'erreur locale au point singulier en fonction de la taille moyenne des éléments de type TRI6 connectés à ce point.

5.3.6 Calcul de la carte des tailles

Une fois avoir établi la carte des contributions à l'erreur et détecté la zone à fort gradient, la tâche consiste avant toute procédure de remaillage à calculer la carte des tailles des éléments à prescrire. Or, nous avons vu que le calcul des tailles optimales repose sur le taux de convergence de la mesure d'erreur utilisée. Or ce taux est également lié à l'ordre de convergence de la solution éléments finis. D'autre part, lorsque la solution du problème présente des singularités ou des zones à forts gradients de contraintes, il est connu que l'ordre de convergence de la solution éléments finis devient modifié. Dans ces conditions, il a été théoriquement et numériquement démontré que le taux de convergence de l'erreur devient indépendant du degré des éléments finis utilisés (Strang & Fix, 1976).

En effet, Coorevits et al (1994) ont montré que le taux de convergence numérique dépend de l'influence de la singularité (par l'intermédiaire des facteurs d'intensités) et ne peut donc être fixé a priori sur la base des seuls résultats théoriques. De plus, il a constaté que le taux de convergence des contributions locales ϵ_E des éléments connectés à la singularité est proche du degré de cette singularité, alors que, pour les autres éléments, il est proche du degré des éléments.

Ainsi, afin d'obtenir une bonne prédiction des maillages optimisés, les constatations précédentes conduisent à utiliser un taux de convergence p_E par élément tel que :

$$\epsilon_E = C h^{p_E}$$

A cet effet, il a été mis au point une procédure qui permet :

- de détecter automatiquement les nœuds "singuliers",

- d'évaluer numériquement le coefficient p_E pour les éléments connectés aux nœuds considérés comme singuliers.
- de fixer $p_E = p$ pour les autres éléments avec p le degré du type d'éléments utilisé.

Nous rappelons ici l'équation non linéaire en A (multiplicateur de lagrange) à résoudre :

$$\sum_E \left[\left[\frac{d}{2 A q_E} \right]^{2q_E/(2q_E+d)} \varepsilon_E^{2d/(2q_E+d)} \right] - \varepsilon_0^2 = 0$$

Cette équation est résolue par la méthode de Newton (le multiplicateur de Lagrange A est initialisé en prenant le multiplicateur de Lagrange de la solution régulière c'est-à-dire l'expression avec laquelle $q_E = p$). Une fois A calculé, on en déduit le coefficient de modification des tailles r_E par l'expression suivante.

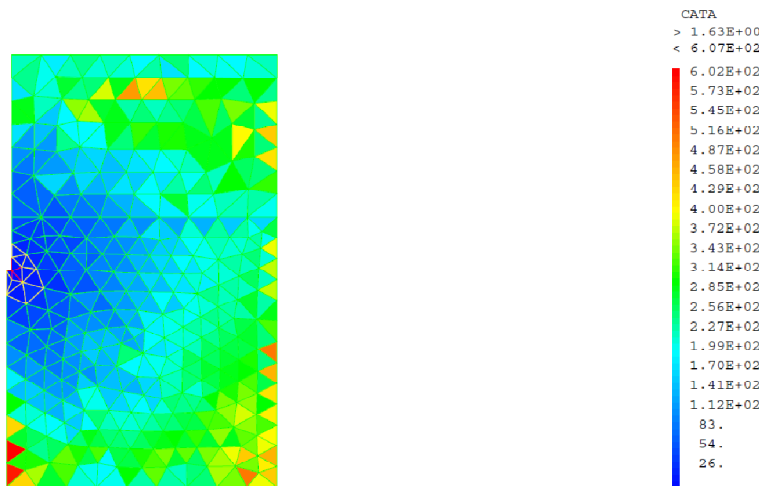
$$r_E = \left[\frac{d}{2 A q_E \varepsilon_E^2} \right]^{1/(2q_E+d)}$$

d étant la dimension du problème (d= 2 pour le cas bi dimensionnel)

Ainsi, une exemple de cartes de tailles à prescrire est illustré sur les figures suivantes 5.24 et 5.25.



Figure 5.24 Cartes des tailles à prescrire sur le pieu



CARTES DES TAILLES SUR LE MASSIF

Figure 5.25 : Cartes des tailles à prescrire sur le massif du sol

5.4 Autres résultats intéressants

5.4.1 Influence du maillage sur le tassement

Sur les figure 5.26, 5.27 et 5.28, on voit clairement l'influence du maillage sur la valeur du tassement. En effet, plus on raffine plus que le tassement augmente. Toutefois, l'allure de cette augmentation a tendance à se stabiliser aux environs de 5.50 cm pour les éléments de type TRI3, à 6.8 cm pour les éléments de type TRI6 et à 5.14 cm pour les éléments de type QUA4. Par ailleurs, nous remarquons que les écarts entre les tassements en pointe et au sommets sont globalement constants. Ce qui représente la contribution au tassement due à la déformabilité du béton qui est de l'ordre de 0.4 cm. au sommet plus grand que celui en pointe et ce qui est logique, car la charge est appliquée sur le sommet du pieu.

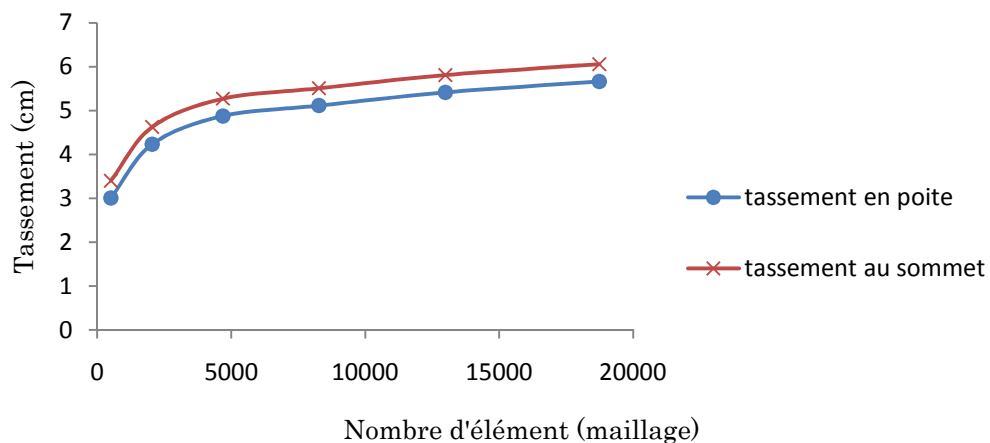


Figure 5.26 : Influence du maillage sur tassement pour les éléments TRI3

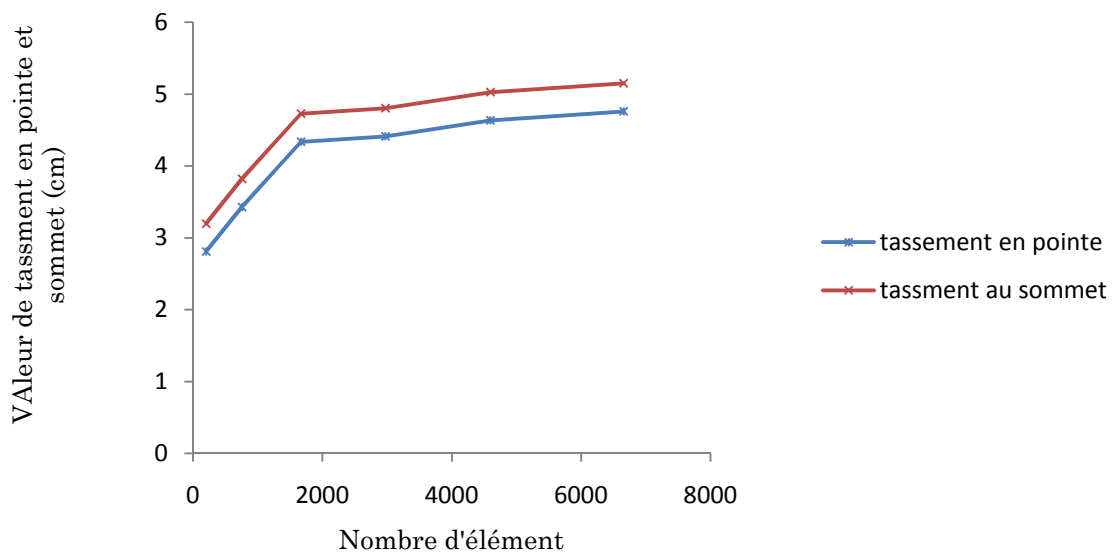


Figure 5.27 : Influence du maillage sur tassement pour les éléments QUA4

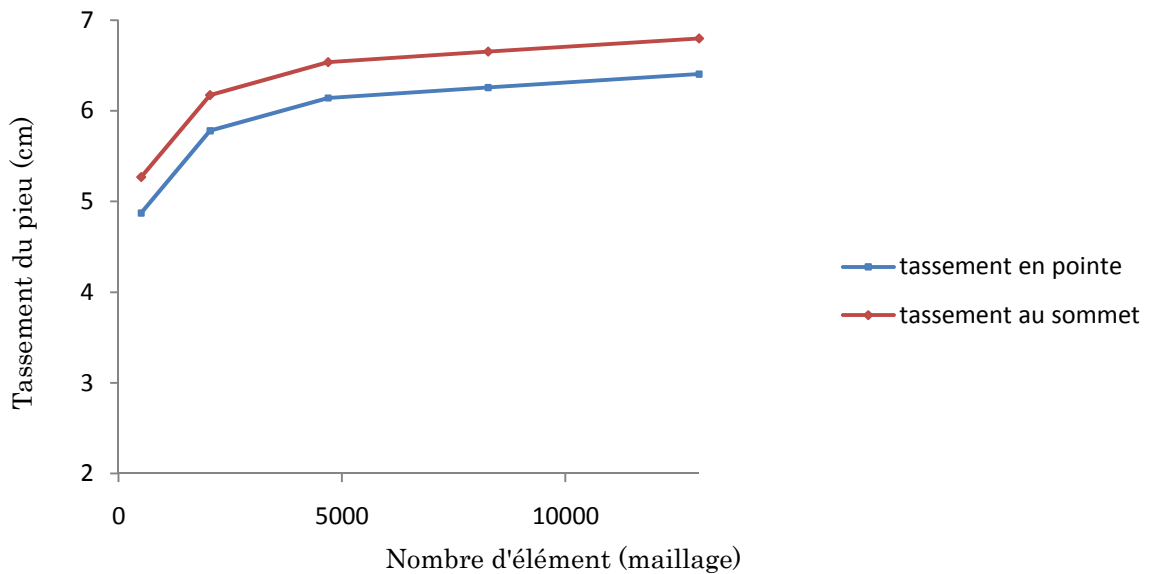


Figure 5.28 : Influence du maillage sur tassement pour les éléments TRI6

5.4.2 Déplacements relatifs tangents le long de la ligne de contact

Dans les courbes des graphiques 5.29, 5.30 et 5.31 ci-dessous, on constate que les raffinements de maillages utilisant les différents types d'éléments influent clairement sur les déplacements relatifs tangents au niveau de la zone de contact. En effet, plus on raffine plus le déplacement relatif augmente.

Par ailleurs, ce déplacement relatif est d'autant plus important au niveau du mauvais sol que du bon sol. Ce qui semble logique car les pressions de confinement du pieu ainsi que les forces de frottement sont nettement plus importantes en profondeur (au niveau du bon sol). Toutefois, ces courbes ont tendances à se rapprocher pour les quatre derniers maillages.

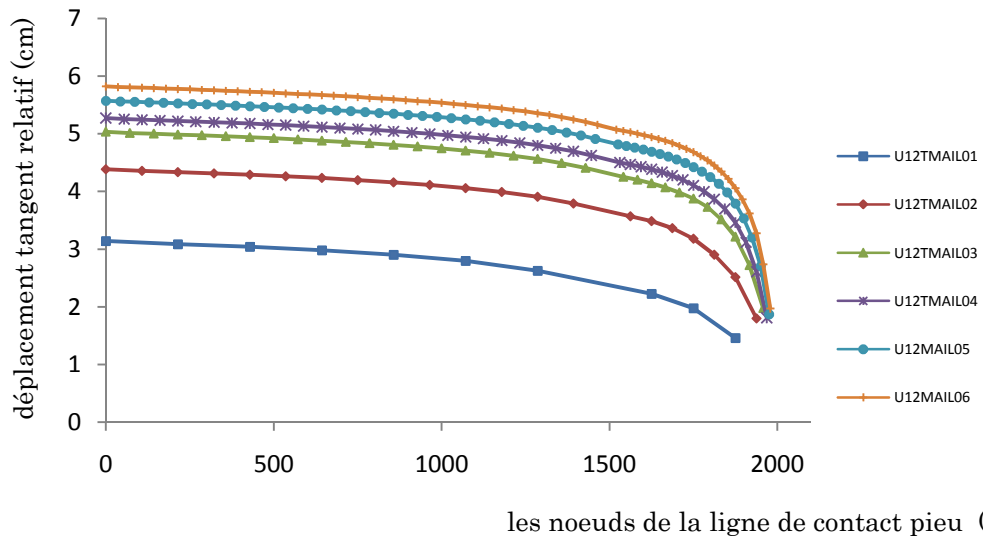


Figure5.29 : Déplacement relatif tangent sur la ligne de contact pieu élément TRI3

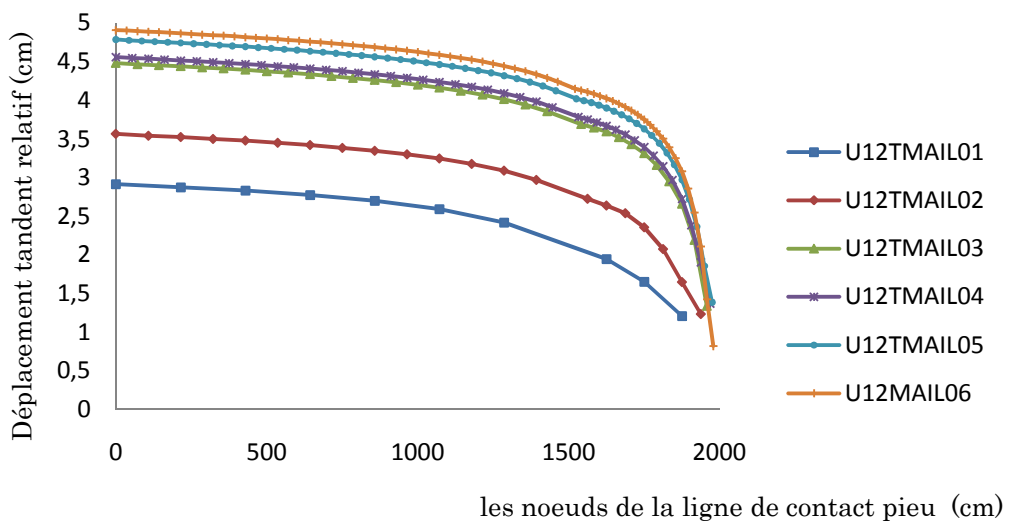


Figure5.30 : Déplacement relatif tangent sur la ligne de contact pieu élément QUA4

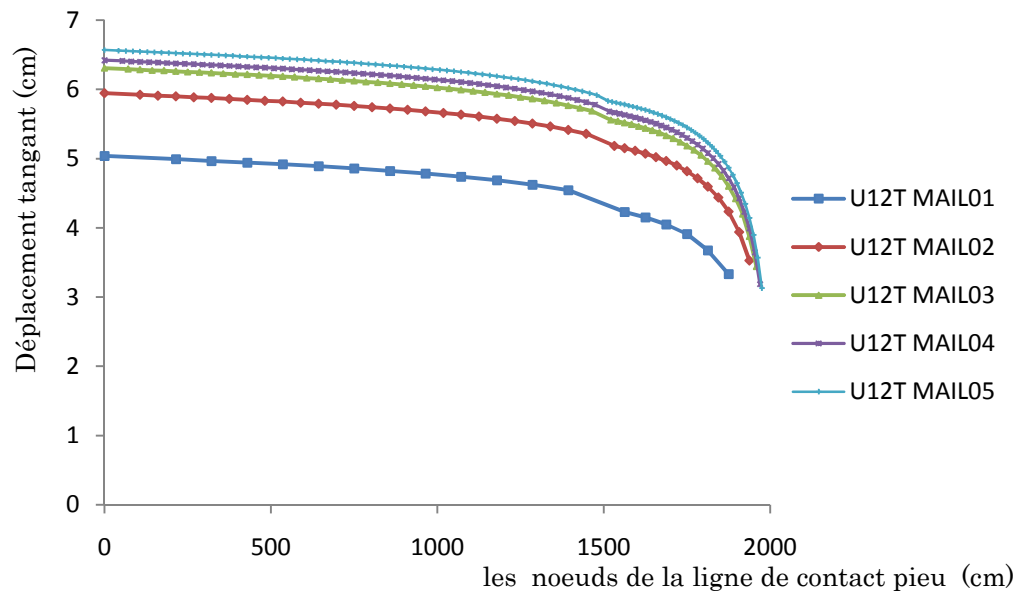


Figure 5.31 : Déplacement relatif tangent sur la ligne de contact pieu élément TRI6

5.5 Exemple d'adaptation de maillages utilisant des éléments de type TRI3

L'objectif d'une procédure d'adaptation de maillage est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision tout en minimisant les coûts de calcul. Nous utilisons la h-génération qui est la procédure la plus utilisée actuellement : on modifie la taille et la topologie des éléments, mais on conserve le même type de fonctions de forme pour les différents maillages. Un maillage T^* est optimal (Ladeveze 1986) pour une mesure d'erreur ε si :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0, \text{ erreur fixée par l'utilisateur} \\ N^* \text{ minimum (nombre d'éléments du maillage } T^*) \end{cases}$$

En utilisant CAST3M, la résolution du problème, on utilise la procédure suivante [COO94] :

- Calcul sur un premier maillage T relativement grossier
- Calcul sur T de l'erreur relative globale ε et des contributions locales εE
- Détermination des caractéristiques du maillage optimal T^*
- Second calcul éléments finis sur le maillage T^* .

Soient l'exemple du pieu axialement chargé en contact avec frottement de Coulomb de la figure 5.1 dont les données sont présentées en paragraphe d'introduction 5.1 du présent chapitre. Un calcul d'erreur effectué sur ce maillage grossier (figure 5.2) composé de 507 éléments linéaires de type TRI3, donnera une erreur globale de 27% (figure 5.12 et 5.13). Une erreur globale de (06%) a été prescrite. Le maillage obtenu est composé de 932 éléments et offre une erreur relative globale de 11.69% (figure 5.32 et 5.33).

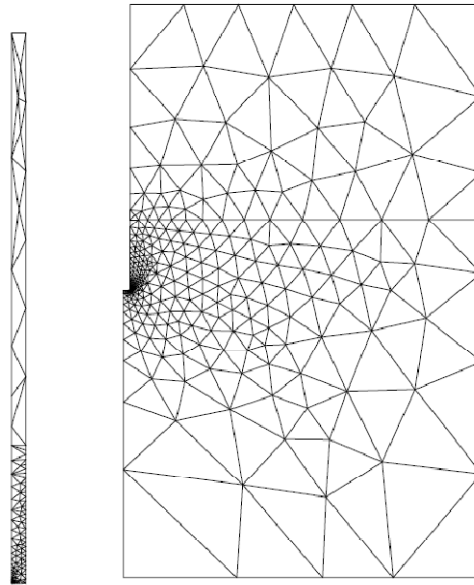


Figure 5.32 : Maillage adapté à la carte de contribution à l'erreur

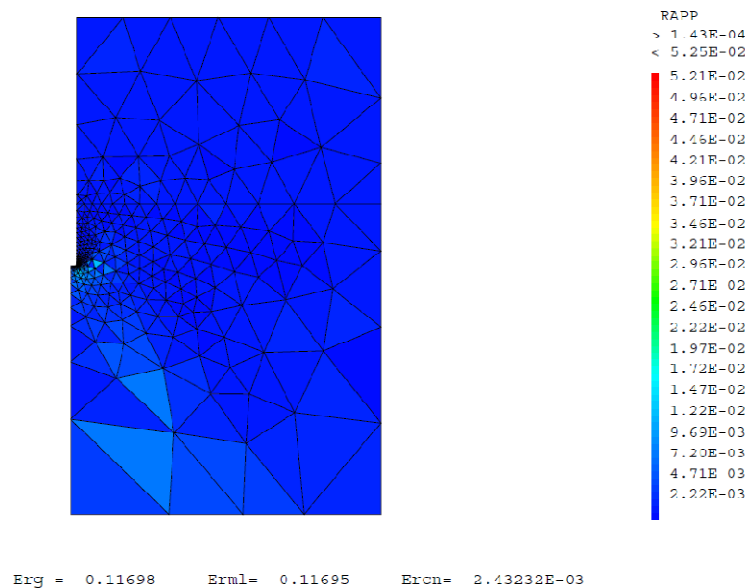


Figure 5.33 : Nouvelle carte des contributions à l'erreur pour le maillage adapté pour une erreur globale de 11.69 % au niveau du sol

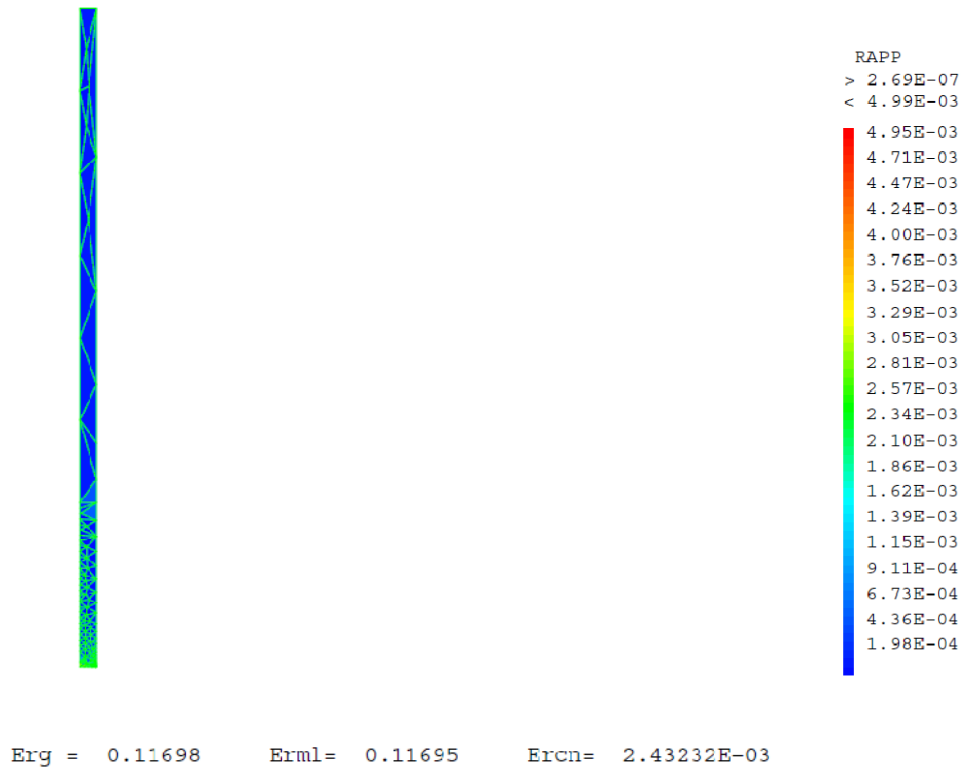


Figure 5.34 : Nouvelle carte des contributions à l'erreur pour le maillage adapté pour une erreur globale de 11.69 % au niveau du pieu

5.6 Discussion des résultats et conclusion

A l'issue de ces calculs, il a été relevé les points essentiels suivants

1- la très forte influence de la zone singulière sur la convergence de l'erreur et d'où une grande difficulté d'obtenir une adaptation de maillage à la carte d'erreur et ce, pour des erreurs prescrites assez faibles.

2- Après l'analyse de la convergence de l'erreur globale pour les différents types d'éléments utilisés montre la faible influence de l'erreur de contact et à l'opposé la très forte influence de l'erreur de maillage notamment au voisinage de la singularité. Toutefois, cette faible influence de l'erreur de contact, ne pourra être obtenue sans un post traitement (ou une correction) des différentes solutions. Ce qui est couteux du point de vue des calculs.

3. Pour calculer la carte des tailles à prescrire, il est nécessaire d'analyser les courbes de convergence et de tirer les taux de convergence par éléments à affecter aux zones à fortes concentrations e contraintes et nous devons également affecter les taux de convergence représentés par les degrés des éléments aux zones situés en dehors des concentrations de contraintes (zones régulières).

4- Malgré les valeurs relativement élevées des erreurs, l'étude des courbes des tassements et des déplacements relatifs tangents montre que les solutions exactes (ou de référence) ne sont pas trop éloignées des solutions obtenues. Ce qui laisse croire à ce que la zone singulière surestime l'erreur globale.

5- L'influence des types d'éléments sur les calculs montre une nette efficacité des éléments quadratiques par rapport aux éléments linéaires. Toutefois, les temps de calculs CPU sont nettement plus importants en raison de l'augmentation du nombre de nœuds et donc d'équations à résoudre. Par ailleurs, en terme de convergence de l'erreur globale, les éléments quadrangulaires se sont avérés plus efficaces que les éléments triangulaires.

Conclusion générale

A l'issue de ce travail, nous pouvons conclure que l'indicateur d'erreur basé sur la méthode de lissage des champs de contraintes SPR (Super Convergent Patch Recovery method) utilisée a permis de traiter le problème de contact bidimensionnel avec frottements de Coulomb au niveau des pieux. Ce qui semble, jusqu'à présent, non effectué dans la littérature. Ainsi, il s'agit du cas où non seulement les calculs peuvent être menés avec prise en compte du contact avec frottement de Coulomb mais où ils peuvent être suivis d'un contrôle a posteriori grâce à un indicateur d'erreur associé à une procédure d'adaptation de maillages.

Cet indicateur a été construit sur la base d'une association entre deux méthodes d'estimation connues. La première concerne l'erreur obtenue par les techniques de projections dont les propriétés de super convergence sont utilisées pour le lissage des champs de contraintes dans les solides. La seconde concerne l'erreur portée par les relations constitutives établies au niveau des zones de contact.

Contrairement aux autres estimateurs qui, soit présentent de grandes difficultés de construction, soit des problèmes de choix arbitraires de coefficients, l'indicateur utilisé, s'est avéré non seulement facile à mettre en œuvre et à implanter dans un code de calcul par éléments finis mais surtout, capable de dissocier entre l'erreur de discrétisation du maillage seul et l'erreur de contact. En effet, malgré sa haute performance et son indice d'efficacité élevé, la difficulté de construction des champs admissibles « a défavorisé » l'estimateur d'erreur en relation de comportement. En ce qui concerne l'estimateur basé sur les résidus d'équilibre, son principal inconvénient réside dans le choix arbitraire des coefficients à affecter aux différents termes de l'erreur.

Par ailleurs, en dépit de la forte non linéarité du contact avec frottements, notre indicateur a souvent été appliqué avec succès, au cas de la loi de Coulomb dont le problème de l'unicité de la solution demeure encore non résolue. Ce problème d'unicité pouvant facilement être mis en évidence lors de la formulation variationnelle, il s'est avéré que l'une des stratégies de résolution qu'on pouvait

adopter consistait à utiliser la méthode du point fixe associée à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Celle-ci s'est révélée être la plus adéquate avec la méthode des éléments finis.

En ce qui concerne, le contrôle de l'erreur ou l'adaptation des maillages, il a été retenu que parmi les deux principales méthodes $-h$ et $-p$, la méthode $-h$ avec remaillage global semble être la moins difficile et donc la plus utilisée. Cela étant dit, pour les problèmes de contact, l'adaptation doit tenir compte des zones à forts gradients. Ce qui nécessite une technique particulière pour la résolution du problème de minimisation sous contraintes. A ce titre, il est à signaler que beaucoup de difficultés ont été rencontrées lors du traitement des problèmes comportant des zones à forts gradients notamment au niveau des zones singulières situées en pointe du pieu où la singularité y est spécifiquement forte.

Par ailleurs, à l'issue de ces calculs effectués, il a été relevé les points essentiels suivants

- 1- la très forte influence de la zone singulière sur la convergence de l'erreur et d'où une grande difficulté d'obtenir une adaptation de maillage à la carte d'erreur et ce, pour des erreurs prescrites assez faibles.
- 2- Après l'analyse de la convergence de l'erreur globale pour les différents types d'éléments utilisés montre la faible influence de l'erreur de contact et à l'opposé la très forte influence de l'erreur de maillage notamment au voisinage de la singularité. Toutefois, cette faible influence de l'erreur de contact, ne pourra être obtenue sans un post traitement (ou une correction) des différentes solutions. Ce qui est couteux du point de vue des calculs.
3. Pour calculer la carte des tailles à prescrire, il est nécessaire d'analyser les courbes de convergence et de tirer les taux de convergence par éléments à affecter aux zones à fortes concentrations e contraintes et nous devons également affecter les taux de convergence représentés par les degrés des éléments aux zones situés en dehors des concentrations de contraintes (zones régulières).
- 4- Malgré les valeurs relativement élevées des erreurs, l'étude des courbes des tassements et des déplacements relatifs tangents montre que les solutions

exactes (ou de référence) ne sont pas trop éloignées des solutions obtenues. Ce qui laisse croire à ce que la zone singulière surestime l'erreur globale.

5- L'influence des types d'éléments sur les calculs montre une nette efficacité des éléments quadratiques par rapport aux éléments linéaires. Toutefois, les temps de calculs CPU sont nettement plus importants en raison de l'augmentation du nombre de nœuds et donc d'équations à résoudre. Par ailleurs, en terme de convergence de l'erreur globale, les éléments quadrangulaires se sont avérés plus efficaces que les éléments triangulaires.

En perspective, afin d'améliorer d'avantage la procédure d'estimation et de contrôle de l'erreur dans son application au niveau des calculs des pieux axialement chargés, et de remédier à ces inconvénients, plusieurs solutions sont envisageables. La première consiste, en une possibilité d'adaptation basée sur l'enrichissement local au niveau de la zone singulière (méthode de remaillage $h-p$). Toutefois, cette méthode s'avère complexe car les éléments finis utilisés dans ces zones sont classés non conformes (présence de nœuds dits pendants dans le maillage). Afin d'atténuer l'effet de la singularité, une autre voie consiste à traiter géométriquement le pieu en adoptant soit des chanfreins soit des arrondis dont les courbures sont du même ordre de grandeur que de la taille des gros grains de béton ou plus. D'autres études telles que l'influence de l'interaction entre les différentes couches de sol sur le pieu ainsi que le cas des pieux chargés horizontalement en tête (ou bien avec un moment) peuvent être envisagées à l'avenir.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AINSWORTH, ZHU, CRAIG & ZIENKIEWICZ, 1989, Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 28, 2161-2174.

AUBRY & TIE, (1991), A posteriori error analysis and h-adaptive refinement for the F.E.M. in non linear structural computations, *Proc. of the European conference on new advances in computational structural mechanics*, Ladevèze and Zienkiewicz Editors, Giens, France, 1-8.

BABUSKA I. & RHEINBOLDT, (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.12, pp. 1579-1615.

BABUSKA I. et SZABO B. (1982). On the rates of convergence of the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, pp. 323-341.

BABUSKA, (1986), Feedback, adaptivity and a-posteriori estimates in finite elements: aims, theory and experience, in *Accuracy estimates and adaptivity for finite element*, Babuska, Zienkiewicz, Gago and Oliveira Editors, J. Wiley, ch. 1, 3-23.

BABUSKA I., PLANK L., RODRIGUEZ R. (1992). Basic problems of a posteriori error estimation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 101, pp. 97-112.

BECHEUR A, TAHAKOURT A, COOREVITS P, (2008). An a posterior error indicator for Coulomb's frictional contact. *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, Issue 8, pages 562-575.

BECKERS & ZHONG, 1991, Influence of element distorsion on the reliability of some a-posteriori error estimators, *Proc. of the European conference on new advances in computational structural mechanics*, Ladevèze-Zienkiewicz Editors, Giens, France, 9-16.

BECKERS P. & DUFEU E. (1998). 3D error estimation and mesh adaptation using improved R.E.P. method. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, edited by P. Ladevèze & J.T. Oden.

BAUDRON & TROMPETTE, 1986, Un critère de jugement simple pour un maillage éléments finis, *J. de Mécanique théorique et appliquée*, vol. 5, n°5, 731-746.

CHAMORET D, 2002, Modélisation du contact : Nouvelles approches numériques. Thèse de doctorat. Ecole centrale de Lyon France

CIARLET, (1978) , *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland.

COOREVITS P. (1993). Maillage adaptatif anisotrope : application aux problèmes dynamiques. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 162 pages.

COOREVITS P., LADEVEZE P. & PELLE J.P. (1993). Sur l'automatisation des calculs éléments finis en élasticité 2D ou axisymétrique. Internal report n° 142, LMT, E.N.S. de Cachan, France.

COOREVITS, LADEVEZE & PELLE, 1994, Mesh optimization for problems with steep gradient areas, *Engineering computations*, vol. 11, p 129-144.

COOREVITS, LADEVEZE & PELLE, 1995, An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 121, 91-120.

COOREVITS P., DUMEAU J.P. & PELLE J.P. (1996). Analyses éléments finis adaptatives pour les structures tridimensionnelles en élasticité. *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 5 - n° 3/1996, pp. 341-373.

COOREVITS P, HILD P, ET J.P. PELLE; (1999) Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral. *Revue Européenne des éléments finis*, vol 8: pp 7–29,.

COOREVITS P., HILD P., ET. PELLE J.P; (2000) A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non matching meshes. *Comp. Meth. in Appl. Mech. And Engrg.*, 186:65–83.

COOREVITS P., HILD P., HJIAJ M. (2001) A posteriori error control for finite element approximations of Coulomb frictional contact *SIAM J. Sci. Comput.* , Vol. 23, n°3, pp. 976-999

COOREVITS P and BELLENGER E (2004) , Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method • *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 40, Issues 9-10, , Pages 1195-1215

DESROCHES, X. (1994), Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D, Rapport interne EDF R4.10.01

DUMEAU, 1995, Contrôle et adaptation des maillages 3D : application à l'automatisation des calculs, Thèse de l'Ecole Normale Supérieur de Cachan.

DUFEU E. (1997). Calcul d'erreur et adaptation de maillages en 3 dimensions. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 166 pages.

DUVAUT G., LIONS J.-L., (1972) *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod.

Eck C, Jarusek. J. 1998 Existence results for the static contact problem with Coulomb friction. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 8 (3), 445-468,

EKELAND, I., TEMAM, R., 1976. *Convex Anal Variational Problems*; Amsterdam, North-Holland.

Fichera, G. (1964) Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, S. VIII, Vol. VII, Sez. I, 5, 91-140.

FREY F et JIROUSEK J, 1998, Analyse des structures et milieux continus; méthode des éléments finis, Dans la collection des *Traité de Génie civil de l'E.P.F.L* vol 06

GAGO J.P., KELLY D.W., ZIENKIEWICZ O.C. et BABUSKA I. (1983). A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : partII - Adaptive mesh refinement. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1621-1656.

GASTINE, LADEVEZE, MARIN & PELLE, (1992), Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engng*, vol 94, n°3, 303-314.

HLAVACEK I., HASLINGER J., NECAS J. and LOVISEK J, (1988) *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1988.

HINTON E. & CAMPBELL J.S. (1974). Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 8, pp. 461-480.

JARUSEK. J 1983. Contact problems with bounded friction. coercive case. *Czech. Math. J.*, 33:237–261,.

KELLY D.W., GAGO J.P., ZIENKIEWICZ O.C. & BABUSKA I. (1983). A poteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part I - error analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 1593-1619.

KIKUCHI N et ODEN, J.T 1998 *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

LADEVEZE & LEGUILLON, 1981, *Error computation in finite element method and application*, *Proceeding du GAMNI*, Dunod, Paris.

LADEVEZE P. & LEGUILLON D. (1983). *Error estimate procedure in the finite element method and applications*. *SIAM J. Num. Anal.* Vol. 20 N° 3, pp. 483-509.

LADEVEZE, COFFIGNAL & PELLE, 1986, Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis, in *Accuracy estimates and adaptative refinements in Finite Element computations*, Chapter 11, 181-203, Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz Editors, J. Wiley.

LADEVEZE, PELLE & ROUGEOT, 1991, *Error estimation and mesh optimization for classical Finite Elements*, *Engng. Computation*, vol. 8, 69-80.

LAURSEN, T A, 2002. *Computational contact and impact mechanics*. Springer Verlag

LEE C. Y. and ODEN J. T. (1993) *Theory and approximation of quasistatic frictional contact problems* *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 106, Issue 3, , Pages 407-429

F. LOUF, J. -P. COMBE and J. -P. PELLE, (2003) *Constitutive error estimator for the control of contact problems involving friction* *Computers and Structures*, Volume 81, Issues 18-19, , Pages 1759-1772

NECAS J, Jarusekj et HASLINGER J, 1980 *On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction*. *Boll. Unione Mat. Ital.*, 17-B(5):796–811, 1980.

ODEN J.T., DEMKOWICZ L., STROUBOULIS T. & DEVLOO P. (1986). Adaptive methods for problems in solid and fluid mechanics. Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computation. Edit. Babuska & al., Wiley, New York., pp. 249-280.

ODEN J.T., DEMKOWICZ L., RACHOWICZ W. & WESTERMANN T.A. (1989). Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 2 : A posteriori error estimation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 77, pp. 113-180.

ODEN J.T., DEMKOWICZ L. (1991) h-p adaptive finite element methods in computational fluid dynamics *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 89, Issues 1-3, , Pages 11-40

PACZELT and T. SZABO, (1995) «Application of the augmented Lagrangian technique for solution of contact optimization problems », In *Contact Mechanics Computational Techniques*, (Edited by C. Alessandri and M.H. Aliabali), pp. 249-256, *Computational Mechanics*, Southampton.

PELLE JP & ROUGEOT P, 1989, Maillage adaptatif pour les éléments classiques, publié dans *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, Tome III, Fouet-Ladevèze-Ohayon, Editeurs, Pluralis.

PRAGER & SYNGE, 1947, Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces, *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, 261-269.

RIEGER, A and WRIGGERS, P. (2001) Adaptive methods for frictionless contact problems *Computers and Structures*, Volume 79, Issues 22-25, , Pages 2197-2208

REISSNER E., 1950: On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, vol 29, pp 90-95,

RIVARA, 1989, Selective refinement/derefinement algorithms for sequences of nested triangulations, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 28, 2889-2906.

SIGNORINI A, 1933 Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

SIMO J C, LAURSEN, TA. 1992. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and structures*, 42 N°1 ; pp 97-116

SIMO J C., WRIGGERS P and. TAYLOR R L 1985 A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems • *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 50, Issue 2, pp 163-180

STRANG & FIX, (1976), *An analysis of the finite element method*, Prentice hall.

STROUBOULIS T. & HAQUE K.A. (1992a). Recent experiences with error estimation and adaptivity, part I : review of error estimators for scalar elliptic problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 97, pp. 399-436.

STROUBOULIS & HAQUE, (1992b), Recent experiences with error estimation and adaptivity, Part II: error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engng*, vol. 100, 359-430.

WIBERG N.E. & ABDULWAHAB F. (1993). Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 36, pp. 2703-2724.

WRIGGERS, P., SCHERF, O., CARSTENSEN, C., 1994. Adaptive techniques for the contact of elastic bodies. In: *Recent Developments in Finite Element Analysis*. Hughes, T.J.R., Oñate, E., Zienkiewicz, O.C. (Eds.), CIMNE, Barcelona pp. 78–86.

WRIGGERS P. and SCHERF O. (1998) Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems *Mathematical and Computer Modelling*, Vol 28, Issues 4-8, Pp 437-447

WRIGGERS P. CARSTENSEN, et C. SCHERF, O.; (1999) Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20:1605–1626, 1999. (1991).

ZHONG H.G. (1991) Estimateurs d'erreur a posteriori et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 220 pages.

ZHONG, ZH & NILSSON, L 1994.. Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. *Computers and structures*, 1994, vol. 52, N°02, pp. 187-197.

ZHONG, ZH & NILSSON, L 1994. Lagrange multiplier approach for evaluating of friction in explicit finite element analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol.10 pp. 249-255.

ZIENKIEWICZ O.C. & ZHU J.Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 24, pp. 337-357.

ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1988, *The finite element method*, vol. 1: Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill, Londres.

ZIENKIEWICZ O.C. & ZHU J.Z and N. G. GONG, « Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 28, pp. 879-891, 1989.

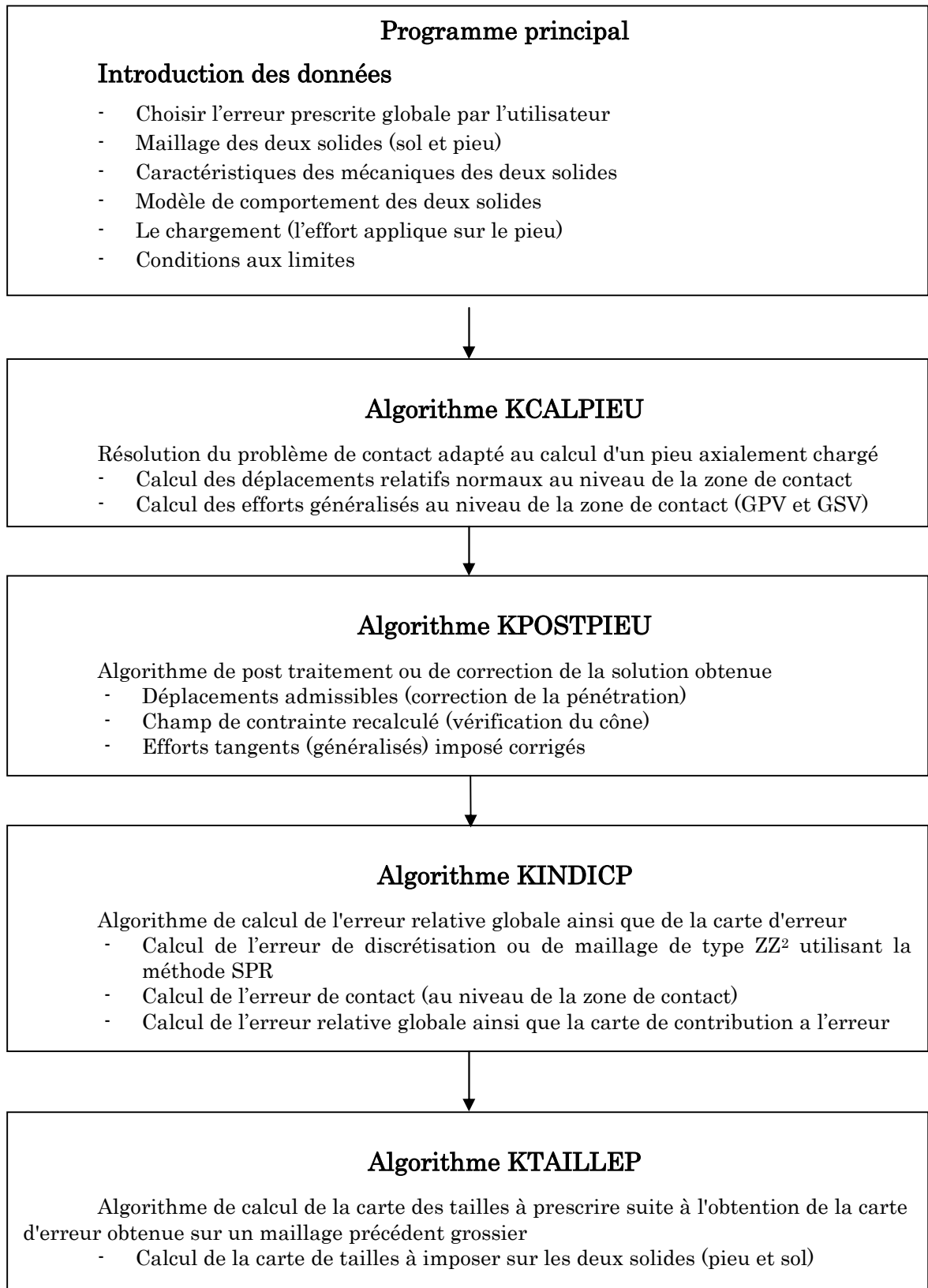
ZIENKIEWICZ O.C. & ZHU J.Z. (1991). Adaptivity and mesh generation. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 32, pp. 783-810.

ZIENKIEWICZ O.C. & ZHU J.Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : the recovery technique. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 33, pp. 1331-1364.

ZIENKIEWICZ O.C. & ZHU J.Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 33, pp. 1365-1382.

ZIENKIEWICZ O.C., BOROOMAND B. & ZHU J.Z. (1998). Recovery procedures in error estimation and adaptivity : Adaptivity in linear problems. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, edited by P. Ladevèze & J.T. Oden.

Procédure de calcul de l'erreur globale (programmation)



Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à un indicateur d'erreur de contact 2D avec frottements de Coulomb appliqué aux cas des pieux axialement chargés. Cet indicateur a la particularité d'être facile à construire et à implanter dans un code éléments finis. Cela étant dit, en utilisant cet indicateur, nous nous intéresserons à l'étude des pieux pour le cas bidimensionnel en symétrie axiale auquel nous nous limiterons dans le présent travail. En vue de tenir compte des erreurs de discrétisations et de contact de manière suffisante, cet indicateur d'erreur a été construit sur la base de la combinaison de deux méthodes. La première utilise la technique de recouvrement (ou de lissage) par groupes (ou Patch) d'éléments. Il s'agit de la technique connue sous le nom de la méthode SPR (Super convergent Patch Recovery method) due à Zienkiewicz (1992). La seconde tient compte de l'erreur obtenue au niveau de la relation constitutive établie au niveau de la zone de contact. En utilisant des procédures d'adaptation de maillages, un cas test sera présenté et discuté.

Mots clés : pieux, problème de contact, frottements de Coulomb, éléments finis, contrôle et estimation d'erreur

Abstract

In this work, we are interested in a contact 2D error indicator with Coulomb frictions applied to the cases of the piles axially charged. This indicator has the characteristic to be easy to build and establish in a code finite elements. By using this indicator, we will be interested in the study of the piles for the two-dimensional case to which we will limit ourselves in this work. In order to take account of the errors of discretization and contact adequately, this indicator of error was built on the basis of combination of two methods. The first, uses the technique of covering (or smoothing) by groups (or Patch) of elements. It is about the technique known as the SPR method (Super convergent Patch Recovery method) due to Zienkiewicz (1992). The second, takes account of the error obtained with the level of the relation constitutive established on the level of the zone of contact. By using procedures of adaptation of grids, a case test will be presented and discussed.

Keywords: piles, contact problem, Coulomb friction, finite elements, control and error estimation

ملخص

في هذا العمل، نهتم بمؤشر خطأ الاتصال « ثنائية الأبعاد » مع احتكاك كولومب المطبق في حالات الخوازيق المحملة محورياً. هذا المؤشر له تميز من كونه سهل للبناء والتنفيذ في قوانين العناصر المنتهية. باستخدام هذا المؤشر، سنركز على دراسة الخوازيق لحالة ثنائية الأبعاد مع تماثل محوري في هذا العمل. من أجل أخذ أخطاء الاتصال والتفريد بما فيه الكفاية، شيد مؤشر الخطأ على أساس الجمع بين طريقتين. الأولى تستخدم تقنية التغطية (التنعيم) في مجموعة العناصر. هذه التقنية معروفة تحت اسم SPR لـ ZIENKIEWIC 1992. الثانية تأخذ بعين الاعتبار الخطأ المحصل عليه في مستوى العلاقة التأسيسية المنشأة في منطقة الاتصال باستخدام إجراءات تكيف الشبكة، ستعرض حالة اختبار وتتم مناقشتها.

كلمات مفتاحية : الخوازيق، مشكل الاتصال، احتكاكات كولومب، العناصر المنتهية، مراقبة وتقدير الخطأ.